



HAL
open science

Questionnaire pour identifier les conceptions des étudiants sur la preuve en mathématiques

Cécile Ouvrier-Bufferet

► **To cite this version:**

Cécile Ouvrier-Bufferet. Questionnaire pour identifier les conceptions des étudiants sur la preuve en mathématiques. 2023. hal-03987587v1

HAL Id: hal-03987587

<https://hal.science/hal-03987587v1>

Submitted on 7 Mar 2023 (v1), last revised 5 Jul 2023 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Questionnaire – La preuve en mathématiques

Ce document est en lien avec un projet en cours porté par C. Ouvrier-Bufferet. Les questions ont été conçues sur les bases des cadres et résultats existants en didactique des mathématiques en France et à l'international.

Si vous utilisez ce questionnaire, merci d'en transmettre les résultats à cecile.ouvrier-bufferet@u-pec.fr

Ce questionnaire est anonyme et a pour but d'être diffusé à grande échelle en France et à l'étranger. Il porte sur la preuve en mathématiques et a pour objectif d'identifier la perception des lycéens et des étudiants d'université sur celle-ci. Il n'y a pas de « bonnes » ou de « mauvaises » réponses 😊

Ce questionnaire comprend 5 parties. Temps de réponse estimé : 1h à 1h30

Partie I – Identification, énonciation et utilisation de propriétés mathématiques

Partie II – Rédaction de preuves

Partie III – Perception de preuves

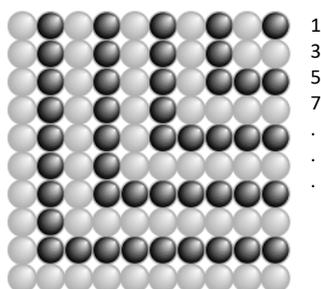
Partie IV – Questions générales sur la preuve en mathématiques

Partie V – Parlons de vous !

Partie I – Identification, énonciation et utilisation de propriétés mathématiques

1) Choisissez un résultat mathématique que vous connaissez bien (théorème, proposition, propriété, ...) et énoncez-le formellement.

2) Écrivez un énoncé mathématique formel, généralisé, correspondant à cette représentation.

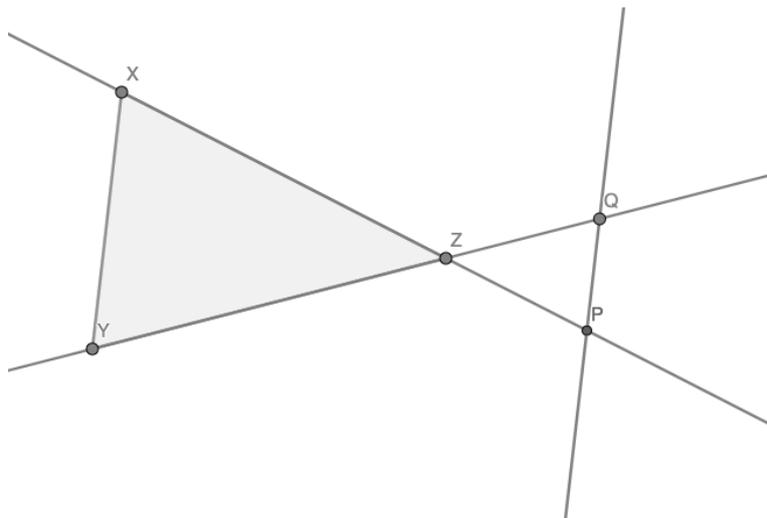


3) On donne le théorème suivant :

Soit un triangle ABC.

Si $M \in (AB)$, $N \in (AC)$ et $(BC) \parallel (MN)$, alors on a : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$

Énoncez l'utilisation de ce théorème dans la configuration géométrique suivante :



Partie II – Rédaction de preuves

1) Preuve en analyse

Démontrez

Pour tout a, b réels strictement positifs, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

2) Preuve en arithmétique et généralisation de la preuve

Théorème : La somme de deux impairs consécutifs est divisible par 4.

- a) Prouvez ce théorème.
- b) Si on vous demandait de « généraliser ce théorème », que feriez-vous ?

3) Preuve formelle

On définit un système formel imaginaire avec des objets et des règles pour agir sur ces objets. On cherche à prouver des théorèmes dans ce système formel. On se donne comme points de départ les éléments suivants :

Définition : un « TOY » est une suite d'un nombre entier (strictement positif) de symboles, constituée uniquement de points et de cercles notés \bullet et \circ . Par exemple, $\circ\bullet\circ\bullet\bullet$ est un TOY.

Pour démarrer la construction des objets, on admet :

A1 : $\circ\bullet$ est valide

A2 : $\bullet\circ$ est valide

Trois règles peuvent être utilisées :

R1 : Pour tout TOY w et v , si wv et vw sont valides alors w est valide

R2 : Pour tout TOY w et v , si w et v sont valides alors $w\bullet v$ est valide

R3 : Pour tout TOY w et v , si $wv\bullet$ est valide alors $w\circ$ est valide

Démontrer les théorèmes suivants :

Théorème A : \bullet est valide

Théorème B : $\bullet\bullet\bullet$ est valide

Théorème C : $\bullet\bullet\circ$ est valide

Partie III – Perception de preuves - Quatre énoncés mathématiques et des propositions de preuves vous sont donnés ci-dessous. Les mêmes questions sont posées pour chacun de ces énoncés (cases à cocher).

Énoncé 1 – Le produit de trois nombres consécutifs est un multiple de 6.

Réponse A

Un nombre qui a 2 et 3 comme facteurs est multiple de 6.

Si on a trois nombres consécutifs, l'un sera congru à 0 modulo 3, ce sera donc un multiple de 3.

De plus, au moins un nombre sera pair et tous les nombres pairs sont des multiples de 2.

Ainsi, si on multiplie trois nombres consécutifs, le résultat doit avoir au moins un facteur égal à 3 et un facteur égal à 2.

On peut conclure que le produit de trois nombres consécutifs est un multiple de 6.

Réponse B

$$1 \times 2 \times 3 = 6$$

$$2 \times 3 \times 4 = 24 = 6 \times 4$$

$$4 \times 5 \times 6 = 120 = 6 \times 20$$

$$25 \times 26 \times 27 = 17550 = 6 \times 2925$$

On peut conclure que le produit de trois nombres consécutifs est un multiple de 6.

Réponse C

Soit n un entier.

$$\begin{aligned} n \times (n+1) \times (n+2) &= (n^2+n) \times (n+2) \\ &= n^3+3n^2+2n \end{aligned}$$

Les coefficients en facteurs des puissances de n sont : $1+3+2=6$

On peut conclure que le produit de trois nombres consécutifs est un multiple de 6.

Réponse D

Un multiple de 6 a pour facteurs 2 et 3.

On prend trois nombres consécutifs, soit P le premier de ces nombres. P est :

- Soit pair, il existe donc un entier a tel que $P = 2a$ par définition d'un nombre pair
- Soit impair, il existe donc un entier b tel que $P = 2b-1$ par définition d'un nombre impair.

Si P est pair, alors le produit des trois nombres consécutifs s'écrit :

$$2a \times (2a+1) \times (2a+2) : \text{c'est un multiple de 2.}$$

- Si a est un multiple de 3, la preuve est terminée.
- Si a n'est pas un multiple de 3, alors $2a$ n'est pas un multiple de 3, mais, dans ce cas, $(2a+1)$ ou $(2a+2)$ est un multiple de 3 et la preuve est terminée.

Si P est impair, alors le produit des trois nombres consécutifs s'écrit :

$$(2b-1) \times 2b \times (2b+1) : \text{c'est un multiple de 2.}$$

- Si b est un multiple de 3, la preuve est terminée.
- Si b n'est pas un multiple de 3, alors $2b$ n'est pas un multiple de 3, mais, dans ce cas, $(2b-1)$ ou $(2b+1)$ est un multiple de 3 et la preuve est terminée.

On peut conclure que le produit de trois nombres consécutifs est un multiple de 6.

Pour l'énoncé 1

Réponse A Réponse B Réponse C Réponse D

Quelle réponse est la plus proche de ce que vous auriez fait ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Quelle réponse choisiriez-vous pour expliquer la "solution" à vos camarades ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Quelle réponse est, pour vous, la plus "rigoureuse" ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Quelle(s) est/sont, selon vous, la/les preuve(s) correcte(s) ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Quelle(s) est/sont, selon vous, la/les preuve(s) incomplète(s) ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Énoncé 2 – La somme des angles d'un triangle est un angle plat.

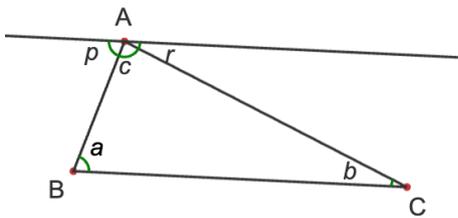
Réponse A

En mesurant les angles de différents types de triangles quelconques et en les écrivant dans un tableur, j'obtiens :

	A	B	C	D
1	angle 1	angle 2	angle 3	somme
2	110	34	36	180
3	95	43	42	180
4	35	72	73	180
5	10	27	143	180
6	5	150	25	180

J'en déduis que la somme des angles d'un triangle est égale à 180° (angle plat).

Réponse B



Soit ABC un triangle quelconque. Les angles sont indiqués sur la figure.

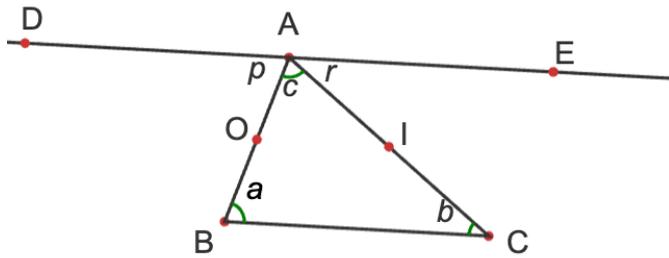
On mène par A une parallèle à la droite (BC) : $p+c+r=180^\circ$ (angle plat)

Les angles alternes-internes sont égaux : on en déduit les égalités des angles suivants $p=a$ et $r=b$.

Ainsi : $a+b+c=p+c+r$

La somme des angles d'un triangle est égale à 180° (angle plat).

Réponse C



Soit ABC un triangle quelconque. On considère les milieux O et I des segments [AB] et [AC]. Le point D est le symétrique du point C par rapport à O et le point E est le symétrique du point B par rapport à I.

- La droite (AD) est parallèle à la droite (BC) car elles sont symétriques par rapport au point O.
- La droite (AE) est parallèle à la droite (BC) car elles sont symétriques par rapport au point I.

Deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles, donc (AD) et (EA) sont parallèles. Comme ces deux droites passent par le même point A et sont parallèles, on en déduit que les points D, A et E sont alignés.

Avec les notations de la figure : $p+c+r=180$ (*)

Les angles p et a sont symétriques par rapport à O donc $p=a$.

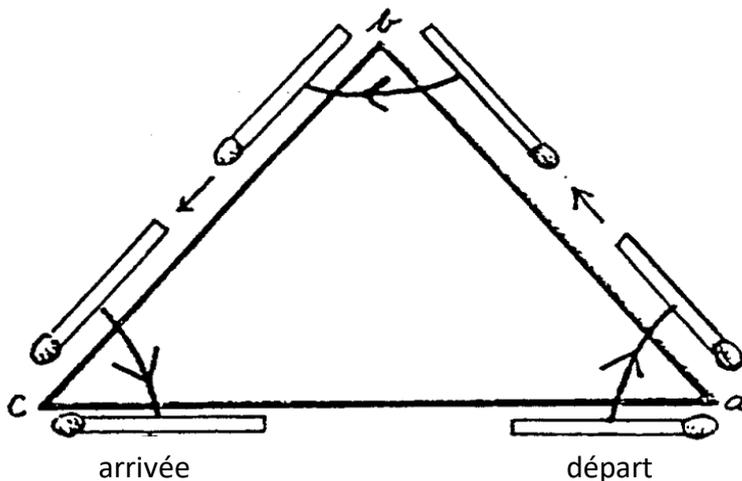
Les angles r et b sont symétriques par rapport à I donc $r=b$.

En remplaçant dans l'égalité (*), on obtient : $a+b+c=180$.

On en déduit que la somme des angles d'un triangle est égale à 180° .

Réponse D

Regardez comment l'allumette se déplace autour du triangle :



À l'arrivée, l'allumette se retrouve dans la position inverse à celle du départ. Durant ce déplacement, et en tournant selon les trois angles du triangle, l'allumette a fait un demi-tour. La somme des angles d'un triangle est donc égale à 180° (angle plat).

Pour l'énoncé 2

Réponse A

Réponse B

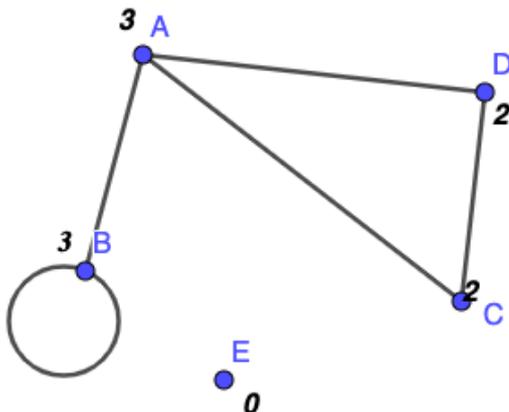
Réponse C

Réponse D

Quelle réponse est la plus proche de ce que vous auriez fait ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Quelle réponse choisiriez-vous pour expliquer la "solution" à vos camarades ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Quelle réponse est, pour vous, la plus "rigoureuse" ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Quelle(s) est/sont, selon vous, la/les preuve(s) correcte(s) ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Quelle(s) est/sont, selon vous, la/les preuve(s) incomplète(s) ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Énoncé 3 – La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe (fini) est paire.

Préambule : Un graphe est un ensemble (non vide) de sommets et d'arêtes reliant ces sommets. On appelle degré d'un sommet le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité (les boucles étant comptées deux fois). Ce degré vaut 0 si le sommet est isolé. Voici un exemple : dans le graphe ci-dessous, les degrés des sommets sont :

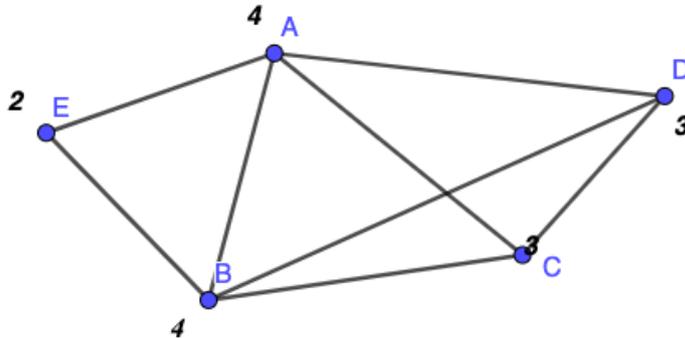


Réponse A

Lorsqu'on additionne les degrés des sommets, une arête est comptée deux fois, une fois pour chaque extrémité. Donc, la somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes de ce graphe et c'est bien un nombre pair.

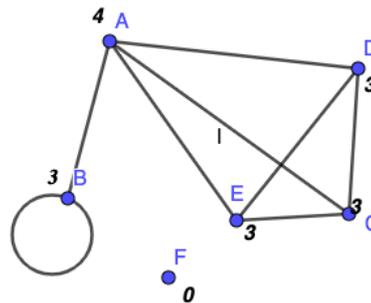
Réponse B

Le degré d'un sommet isolé est 0 donc ne change pas la parité de la somme des degrés. Le degré d'une boucle est 2 donc cela ne change pas la parité. On étudie donc un graphe sans boucle et sans sommet isolé (voir la figure). Les sommets pairs ne changent pas la parité de la somme des degrés, on peut donc les supprimer. Il reste donc les sommets impairs, qui sont en nombre pair, donc la somme des degrés des sommets d'un graphe est paire.



Réponse C

On prend le graphe suivant avec 7 sommets et 8 arêtes. On a pris soin de choisir un cas où il y a une boucle et un point isolé pour traiter tous les cas.



Ici, on a : $3+4+3+3+3+0 = 16 = 2 \times 8$.

On remarque que chaque arête est comptée deux fois (une fois pour chaque sommet).

Donc, la somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes de ce graphe : c'est bien un nombre pair.

Réponse D

Soit G un graphe fini quelconque avec n sommets v_1, v_2, \dots, v_n et m arêtes e_1, e_2, \dots, e_m , où n et m entiers ($n > 0$ et $m \geq 0$).

On veut démontrer que pour n et m entiers avec $n > 0$ et $m \geq 0$, $\sum_{i=1}^n \deg(v_i)$ est paire.

Soit $\delta_{ij} = 1$ si l'arête e_j est incidente sur le sommet v_i et 0 sinon.

Soit n le nombre de sommets et m le nombre d'arêtes.

Alors on a : $\sum_{i=1}^n \deg(v_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \delta_{ij} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \delta_{ij}$

Chaque arête est incidente à deux sommets $\delta_{ij} = 1$ exactement deux fois, d'où $\sum_{i=1}^n \delta_{ij} = 2$.

On a donc $\sum_{i=1}^n \deg(v_i) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \delta_{ij} = \sum_{j=1}^m 2 = 2m$ qui est paire.

Quelle réponse est la plus proche de ce que vous auriez fait ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Quelle réponse choisiriez-vous pour expliquer la "solution" à vos camarades ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Quelle réponse est, pour vous, la plus "rigoureuse" ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Quelle(s) est/sont, selon vous, la/les preuve(s) correcte(s) ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Quelle(s) est/sont, selon vous, la/les preuve(s) incomplète(s) ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Énoncé 4 – Soit n le nombre de sommets d'un polygone convexe (n est un entier strictement positif).

Calculez le nombre de ses diagonales et prouvez la formule obtenue.

Réponse A

Soit n le nombre de sommets d'un polygone convexe. D'un sommet on peut joindre tous les sommets sauf lui-même et les deux voisins, c'est-à-dire $(n-3)$ diagonales par sommet. C'est pareil pour les n sommets, il y a donc $n(n-3)$ diagonales. Mais une diagonale joint deux sommets X et Y : elle est donc comptée deux fois (une fois pour X et une fois pour Y). Le nombre de diagonales d'un polygone de n sommets est donc nécessairement $n(n-3)/2$.

Réponse B

Supposons qu'il existe une fonction polynomiale $f(n)$ permettant de calculer le nombre des diagonales d'un polygone.

Supposons qu'il s'agit d'une fonction du 1er degré de la forme : $f(n)=an+b$ où a et b sont des réels. En utilisant des cas particuliers (le carré, le pentagone, l'heptagone) pour trouver les valeurs de a et de b , on voit qu'il n'existe pas de valeurs pour a et b qui fonctionnent.

On suppose donc que $f(n)$ est une fonction du 2nd degré de la forme : $f(n)=an^2+bn+c$ où a , b et c sont des réels. Avec la même méthode que ci-dessus pour trouver les valeurs de a , b et c , on obtient $f(n)=n^2/2-3n/2$.

Réponse C

Si on prend un polygone à 5 côtés par exemple : d'un sommet, il part deux diagonales. Ce sera pareil pour chacun des sommets. Donc il y a 10 diagonales mais on les a comptées deux fois, il y en a 10 divisé par 2, on trouve bien 5.

Donc il y a $n(n-3)/2$ diagonales.

Réponse D

Il y a autant de diagonales que de côtés : cette propriété est vraie pour le polygone de 5 côtés. Il suffit de vérifier ensuite pour un polygone avec un grand nombre de côtés et on conclut que le nombre de diagonales est égal à n (où n est le nombre de côtés).

Pour l'énoncé 4

Réponse A Réponse B Réponse C Réponse D

Quelle réponse est la plus proche de ce que vous auriez fait ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Quelle réponse choisiriez-vous pour expliquer la "solution" à vos camarades ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Quelle réponse est, pour vous, la plus "rigoureuse" ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Quelle(s) est/sont, selon vous, la/les preuve(s) correcte(s) ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Quelle(s) est/sont, selon vous, la/les preuve(s) incomplète(s) ?	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Partie IV – Représentation générale sur la preuve en maths

1) Connaissez-vous différents types de preuves ?

- OUI
 NON

Si oui lesquels (faire une liste) ?

2) Écrivez tous les mots qui vous viennent à l'esprit en mathématiques à l'évocation du mot « preuve ».

3) Écrivez tous les mots qui vous viennent à l'esprit en mathématiques à l'évocation du verbe « prouver ».

4) Pour vous, quel est / quels sont le(s) rôle(s) d'une preuve en mathématiques ?

5) Écrivez tous les types d'énoncés mathématiques que vous utilisez quand vous faites des preuves en mathématiques (par exemple : théorème).

6) Qu'utilisez-vous quand vous cherchez à faire une preuve (votre boîte à outils) ?

7) Qu'utilisez-vous quand vous rédigez une preuve (votre boîte à outils) ?

8) Qu'utilisez-vous pour contrôler une preuve que vous avez écrite ?

9) Que contrôlez-vous quand vous lisez une preuve écrite par d'autres personnes ?

Cochez ce qui reflète le mieux la fréquence des situations suivantes et ce que vous pensez, en fonction de votre expérience dans les cours de mathématiques des années antérieures et de l'année en cours.

10) Dans les cours de maths, les preuves étaient produites par l'enseignant seul.

Jamais Très souvent

11) Dans les cours de maths, j'ai construit des preuves avec mes camarades.

Jamais Très souvent

12) Les preuves étaient l'activité principale des cours de mathématiques.

Tout à fait d'accord Pas du tout d'accord

13) Je pense que construire des preuves est fondamental en mathématiques.

Tout à fait d'accord Pas du tout d'accord

14) Je pense que l'on peut faire des études en mathématiques sans être fort dans la construction de preuves.

Tout à fait d'accord Pas du tout d'accord

15) Je pense que les preuves en mathématiques servent à (plusieurs réponses possibles) :

- | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> expliquer | <input type="checkbox"/> découvrir |
| <input type="checkbox"/> convaincre | <input type="checkbox"/> communiquer |
| <input type="checkbox"/> vérifier | <input type="checkbox"/> Autre |
| <input type="checkbox"/> formaliser | |

Si 'Autre' précisez :

Partie V – Parlons de vous !

Êtes-vous

un homme une femme neutre ne souhaite pas répondre

Vous êtes au lycée à l'université

En

2^{nde} 1^{ère} Terminale

Licence 1^{ère} année Licence 2^{ème} année Licence 3^{ème} année

Master 1^{ère} année Master 2^{ème} année

Filière

maths maths-info informatique physique

formation enseignants secondaire formation enseignants primaire

autre (précisez)

Pays :

Région / département :

Nom de votre lycée ou université :

[facultatif]

Vos Nom, prénom, courriel si vous souhaitez un retour sur les résultats de ce questionnaire :