



**HAL**  
open science

## Estimations polynomiales pour les problèmes de transmission sur des domaines à bords plats

Victor Nistor, Hassan Mohsen, Simon Labrunie

► **To cite this version:**

Victor Nistor, Hassan Mohsen, Simon Labrunie. Estimations polynomiales pour les problèmes de transmission sur des domaines à bords plats. *Tunisian Journal of Mathematics*, 2022, 4 (4), pp.755-777. 10.2140/tunis.2022.4.755 . hal-03984802

**HAL Id: hal-03984802**

**<https://hal.science/hal-03984802>**

Submitted on 13 Feb 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# ESTIMATIONS POLYNOMIALES POUR LES PROBLÈMES DE TRANSMISSION SUR DES DOMAINES À BORDS PLATS

HASSAN MOHSEN, SIMON LABRUNIE, AND VICTOR NISTOR

RÉSUMÉ. Cet article traite des opérateurs elliptiques du second ordre  $P$  dont les coefficients sont vus comme des variables aléatoires. Son but est d'obtenir des estimations de leurs solutions qui soient polynomiales dans les coefficients. Ces estimations sont utiles pour la quantification de l'incertitude. Dans cet article, nous traitons le cas dans lequel le bord et l'interface sont parallèles aux hyperplans  $\{x_m = 0\} \subset \mathbb{R}^m$ .

## TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
2. Le domaine, l'opérateur et l'astuce de Nirenberg	2
2.1. Décomposition du domaine $\Omega$	3
2.2. La forme sesquilinéaire $B^A$ et l'opérateur $\mathcal{P}^A := (P^A, \partial_\nu^A)$	5
2.3. L'astuce de Nirenberg	10
3. Groupes de translations	12
4. Estimations sur $\mathbb{R}^m$ sans interface	14
5. Estimations pour le cas à bord ou à interface	16
6. Estimations pour opérateurs fortement elliptiques et intégrabilité	21
Références	22

## 1. INTRODUCTION

Cet article traite des opérateurs elliptiques du second ordre  $P = P^A$

$$P^A u := - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \partial_i (a_{ij} \partial_j u) - \sum_{i=1}^m \partial_i (a_{i,0} u) + \sum_{j=1}^m a_{0,j} \partial_j u + a_{00} u$$

sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  (avec des conditions aux limites) dont les coefficients  $A := (a_{ij})_{i,j=0}^m$  sont vus comme des variables aléatoires. Ici  $\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}$ . Une motivation de ce choix est donnée dans les introductions à la

quantification de l'incertitude (“*uncertainty quantification*”), voir par exemple [12, 17, 21, 31]. Le but de cet article est d'obtenir des estimations de la norme  $\|P^{-1}f\|$  de la solution de l'équation  $Pu = P^A u = f$  qui soient polynomiales dans les coefficients  $A$ . Les résultats principaux dans cette direction sont les théorèmes 1.1 et 5.2. On note (comme d'habitude)  $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^m)$  l'espace des fonctions dont les  $k$  premières dérivées sont bornées [7, 16, 24]. Les meilleures estimations sont obtenues sur  $\mathbb{R}^m$ , à savoir :

**Théorème 1.1.** *Soient  $\Omega := \mathbb{R}^m$  et  $A \in M_{m+1}(W^{k+1,\infty}(\mathbb{R}^m))$ ,  $k \geq -1$ , et supposons que l'opérateur induit  $P = P^A : H^1(\mathbb{R}^m) \rightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^m)$  soit inversible, avec norme notée  $\|P^{-1}\|_0$ . Étant donné  $f \in H^k(\mathbb{R}^m)$ , on a  $P^{-1}f \in H^{k+2}(\mathbb{R}^m)$  et*

$$\|P^{-1}f\|_{H^{k+2}} \lesssim \sum_{q=0}^{k+1} \|P^{-1}\|_0^{q+1} \|A\|_{W^{k+1}}^q \|f\|_{H^{k-q}}. \quad (I_k)$$

Donc, l'opérateur induit  $P_{k+1}^A : H^{k+2}(\mathbb{R}^m) \rightarrow H^k(\mathbb{R}^m)$  est un isomorphisme avec

$$\|P^{-1}\|_{k+1} := \|(P_{k+1}^A)^{-1}\| \leq \|P^{-1}\|_0^{k+2} \|A\|_{W^{k+1}}^{k+1}.$$

Ce type d'estimation est utile pour la quantification de l'incertitude [2, 22, 15, 18, 19, 23, 28].

Le théorème 5.2 est formulé pour des problèmes de transmission avec des conditions aux limites mêlées (Dirichlet et Neumann). En revanche, le domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  est tel que le bord  $\partial\Omega$  et l'interface  $\Gamma$  soient parallèles à  $\mathbb{R}^{m-1} = \{x_m = 0\} \subset \mathbb{R}^m$ . Dans notre cas particulier, on peut obtenir des résultats plus précis avec des méthodes plus simples. Le cas général sera discuté dans d'autres articles. Nous traitons aussi des problèmes à changement de signe (c'est-à-dire, des problèmes qui ne sont pas fortement elliptiques) [3, 4, 10, 11, 5, 6, 29]. Le cas des domaines bornés sera discuté dans [27]. Nous avons aussi généralisé ces résultats pour certaines variétés non compactes sans bord et opérateurs d'ordre supérieur dans [20]. Une conséquence presque immédiate de nos résultats est l'intégrabilité de  $\|(P_{k+1}^A)^{-1}f\|_{H^{k+1}}$  par rapport à certaines mesures de type gaussien sur l'ensemble des coefficients  $A$ , voir théorème 6.4.

## 2. LE DOMAINE, L'OPÉRATEUR ET L'ASTUCE DE NIRENBERG

Ici nous décrivons les ingrédients nécessaires pour formuler notre problème. Nous discutons aussi des préliminaires, comme une extension de l'astuce de Nirenberg. On note  $\partial U$  le bord  $\partial U := \bar{U} \setminus U$  d'un

ouvert  $U$ , voir [7, 8, 16, 24, 32] pour les concepts qui ne sont pas expliqués dans cet article. Voir aussi [13, 14, 25, 33].

**2.1. Décomposition du domaine  $\Omega$ .** Nous formulons maintenant un problème de transmission pour le cas d'un domaine général à bord lisse.

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  un ouvert *connexe*. On suppose que  $\Omega$  est décomposé en  $N$  ouverts, c'est-à-dire qu'il existe  $N$  ouverts  $\Omega_n \subset \Omega$ ,  $n = 1, \dots, N$ , deux-à-deux disjoints, tels que

$$(1) \quad \bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2 \cup \dots \cup \bar{\Omega}_N.$$

Alors l'ensemble

$$(2) \quad \Gamma := \left( \bigcup_{n=1}^N \partial\Omega_n \right) \setminus \partial\Omega$$

est appelé *l'interface* (pour cette décomposition). Comme  $\Omega$  est ouvert, on a donc

$$(3) \quad \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_N \cup \Gamma.$$

On peut supposer que chaque  $\Omega_n$  est connexe.

Pour simplifier les notations, nous écrirons aussi  $\Omega_0 := \Omega$ . Dans les sections suivantes, nous ferons diverses hypothèses sur les ouverts  $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_N$  et sur l'interface  $\Gamma$ . Pour l'instant, nous formulons un problème de transmission général, pour lequel nous avons besoin des conditions suivantes.

**Hypothèses 2.1.** Pour chaque  $n = 0, \dots, N$ , on a :

- (1) Le bord  $\partial\Omega_n$  est lisse, et il existe un champ de vecteurs  $\nu^{[n]}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\bar{\Omega}_n$  qui, au bord, est de longueur 1 et normal sortant.
- (2) On choisit un champ de vecteurs  $\mathbf{N} : \Gamma \rightarrow TM$  normal à  $\Gamma$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  et de longueur 1.
- (3) On se donne une décomposition de la frontière

$$\partial\Omega = \partial_D\Omega \cup \partial_N\Omega,$$

avec  $\partial_N\Omega \subset \partial\Omega$  ouvert.

On note que le bord  $\partial\Omega_n$  de  $\Omega_n$  n'est pas supposé connexe. Nous allons imposer des conditions aux limites de type Neumann sur  $\partial_N\Omega$ , et de type Dirichlet sur  $\partial_D\Omega$ . Nous noterons  $\nu : \Omega \setminus \Gamma \rightarrow TM$  le champ vectoriel qui, sur  $\Omega_n$ , coïncide avec  $\nu^{[n]}$ . Comme les  $\partial\Omega_n$  sont lisses, on a que  $\Gamma$  est fermé et  $\Gamma \cap \partial\Omega = \emptyset$ .

Pour étudier les problèmes de transmission, il est naturel de considérer les espaces de Sobolev brisés. Soit  $U \subset \Omega$  un ouvert. On note comme d'habitude  $H^s(U)$  les espaces de Sobolev hilbertiens sur  $U$ , et  $W^{k,\infty}(U) := \{u \mid \partial^\alpha u \in L^\infty(U), |\alpha| \leq k\}$ . On définit alors

$$(4) \quad \begin{aligned} \check{H}^s(U) &:= \bigoplus_{n=1}^N H^s(U \cap \Omega_n) \\ \check{W}^{s,\infty}(U) &:= \bigoplus_{j=1}^N W^{s,\infty}(U \cap \Omega_n), \quad s \geq 0, \end{aligned}$$

avec les normes  $\|\cdot\|_{\check{H}^s(U)}$  et  $\|\cdot\|_{\check{W}^s(U)}$ . Nous omettrons  $U$  s'il n'y a pas de risque de confusion, donc les normes sur ces espaces seront notées génériquement  $\|\cdot\|_{\check{H}^s}$  et  $\|\cdot\|_{\check{W}^s}$ . Tous nos espaces fonctionnels seront des espaces vectoriels complexes.

Comme  $\Gamma$  est lisse, le vecteur  $\mathbf{N} : \Gamma \rightarrow TM$  normal unitaire à  $\Gamma$  est défini partout. Donc, si  $p \in \Gamma \cap \partial\Omega_n$ , on a  $\mathbf{N}(p) = \pm\nu^{[n]}(p)$ . Si on a  $\mathbf{N}(p) = +\nu^{[n]}(p)$ , on va dire que  $\Omega_n$  est à *droite* de  $\Gamma$  en  $p$ . Sinon, on va dire que  $\Omega_n$  est à *gauche* de  $\Gamma$  en  $p$ . Si on fixe une composante connexe  $\Gamma_k$  de  $\Gamma$ , on aura exactement un domaine  $\Omega_+$  à droite de (tout point de)  $\Gamma_k$  et un domaine  $\Omega_-$  à gauche (de tout point) de  $\Gamma_k$ . Pour  $k$  fixé et  $u \in \check{H}^1(\Omega)$ , on note alors  $u^+ := u|_{\Omega_+} \in H^1(\Omega_+)$  et  $u^- := u|_{\Omega_-} \in H^1(\Omega_-)$ , qui donc auront des traces sur les bords  $\partial\Omega_\pm$ , et donc aussi des traces  $u^\pm|_{\Gamma_k} \in H^{1/2}(\Gamma_k)$  sur  $\Gamma_k = \partial\Omega_+ \cap \partial\Omega_-$  (on rappelle qu'on a supposé les  $\Omega_n$  connexes et à bords lisses).

**Définition 2.2.** Avec les notations du paragraphe ci-dessus, on définit le saut  $[[u]]_\Gamma \in H^{1/2}(\Gamma) = \bigoplus_j H^{1/2}(\Gamma_j)$  (où  $\Gamma_j$  sont les composantes connexes de  $\Gamma$ ) par

$$(5) \quad \begin{aligned} [[u]]_{\Gamma_k} &:= u^+|_{\Gamma_k} - u^-|_{\Gamma_k} \in H^{1/2}(\Gamma_k) \quad \text{et} \\ [[u]]_\Gamma &:= [[u]]_{\Gamma_k} \text{ sur } \Gamma_k \subset \Gamma. \end{aligned}$$

**Remarque 2.3.** Soit  $u \in \check{H}^1(\Omega)$ . On a  $u \in H^1(\Omega)$  si et seulement si  $[[u]]_\Gamma = 0$ . De plus, l'application  $[[\cdot]]_\Gamma : \check{H}^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$  est surjective, c'est-à-dire qu'on a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^1(\Omega) \longrightarrow \check{H}^1(\Omega) \xrightarrow{[[\cdot]]_\Gamma} H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow 0.$$

En particulier,  $\check{H}^1(\Omega) \simeq H^1(\Omega) \oplus H^{1/2}(\Gamma)$ , mais cet isomorphisme n'est pas canonique. Voir [26] pour la démonstration.

On rappelle la décomposition  $\partial\Omega = \partial_D\Omega \cup \partial_N\Omega$ . Pour notre propos, un espace plus important que  $H^1(\Omega)$  sera l'espace

$$H_D^1(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) \mid u|_{\partial_D\Omega} = 0\}.$$

Pour cet espace, on a une suite exacte comme dans la remarque 2.3.

**Remarque 2.4.** Par analogie avec la remarque 2.3, on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H_D^1(\Omega) \longrightarrow \check{H}^1(\Omega) \cap \{w|_{\partial_D\Omega} = 0\} \xrightarrow{[[\cdot]]_\Gamma} H^{1/2}(\Gamma) \longrightarrow 0.$$

En particulier,  $\check{H}_D^1(\Omega) := \check{H}^1(\Omega) \cap \{w|_{\partial_D\Omega} = 0\} \simeq H_D^1(\Omega) \oplus H^{1/2}(\Gamma)$ .

**2.2. La forme sesquilinéaire  $B^A$  et l'opérateur  $\mathcal{P}^A := (P^A, \partial_\nu^A)$ .** Nous allons supposer à présent que les champs de vecteurs  $\nu^{[k]}$  ont été choisis tels que

$$(6) \quad \nu = (\nu^{[k]}) \in \check{W}^{1,\infty}(\Omega)^m,$$

(c'est-à-dire que chaque composante  $\nu_j$  de  $\nu$  est dans  $\check{W}^{1,\infty}(\Omega)$ , ou, encore, chaque  $\nu^{[n]} \in W^{1,\infty}(\Omega_n)^m$ ).

**2.2.1. Définition de la forme  $B^A$  et des opérateurs  $P^A$  et  $\partial_\nu^A$ .** Nous supposons donnés les coefficients  $a_{ij} = a_{i,j} \in L^\infty(\Omega)$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, m$ . Ces coefficients sont assemblés dans une matrice  $A$  de dimensions  $(m+1) \times (m+1)$ . On note  $\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}$ , pour  $j = 1, 2, \dots, m$  et, comme avant, et, de plus,  $\partial_0 = Id$ , l'opérateur identité. Soit alors  $B = B^A$  la forme sesquilinéaire sur  $\check{H}^1(\Omega)$  définie comme

$$(7) \quad \begin{aligned} B^A(u, v) &= B(u, v) := \sum_{i,j=0}^m \int_{\Omega} a_{ij} \partial_j u \partial_i \bar{v} \, dx \\ &= \int_{\Omega} \left( \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \partial_j u \partial_i \bar{v} + \sum_{i=1}^m a_{i,0} u \partial_i \bar{v} + \sum_{j=1}^m a_{0,j} (\partial_j u) \bar{v} + a_{00} u \bar{v} \right) dx. \end{aligned}$$

**Définition 2.5.** Soient  $P^A$

$$P^A u := - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \partial_i (a_{ij} \partial_j u) - \sum_{i=1}^m \partial_i (a_{i,0} u) + \sum_{j=1}^m a_{0,j} \partial_j u + a_{00} u$$

l'opérateur différentiel associé à  $A$  et

$$\partial_\nu^A u := \sum_{i=1}^m \nu_i \left( \sum_{j=1}^m a_{ij} \partial_j u + a_{i,0} u \right),$$

la dérivée conormale associée à  $A$ .

On omettra parfois l'exposant  $A$  pour alléger les notations.

**Remarque 2.6.** Si  $u \in \check{H}^2(\Omega)$  et  $A \in \check{W}^{1,\infty}(\Omega)$ , alors  $\partial_\nu^A u \in \check{H}^1(\Omega)$  (car on a supposé que  $\nu \in \check{W}^{1,\infty}(\Omega)^m$ ), et donc le saut  $[[\partial_\nu^A u]]_\Gamma \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  est défini. Pour une composante connexe  $\Gamma_k$  de l'interface, soient  $\Omega^+$  et  $\Omega^-$  les deux domaines qui touchent  $\Gamma_k$ , et soient  $\nu^+$ ,  $\nu^-$  leurs normales sortantes ( $\nu^- = -\nu^+$ ). Alors :

$$[[\partial_\nu^A u]] = \sum_{i=1}^m \nu_i^+ \left( \sum_{j=1}^m a_{ij} \partial_j u^+ + a_{i,0} u^+ \right) + \sum_{i=1}^m \nu_i^- \left( \sum_{j=1}^m a_{ij} \partial_j u^- + a_{i,0} u^- \right).$$

Autrement dit la formule est symétrique, et ne dépend pas de l'orientation du champ de vecteurs  $\mathbf{N}$ .

**Notations 2.7.** On pose  $(\cdot, \cdot)$  pour le produit scalaire de  $L^2(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^m$  et  $(\cdot, \cdot)_\Sigma$  pour le produit scalaire de  $L^2(\Sigma)$ , où  $\Sigma$  est un ensemble muni d'une mesure naturelle, habituellement un sous-ensemble de  $\bigcup \partial\Omega_i$ , muni de la mesure de surface  $S$ . Nous écrivons alors  $(u, v)_\Sigma$  au lieu de  $(u|_\Sigma, v|_\Sigma)_\Sigma$ .

**Lemme 2.8.** Soient  $P = P^A$  et  $\partial_\nu^A$  comme dans la définition 2.5. Supposons aussi que  $A \in \check{W}^{1,\infty}(\Omega)$ . Alors, pour tous  $u \in \check{H}^2(\Omega)$  et  $v \in H^1(\Omega)$ , on a

$$B(u, v) = (Pu, v) + (\partial_\nu^A u, v)_{\partial\Omega} + ([[ \partial_\nu^A u ]])_\Gamma, v)_\Gamma.$$

*Démonstration.* Une intégration par parties sur chaque  $\Omega_n$ ,  $n = 1, \dots, N$  donne, compte tenu de la remarque 2.6 :

$$\begin{aligned} B(u, v) &= \sum_{n=1}^N \int_{\Omega_n} \left( \sum_{i,j=1}^m a_{ij} \partial_j u \partial_i \bar{v} + \sum_{i=1}^m a_{i,0} u \partial_i \bar{v} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^m a_{0,j} (\partial_j u) \bar{v} + a_{00} u \bar{v} \right) dx \\ &= (Pu, v) + \sum_{n=1}^N \int_{\partial\Omega_n} (\partial_\nu^A u) \bar{v} dS(x) \\ &= (Pu, v) + (\partial_\nu^A u, v)_{\partial\Omega} + ([[ \partial_\nu^A u ]])_\Gamma, v)_\Gamma, \end{aligned}$$

pour tous  $u \in \check{H}^2(\Omega)$  et  $v \in H^1(\Omega)$ .  $\square$

On note que cette formule n'a plus de sens si on a seulement  $v \in \check{H}^1(\Omega)$ .

**Remarque 2.9.** Si on travaille seulement avec l'opérateur  $P$  sans faire usage de la forme  $B$ , alors, on peut penser que les termes  $\partial_i(a_{i,0}u)$

sont redondants par rapport aux  $a_{0,j} \partial_j u$ . En fait, ce n'est pas le cas, car le terme  $a_{i,0} u$  apparaît dans la formule de la dérivée conormale, contrairement à l'autre. La répartition entre les deux types de termes du premier ordre est directement liée à la condition aux limites du problème. De plus, si les coefficients sont assez lisses, on peut basculer (par une intégration par parties) entre les deux types de termes dans la formule de  $P$ , mais cela suppose une régularité plus forte des coefficients. Pour nous, il est plus pratique de garder les deux types de termes et de supposer que tous les coefficients ont la même régularité, c'est-à-dire  $\check{W}^{k,\infty}(\Omega)$ .

2.2.2. *Les espaces  $V_k$  et  $V_k^-$ .* Notre problème va être posé dans les espaces :

$$\begin{aligned} V_k &:= \check{H}^{k+1}(\Omega) \cap H_D^1(\Omega) \\ &:= \left( \bigoplus_{i=1}^N H^{k+1}(\Omega_i) \right) \cap H_D^1(\Omega) \\ &:= \{w \in \check{H}^{k+1}(\Omega) \mid [[w]]_\Gamma = 0, w|_{\partial_D \Omega} = 0\}, \quad \text{pour } k \geq 0, \\ V_k^- &:= \check{H}^{k-1}(\Omega) \oplus H^{k-\frac{1}{2}}(\partial_N \Omega \cup \Gamma) \\ &:= \bigoplus_{i=1}^N H^{k-1}(\Omega_i) \oplus H^{k-\frac{1}{2}}(\partial_N \Omega) \oplus H^{k-\frac{1}{2}}(\Gamma), \quad \text{pour } k > 0, \quad \text{et} \\ V_0^- &:= V_0^* := H_D^1(\Omega)^*. \end{aligned}$$

**Remarque 2.10.** D'après la remarque 2.3, on a aussi  $V_k^- \simeq \check{H}^{k-1}(\Omega) \oplus H^{k-\frac{1}{2}}(\partial_N \Omega \cup \Gamma)$  pour  $k = 0$ , mais cet isomorphisme n'est pas canonique. Nous ne nous en servons pas, mais ce résultat montre une certaine uniformité dans la définition des espaces  $V_k^-$ .

**Remarque 2.11.** Il résulte immédiatement des définitions que  $V_{k+1} \subset V_k$  pour  $k \geq 0$ , et  $V_{k+1}^- \subset V_k^-$ , pour  $k \geq 1$ . On définit aussi

$$I : V_1^- := L^2(\Omega) \oplus H^{\frac{1}{2}}(\partial_N \Omega) \oplus H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow V_0^- := V_0^* := H_D^1(\Omega)^*$$

par la formule

$$\langle I(f, g, h), v \rangle := (f, v) + (g, v)_{\partial_N \Omega} + (h, v)_\Gamma.$$

(On rappelle que  $(g, v)_{\partial_N \Omega} := (g, v|_{\partial_N \Omega})_{\partial_N \Omega}$ , etc ...)

Cette remarque justifie d'identifier canoniquement (et par abus de notation),  $V_1^-$  avec un sous-espace de  $V_0^-$ . Donc, nous écrirons  $V_{k+1}^- \subset V_k^-$ , pour tout  $k \geq 0$ .



2.2.3. *Les opérateurs  $\mathcal{P}_k^A$ .* Pour  $k = 0$ , l'opérateur  $\mathcal{P}_0^A : V_0 \rightarrow V_0^- := V_0^*$  est obtenu à partir de la forme sesquilinéaire, c'est à dire par la relation

$$(8) \quad B^A(u, v) = \langle \mathcal{P}_0^A u, v \rangle_{V_0^*, V_0}.$$

(Ici,  $V_0^*$  est le dual antilinéaire de  $V_0$ .) Pour  $k \geq 1$ , on définit

$$(9) \quad \mathcal{P}_k^A u := (P_k^A u, \partial_\nu^A u|_{\partial_N \Omega}, [[\partial_\nu^A u]]_\Gamma), \quad \mathcal{P} : V_k \rightarrow V_k^-, \quad k \geq 1.$$

Si l'n'y a pas risque de confusion, nous omettrons parfois l'indice  $k$  ou les coefficients  $A$  dans les notations  $P_k^A$  et  $\mathcal{P}_k^A$ . Les opérateurs  $\mathcal{P}_k^A : V_k \rightarrow V_k^-$  sont les *opérateurs différentiels associés* à  $A$  pour  $k \geq 0$ .

**Remarque 2.12.** Evidemment, pour  $k \geq 1$ , l'opérateur  $\mathcal{P}_{k+1} = \mathcal{P}_{k+1}^A$  est la restriction de  $\mathcal{P}_k = \mathcal{P}_k^A$  à  $V_{k+1}$ , d'après les inclusions  $V_{k+1} \subset V_k$  et  $V_{k+1}^- \subset V_k^-$ . De plus, la même relation reste vraie pour  $k = 0$ , grâce à l'inclusion  $I : V_1^- \rightarrow V_0^-$ . En effet, le lemme 2.8 donne pour tous  $u \in V_1$  et  $v \in V_0$  :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}_0 u, v \rangle_{V_0^*, V_0} &=: B(u, v) \\ &= (Pu, v) + (\partial_\nu^A u, v)_{\partial \Omega} + ([[ \partial_\nu^A u ]]_\Gamma, v)_\Gamma \\ &= (Pu, v) + (\partial_\nu^A u, v)_{\partial_N \Omega} + ([[ \partial_\nu^A u ]]_\Gamma, v)_\Gamma \\ &=: \langle I(\mathcal{P}_1 u), v \rangle_{V_0^*, V_0}. \end{aligned}$$

Donc  $I(\mathcal{P}_1 u) = \mathcal{P}_0 u$  pour tout  $u \in V_1$ .

La remarque suivante fait la connexion avec les problèmes classiques de transmission à conditions mêlées, i.e. de types Dirichlet et Neumann.

**Remarque 2.13.** Soit  $F = (f, g, h) \in V_1^- = L^2(\Omega) \oplus H^{1/2}(\partial_N \Omega \cup \Gamma)$ . Pour  $u \in \check{H}^2(\Omega)$ , l'équation  $\mathcal{P}u = F$  est alors équivalente au système suivant :

$$(10) \quad \begin{cases} Pu = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial_D \Omega \\ \partial_\nu^A u = g & \text{sur } \partial_N \Omega \\ [[u]]_\Gamma = 0 & \text{sur } \Gamma \\ [[\partial_\nu^A u]]_\Gamma = h & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

Si  $\mathcal{P} : V_1 \rightarrow V_1^-$  est inversible, alors la solution de ce problème (de transmission mêlé) est donc  $u := \mathcal{P}^{-1}F$ , où  $F := (f, g, h) \in V_k^-$ .

2.2.4. *Normes des opérateurs.* On étudie ici les normes des opérateurs  $P = P_k^A$  et  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_k^A$ , restrictions des opérateurs  $P^A$  et  $\mathcal{P}^A$  à  $V_k := \check{H}^{k+1}(\Omega) \cap H_D^1(\Omega)$ . Celles définies ci-après apparaissent souvent dans nos résultats.

**Définition 2.14.** Soient  $T_1 \in \mathcal{L}(V_k; V_k^-)$  et  $T_2 \in \mathcal{L}(V_k^-; V_k)$ . On note

$$\|T_1\|_k := \|T_1\|_{\mathcal{L}(V_k; V_k^-)} \quad \text{et} \quad \|T_2\|_k := \|T_2\|_{\mathcal{L}(V_k^-; V_k)}$$

et, pour une matrice  $A$  de taille  $(m+1) \times (m+1)$  dont les éléments appartiennent à  $\check{W}^{k, \infty}(\Omega)$  :

$$\|A\|_{\check{W}^{k, \infty}} := \max_{0 \leq i \leq m+1} \left\{ \sum_{j=0}^{m+1} \|a_{ij}\|_{\check{W}^{k, \infty}}, \sum_{j=0}^{m+1} \|a_{ji}\|_{\check{W}^{k, \infty}} \right\}.$$

Nous écrivons  $D_1 \lesssim D_2$  s'il existe  $C_{m,k} > 0$  tel que  $D_1 \leq C_{m,k} D_2$ , où  $C_{m,k}$  dépend seulement de  $m$  et  $k$ , qui sont, d'habitude, la dimension  $m$  de l'espace  $\mathbb{R}^m \supset \Omega$  et l'exposant  $k$  de Sobolev dans les définitions des espaces  $V_k$ ,  $V_k^-$  ou  $\check{W}^k$ , respectivement.

**Lemme 2.15.** Soit  $k \geq 0$ . Soient  $a, b \in \check{W}^{k, \infty}(\Omega)$  et  $f \in \check{H}^k(\Omega)$ .

- (i)  $\|ab\|_{\check{W}^k} \lesssim \|a\|_{\check{W}^k} \|b\|_{\check{W}^k}$ .
- (ii)  $af \in \check{H}^k(\Omega)$  et  $\|af\|_{\check{H}^k} \lesssim \|a\|_{\check{W}^k} \|f\|_{\check{H}^k}$ .
- (iii) Par conséquent, si  $A = (a_{ij})_{i,j=0}^{m+1} \in M_{m+1}(\check{W}^{k, \infty}(\Omega))$  et  $\mathcal{P}_k^A : V_k \rightarrow V_k^-$  est l'opérateur différentiel associé à  $A$  (voir §2.2.3), alors

$$\|\mathcal{P}_k^A\|_k \lesssim \|A\|_{\check{W}^k}.$$

*Démonstration.* Les deux premières inégalités suivent des définitions. Pour montrer (iii), supposons d'abord que  $k = 0$ . Alors, la continuité de  $\mathcal{P}_0^A : V_0 \rightarrow V_0^-$  est une conséquence de la première inégalité pour  $k = 0$  et de la continuité des applications  $\partial_j : V_0 \rightarrow L^2(\Omega)$  et  $\partial_j = -\partial_j^* : L^2(\Omega) \rightarrow V_0^*$ . Si  $k \geq 1$ , il suit des définitions que pour tous  $k \geq 0$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$  et  $U \subset \mathbb{R}^m$  ouvert on a

$$(11) \quad \|\partial_j u\|_{H^{k-1}(U)} \leq \|u\|_{H^k(U)}.$$

(Cette relation est triviale pour  $j = 0$ , car, on rappelle,  $\partial_0 = id$ .) En utilisant cette relation pour tous les  $U = \Omega_n$  et en supposant, par linéarité, que  $P = \partial_i a_{ij} \partial_j$ , on en déduit que

$$\|Pu\|_{\check{H}^{k-1}} = \|\partial_i(a_{ij} \partial_j u)\|_{\check{H}^{k-1}} \leq \|a_{ij} \partial_j u\|_{\check{H}^k} \lesssim \|a_{ij}\|_{\check{W}^k} \|\partial_j u\|_{\check{H}^k} \lesssim \|a_{ij}\|_{\check{W}^k} \|u\|_{\check{H}^{k+1}}.$$

Pour obtenir l'estimation de  $\|\mathcal{P}u\|_{V_k^-}$ , il faut aussi estimer

$$\|\partial_\nu^A u\|_{H^{k-1/2}(\partial_N \Omega)} = \|(\nu_i a_{ij} \partial_j u)|_{\partial_N \Omega}\|_{H^{k-1/2}(\partial_N \Omega)} \leq \|\nu_i\|_{\check{W}^1} \| \|a_{ij}\|_{\check{W}^1} \|\partial_j u\|_{\check{H}^{k+1}}$$

et  $\|[\partial_\nu^A u]_\Gamma\|_{H^{k-1/2}(\partial_N \Omega)}$ , ce se fait de manière toute semblable.  $\square$

**Lemme 2.16.** Soit  $A \in M_{m+1}(\check{W}^k(\Omega))$  et  $\mathcal{P}_k^A : V_k \rightarrow V_k^-$  l'opérateur associé (voir §2.2.3), qu'on suppose inversible. Alors

$$1 \lesssim \|\mathcal{P}^{-1}\|_k \|A\|_{\check{W}^k} \quad \text{et} \quad 1 \lesssim \|a_{ij}^{-1}\|_{\check{W}^k} \|A\|_{\check{W}^k}.$$

*Démonstration.* En effet, les propriétés des normes des opérateurs et le lemme 2.15 donnent

$$1 = \|\mathcal{P}^{-1}\mathcal{P}\|_{\mathcal{L}(V_k, V_k^-)} \leq \| \|\mathcal{P}^{-1}\| \| \|\mathcal{P}\| \| \lesssim \| \|\mathcal{P}^{-1}\| \| \|A\|_{\check{W}^k}.$$

(Voir la définition 2.14 pour les normes utilisées). Finalement, d'après le lemme 2.15(i), on a  $1 \leq \|a_{ij}^{-1}\|_{\check{W}^k} \|A\|_{\check{W}^k}$ .  $\square$

**2.3. L'astuce de Nirenberg.** Dans cette section on montre une version du lemme de Nirenberg, telle que formalisée dans [9]. Rappelons d'abord les définitions suivantes. On écrit  $t \searrow 0$  si  $t \rightarrow 0$  et  $t > 0$ .

**Définition 2.17.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Banach, on dit qu'une famille  $(T_t)_{t \geq 0}$  d'opérateurs converge fortement vers  $T$  dans  $\mathcal{L}(X, Y)$  pour  $t \searrow 0$  si :

$$\forall u \in X, \quad \lim_{t \searrow 0} \|T_t u - T u\|_Y = 0.$$

**Définition 2.18.** Une famille d'opérateurs  $(S(t))_{t \geq 0}$  de  $\mathcal{L}(X)$  est un *semi-groupe fortement continu* sur  $X$  lorsque les conditions suivantes sont réalisées.

- (i)  $S(0) = Id_X$ .
- (ii) Pour tous  $t \geq 0$  et  $r \geq 0$ ,  $S(t+r) = S(t)S(r)$ .
- (iii) Pour tout  $x \in X$ ,  $\lim_{t \searrow 0} \|S(t)x - x\|_X = 0$ .

Tout semi-groupe fortement continu admet un générateur infinitésimal de domaine dense [1, 24, 30, 32].

**Définition 2.19.** Soit  $(S(t))_{t \geq 0}$  un semi-groupe fortement continu sur  $X$ . On rappelle que le *générateur infinitésimal* du semi-groupe  $(S(t))_{t \geq 0}$  est l'opérateur  $(L_S, \mathcal{D}(L_S))$ , non borné en général, défini par

$$\mathcal{D}(L_S) := \{x \in X \mid \lim_{t \searrow 0} t^{-1}(S(t)x - x) \text{ existe dans } X\}$$

$$\forall x \in \mathcal{D}(L_S), \quad L_S x := \lim_{t \searrow 0} t^{-1}(S(t)x - x).$$

Le lemme suivant va jouer un rôle essentiel dans la suite (c'est l'astuce de Nirenberg, voir aussi [9, 25] et leurs bibliographies).

**Lemme 2.20.** Soit  $T : X \rightarrow Y$  un opérateur continu bijectif entre deux espaces de Banach et soit  $\|T^{-1}\|$  la norme de son inverse dans  $\mathcal{L}(Y, X)$ . Soient  $S_X(t) \in \mathcal{L}(X)$  et  $S_Y(t) \in \mathcal{L}(Y)$  deux semi-groupes fortement continus, de générateurs infinitésimaux respectifs  $(L_X, \mathcal{D}(L_X))$  et  $(L_Y, \mathcal{D}(L_Y))$ . Pour  $t \in \mathbb{R}$ , soit  $T_t \in \mathcal{L}(X, Y)$  tel que  $T_t S_X(t) = S_Y(t)T \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Supposons que, lorsque  $t \searrow 0$ ,  $t^{-1}(T_t - T)$  converge fortement dans  $\mathcal{L}(X, Y)$  vers un opérateur borné  $Q \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Alors :

(i)  $T(\mathcal{D}(L_X)) \subset \mathcal{D}(L_Y)$ .

(ii) L'opérateur induit  $\tilde{T} := T|_{\mathcal{D}(L_X)} : \mathcal{D}(L_X) \rightarrow \mathcal{D}(L_Y)$  est continu et bijectif.

(iii) Pour tout  $v$  dans  $\mathcal{D}(L_Y)$ , on a  $L_X T^{-1}v = T^{-1}L_Y v - T^{-1}QT^{-1}v$ .

*Démonstration.* Soit  $x \in X$ . On a

$$u \in \mathcal{D}(L_X) \Leftrightarrow \lim_{t \searrow 0} t^{-1}(S_X(t) - 1)u = L_X u.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} S_Y(t)Tu - Tu &= T_t S_X(t)u - Tu \\ &= (T_t - T + T)S_X(t)u - Tu \end{aligned}$$

si bien que

$$(12) \quad S_Y(t)Tu - Tu = (T_t - T)S_X(t)u + T(S_X(t) - 1)u,$$

et comme  $\lim_{t \searrow 0} t^{-1}(T_t - T)\eta = Q\eta$  dans  $Y$  pour tout  $\eta \in X$  on trouve que :

$\lim_{t \searrow 0} t^{-1}(S_Y(t)Tu - Tu)$  existe si et seulement si  $\lim_{t \searrow 0} t^{-1}(S_X(t) - 1)u$  existe .

Donc  $u \in \mathcal{D}(L_X) \Leftrightarrow Tu \in \mathcal{D}(L_Y)$ . De plus, en divisant (12) par  $t$ , et en passant à la limite, on trouve que

$$(13) \quad \forall u \in \mathcal{D}(L_X), \quad L_Y Tu = Qu + T(L_X u) .$$

Ainsi,

$$\|Tu\|_{\mathcal{D}(L_Y)} := \|Tu\|_Y + \|L_Y(Tu)\|_Y \leq \|T\|\|u\|_X + \|Q\|\|u\|_X + \|T\|\|L_X u\|_X .$$

Et donc,

$$\|Tu\|_{\mathcal{D}(L_Y)} \leq C (\|u\|_X + \|L_X u\|_X) =: C\|u\|_{\mathcal{D}(L_X)} ,$$

c'est-à-dire que  $T : \mathcal{D}(L_X) \rightarrow \mathcal{D}(L_Y)$  est bien défini et continu. Ceci montre (i) et (ii). Finalement, (ii) nous donne que :

$$u \in \mathcal{D}(L_X) \Rightarrow \exists v \in \mathcal{D}(L_Y) : u = T^{-1}v .$$

En multipliant la relation (13) par  $T^{-1}$  et en remplaçant  $u$  par  $T^{-1}v$ , on trouve (iii).  $\square$

## 3. GROUPES DE TRANSLATIONS

Dans la suite, nous supposons que les bords  $\partial\Omega_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$  sont parallèles à l'hyperplan  $\mathbb{R}^{m-1} \simeq \{x_m = 0\} \subset \mathbb{R}^m$ . C'est-à-dire, pour chaque  $n$ , il existe un intervalle ouvert  $I_n \subset \mathbb{R}$  ouvert, tel que  $\Omega_n = \mathbb{R}^{m-1} \times I_n$ , car on a supposé que les ouverts  $\Omega_n$  sont connexes. Un cas spécial est le cas "trivial"  $N = 1$  et  $\Omega = \mathbb{R}^m$ , c'est-à-dire,  $\bigcup_{n=0}^N \partial\Omega_n = \emptyset$ . Nous allons choisir  $\mathbf{N} = e_m$  et  $\nu^{[n]}$  en interpolant linéairement entre  $-e_m$  (à gauche) et  $e_m$  (à droite), de façon que les conditions de la section 2.1 soient satisfaites.

Il est utile d'étudier les domaines des opérateurs  $L_X$  et  $L_Y$  dans la formalisation du lemme 2.20. On rappelle qu'on note  $\mathcal{D}(L)$  le domaine d'un opérateur non borné  $L$  et  $L_S$  le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu  $S$ . On note  $e_1, e_2, \dots, e_m$  la base (orthonormale) canonique de  $\mathbb{R}^m$ .

**Proposition 3.1.** *Soient  $k \geq 0$  et  $1 \leq \ell \leq m$  ( $\ell < m$  si  $\bigcup_{n=0}^N \partial\Omega_n \neq \emptyset$ ). Soit*

$$\tau_t u(x) := u(x + te_\ell).$$

- (i)  $\tau_\ell$  définit un groupe fortement continu  $S(t)$  d'isométries de  $V_k$ . On a  $V_{k+1} \subset \mathcal{D}(L_S)$  et  $L_S = \partial_\ell$  sur  $V_{k+1}$ .
- (ii) De même,  $\tau_\ell$  définit un groupe fortement continu  $S_-(t)$  d'isométries de  $V_k^-$ . On a  $V_{k+1}^- \subset \mathcal{D}(L_{S_-})$  et  $L_{S_-} = \partial_\ell$  sur  $V_{k+1}^-$ .
- (iii)  $\partial_\ell : V_{k+1} \rightarrow V_k$  et  $\partial_\ell : V_{k+1}^- \rightarrow V_k^-$  sont continus.
- (iv)  $\tau_\ell$  définit aussi un groupe d'isométries (noté  $\tau_\ell^*$ ) de  $\check{W}^{k,\infty}(\Omega)$  (qui, par contre, n'est pas fortement continu).
- (v) On a  $S(t)\mathcal{P}_k^A = \mathcal{P}_k^{\tau_t^*(A)} S_-(t)$  pour  $t \in \mathbb{R}$  et  $A \in M_{m+1}(\check{W}^{k,\infty}(\Omega))$  (voir §2.2.3 pour la notation).
- (vi) Si  $A \in M_{m+1}(\check{W}^{k+1,\infty}(\Omega))$ , alors

$$t^{-1}(\mathcal{P}_k^{\tau_t^*(A)} - \mathcal{P}_k^A) \rightarrow \mathcal{P}_k^{\partial_\ell(A)} =: \partial_\ell(\mathcal{P}_k^A)$$

fortement dans  $\mathcal{L}(V_k; V_k^-)$ .

On remarque que pour que la limite dans (vi) existe, on a besoin d'une meilleure régularité des coefficients (*i. e.*,  $A \in M_{m+1}(\check{W}^{k+1,\infty}(\Omega))$ ) que la régularité usuelle (*i. e.*,  $A \in M_{m+1}(\check{W}^{k,\infty}(\Omega))$ ).

*Démonstration.* Il suffit de montrer l'inclusion continue  $V_1^- \subset \mathcal{D}(L_S)$  et le point (vi), car le reste découle directement des définitions.

Pour l'inclusion continue  $V_1^- \subset \mathcal{D}(L_S)$ , on utilise l'inclusion  $I : V_1^- \rightarrow V_0^-$  de la remarque 2.11. Pour tout  $v \in H_D^1(\Omega) =: V_0$  et  $(f, g, h) \in V_1^- := L^2(\Omega) \oplus H^{1/2}(\partial_N \Omega) \oplus H^{1/2}(\Gamma)$ , on a :

$$\begin{aligned} \langle t^{-1}(S(t) - 1)I(f, g, h), v \rangle &= \langle I(f, g, h), t^{-1}(S(-t) - 1)v \rangle \\ &:= (f, t^{-1}(S(-t) - 1)\bar{v}) + (g \oplus h, t^{-1}(S(-t) - 1)\bar{v})_{\partial_N \Omega \cup \Gamma} \\ &\rightarrow -(f, \partial_\ell v) - \langle g, \partial_\ell(v|_{\partial_N \Omega}) \rangle_{\partial_N \Omega} - \langle h, \partial_\ell(v|_\Gamma) \rangle_\Gamma \\ &=: \langle \partial_\ell I(f, g, h), v \rangle = \langle \partial_\ell f, v \rangle_\Omega + \langle \partial_\ell g, v \rangle_{\partial_N \Omega} + \langle \partial_\ell h, v \rangle_\Gamma, \end{aligned}$$

pour  $t \searrow 0$ , où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Sigma$  est la dualité entre les distributions et les fonctions-test sur l'ensemble  $\Sigma$  (qui est une extension du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_\Sigma$ ). Donc  $I(f, g, h)$  est dans le domaine du générateur infinitésimal  $L_{S_-}$  de  $S_-$  et  $L_{S_-} I(f, g, h) = \partial_\ell I(f, g, h)$ . De plus, on obtient que  $\partial_\ell : V_1^- \rightarrow V_0^-$  est continue.

Pour le point (vi), on peut supposer (par linéarité) que  $Pu = \partial_i(a_{ij}\partial_j u)$ , avec  $a_{ij} \in \check{W}^{k+1, \infty}(\Omega)$ . Soit alors

$$(14) \quad g_t(x) := t^{-1}(a_{ij}(x + te_\ell) - a_{ij}(x)) - \partial_\ell(a_{ij}(x)).$$

Alors, les fonctions  $g_t \in \check{W}^{k, \infty}$  sont uniformément bornées par  $2\|a_{ij}\|_{\check{W}^{k+1, \infty}}$ , et  $\lim_{t \rightarrow 0}(\partial^\alpha g_t, \varphi) = 0$  pour tout  $\varphi \in L^1(\Omega)$  et  $|\alpha| \leq k$ . On en déduit alors que  $\lim_{t \searrow 0} \partial^\alpha(g_t w) = 0$  dans  $L^2(\Omega)$  pour tout  $w \in \check{H}^k(\Omega)$  et  $\|\alpha\| \leq k$ . Par conséquent,  $\lim_{t \rightarrow 0} g_t w = 0$  dans  $\check{H}^k(\Omega)$ . On fait  $w = \partial_j u$  pour tous les  $j$ , d'où le résultat (vi).  $\square$

**Corollaire 3.2.** *On garde les notations de la proposition 3.1. Supposons que  $A \in M_{m+1}(\check{W}^{k+1, \infty}(\Omega))$  et que  $\mathcal{P} = \mathcal{P}^A : V_k \rightarrow V_k^-$  soit bijectif. Alors, pour tout  $F \in V_{k+1}^-$  on a*

$$\partial_\ell(\mathcal{P}^{-1}F) = \mathcal{P}^{-1}(\partial_\ell F) - \mathcal{P}^{-1}\partial_\ell(\mathcal{P})\mathcal{P}^{-1}F,$$

et, par conséquent,

$$\|\partial_\ell(\mathcal{P}^{-1}F)\|_{V_k} = \|\partial_\ell(\mathcal{P}^{-1}F)\|_{\check{H}^{k+1}} \leq \|\mathcal{P}^{-1}\partial_\ell F\|_{V_k} + \|\mathcal{P}^{-1}\partial_\ell(\mathcal{P})\mathcal{P}^{-1}F\|_{V_k}.$$

*Démonstration.* C'est une conséquence directe et immédiate du lemme 2.20 et de la proposition 3.1. En effet, prenons  $X = V_k$ ,  $Y = V_k^-$ ,  $T := \mathcal{P} = \mathcal{P}^A$  et les groupes de translations  $S$  et  $S_-$ . On a supposé que  $T := \mathcal{P} := \mathcal{P}^A$  était bijectif. Les points (v) et (vi) de la proposition 3.1 montrent que les deux autres hypothèses du lemme 2.20 sont satisfaites avec  $Q := \partial_\ell(\mathcal{P}) = \mathcal{P}^{\partial_\ell(A)}$ . Ce lemme dit alors que, pour tout  $F$  dans  $V_{k+1}^- \subset \mathcal{D}(L_{S_-})$ , on a  $\partial_\ell(\mathcal{P}^{-1}F) = \mathcal{P}^{-1}(\partial_\ell F) - \mathcal{P}^{-1}\partial_\ell(\mathcal{P})\mathcal{P}^{-1}F$ , et par conséquent  $\|\partial_\ell(\mathcal{P}^{-1}F)\|_{V_k} \leq \|\mathcal{P}^{-1}\partial_\ell F\|_{V_k} + \|\mathcal{P}^{-1}\partial_\ell(\mathcal{P})\mathcal{P}^{-1}F\|_{V_k}$ .  $\square$

4. ESTIMATIONS SUR  $\mathbb{R}^m$  SANS INTERFACE

Dans cette section, nous étudions le cas sans bord et sans interface, c'est-à-dire  $N = 1$  et  $\Omega_1 = \Omega_0 := \Omega = \mathbb{R}^m$ . (Une façon équivalente de formuler cette hypothèse est d'écrire  $\bigcup_{n=0}^N \partial\Omega_n = \emptyset$ .) Dans ce cas,  $\tilde{W}^{k,\infty}(\Omega) = W^{k,\infty}(\Omega)$ ,  $V_k := H^{k+1}(\mathbb{R}^m)$ ,  $V_k^- := H^{k-1}(\mathbb{R}^m)$  et  $\mathcal{P}^A = P^A$ . On obtient alors des résultats plus forts que dans le cas général. Le lemme suivant est tout-à-fait classique (et très facile).

**Lemme 4.1.** *Une norme équivalente sur  $H^{k+1}(\mathbb{R}^m)$  est donnée par  $\|u\|' := \sum_{j=1}^m \|\partial_j u\|_{H^k} + \|u\|_{H^k}$ .*

Nous sommes maintenant prêts à démontrer le théorème 1.1.

*Démonstration du théorème 1.1.* Nous écrirons  $H^k = H^k(\mathbb{R}^m)$  et  $W^{k,\infty} = W^{k,\infty}(\mathbb{R}^m)$  dans cette preuve. L'estimation  $(I_{-1})$  est vraie par définition de la norme  $\|\cdot\|_0$ . On note  $P = P^A = \mathcal{P}^A$ . Nous allons démontrer la relation  $(I_k)$  par récurrence forte sur  $k$ . Admettons donc que, pour tout  $s$  dans  $\{-1, 0, 1, \dots, k\}$ ,  $f \in H^s(\mathbb{R}^m)$  implique  $P^{-1}f \in H^{s+2}(\mathbb{R}^m)$  et que la relation  $(I_s)$  est vraie.

Montrons la même chose pour  $k$  remplacé par  $k+1$ . Pour cela, nous allons utiliser le lemme 4.1. Supposons donc que  $f \in H^{k+1}$ . Nous savons que  $P^{-1}f \in H^{k+2}$  et que la relation  $(I_k)$  est vraie, d'après l'hypothèse de récurrence. Il reste à établir que  $P^{-1}f \in H^{k+3}$  et à montrer la relation  $(I_{k+1})$ .

Pour commencer, on a  $f = F \in V_{k+2}^- := H^{k+1}$ , donc le corollaire 3.2 pour  $P = \mathcal{P}^A : H^{k+2} \rightarrow H^k$  (donc avec  $k$  remplacé par  $k+1$  dans ce corollaire) donne

$$(15) \quad \|\partial_\ell(P^{-1}f)\|_{H^{k+2}} \leq \|P^{-1}(\partial_\ell f)\|_{H^{k+2}} + \|Qf\|_{H^{k+2}},$$

avec  $Q := P^{-1}\partial_\ell(P)P^{-1} : H^k(\mathbb{R}^m) \rightarrow H^{k+2}(\mathbb{R}^m)$ . En remplaçant  $f$  par  $\partial_\ell f \in H^k$  dans  $(I_k)$ , on a :

$$(16) \quad \begin{aligned} \|P^{-1}(\partial_\ell f)\|_{H^{k+2}} &\lesssim \sum_{q=0}^{k+1} \| |P^{-1}| \|_0^{q+1} \|A\|_{W^{k+1}}^q \|\partial_\ell f\|_{H^{k-q}} \\ &\lesssim \sum_{q=0}^{k+1} \| |P^{-1}| \|_0^{q+1} \|A\|_{W^{k+1}}^q \|f\|_{H^{k+1-q}}. \end{aligned}$$

D'autre part, pour  $g := \partial_\ell(P)P^{-1}f \in H^k(\mathbb{R}^m)$ , l'hypothèse de récurrence  $(I_k)$  nous donne,

$$(17) \quad \|Qf\|_{H^{k+2}} := \|P^{-1}(g)\|_{H^{k+2}} \lesssim \sum_{q=0}^{k+1} \| |P^{-1}| \|_0^{q+1} \|A\|_{W^{k+1}}^q \|g\|_{H^{k-q}}.$$

De plus, pour  $q$  fixé dans  $\{0, 1, \dots, k+1\}$  et en utilisant la relation  $\partial_\ell(P^A) = P^{\partial_\ell(A)}$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
\|g\|_{H^{k-q}} &= \|\partial_\ell(P)P^{-1}f\|_{H^{k-q}} \leq \|\partial_\ell(A)\|_{W^{k+1-q}} \|P^{-1}(f)\|_{H^{k-q+2}} \\
&\lesssim \|A\|_{W^{k+2-q}} \sum_{s=0}^{k+1-q} \|\|P^{-1}\|_0^{s+1} \|A\|_{W^{k+1-q,\infty}}^s \|f\|_{H^{k-q-s}} \\
(18) \quad &\lesssim \sum_{s=0}^{k+1-q} \|\|P^{-1}\|_0^{s+1} \|A\|_{W^{k+2-q}}^{s+1} \|f\|_{H^{k-q-s}},
\end{aligned}$$

et par suite les équations (17) et (18) donnent,

$$(19) \quad \|Qf\|_{H^{k+2}} \lesssim \sum_{q=0}^{k+1} \sum_{s=0}^{k+1-q} \|\|P^{-1}\|_0^{q+s+2} \|A\|_{W^{k+2,\infty}}^{q+s+1} \|f\|_{H^{k-q-s}}.$$

Ensuite, pour  $p = q + s + 1$ , on obtient

$$(20) \quad \|Qf\|_{H^{k+2}} \lesssim \sum_{p=1}^{k+2} \|\|P^{-1}\|_0^{p+1} \|A\|_{W^{k+2,\infty}}^p \|f\|_{H^{k+1-p}}.$$

Alors, en remplaçant les équations (16) et (20) dans (15), on trouve :

$$(21) \quad \|\partial_\ell(P^{-1}f)\|_{H^{k+2}} \lesssim \sum_{q=0}^{k+2} \|\|P^{-1}\|_0^{q+1} \|A\|_{W^{k+2}}^q \|f\|_{H^{k+1-q}}.$$

Il nous reste alors à estimer  $\|P^{-1}f\|_{H^{k+3}}$ . Pour cela on utilise d'abord l'estimation de  $\|P^{-1}f\|_{H^{k+2}}$  par  $(I_k)$ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
\|P^{-1}f\|_{H^{k+2}} &\lesssim \sum_{q=0}^{k+1} \|\|P^{-1}\|_0^{q+1} \|A\|_{W^{k+1}}^q \|f\|_{H^{k-q}} \\
&\lesssim \sum_{q=0}^{k+1} \|\|P^{-1}\|_0^{q+1} \|A\|_{W^{k+2}}^q \|f\|_{H^{k+1-q}}.
\end{aligned}$$

En faisant la somme de cette dernière équation avec (21), et en utilisant le lemme 4.1, on obtient finalement :

$$(22) \quad \|P^{-1}f\|_{H^{k+3}} \lesssim \sum_{q=0}^{k+2} \|\|P^{-1}\|_0^{q+1} \|A\|_{W^{k+2}}^q \|f\|_{H^{k+1-q}}.$$

C'est à dire la relation  $(I_{k+1})$ . On obtient aussi  $P^{-1}f \in H^{k+3}$ . En utilisant le lemme 2.16 et en majorant  $\|f\|_{H^{k-q}}$  par  $\|f\|_{H^k}$ , on obtient aussi l'inégalité désirée pour  $\|\|(P_{k+1}^A)^{-1}\|\|$ .  $\square$



La méthode de ce théorème donne un résultat plus fort que les estimations plus directes que nous présentons maintenant.

**Remarque 4.2.** Le corollaire 3.2 et les lemmes 2.16 et 4.1 donnent successivement :

$$\begin{aligned}
\|P^{-1}f\|_{H^{k+2}} &\lesssim \|P^{-1}f\|_{H^{k+1}} + \sum_{\ell=1}^m \|\partial_\ell P^{-1}f\|_{H^{k+1}} \\
&\lesssim \|P^{-1}f\|_{H^{k+1}} + \sum_{\ell=1}^m (\|P^{-1}\partial_\ell f\|_{H^{k+1}} + \|P^{-1}\partial_\ell(P)P^{-1}f\|_{H^{k+1}}) \\
&\lesssim \|P^{-1}\|_k \left[ \|f\|_{H^{k-1}} + \sum_{\ell=1}^m (\|f\|_{H^k} + \|P^{-1}\|_k \|\partial_\ell(P)\|_k \|f\|_{H^{k-1}}) \right] \\
&\lesssim \|P^{-1}\|_k \|f\|_{H^k} + \|P^{-1}\|_k^2 \|A\|_{W^{k+1}} \|f\|_{H^{k-1}} \\
&\lesssim \|P^{-1}\|_k^2 \|A\|_{W^{k+1}} \|f\|_{H^k}.
\end{aligned}$$

On obtient donc la relation

$$(23) \quad \|P^{-1}\|_{k+1} \leq \|P^{-1}\|_k^2 \|A\|_{W^{k+1}}.$$

Ensuite, une récurrence en  $k$  nous donne aussi

$$(24) \quad \|P^{-1}\|_k \leq \|P^{-1}\|_0^{2^k} \|A\|_{W^k}^{2^k-1},$$

qui est, visiblement, beaucoup plus faible que le résultat du théorème 1.1. Néanmoins, ce type de résultats (qui suit la méthode de [9]) est suffisant pour la plupart des applications.

## 5. ESTIMATIONS POUR LE CAS À BORD OU À INTERFACE

Nous considérons maintenant le cas général, à savoir  $\bigcup_{n=0}^N \partial\Omega_n \neq \emptyset$ ; voir §2.1 pour les notations.

On aura besoin de la version suivante du lemme 4.1. Nous écrivons  $\text{coeff}(P^A) = A$  et  $\text{coeff}(\mathcal{P}^A) = A$ . C'est un abus de notation, car la matrice  $A$  n'est déterminée ni par  $P$  ni par  $\mathcal{P}$ . En revanche,  $\|\text{coeff}(Q)\|_{W^k} := \inf \|A\|_{W^k}$ ,  $P^A = Q$  est bien défini.

**Lemme 5.1.** *Soient  $A \in M_{m+1}(\check{W}^{k+1}(\Omega))$  et  $P = P^A = -\sum_{i,j=1}^m a_{ij}\partial_i\partial_j + R$ .*

- (i) *Une norme équivalente sur  $\check{H}^{k+2}(\mathbb{R}^m)$  est donnée par  $\|u\|' := \sum_{i,j=1}^m \|\partial_i\partial_j u\|_{\check{H}^k} + \|u\|_{\check{H}^{k+1}}$ .*
- (ii)  *$R$  est un opérateur différentiel d'ordre un, et ses coefficients vérifient  $\text{coeff}(R) \in \check{W}^k(\Omega)$  et  $\|\text{coeff}(R)\|_{\check{W}^k} \lesssim \|A\|_{\check{W}^{k+1}}$ .*

(iii) En notant encore  $\partial_0 = Id$ , on a

$$\|u\|_{\check{H}^{k+2}} \lesssim \|a_{mm}^{-1}\|_{\check{W}^k} \left( \|Pu\|_{\check{H}^k} + \|A\|_{\check{W}^{k+1}} \sum_{j=0}^{m-1} \|\partial_j u\|_{\check{H}^{k+1}} \right).$$

*Démonstration.* La propriété (i) est tout-à-fait classique (c'est aussi une conséquence du lemme 4.1). La définition de  $P^A$  donne

$$(25) \quad Ru := - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \partial_i(a_{ij}) \partial_j u - \sum_{j=1}^m \partial_j(a_{j0}u) + \sum_{j=1}^m a_{0j} \partial_j u + a_{00}u$$

sur chaque  $\Omega_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ , qui implique le point (ii).

Montrons maintenant la relation (iii). On écrit  $\widetilde{\sum}_{i+j < 2m}$  pour la somme sur toutes les paires  $(i, j)$  telles que  $i, j \geq 1$ ,  $i + j < 2m$ . On obtient :

$$\partial_m^2 u = a_{mm}^{-1} \left( Ru - \widetilde{\sum}_{i+j < 2m} a_{ij} \partial_i \partial_j(u) - Pu \right).$$

La relation (ii) entraîne l'inégalité  $\|Ru\|_{\check{H}^k} \leq \|A\|_{\check{W}^{k+1}} \|u\|_{\check{H}^{k+1}}$ . Le lemme 2.15 implique alors que

$$\begin{aligned} \|\partial_m^2 u\|_{\check{H}^k} &\lesssim \|a_{mm}^{-1}\|_{\check{W}^k} \|A\|_{\check{W}^{k+1}} \left( \|u\|_{\check{H}^{k+1}} + \widetilde{\sum}_{i+j < 2m} \|\partial_i \partial_j(u)\|_{\check{H}^k} \right) + \|a_{mm}^{-1} Pu\|_{\check{H}^k} \\ &\lesssim \|a_{mm}^{-1}\|_{\check{W}^k} \|A\|_{\check{W}^{k+1}} \left( \|u\|_{\check{H}^{k+1}} + \sum_{i=1}^{m-1} \|\partial_i(u)\|_{\check{H}^{k+1}} \right) + \|a_{mm}^{-1} Pu\|_{\check{H}^k}. \end{aligned}$$

La dernière équation et la partie (i) donnent alors

$$\begin{aligned} \|u\|_{\check{H}^{k+2}} &\lesssim \sum_{i,j=1}^m \|\partial_i \partial_j u\|_{\check{H}^k} + \|u\|_{\check{H}^{k+1}} \\ &\lesssim \|\partial_m^2 u\|_{\check{H}^k} + \widetilde{\sum}_{i+j \leq 2m-1} \|\partial_i \partial_j u\|_{\check{H}^k} + \|u\|_{\check{H}^{k+1}} \\ &\lesssim \|\partial_m^2 u\|_{\check{H}^k} + \sum_{i=1}^{m-1} \|\partial_i u\|_{\check{H}^{k+1}} + \|u\|_{\check{H}^{k+1}} \\ &\lesssim \|a_{mm}^{-1}\|_{\check{W}^k} \|A\|_{\check{W}^{k+1}} \left( \|u\|_{\check{H}^{k+1}} + \sum_{i=1}^{m-1} \|\partial_i(u)\|_{\check{H}^{k+1}} \right) + \|a_{mm}^{-1} Pu\|_{\check{H}^k}, \end{aligned}$$

où, pour la dernière équation, on a utilisé la relation  $1 \leq \|a_{mm}^{-1}\|_{\check{W}^k} \|A\|_{\check{W}^{k+1}}$  (lemme 2.16).  $\square$

Nous démontrons maintenant le résultat principal de cet article.

**Théorème 5.2.** *Soit  $A \in M_{m+1}(\check{W}^{k+1}(\Omega))$ , et supposons que l'opérateur induit  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0^A : V_0 := H_D^1(\Omega) \rightarrow V_0^- :=: H_D^1(\mathbb{R}^m)^*$  soit inversible. Soit  $\mathfrak{C} := |||\mathcal{P}^{-1}|||_0 \|a_{mm}^{-1}\|_{\check{W}^k}^k \|A\|_{\check{W}^{k+1}}^{k+1}$ . Alors,  $\mathfrak{C} \geq 1$  et, étant donné  $F \in V_{k+1}^-$ , on a*

$$\|\mathcal{P}^{-1}F\|_{V_{k+1}} \lesssim \sum_{q=0}^{k+1} \mathfrak{C}^{q+1} \|a_{mm}^{-1}\|_{\check{W}^k} \|F\|_{V_{k+1-q}^-}. \quad (J_k)$$

Donc, en particulier,  $\mathcal{P}^{-1}F \in V_{k+1}$  et  $\mathcal{P}_{k+1}^A : V_{k+1} \rightarrow V_{k+1}^-$  est inversible de norme  $|||(\mathcal{P}_{k+1}^A)^{-1}|||_k \lesssim |||\mathcal{P}^{-1}|||_0^{k+2} \|a_{mm}^{-1}\|_{\check{W}^k}^{(k+1)^2} \|A\|_{\check{W}^{k+1}}^{(k+2)(k+1)}$ .

On rappelle que  $|||\mathcal{P}^{-1}|||_0$  est la norme de l'opérateur  $\mathcal{P}^{-1} = (\mathcal{P}_0^A)^{-1} : V_0^- := H_D^1(\mathbb{R}^m)^* \rightarrow V_0 := H_D^1(\Omega)$ .

*Démonstration.* L'inégalité  $\mathfrak{C} \geq 1$  est une conséquence immédiate du lemme 2.16. Ensuite, nous montrons notre résultat par une récurrence forte sur  $k$  comme dans le théorème 1.1.

*Étape 0 : initialisation.* L'estimation  $(J_{-1})$  est vraie par définition de la norme  $|||\mathcal{P}^{-1}|||_0 := |||\mathcal{P}^{-1}|||_{\mathcal{L}(V_0^-, V_0)}$ . En effet la relation  $(J_{-1})$  est :

$$\|\mathcal{P}^{-1}F\|_{V_0} \leq |||\mathcal{P}^{-1}|||_0 \|F\|_{V_0^-}.$$

Avant de passer à la vérification de la propriété d'hérédité (pour la démonstration par récurrence), nous allons présenter des calculs analogues à ceux de la preuve du théorème 1.1. Admettons maintenant que pour tout  $s = -1, 0, 1, 2, \dots, k$ , on a que  $F \in V_{s+1}^-$  implique  $\mathcal{P}^{-1}F \in V_{s+1}$  et que la relation  $(J_s)$  est vraie.

*Étape 1 : Estimation pour  $F \in V_{k+1}$ .* L'hypothèse de récurrence pour  $s = k$ , c'est-à-dire pour  $F \in V_{k+1}^-$ , dit que la relation  $(J_k)$  est vraie pour  $F$ , et donc

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}^{-1}F\|_{V_{k+1}} &\lesssim \sum_{q=0}^{k+1} |||\mathcal{P}^{-1}|||_0^{q+1} \|a_{mm}^{-1}\|_{\check{W}^k}^{(q+1)(k+1)} \|A\|_{\check{W}^{k+1}}^{(q+1)(k+1)} \|F\|_{V_{k+1-q}^-} \\ &= \sum_{q=0}^{k+1} |||\mathcal{P}^{-1}|||_0^{q+1} \|a_{mm}^{-1}\|_{\check{W}^k}^{(q+1)(k+1)-q} \|A\|_{\check{W}^{k+1}}^{(q+1)(k+2)-1-q} \|F\|_{V_{k+1-q}^-} \\ (26) \quad &\lesssim \sum_{q=0}^{k+1} |||\mathcal{P}^{-1}|||_0^{q+1} \|a_{mm}^{-1}\|_{\check{W}^k}^{(q+1)(k+1)} \|A\|_{\check{W}^{k+1}}^{(q+1)(k+2)-1} \|F\|_{V_{k+1-q}^-}, \end{aligned}$$

où, à la dernière étape, on a aussi utilisé le lemme 2.16.

*Étape 2 : Estimation de  $\|\partial_\ell(\mathcal{P}^{-1}F)\|_{V_{k+1}}$ ,  $\ell < m$  pour  $F \in V_{k+2}^-$ .*  
Comme  $F \in V_{k+2}^-$  et  $\ell < m$ , le corollaire 3.2 pour  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{k+1}^A : V_{k+1} \rightarrow V_{k+1}^-$  donne

$$(27) \quad \|\partial_\ell(\mathcal{P}^{-1}F)\|_{V_{k+1}} \leq \|\mathcal{P}^{-1}(\partial_\ell F)\|_{V_{k+1}} + \|QF\|_{V_{k+1}},$$

avec  $Q := \mathcal{P}^{-1}\partial_\ell(\mathcal{P})\mathcal{P}^{-1} : V_{k+1}^- \rightarrow V_{k+1}$ . Nous allons maintenant estimer les deux derniers termes dans la dernière équation.

D'abord, l'équation (26) avec  $F$  remplacé par  $\partial_\ell F \in V_{k+1}^-$  donne :

$$(28) \quad \|\mathcal{P}^{-1}(\partial_\ell F)\|_{V_{k+1}} \lesssim \sum_{q=0}^{k+1} \|\mathcal{P}^{-1}\|_0^{q+1} \|a_{mm}^{-1}\|_{\dot{W}^k}^{(q+1)(k+1)} \|A\|_{\dot{W}^{k+1}}^{(q+1)(k+2)-1} \|F\|_{V_{k+2-q}^-}.$$

D'autre part, pour  $G := \partial_\ell(\mathcal{P})\mathcal{P}^{-1}F \in V_{k+1}^-$ , l'hypothèse de récurrence ( $J_k$ ) nous donne, encore une fois, que

$$(29) \quad \|QF\|_{V_{k+1}} := \|\mathcal{P}^{-1}(G)\|_{V_{k+1}} \lesssim \sum_{q=0}^{k+1} \|\mathcal{P}^{-1}\|_0^{q+1} \|a_{mm}^{-1}\|_{\dot{W}^k}^{(q+1)k+1} \|A\|_{\dot{W}^{k+1}}^{(q+1)(k+1)} \|G\|_{V_{k+1-q}^-}.$$

De plus, pour  $q$  fixé dans  $\{0, 1, \dots, k+1\}$ , on a, toujours par l'hypothèse de récurrence,

$$(30) \quad \begin{aligned} \|G\|_{V_{k+1-q}^-} &:= \|\partial_\ell(\mathcal{P})\mathcal{P}^{-1}F\|_{V_{k+1-q}^-} \leq \|\partial_\ell(A)\|_{\dot{W}^{k+1-q}} \|\mathcal{P}^{-1}(F)\|_{V_{k+1-q}} \\ &\lesssim \|A\|_{\dot{W}^{k+2-q}} \sum_{s=0}^{k-q+1} \|\mathcal{P}^{-1}\|_0^{s+1} \|a_{mm}^{-1}\|_{\dot{W}^{k-q}}^{(s+1)(k-q)+1} \|A\|_{\dot{W}^{k-q+1,\infty}}^{(s+1)(k-q+1)} \|F\|_{V_{k+1-q-s}^-} \\ &\lesssim \sum_{s=0}^{k-q+1} \|\mathcal{P}^{-1}\|_0^{s+1} \|a_{mm}^{-1}\|_{\dot{W}^{k-q}}^{(s+1)(k-q)+1} \|A\|_{\dot{W}^{k+2-q,\infty}}^{(s+1)(k-q+1)+1} \|F\|_{V_{k+1-q-s}^-}. \end{aligned}$$

Soient  $t := q + s + 1$  et  $c(q, s) := sq + 2q + s \geq 0$  (car  $s, q \geq 0$ ). En utilisant d'abord les équations (29) et (30) puis le lemme 2.16, on obtient :

$$(31) \quad \begin{aligned} \|QF\|_{V_{k+1}} &\lesssim \sum_{q=0}^{k+1} \sum_{s=0}^{k+1-q} \|\mathcal{P}^{-1}\|_0^{t+1} \|a_{mm}^{-1}\|_{\dot{W}^k}^{(t+1)(k+1)-c(q,s)} \|A\|_{\dot{W}^{k+2,\infty}}^{(t+1)(k+2)-c(q,s)-1} \|F\|_{V_{k+1-q-s}^-} \\ &\lesssim \sum_{t=1}^{k+2} \|\mathcal{P}^{-1}\|_0^{t+1} \|a_{mm}^{-1}\|_{\dot{W}^k}^{(t+1)(k+1)} \|A\|_{\dot{W}^{k+2,\infty}}^{(t+1)(k+2)-1} \|F\|_{V_{k+2-t}^-}. \end{aligned}$$

Enfin, en remplaçant les équations (28) et (31) dans (27) on trouve que, pour  $\ell < m$  :

(32)

$$\|\partial_\ell(\mathcal{P}^{-1}F)\|_{V_{k+1}^-} \lesssim \sum_{q=0}^{k+2} \|\mathcal{P}^{-1}\|_0^{q+1} \|a_{mm}^{-1}\|_{\check{W}^k}^{(q+1)(k+1)} \|A\|_{\check{W}^{k+2}}^{(q+1)(k+2)-1} \|F\|_{V_{k+2-q}^-}.$$

(33) 
$$\lesssim \sum_{q=0}^{k+2} \|\mathcal{P}^{-1}\|_0^{q+1} \|a_{mm}^{-1}\|_{\check{W}^k}^{(q+1)(k+1)+1} \|A\|_{\check{W}^{k+2,\infty}}^{(q+1)(k+2)} \|F\|_{V_{k+2-q}^-}.$$

*Étape 3 : Estimation de récurrence.* Nous passons maintenant à la vérification de la propriété d'hérédité dans notre récurrence forte. Plus précisément, on rappelle qu'on a admis que pour tout  $s = -1, 0, 1, 2, \dots, k$  on a que  $F \in V_{s+1}^- \Rightarrow \mathcal{P}^{-1}F \in V_{s+1}$  et que la relation  $(J_s)$  est vraie pour toutes ces valeurs de  $s$ . Montrons la même chose pour  $k$  remplacé par  $k+1$ . Supposons donc maintenant que  $F \in V_{k+2}^-$ . Nous voulons établir que  $\mathcal{P}^{-1}F \in V_{k+2}$ , et montrer la relation  $(J_{k+1})$ .

D'abord, il découle du lemme 2.16 que :

(34) 
$$\|a_{mm}^{-1}\|_{\check{W}^{k+1}} \|f\|_{V_{k+2}^-} \leq \|\mathcal{P}^{-1}\|_0 \|a_{mm}^{-1}\|_{\check{W}^{k+1}}^{k+1} \|A\|_{\check{W}^{k+2}}^{k+1} \|F\|_{V_{k+2}^-}.$$

Soient  $F = (f, g, h) \in V_{k+2}^-$  et  $u := \mathcal{P}^{-1}F$ ; on a donc  $Pu = f$ . Ensuite, le lemme 5.1 (pour  $u = \mathcal{P}^{-1}F$  et  $k$  remplacé par  $k+1$ ) et les équations (34), (26), et (32) impliquent (on rappelle que  $\partial_0 = Id$ ) :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}^{-1}F\|_{\check{H}^{k+3}} &\lesssim \|a_{mm}^{-1}\|_{\check{W}^{k+1}} \left( \|f\|_{\check{H}^{k+1}} + \|A\|_{\check{W}^{k+2}} \sum_{\ell=0}^{m-1} \|\partial_\ell(u)\|_{\check{H}^{k+2}} \right) \\ &\lesssim \|\mathcal{P}^{-1}\|_0 \|a_{mm}^{-1}\|_{\check{W}^{k+1}}^{k+1} \|A\|_{\check{W}^{k+2}}^{k+1} \|F\|_{V_{k+2}^-} \\ &\quad + \sum_{q=0}^{k+1} \|\mathcal{P}^{-1}\|_0^{q+1} \|a_{mm}^{-1}\|_{\check{W}^k}^{(q+1)(k+1)+1} \|A\|_{\check{W}^{k+1}}^{(q+1)(k+2)} \|F\|_{V_{k+1-q}^-} \\ &\quad + \sum_{q=0}^{k+2} \|\mathcal{P}^{-1}\|_0^{q+1} \|a_{mm}^{-1}\|_{\check{W}^k}^{(q+1)(k+1)+1} \|A\|_{\check{W}^{k+2}}^{(q+1)(k+2)} \|F\|_{V_{k+2-q}^-} \\ &\lesssim \sum_{q=0}^{k+2} \|\mathcal{P}^{-1}\|_0^{q+1} \|a_{mm}^{-1}\|_{\check{W}^{k+1}}^{(q+1)(k+1)+1} \|A\|_{\check{W}^{k+2}}^{(q+1)(k+2)} \|F\|_{V_{k+2-q}^-}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $(J_{k+1})$ . Au passage, on a montré que  $\mathcal{P}^{-1}F \in V_{k+2}$ . L'inégalité  $\|(\mathcal{P}_{k+1}^A)^{-1}\|_k \lesssim \|\mathcal{P}^{-1}\|_0^{k+2} \|a_{mm}^{-1}\|_{\check{W}^k}^{(k+1)^2} \|A\|_{\check{W}^{k+1}}^{(k+2)(k+1)}$ , est une conséquence de l'inégalité  $\mathfrak{C} \geq 1$  déjà justifiée et du fait que  $\|F\|_{V_{k+1-q}^-} \leq \|F\|_{V_{k+1}^-}$  pour tout  $q = 0, 1, \dots, k+1$ .  $\square$

**Remarque 5.3.** Voir [9, 15, 23, 28] pour des résultats similaires.

## 6. ESTIMATIONS POUR OPÉRATEURS FORTEMENT ELLIPTIQUES ET INTÉGRABILITÉ

Dans cette section, nous nous intéressons aux applications de notre résultat. Nous aurons besoin du lemme standard suivant.

**Lemme 6.1.** *Soit  $b \in \check{W}^{k,\infty}(\Omega)$  tel que  $b^{-1} \in L^\infty(\Omega)$ . Alors  $b^{-1} \in \check{W}^{k,\infty}(\Omega)$  et*

$$\|b^{-1}\|_{\check{W}^k} \lesssim \|b^{-1}\|_{L^\infty}^{k+1} \|b\|_{\check{W}^k}^k.$$

On notera  $\operatorname{Re} A := \frac{1}{2}(A + A^*)$ , pour toute matrice  $A$  (avec  $A^*$  la matrice adjointe de  $A$ , c'est-à-dire sa transposée conjuguée). On écrit  $A \geq \gamma I$  si, pour tout vecteur complexe  $\xi$  sur lequel  $A$  agit, on a  $(A\xi, \xi) \geq \gamma \|\xi\|^2$ .

**Théorème 6.2.** *Soit  $A \in M_{m+1}(\check{W}^{k+1}(\Omega))$  telle que  $\operatorname{Re} A \geq \gamma I$ ,  $\gamma > 0$ . Alors, l'opérateur induit  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0^A : V_0 := H_D^1(\Omega) \rightarrow V_0^- := H_D^1(\Omega)^*$  est inversible de norme  $\|\mathcal{P}^{-1}\|_0 \leq \gamma^{-1}$ . Donc, étant donné  $F \in V_{k+1}^-$ , on a :*

$$\|\mathcal{P}^{-1}F\|_{V_{k+1}} \lesssim \sum_{q=0}^{k+1} \gamma^{-(q+1)} \|a_{mm}^{-1}\|_{\check{W}^k}^{(q+1)k+1} \|A\|_{\check{W}^{k+1}}^{(q+1)(k+1)} \|F\|_{V_{k+1-q}^-}.$$

En particulier,  $\mathcal{P}_{k+1}^A : V_{k+1} \rightarrow V_{k+1}^-$  est inversible. Soit  $K := (k+2)(k^2+k+1)+k$ . Alors

$$\|(\mathcal{P}_{k+1}^A)^{-1}\|_{k+1} \leq \gamma^{-K-1} \|A\|_{\check{W}^{k+1}}^K.$$

*Démonstration.* Comme  $\gamma > 0$ , on obtient pour  $u \in V_0 = H^1(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\mathcal{P}_0^A u, u) &:= \operatorname{Re} B^A(u, u) = \operatorname{Re} \int_{\Omega} \sum_{i,j=0}^m a_{ij} \partial_i u \partial_j \bar{v} \, dx \\ &\geq \gamma \int_{\Omega} \sum_{i=0}^m |\partial_i u|^2 \, dx =: \gamma \|u\|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{P}_0^A$  est inversible, et  $\|\mathcal{P}^{-1}\|_0 \leq \gamma^{-1}$ , d'après le lemme de Lax–Milgram. (Cette partie de la preuve est, bien sûr, bien connue.) De plus, on a aussi  $a_{mm} \geq \gamma$ , donc  $\|a_{mm}^{-1}\|_{L^\infty} \leq \gamma^{-1}$ . Il suit du lemme 6.1 que

$$(35) \quad \|a_{mm}^{-1}\|_{\check{W}^k} \leq \gamma^{-k-1} \|a_{mm}\|_{\check{W}^k}^k \leq \gamma^{-k-1} \|A\|_{\check{W}^{k+1}}^k.$$

Le reste est une conséquence du théorème 5.2 □

**Remarque 6.3.** Si  $\Omega = \mathbb{R}^m$  et  $N = 1$ , on obtient un résultat analogue mais un peu plus fort en utilisant le théorème 1.1 au lieu du théorème 5.2 :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}^{-1}f\|_{V_{k+1}} &\lesssim \sum_{q=0}^{k+1} \gamma^{-q-1} \|A\|_{W^{k+1}}^q \|f\|_{V_{k+1-q}^-} \quad \text{et donc} \\ \|(\mathcal{P}_{k+1}^A)^{-1}\|_{k+1} &\leq \gamma^{-k-2} \|A\|_{W^{k+1}}^{k+1}. \end{aligned}$$

On obtient ensuite le résultat suivant.

**Théorème 6.4.** *On garde les hypothèses et les notations du théorème 6.2. Soit  $X = (X_1, X_2, \dots, X_M)$  une variable aléatoire vectorielle gaussienne de covariance  $\sigma = (\sigma_{ij}) > 0$ . Soient  $A_1, A_2, \dots, A_M \in M_{m+1}(\dot{W}^{k+1}(\Omega))$ , avec  $A_j \geq \gamma I$ ,  $\gamma > 0$ . On note  $A := \sum_{j=1}^M e^{X_j} A_j$ . Alors  $\|(\mathcal{P}_{k+1}^A)^{-1}\|_{k+1}$  est intégrable.*

*Démonstration.* On a  $\text{Re}(A) := \text{Re}(\sum_{j=1}^M e^{X_j} A_j) \geq \gamma \sum_{j=1}^M e^{X_j}$ . De même

$$(36) \quad \|A\|_{\dot{W}^{k+1}} \leq \sum_{j=1}^M e^{X_j} \|A_j\|_{\dot{W}^{k+1}}.$$

D'après le théorème 6.2, on obtient

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{P}_{k+1}^A)^{-1}\|_{k+1} &\leq \left(\gamma \sum_{j=1}^M e^{X_j}\right)^{-K-1} \|A\|_{\dot{W}^{k+1}}^K \\ &\leq \left(\gamma \sum_{j=1}^M e^{X_j}\right)^{-K-1} \left(\sum_{j=1}^M e^{X_j} \|A_j\|_{\dot{W}^k}\right)^K \leq C \left(\sum_{j=1}^M e^{X_j}\right)^{-1} \end{aligned}$$

qui est intégrable, car  $(\sum_{j=1}^M e^{x_j})^{-1} \leq e^{|x_1|+\dots+|x_M|}$  est intégrable par rapport à la mesure de densité  $e^{-(\sigma x, x)} \leq e^{-\epsilon \|x\|^2}$ .  $\square$

## RÉFÉRENCES

- [1] AMANN, H. *Linear and quasilinear parabolic problems. Vol. I*, vol. 89 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1995. Abstract linear theory.
- [2] BANJAI, L., AND OTÁROLA, E. A PDE approach to fractional diffusion : a space-fractional wave equation. *Numer. Math.* 143, 1 (2019), 177–222.
- [3] BONNET-BEN DHIA, A.-S., CHESNEL, L., AND CIARLET, JR., P. T-coercivity for scalar interface problems between dielectrics and metamaterials. *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.* 46, 6 (2012), 1363–1387.
- [4] BONNET-BEN DHIA, A.-S., CHESNEL, L., AND CIARLET, JR., P. T-coercivity for the Maxwell problem with sign-changing coefficients. *Comm. Partial Differential Equations* 39, 6 (2014), 1007–1031.

- [5] BONNET-BEN DHIA, A.-S., AND RAMDANI, K. Mathematical analysis of conducting and superconducting transmission lines. *SIAM J. Appl. Math.* 60, 6 (2000), 2087–2113.
- [6] BONNET-BENDHIA, A.-S., DAUGE, M., AND RAMDANI, K. Analyse spectrale et singularités d'un problème de transmission non coercif. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 328, 8 (1999), 717–720.
- [7] BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011.
- [8] BRÜNING, J., GEYLER, V., AND PANKRASHKIN, K. Spectra of self-adjoint extensions and applications to solvable Schrödinger operators. *Rev. Math. Phys.* 20, 1 (2008), 1–70.
- [9] BĂCUȚĂ, C., LI, H., AND NISTOR, V. Differential operators on domains with conical points : precise uniform regularity estimates. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* 62, 3 (2017), 383–411.
- [10] BUNOIU, R., RAMDANI, K., AND TIMOFTE, C. T-coercivity for the asymptotic analysis of scalar problems with sign-changing coefficients in thin periodic domains. *Electron. J. Differential Equations* (2021), Paper No. 59, 22.
- [11] CHESNEL, L., AND CIARLET, JR., P. T-coercivity and continuous Galerkin methods : application to transmission problems with sign changing coefficients. *Numer. Math.* 124, 1 (2013), 1–29.
- [12] CHKIFA, A., COHEN, A., AND SCHWAB, C. Breaking the curse of dimensionality in sparse polynomial approximation of parametric PDEs. *J. Math. Pures Appl. (9)* 103, 2 (2015), 400–428.
- [13] CIARLET, P. G., MALIN, M., AND MARDARE, C. On a vector version of a fundamental lemma of J. L. Lions. *Chin. Ann. Math., Ser. B* 39, 1 (2018), 33–46.
- [14] CIARLET, JUN., P., JUNG, B., KADDOURI, S., LABRUNIE, S., AND ZOU, J. The Fourier singular complement method for the Poisson problem. II : Axisymmetric domains. *Numer. Math.* 102, 4 (2006), 583–610.
- [15] COHEN, A., DEVORE, R., AND SCHWAB, C. Analytic regularity and polynomial approximation of parametric and stochastic elliptic PDE's. *Anal. Appl. (Singap.)* 9, 1 (2011), 11–47.
- [16] DAUGE, M. *Elliptic boundary value problems on corner domains*, vol. 1341 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1988. Smoothness and asymptotics of solutions.
- [17] DŨNG, D., NGUYEN, V., SCHWAB, C., AND ZECH, J. Analyticity and sparsity in uncertainty quantification for pdes with gaussian random field inputs. <https://arxiv.org/abs/2201.01912>, 2022.
- [18] HARBRECHT, H., AND SCHMIDLIN, M. Multilevel methods for uncertainty quantification of elliptic PDEs with random anisotropic diffusion. *Stoch. Partial Differ. Equ. Anal. Comput.* 8, 1 (2020), 54–81.
- [19] HERRMANN, L., KELLER, M., AND SCHWAB, C. Quasi-Monte Carlo Bayesian estimation under Besov priors in elliptic inverse problems. *Math. Comp.* 90, 330 (2021), 1831–1860.



- [20] LABRUNIE, S., KOHR, M., MOHSEN, H., AND NISTOR, V. Polynomial estimates for solutions of parametric elliptic equations on complete manifolds. to appear.
- [21] LE MAÎTRE, O. P., AND KNIO, O. *Spectral methods for uncertainty quantification. With applications to computational fluid dynamics*. Dordrecht : Springer, 2010.
- [22] LE MAÎTRE, O. P., KNIO, O. M., NAJM, H. N., AND GHANEM, R. G. Uncertainty propagation using Wiener-Haar expansions. *J. Comput. Phys.* 197, 1 (2004), 28–57.
- [23] LI, H., NISTOR, V., AND QIAO, Y. Uniform shift estimates for transmission problems and optimal rates of convergence for the parametric finite element method. In *Numerical analysis and its applications*, vol. 8236 of *Lecture Notes in Comput. Sci.* Springer, Heidelberg, 2013, pp. 12–23.
- [24] LIONS, J.-L., AND MAGENES, E. *Non-homogeneous boundary value problems and applications. Vol. I*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972. Translated from the French by P. Kenneth, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 181.
- [25] MAZZUCATO, A., AND NISTOR, V. Well-posedness and regularity for the elasticity equation with mixed boundary conditions on polyhedral domains and domains with cracks. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 195, 1 (2010), 25–73.
- [26] MOHSEN, H. Estimations uniformes pour des problèmes de transmission à changement de signe : Liens avec les triplets de frontière et la quantification de l’incertitude. Ph.D. Thesis, Lorraine University, 2022.
- [27] MOHSEN, H., LABRUNIE, S., AND NISTOR, V. Polynomial bounds for the solutions of transmission problems on smooth, bounded domains. preprint, 2022.
- [28] NISTOR, V., AND SCHWAB, C. High-order Galerkin approximations for parametric second-order elliptic partial differential equations. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 23, 9 (2013), 1729–1760.
- [29] PANKRASHKIN, K. On self-adjoint realizations of sign-indefinite Laplacians. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* 64, 2-3 (2019), 345–372.
- [30] PAZY, A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, vol. 44 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [31] SULLIVAN, T. J. *Introduction to uncertainty quantification*, vol. 63. Cham : Springer, 2015.
- [32] TAYLOR, M. *Partial differential equations I. Basic theory*, second ed., vol. 115 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, 2011.
- [33] TAYLOR, M. E. *Partial differential equations. II*, vol. 116 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1996. Qualitative studies of linear equations.

UNIVERSITÉ DE LORRAINE, CNRS, IECL, F-54000 NANCY, FRANCE  
*Email address:* `hassan.mohsen@univ-lorraine.fr`

UNIVERSITÉ DE LORRAINE, CNRS, IECL, F-54000 NANCY, FRANCE  
*Email address:* `simon.labrunie@univ-lorraine.fr`

UNIVERSITÉ DE LORRAINE, CNRS, IECL, F-57000 METZ, FRANCE  
*Email address:* `victor.nistor@univ-lorraine.fr`