



**HAL**  
open science

## Questionnaire pour identifier les conceptions des étudiants sur la preuve en mathématiques

Cécile Ouvrier-Bufferet

► **To cite this version:**

Cécile Ouvrier-Bufferet. Questionnaire pour identifier les conceptions des étudiants sur la preuve en mathématiques. 2023. hal-03987587v2

**HAL Id: hal-03987587**

**<https://hal.science/hal-03987587v2>**

Submitted on 5 Jul 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Questionnaire – La preuve en mathématiques

**Ce document est en lien avec un projet en cours porté par C. Ouvrier-Bufferet.  
Les questions ont été conçues sur les bases des cadres et résultats existants en didactique  
des mathématiques en France et à l'international.**

Si vous utilisez ce questionnaire, merci d'en transmettre les résultats à [cecile.ouvrier-bufferet@u-pec.fr](mailto:cecile.ouvrier-bufferet@u-pec.fr)

Ce questionnaire est anonyme et diffusé à grande échelle en France et à l'étranger. Il porte sur la preuve en mathématiques et a pour objectif d'identifier la perception des lycéens et des étudiants d'université sur celle-ci. Il n'y a pas de « bonnes » ou de « mauvaises » réponses 😊

Ce questionnaire comprend 5 parties. Temps de réponse estimé : 1h

Partie I – Identification, énonciation et utilisation de propriétés mathématiques

Partie II – Rédaction de preuves

Partie III – Perception de preuves

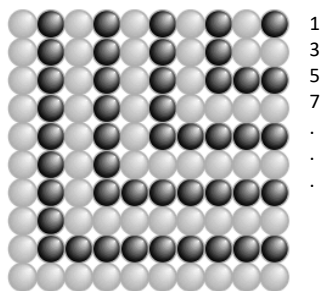
Partie IV – Questions générales sur la preuve en mathématiques

Partie V – Parlons de vous !

## Partie I – Identification, énonciation et utilisation de propriétés mathématiques

1) Choisissez un résultat mathématique que vous connaissez bien (théorème, proposition, propriété, ...) et énoncez-le formellement.

2) Écrivez un énoncé mathématique formel, généralisé, correspondant à cette représentation.

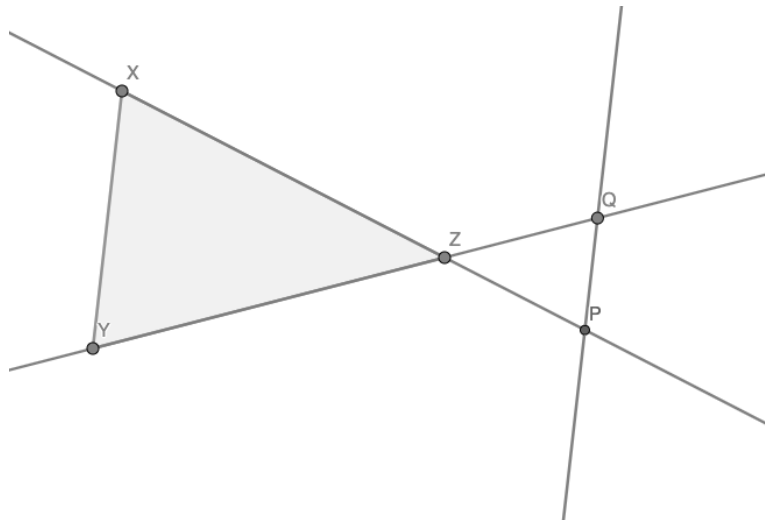


3) On donne le théorème suivant :

Soit un triangle ABC.

Si  $M \in (AB)$ ,  $N \in (AC)$  et  $(BC) \parallel (MN)$ , alors on a :  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

Énoncez l'utilisation de ce théorème dans la configuration géométrique suivante :



## Partie II – Rédaction de preuves

### 1) Preuve en analyse

Démontrez

Pour tout  $a, b$  réels strictement positifs,  $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

## 2) Preuve en arithmétique et généralisation de la preuve

*Théorème : La somme de deux impairs consécutifs est divisible par 4.*

- a) Prouvez ce théorème.
- b) Si on vous demandait de « généraliser ce théorème », que feriez-vous ?

### 3) Preuve formelle

On définit un système formel imaginaire avec des objets et des règles pour agir sur ces objets. On cherche à prouver des théorèmes dans ce système formel. On se donne comme points de départ les éléments suivants :

Définition : un « TOY » est une suite d'un nombre entier (strictement positif) de symboles, constituée uniquement de points et de cercles notés  $\bullet$  et  $\circ$ . Par exemple,  $\circ\bullet\circ\bullet\bullet$  est un TOY.

Pour démarrer la construction des objets, on admet :

A1 :  $\circ\bullet$  est valide

A2 :  $\bullet\circ$  est valide

Trois règles peuvent être utilisées :

R1 : Pour tout TOY  $w$  et  $v$ , si  $wv$  et  $vw$  sont valides alors  $w$  est valide

R2 : Pour tout TOY  $w$  et  $v$ , si  $w$  et  $v$  sont valides alors  $w\bullet v$  est valide

R3 : Pour tout TOY  $w$  et  $v$ , si  $wv\bullet$  est valide alors  $w\circ$  est valide

**Démontrer les théorèmes suivants :**

Théorème A :  $\bullet$  est valide

Théorème B :  $\bullet\bullet\bullet$  est valide

Théorème C :  $\bullet\bullet\circ$  est valide

**Partie III – Perception de preuves - Quatre énoncés mathématiques et des propositions de preuves vous sont donnés ci-dessous. Les mêmes questions sont posées pour chacun de ces énoncés (cases à cocher).**

**Énoncé 1 – Le produit de trois nombres consécutifs est un multiple de 6.**

**Réponse A**

Un nombre qui a 2 et 3 comme facteurs est multiple de 6.

Si on a trois nombres consécutifs, l'un sera congru à 0 modulo 3, ce sera donc un multiple de 3.

De plus, au moins un nombre sera pair et tous les nombres pairs sont des multiples de 2.

Ainsi, si on multiplie trois nombres consécutifs, le résultat doit avoir au moins un facteur égal à 3 et un facteur égal à 2.

On peut conclure que le produit de trois nombres consécutifs est un multiple de 6.

**Réponse B**

$$1 \times 2 \times 3 = 6$$

$$2 \times 3 \times 4 = 24 = 6 \times 4$$

$$4 \times 5 \times 6 = 120 = 6 \times 20$$

$$25 \times 26 \times 27 = 17550 = 6 \times 2925$$

On peut conclure que le produit de trois nombres consécutifs est un multiple de 6.

**Réponse C**

Soit  $n$  un entier.

$$\begin{aligned} n \times (n+1) \times (n+2) &= (n^2+n) \times (n+2) \\ &= n^3+3n^2+2n \end{aligned}$$

Les coefficients en facteurs des puissances de  $n$  sont :  $1+3+2=6$

On peut conclure que le produit de trois nombres consécutifs est un multiple de 6.

**Réponse D**

Un multiple de 6 a pour facteurs 2 et 3.

On prend trois nombres consécutifs, soit  $P$  le premier de ces nombres.  $P$  est :

- Soit pair, il existe donc un entier  $a$  tel que  $P = 2a$  par définition d'un nombre pair
- Soit impair, il existe donc un entier  $b$  tel que  $P = 2b-1$  par définition d'un nombre impair.

Si  $P$  est pair, alors le produit des trois nombres consécutifs s'écrit :

$$2a \times (2a+1) \times (2a+2) : \text{c'est un multiple de 2.}$$

- Si  $a$  est un multiple de 3, la preuve est terminée.
- Si  $a$  n'est pas un multiple de 3, alors  $2a$  n'est pas un multiple de 3, mais, dans ce cas,  $(2a+1)$  ou  $(2a+2)$  est un multiple de 3 et la preuve est terminée.

Si  $P$  est impair, alors le produit des trois nombres consécutifs s'écrit :

$$(2b-1) \times 2b \times (2b+1) : \text{c'est un multiple de 2.}$$

- Si  $b$  est un multiple de 3, la preuve est terminée.
- Si  $b$  n'est pas un multiple de 3, alors  $2b$  n'est pas un multiple de 3, mais, dans ce cas,  $(2b-1)$  ou  $(2b+1)$  est un multiple de 3 et la preuve est terminée.

On peut conclure que le produit de trois nombres consécutifs est un multiple de 6.

Pour l'énoncé 1

Réponse A   Réponse B   Réponse C   Réponse D

Quelle réponse est la plus proche de ce que vous auriez fait ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Quelle réponse choisiriez-vous pour expliquer la "solution" à vos camarades ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Quelle réponse est, pour vous, la plus "rigoureuse" ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Quelle(s) est/sont, selon vous, la/les preuve(s) correcte(s) ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Quelle(s) est/sont, selon vous, la/les preuve(s) incomplète(s) ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Énoncé 2 – La somme des angles d'un triangle est un angle plat.**

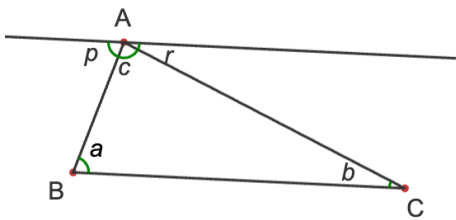
**Réponse A**

En mesurant les angles de différents types de triangles quelconques et en les écrivant dans un tableur, j'obtiens :

	A	B	C	D
1	angle 1	angle 2	angle 3	somme
2	110	34	36	180
3	95	43	42	180
4	35	72	73	180
5	10	27	143	180
6	5	150	25	180

J'en déduis que la somme des angles d'un triangle est égale à  $180^\circ$  (angle plat).

**Réponse B**



Soit ABC un triangle quelconque. Les angles sont indiqués sur la figure.

On mène par A une parallèle à la droite (BC) :  $p+c+r=180^\circ$  (angle plat)

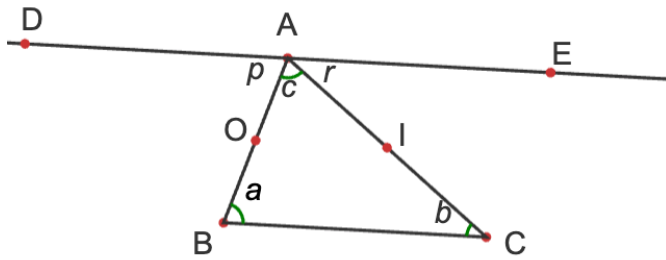
Les angles alternes-internes sont égaux : on en déduit les égalités des angles suivants  $p=a$  et  $r=b$ .

Ainsi :  $a+b+c=p+c+r$

La somme des angles d'un triangle est égale à  $180^\circ$  (angle plat).



### Réponse C



Soit ABC un triangle quelconque. On considère les milieux O et I des segments [AB] et [AC]. Le point D est le symétrique du point C par rapport à O et le point E est le symétrique du point B par rapport à I.

- La droite (AD) est parallèle à la droite (BC) car elles sont symétriques par rapport au point O.
- La droite (AE) est parallèle à la droite (BC) car elles sont symétriques par rapport au point I.

Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles, donc (AD) et (EA) sont parallèles. Comme ces deux droites passent par le même point A et sont parallèles, on en déduit que les points D, A et E sont alignés.

Avec les notations de la figure :  $p+c+r=180$  (\*)

Les angles  $p$  et  $a$  sont symétriques par rapport à O donc  $p=a$ .

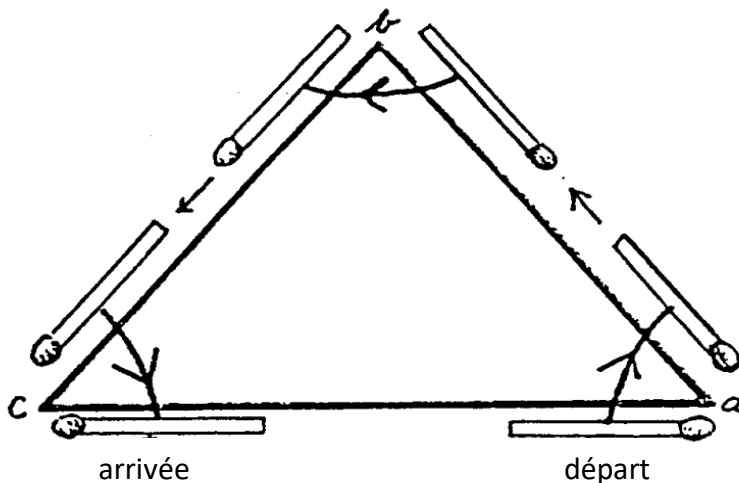
Les angles  $r$  et  $b$  sont symétriques par rapport à I donc  $r=b$ .

En remplaçant dans l'égalité (\*), on obtient :  $a+b+c=180$ .

On en déduit que la somme des angles d'un triangle est égale à  $180^\circ$ .

### Réponse D

Regardez comment l'allumette se déplace autour du triangle :



À l'arrivée, l'allumette se retrouve dans la position inverse à celle du départ. Durant ce déplacement, et en tournant selon les trois angles du triangle, l'allumette a fait un demi-tour. La somme des angles d'un triangle est donc égale à  $180^\circ$  (angle plat).

Pour l'énoncé 2

Réponse A

Réponse B

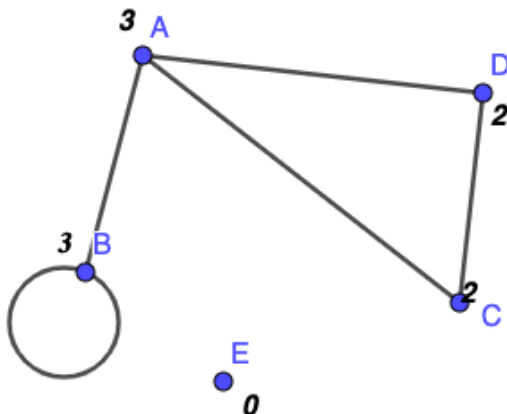
Réponse C

Réponse D

Quelle réponse est la plus proche de ce que vous auriez fait ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Quelle réponse choisiriez-vous pour expliquer la "solution" à vos camarades ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Quelle réponse est, pour vous, la plus "rigoureuse" ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Quelle(s) est/sont, selon vous, la/les preuve(s) correcte(s) ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Quelle(s) est/sont, selon vous, la/les preuve(s) incomplète(s) ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Énoncé 3 – La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe (fini) est paire.**

Préambule : Un graphe est un ensemble (non vide) de sommets et d'arêtes reliant ces sommets. On appelle degré d'un sommet le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité (les boucles étant comptées deux fois). Ce degré vaut 0 si le sommet est isolé. Voici un exemple : dans le graphe ci-dessous, les degrés des sommets sont :

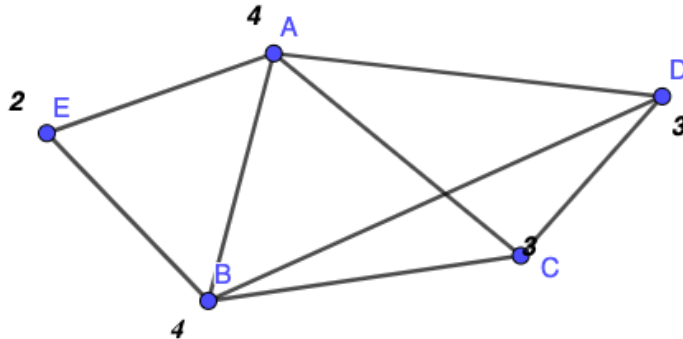


**Réponse A**

Lorsqu'on additionne les degrés des sommets, une arête est comptée deux fois, une fois pour chaque extrémité. Donc, la somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes de ce graphe et c'est bien un nombre pair.

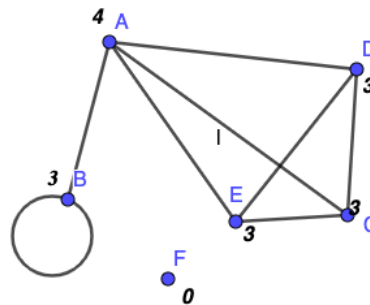
### Réponse B

Le degré d'un sommet isolé est 0 donc ne change pas la parité de la somme des degrés. Le degré d'une boucle est 2 donc cela ne change pas la parité. On étudie donc un graphe sans boucle et sans sommet isolé (voir la figure). Les sommets pairs ne changent pas la parité de la somme des degrés, on peut donc les supprimer. Il reste donc les sommets impairs, qui sont en nombre pair, donc la somme des degrés des sommets d'un graphe est paire.



### Réponse C

On prend le graphe suivant avec 7 sommets et 8 arêtes. On a pris soin de choisir un cas où il y a une boucle et un point isolé pour traiter tous les cas.



Ici, on a :  $3+4+3+3+3+0 = 16 = 2 \times 8$ .

On remarque que chaque arête est comptée deux fois (une fois pour chaque sommet).

Donc, la somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes de ce graphe : c'est bien un nombre pair.

### Réponse D

Soit  $G$  un graphe fini quelconque avec  $n$  sommets  $v_1, v_2, \dots, v_n$  et  $m$  arêtes  $e_1, e_2, \dots, e_m$ , où  $n$  et  $m$  entiers ( $n > 0$  et  $m \geq 0$ ).

On veut démontrer que pour  $n$  et  $m$  entiers avec  $n > 0$  et  $m \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^n \deg(v_i)$  est paire.

Soit  $\delta_{ij} = 1$  si l'arête  $e_j$  est incidente sur le sommet  $v_i$  et 0 sinon.

Soit  $n$  le nombre de sommets et  $m$  le nombre d'arêtes.

Alors on a :  $\sum_{i=1}^n \deg(v_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \delta_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \delta_{ij}$

Chaque arête est incidente à deux sommets  $\delta_{ij} = 1$  exactement deux fois, d'où

$\sum_{i=1}^n \delta_{ij} = 2$ .

On a donc  $\sum_{i=1}^n \deg(v_i) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \delta_{ij} = \sum_{j=1}^m 2 = 2m$  qui est paire.

Pour l'énoncé 3

Réponse A   Réponse B   Réponse C   Réponse D

	Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
Quelle réponse est la plus proche de ce que vous auriez fait ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Quelle réponse choisiriez-vous pour expliquer la "solution" à vos camarades ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Quelle réponse est, pour vous, la plus "rigoureuse" ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Quelle(s) est/sont, selon vous, la/les preuve(s) correcte(s) ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Quelle(s) est/sont, selon vous, la/les preuve(s) incomplète(s) ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Énoncé 4 – Soit  $n$  le nombre de sommets d'un polygone convexe ( $n$  est un entier strictement positif).**

**Calculez le nombre de ses diagonales et prouvez la formule obtenue.**

**Réponse A**

Soit  $n$  le nombre de sommets d'un polygone convexe. D'un sommet on peut joindre tous les sommets sauf lui-même et les deux voisins, c'est-à-dire  $(n-3)$  diagonales par sommet. C'est pareil pour les  $n$  sommets, il y a donc  $n(n-3)$  diagonales. Mais une diagonale joint deux sommets  $X$  et  $Y$  : elle est donc comptée deux fois (une fois pour  $X$  et une fois pour  $Y$ ). Le nombre de diagonales d'un polygone de  $n$  sommets est donc nécessairement  $n(n-3)/2$ .

**Réponse B**

Supposons qu'il existe une fonction polynomiale  $f(n)$  permettant de calculer le nombre des diagonales d'un polygone.

Supposons qu'il s'agit d'une fonction du 1er degré de la forme :  $f(n)=an+b$  où  $a$  et  $b$  sont des réels. En utilisant des cas particuliers (le carré, le pentagone, l'heptagone) pour trouver les valeurs de  $a$  et de  $b$ , on voit qu'il n'existe pas de valeurs pour  $a$  et  $b$  qui fonctionnent.

On suppose donc que  $f(n)$  est une fonction du 2nd degré de la forme :  $f(n)=an^2+bn+c$  où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des réels. Avec la même méthode que ci-dessus pour trouver les valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $c$ , on obtient  $f(n)=n^2/2-3n/2$ .

**Réponse C**

Si on prend un polygone à 5 côtés par exemple : d'un sommet, il part deux diagonales. Ce sera pareil pour chacun des sommets. Donc il y a 10 diagonales mais on les a comptées deux fois, il y en a 10 divisé par 2, on trouve bien 5.

Donc il y a  $n(n-3)/2$  diagonales.

**Réponse D**

Il y a autant de diagonales que de côtés : cette propriété est vraie pour le polygone de 5 côtés. Il suffit de vérifier ensuite pour un polygone avec un grand nombre de côtés et on conclut que le nombre de diagonales est égal à  $n$  (où  $n$  est le nombre de côtés).

**Pour l'énoncé 4**

**Réponse A   Réponse B   Réponse C   Réponse D**

<b>Quelle réponse est la plus proche de ce que vous auriez fait ?</b>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>Quelle réponse choisiriez-vous pour expliquer la "solution" à vos camarades ?</b>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>Quelle réponse est, pour vous, la plus "rigoureuse" ?</b>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>Quelle(s) est/sont, selon vous, la/les preuve(s) correcte(s) ?</b>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>Quelle(s) est/sont, selon vous, la/les preuve(s) incomplète(s) ?</b>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

---

**Partie IV – Représentation générale sur la preuve en maths**

1) Connaissez-vous différents types de preuves ?

- OUI  
 NON

Si oui lesquels (faire une liste) ?

2) Écrivez tous les mots qui vous viennent à l'esprit en mathématiques à l'évocation du mot « preuve ».

3) Écrivez tous les mots qui vous viennent à l'esprit en mathématiques à l'évocation du verbe « prouver ».

4) Pour vous, quel est / quels sont le(s) rôle(s) d'une preuve en mathématiques ?

5) Écrivez tous les types d'énoncés mathématiques que vous utilisez quand vous faites des preuves en mathématiques (par exemple : théorème).

6) Qu'utilisez-vous quand vous cherchez à faire une preuve (votre boîte à outils) ?

7) Qu'utilisez-vous quand vous rédigez une preuve (votre boîte à outils) ?

8) Qu'utilisez-vous pour contrôler une preuve que vous avez écrite ?

9) Que contrôlez-vous quand vous lisez une preuve écrite par d'autres personnes ?

**Cochez ce qui reflète le mieux la fréquence des situations suivantes et ce que vous pensez, en fonction de votre expérience dans les cours de mathématiques des années antérieures et de l'année en cours.**

**10) Dans les cours de maths, les preuves étaient produites par l'enseignant seul.**

Jamais     Très souvent

**11) Dans les cours de maths, j'ai construit des preuves avec mes camarades.**

Jamais     Très souvent

**12) Les preuves étaient l'activité principale des cours de mathématiques.**

Tout à fait d'accord     Pas du tout d'accord

**13) Je pense que construire des preuves est fondamental en mathématiques.**

Tout à fait d'accord     Pas du tout d'accord

**14) Je pense que l'on peut faire des études en mathématiques sans être fort dans la construction de preuves.**

Tout à fait d'accord     Pas du tout d'accord

**15) Je pense que les preuves en mathématiques servent à (plusieurs réponses possibles) :**

- |                                     |                                      |
|-------------------------------------|--------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> expliquer  | <input type="checkbox"/> découvrir   |
| <input type="checkbox"/> convaincre | <input type="checkbox"/> communiquer |
| <input type="checkbox"/> vérifier   | <input type="checkbox"/> Autre       |
| <input type="checkbox"/> formaliser |                                      |

Si 'Autre' précisez :

## Partie V – Parlons de vous !

### Êtes-vous

un homme  une femme  neutre  ne souhaite pas répondre

**Vous êtes**  au lycée  à l'université

### En

2<sup>nde</sup>  1<sup>ère</sup>  Terminale

Licence 1<sup>ère</sup> année  Licence 2<sup>ème</sup> année  Licence 3<sup>ème</sup> année

Master 1<sup>ère</sup> année  Master 2<sup>ème</sup> année

### Filière

maths  maths-info  informatique  physique

formation enseignants secondaire  formation enseignants primaire

autre (précisez)

**Pays :**

**Région / département :**

**Nom de votre lycée ou université :**

[facultatif]

**Vos Nom, prénom, courriel si vous souhaitez un retour sur les résultats de ce questionnaire :**



## Questionnaire – Proof in mathematics

**This document is linked to an ongoing project led by C. Ouvrier-Bufferet.  
The questions have been designed on the basis of existing theoretical frameworks and  
results in mathematics education.**

If you use this questionnaire, please send the results to [cecile.ouvrier-bufferet@u-pec.fr](mailto:cecile.ouvrier-bufferet@u-pec.fr)

The questionnaire is anonymous and widely distributed in France and abroad. It focuses on proof in mathematics and aims at identifying high school and university students' perception of it. There are no "right" or "wrong" answers 😊

This questionnaire consists of 5 parts. Estimated response time: 1 hour.

Part I - Identifying, stating and using mathematical properties

Part II - Writing proofs

Part III - Perception of proofs

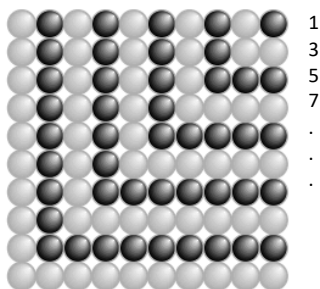
Part IV - General questions on mathematical proofs

Part V - Let's talk about you!

### Part I – Identifying, stating and using mathematical properties

- 4) Choose a mathematical result you know well (theorem, property, etc.) and state it in formal terms.

- 5) Write of formal, generalized mathematical statement corresponding to this representation.

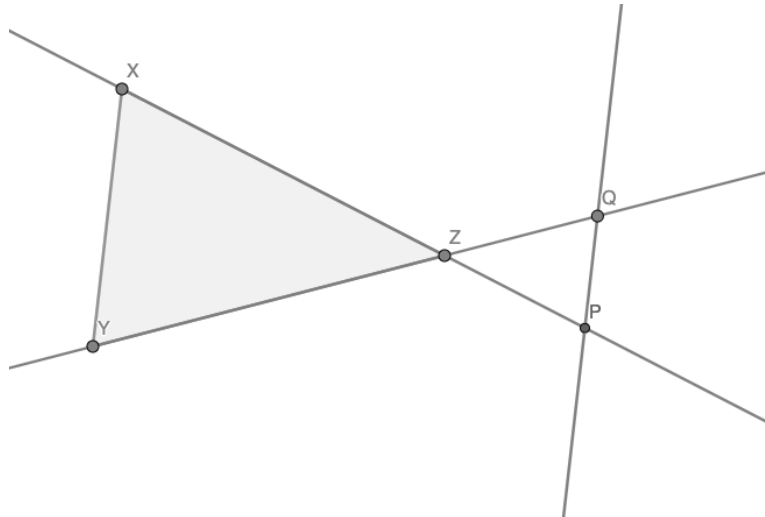


6) We have the following theorem:

Let ABC be a triangle.

If  $M \in (AB)$ ,  $N \in (AC)$  and  $(BC)$  is parallel to  $(MN)$ , then:  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

State the use of this theorem in the following geometric configuration:



## Part II – Writing proofs

### 4) Proof in analysis

Prove that

For any  $a, b$  strictly positive real numbers,  $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

**5) Arithmetical proof and generalization**

*Theorem: The sum of two consecutive odd numbers is divisible by 4.*

c) Prove that theorem.

d) If you have to “generalize this theorem”, what would you do?

## 6) Formal proof

One defines an imaginary formal system with objects and rules to work with these objects. One wants to prove theorems in this formal system. Our starting points are as follows:

Definition: a « TOY » is a sequence of an integer (strictly positive) number of symbols, consisting only of dots and circles, marked with  $\bullet$  and  $\circ$ . For example,  $\circ\bullet\circ\bullet\bullet$  is a TOY.

To start building objects, we assume that:

A1 :  $\circ\bullet$  is valid

A2 :  $\bullet\circ$  is valid

Three rules can be used:

R1 : For any TOY  $w$  and  $v$ , if  $wv$  and  $vw$  are valid then  $w$  is valid

R2 : For any TOY  $w$  and  $v$ , if  $w$  and  $v$  are valid then  $w\bullet v$  is valid

R3 : For any TOY  $w$  and  $v$ , if  $wv\bullet$  is valid then  $w\circ$  is valid

**Prove the following theorems:**

Theorem A :  $\bullet$  is valid

Theorem B :  $\bullet\bullet\bullet$  is valid

Theorem C :  $\bullet\bullet\circ$  is valid

**Part III – Perception of proofs - Four mathematical statements and proposed proofs are given below. The same questions are asked for each statement (checkboxes).**

**Statement 1 – The product of three consecutive numbers is a multiple of 6.**

**Answer A**

A number that has 2 and 3 for factors is a multiple of 6.

If I have three consecutive numbers, one will be congruent to 0 modulo 3, so it will be a multiple of 3.

Also, at least one number will be even and all even numbers are multiples of 2.

So, if I multiply three consecutive numbers together, the answer must have at least one factor of 3 and one factor of 2.

I can conclude that the product of three consecutive numbers is a multiple of 6.

**Answer B**

$$1 \times 2 \times 3 = 6$$

$$2 \times 3 \times 4 = 24 = 6 \times 4$$

$$4 \times 5 \times 6 = 120 = 6 \times 20$$

$$25 \times 26 \times 27 = 17550 = 6 \times 2925$$

I can conclude that the product of three consecutive numbers is a multiple of 6.

**Answer C**

Let  $n$  be a natural integer.

$$\begin{aligned} n \times (n+1) \times (n+2) &= (n^2+n) \times (n+2) \\ &= n^3+3n^2+2n \end{aligned}$$

The factor coefficients of the powers of  $n$  are:  $1+3+2=6$

I can conclude that the product of three consecutive numbers is a multiple of 6.

**Answer D**

A multiple of 6 has factors of 2 and 3.

For three consecutive numbers, let  $P$  be the first of them.  $P$  is either

- even: there exists an integer  $a$  such that  $P = 2a$  by definition of an even number,
- or odd: there exists an integer  $b$  such that  $P = 2b-1$  by definition of an odd number.

If  $P$  is even, then the product of three consecutive numbers is:

$$2a \times (2a+1) \times (2a+2): \text{ it is a multiple of 2.}$$

- If  $a$  is a multiple of 3, the proof is done.
- If  $a$  is not a multiple of 3, then  $2a$  is not a multiple of 3, but, in this case,  $(2a+1)$  or  $(2a+2)$  is a multiple of 3 and the proof is done.

If  $P$  is odd, then the product of three consecutive numbers is:

$$(2b-1) \times 2b \times (2b+1): \text{ it is a multiple of 2.}$$

- If  $b$  is a multiple of 3, the proof is done.
- If  $b$  is not a multiple of 3, then  $2b$  is not a multiple of 3, but, in this case,  $(2b-1)$  or  $(2b+1)$  is a multiple of 3 and the proof is done.

I can conclude that the product of three consecutive numbers is a multiple of 6.

For Statement 1

Answer A

Answer B

Answer C

Answer D

Which answer is closest to what you would have done?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Which answer would you choose to explain the "solution" to your classmates?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Which is the most "thorough" answer for you?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
In your opinion, what is/are the correct proof(s)?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
In your opinion, what proof(s) is/are incomplete?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Statement 2 – The sum of the angles of a triangle is a straight angle.**

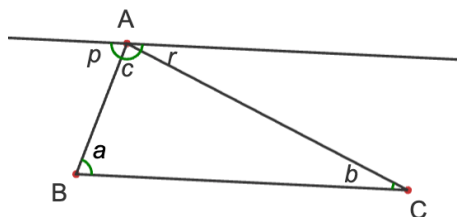
**Answer A**

By measuring the angles of various kinds of triangles and writing them in a spreadsheet, I have:

	A	B	C	D
1	angle 1	angle 2	angle 3	somme
2	110	34	36	180
3	95	43	42	180
4	35	72	73	180
5	10	27	143	180
6	5	150	25	180

Then, I deduce that the sum of the angles of a triangle is equal to 180° (straight angle).

**Answer B**



Let ABC be any triangle. The angles are marked on the figure.

A line parallel to (BC) is drawn through A:  $p+c+r=180^\circ$  (straight angle)

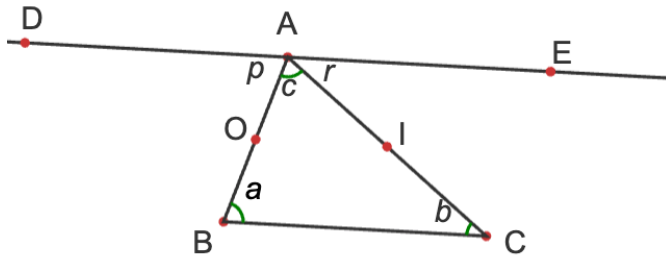
The alternate interior angles are equal: we deduce the following equalities

$p=a$  et  $r=b$ .

Thus:  $a+b+c=p+c+r$

The sum of the angles of a triangle is equal to 180° (straight angle).

**Answer C**



Let ABC be any triangle. Consider the midpoints O and I of the segments [AB] and [AC]. Point D is the symmetric of C with respect to O and point E is the symmetric of B with respect to I.

- The line (AD) is parallel to the line (BC) because there are symmetric with respect to point O.
- The line (AE) is parallel to the line (BC) because there are symmetric with respect to point I.

To lines parallel to a third are parallel, then (AD) and (EA) are parallel to each other. Since these two lines pass through the same point A and are parallel, we deduce that points D, A and E are aligned.

Using the notations of the figure, we have:  $p+c+r=180$  (\*)

Angles  $p$  and  $a$  are symmetric with respect to O, so  $p=a$ .

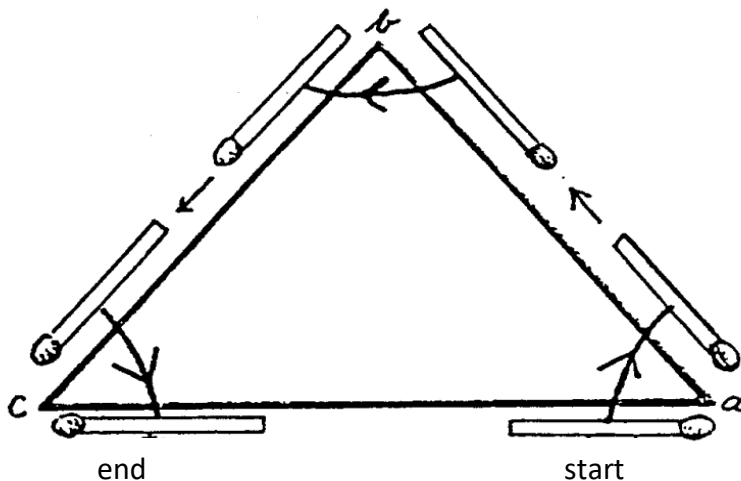
Angles  $r$  and  $b$  are symmetric with respect to I, so  $r=b$ .

By replacing in equality (\*), we obtain:  $a+b+c=180$ .

I deduce that the sum of the angles of a triangle is equal to  $180^\circ$ .

**Answer D**

Observe how the matchstick moves around the triangle:



At the end, the matchstick is in the opposite position to the start. During this displacement, and by turning through the three angles of the triangle, the matchstick has made a half-turn. The sum of the angles of a triangle is therefore equal to  $180^\circ$  (straight angle).



For Statement 2

Answer A

Answer B

Answer C

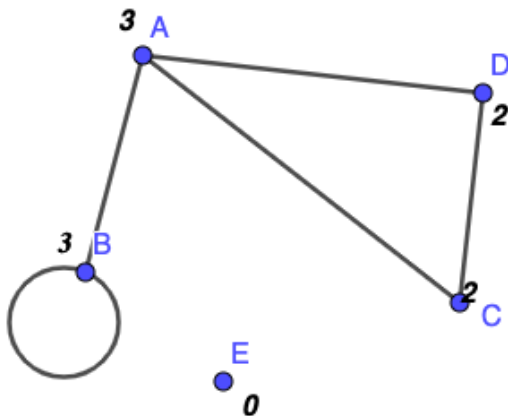
Answer D

Which answer is closest to what you would have done?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Which answer would you choose to explain the "solution" to your classmates?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Which is the most "thorough" answer for you?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
In your opinion, what is/are the correct proof(s)?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
In your opinion, what proof(s) is/are incomplete?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Statement 3 – The sum of the degrees of the vertices of any (finite) graph is even.**

Preamble: A graph is a (non-empty) set of vertices and edges connecting these vertices. The degree of a vertex is the number of edges of which this vertex is one end (loops being counted twice). The degree is 0 if the vertex is isolated.

Here's an example: in the graph below, the degrees of the vertices are:

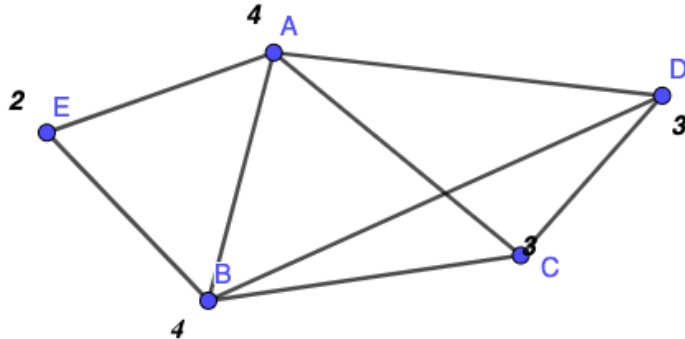


#### Answer A

When I add the degrees of the vertices, an edge is counted twice, once for each end. So, the sum of the degrees of all the vertices in a graph is twice the number of edges in that graph, and is indeed an even number.

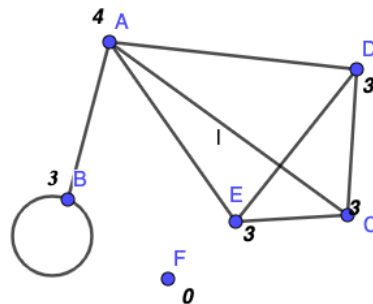
### Answer B

The degree of an isolated vertex is 0, so this does not change the parity of the sum of the degrees. The degree of a loop is 2, so it does not change the parity. So, you study a graph without loops and without isolated vertices (see figure). The even vertices do not change the parity of the sum of degrees, so you can delete them. This leaves the odd vertices, which are even in number, so the sum of the degrees of the vertices in a graph is even.



### Answer C

Take the following graph with 7 vertices and 8 edges. Care has been taken to choose a case where there is a loop and an isolated point, so that all cases can be treated.



Here, you have:  $3+4+3+3+3+0 = 16 = 2 \times 8$ .

Note that each edge is counted twice (once for each vertex).

So, the sum of the degrees of all the vertices of a graph is equal to twice the number of edges in the graph: this is an even number.

### Answer D

Let  $G$  be a finite graph with  $n$  vertices  $v_1, v_2, \dots, v_n$  and  $m$  edges  $e_1, e_2, \dots, e_m$ , with  $n$  and  $m$  natural integers ( $n > 0$  and  $m \geq 0$ ).

I want to prove that for  $n$  and  $m$  natural integers with  $n > 0$  and  $m \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^n \deg(v_i)$  is even.

Let  $\delta_{ij} = 1$  if the edge  $e_j$  is incident with the vertex  $v_i$  and 0 if not.

Let  $n$  be the number of vertices and  $m$  the number of edges.

Then, I have:  $\sum_{i=1}^n \deg(v_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \delta_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \delta_{ij}$

Each edge is incident with two vertices  $\delta_{ij} = 1$  exactly twice, thus  $\sum_{i=1}^n \delta_{ij} = 2$ .

Then  $\sum_{i=1}^n \deg(v_i) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \delta_{ij} = \sum_{j=1}^m 2 = 2m$  which is even.

**For Statement 3****Answer A****Answer B****Answer C****Answer D**

<b>Which answer is closest to what you would have done?</b>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>Which answer would you choose to explain the "solution" to your classmates?</b>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>Which is the most "thorough" answer for you?</b>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>In your opinion, what is/are the correct proof(s)?</b>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>In your opinion, what proof(s) is/are incomplete?</b>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**Statement 4 – Let  $n$  be the number of vertices of a convex polygon ( $n$  is a strictly positive integer).**

**Calculate the number of its diagonals and prove the formula.**

**Answer A**

Let  $n$  be the number of vertices of a convex polygon. A vertex can be joined to all vertices except itself and its two neighbors, i.e.  $(n-3)$  diagonals per vertex. The same applies to all  $n$  vertices, so there are  $n(n-3)$  diagonals. But a diagonal joins two vertices  $X$  and  $Y$ : it is therefore counted twice (once for  $X$  and once for  $Y$ ). The number of diagonals in a polygon with  $n$  vertices is therefore necessarily  $n(n-3)/2$ .

**Answer B**

Suppose that there exists a polynomial function  $f(n)$  that calculates the number of the diagonals of a polygon.

Suppose it is a first-degree polynomial function of the form:  $f(n)=an+b$  where  $a$  and  $b$  are real numbers. Using special cases (the square, the pentagon, the heptagon) to find values for  $a$  and  $b$ , I see that there are no values for  $a$  and  $b$  that work.

Therefore, I assume that  $f(n)$  is a second-degree polynomial function with the following form:  $f(n)=an^2+bn+c$  where  $a$ ,  $b$  and  $c$  are real numbers. Using the same method as above to find the values of  $a$ ,  $b$  and  $c$ , I obtain  $f(n)=n^2/2-3n/2$ .

**Answer C**

For example, if I take a five-sided polygon: two diagonals start from a vertex. The same applies to each vertex. So, there are 10 diagonals, but I have counted them twice: there are 10 divided by 2, so, there are 5.

I conclude that there are  $n(n-3)/2$  diagonals.

**Answer D**

There are as many diagonals as edges: this property is true for the 5-sided polygon. Then, check for a polygon with a large number of edges and conclude that the number of diagonals is equal to  $n$  (where  $n$  is the number of edges).

**For Statement 4**

**Answer A**

**Answer B**

**Answer C**

**Answer D**

<b>Which answer is closest to what you would have done?</b>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>Which answer would you choose to explain the "solution" to your classmates?</b>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>Which is the most "rigorous" answer for you?</b>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>In your opinion, what is/are the correct proof(s)?</b>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<b>In your opinion, what proof(s) is/are incomplete?</b>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

---

**Part IV – General questions on mathematical proofs**

1) Do you know different kinds of proof?

YES

NO

If yes, which one (do a list)?

2) When do you think of the word "proof", in mathematics, write down all the words that come to mind.

3) When do you think of the verb "to prove", in mathematics, write down all the words that come to mind.

4) For you, what is/are the role(s) of a proof in mathematics?

5) Write down all the kinds of mathematical statements you use when making mathematical proofs (example: theorem).

6) What do you use when you are searching to make a proof (your “toolbox”)?

7) What do you use when you are writing a proof (your “toolbox”)?

8) What do you use to control a proof that you have written?

9) What do you control when you read a proof written by other people?

**Check what best reflects the frequency of the following situations and what you think, based on your experience in mathematics courses in previous years and the current year.**

**10) In mathematics classes, the proofs were built by the teacher alone.**

Never     Very often

**11) In mathematics classes, I have built proofs with my classmates.**

Never     Very often

**12) Proofs were the main activity in mathematics classes.**

I totally agree     I totally disagree

**13) I think that constructing proofs is fundamental in mathematics.**

I totally agree     I totally disagree

**14) I think that you can study mathematics without being good at constructing proofs.**

I totally agree     I totally disagree

**15) I think that mathematical proofs are used ... (several answers are possible):**

to explain

to convince

to verify

to formalize

If 'Other', please specify:

to discover

to communicate

Other:

## Part V – Let's talk about you!

### Are you

a man  a woman  gender neutral  does not want to answer

**You are**  in high-school  at university

### In

10th grade  11th grade  12<sup>th</sup> grade

First year at university  Second year at university  Third year at university

Master (first year)  Master (second year)

### Academic majors

mathematics  mathematics-computer science  computer science  physics

teacher training (secondary level)  teacher training (primary level)

other (specify):

**Country:**

**Region / department:**

**Name of your high-school or university:**

**[optional]**

**Your name and e-mail address if you wish to receive feedback on the results of this questionnaire:**