



**HAL**  
open science

## Réduction en famille d'espaces affinoïdes

Antoine Ducros

► **To cite this version:**

| Antoine Ducros. Réduction en famille d'espaces affinoïdes. 2019. hal-03982427

**HAL Id: hal-03982427**

**<https://hal.science/hal-03982427>**

Preprint submitted on 10 Feb 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

## RÉDUCTION EN FAMILLE D'ESPACES AFFINOÏDES

*par*

Antoine Ducros

---

**Résumé.** — Soit  $k$  un corps ultramétrique complet. Nous démontrons un substitut au théorème de la fibre réduite (de Bosch, Lütkebohmert et Raynaud) valable pour tout morphisme  $Y \rightarrow X$  plat et à fibres géométriquement réduites entre espaces  $k$ -affinoïdes au sens de Berkovich, sans supposer que  $X$  et  $Y$  sont stricts ni que la dimension relative de  $Y$  sur  $X$  est constante. Nous ne faisons pas appel au théorème de la fibre réduite original, ni aux techniques ou au langage de la géométrie formelle. Notre énoncé est formulé en termes de réduction graduée à la Temkin ; notre preuve repose sur un théorème de finitude de Grauert et Remmert et sur la théorie de la réduction (graduée) des germes d'espaces analytiques, due à Temkin.

**Abstract (Reduction of affinoid spaces in family).** — Let  $k$  be a non-archimedean complete field. We prove a substitute for the reduced fiber theorem (of Bosch, Lütkebohmert and Raynaud) that holds for every morphism  $Y \rightarrow X$  flat and with geometrically reduced fibers between  $k$ -affinoid spaces in the sense of Berkovich, without assuming that  $X$  and  $Y$  are strict, nor that the relative dimension of  $Y$  over  $X$  is constant. We do not use the original reduced fiber theorem, nor the language or the techniques of formal geometry. Our statement is formulated in terms of Temkin's graded reduction; our proof rests on a finiteness result of Grauert and Remmert and on Temkin's theory of (graded) reduction of germs of analytic spaces.

---

Lors de la rédaction de cet article, l'auteur a bénéficié du soutien de l'ANR à travers les projets *Valuations, combinatoire et théorie des modèles* (ANR-13-BS01-0006), et *Définissabilité en géométrie non archimédienne* (ANR-15-CE40-0008), ainsi que de celui de l'IUF dont il était membre junior d'octobre 2012 à octobre 2017. Il a aussi profité en mars 2019 de l'hospitalité de l'université hébraïque de Jérusalem, avec le soutien du projet ERC Consolidator 770922 (BirNonArchGeom) de Michael Temkin.

## 0. Introduction

Soit  $k$  un corps ultramétrique complet ; nous travaillerons avec la théorie des espaces  $k$ -analytiques au sens de Berkovich ([Ber90], [Ber93]). Fixons un sous-groupe  $\Gamma$  de  $\mathbf{R}_{>0}$ , non trivial si  $|k^\times| = \{1\}$  ; pour simplifier la présentation, supposons que  $\Gamma$  est divisible. Soit  $A$  une algèbre affinoïde  $\Gamma$ -stricte, c'est-à-dire quotient d'une algèbre de la forme  $k\{T_1/r_1, \dots, T_n/r_n\}$  où les  $r_i$  appartiennent à  $\Gamma$  ; soit  $\|\cdot\|$  la semi-norme spectrale de  $A$  (qui est une norme si et seulement si  $A$  est réduite). Lorsque  $\Gamma = \{1\}$  on associe classiquement à l'algèbre  $A$  sa *réduction*

$$\tilde{A} := \{a \in A, \|a\| \leq 1\} / \{a \in A, \|a\| < 1\}.$$

Lorsque  $\Gamma$  n'est pas supposé trivial cette définition garde un sens, mais l'anneau obtenu est en général trop petit pour être exploitable (par exemple, si les  $r_i$  sont  $\mathbf{Q}$ -linéairement indépendants modulo  $|k^\times|^\mathbf{Q}$ , la réduction de  $k\{T_1/r_1, \dots, T_n/r_n\}$  au sens précédent est simplement le corps résiduel de  $k$ ). Le bon objet à considérer dans ce cas est la réduction *graduée* de  $A$  introduite par Temkin dans [Tem04].

Avant de donner sa construction, précisons que pour éviter une répétition fastidieuse des adjectifs «homogène» et «gradué», nous avons opté pour un formalisme qui diffère en apparence de celui de Temkin, tout en lui étant rigoureusement équivalent : nous définissons un *annéloïde* comme une *union disjointe*  $R = \coprod_{r \in \Gamma} R^r$  où chaque  $R^r$  est un groupe abélien noté additivement, munie d'une collection d'applications bi-additives  $R^r \times R^s \rightarrow R^{rs}$  définissant sur  $R$  une loi commutative, associative, et possédant un élément neutre  $1 \in R^1$ . Un *corpoïde* est un annéloïde non nul dans lequel tout élément non nul est inversible. La plupart des définitions et résultats de base de l'algèbre commutative et de la géométrie algébrique (idéaux, idéaux premiers, produit tensoriel, valuations, spectres et même schémas, etc.) admettent des avatars dans ce nouveau cadre, que nous utiliserons librement dans ce qui suit ; nous renvoyons à la section 1 pour davantage de précisions.

Soit  $A$  une algèbre  $k$ -affinoïde  $\Gamma$ -stricte ; posons  $X = \mathcal{M}(A)$ . On définit d'après Temkin la *réduction graduée* (ou encore l'*annéloïde résiduel*)  $\tilde{A}$  de  $A$  par la formule

$$\tilde{A} := \coprod_{r \in \Gamma} \{a \in A, \|a\| \leq r\} / \{a \in A, \|a\| < r\}.$$

C'est une algèbre de type fini sur le *corpoïde résiduel*  $\tilde{k}$  de  $k$  ; par exemple, si  $A$  est égale à  $k\{T_1/r_1, \dots, T_n/r_n\}$  alors  $\tilde{A} = \tilde{k}[r_1 \setminus T_1, \dots, r_n \setminus T_n]$ , qui désigne l'algèbre commutative libre engendrée sur  $\tilde{k}$  par des indéterminées  $T_1, \dots, T_n$  de degrés respectifs  $r_1, \dots, r_n$  (1.3). Si  $a$  est un élément de  $A$  tel que  $\|a\| \in \Gamma$ , nous noterons  $\tilde{a}$  son image dans  $\tilde{A}^{\|a\|}$ . Nous désignerons par  $\tilde{X}$  le spectre de  $\tilde{A}$ . La dimension de  $\tilde{X}$  est égale à celle de  $X$ , et l'on dispose d'une application anti-continue surjective naturelle  $X \rightarrow \tilde{X}$ .

Cette opération de réduction (graduée) des espaces affinoïdes est un outil majeur en géométrie analytique, qui permet de convertir un certain nombre de questions en des problèmes de géométrie algébrique (éventuellement graduée, mais on se ramène ensuite le plus souvent par des méthodes standard décrites à la section 1 à la géométrie algébrique usuelle). Elle est toutefois un peu délicate à utiliser, car si elle est fonctorielle, elle ne commute pas aux opérations usuelles. En effet, soient  $X$  et  $Y$  deux

espaces  $k$ -affinoïdes  $\Gamma$ -stricts, et soit  $Z$  un espace affinoïde  $\Gamma$ -strict sur une extension de  $k$ . Supposons donnés deux morphismes  $Y \rightarrow X$  et  $Z \rightarrow X$ . On dispose alors d'un morphisme naturel  $\widetilde{Y \times_X Z} \rightarrow \widetilde{Y} \times_{\widetilde{X}} \widetilde{Z}$  qui est fini, mais n'est pas un isomorphisme en général. En particulier (prendre  $Z = \mathcal{M}(\mathcal{H}(x))$  où  $x \in X$ ) la formation de la réduction ne commute pas à la formation des fibres. Cet article remédie dans certaines situations à ce dernier point.

Avant de décrire plus avant nos résultats, commençons par une définition. Soit  $A \rightarrow B$  un morphisme entre algèbres  $k$ -affinoïdes  $\Gamma$ -strictes. Posons  $X = \mathcal{M}(A)$  et  $Y = \mathcal{M}(B)$ . Une présentation  $B \simeq A\{T_1/r_1, \dots, T_n/r_n\}/(a_1, \dots, a_m)$  de  $B$  sur  $A$  (ou de  $Y$  sur  $X$ ) est  $\Gamma$ -sympathique si les  $r_i$  appartiennent à  $\Gamma$  et si les propriétés suivantes sont satisfaites :

- (1) pour tout  $i$  compris entre 1 et  $m$ , la semi-norme spectrale  $\rho_i$  de  $a_i$  appartient à  $\Gamma$ ;
- (2) le morphisme
 
$$p: \text{Spec } \widetilde{A[r\backslash T]}/(\widetilde{a}_1, \dots, \widetilde{a}_m) \rightarrow \widetilde{X}$$
 est plat (nous avons écrit  $\widetilde{A[r\backslash T]}$  pour  $\widetilde{A[r_1\backslash T_1, \dots, r_n\backslash T_n]}$ );
- (3) les fibres de  $p$  sont géométriquement réduites;
- (4) pour tout  $x \in X$  la norme spectrale de  $a_i|_{Y_x}$  est égale à  $\rho_i$  quel que soit  $i$ , et tout élément  $a \in \mathcal{H}(x)\{T/r\}$  appartenant à l'idéal engendré par les  $a_i|_{Y_x}$  possède une écriture de la forme  $\sum b_i(a_i|_{Y_x})$  telle que  $\|b_i\| \cdot \rho_i \leq \|a\|$  pour tout  $i$ ;
- (5) les composantes irréductibles des fibres de  $p$  sont géométriquement irréductibles;
- (6) il existe un recouvrement ouvert fini  $(\Omega_j)$  de  $\text{Spec } \widetilde{A[r\backslash T]}/(\widetilde{a}_1, \dots, \widetilde{a}_m)$  tel que pour tout indice  $j$  et tout  $\xi \in \widetilde{X}$ , l'intersection  $p^{-1}(\xi) \cap \Omega_j$  soit ou bien vide, ou bien une composante connexe de  $p^{-1}(\xi)$ .

L'intérêt essentiel de cette notion de notre point de vue est le suivant : la conjonction des propriétés (3) et (4) implique que pour tout  $x \in X$  dont on note  $\tilde{x}$  l'image sur  $\widetilde{X}$ , le morphisme naturel  $\widetilde{Y_x} \rightarrow \text{Spec } \widetilde{\mathcal{H}(x)[r\backslash T]}/(\widetilde{a}_1|_{Y_x}, \dots, \widetilde{a}_m|_{Y_x}) = p^{-1}(\tilde{x})_{\widetilde{\mathcal{H}(x)}}$  est un isomorphisme (proposition 2.30). En un sens un peu vague, une présentation  $\Gamma$ -sympathique d'un morphisme  $Y \rightarrow X$  induit donc par réduction des relations une présentation plate sur  $\widetilde{X}$  de la famille  $(\widetilde{Y_x})_{x \in X}$ .

La notion de présentation  $\Gamma$ -sympathique est stable par changement de base quelconque : si  $B \simeq A\{T/r\}/(a_1, \dots, a_m)$  est une présentation  $\Gamma$ -sympathique de  $B$  sur  $A$  alors pour toute extension complète  $L$  de  $k$ , toute algèbre  $L$ -affinoïde  $\Gamma$ -stricte  $A'$  et tout morphisme  $A \rightarrow A'$ , la présentation  $B \widehat{\otimes}_A A' \simeq A'\{T/r\}/(a_1, \dots, a_m)$  de  $B \widehat{\otimes}_A A'$  sur  $A'$  est  $\Gamma$ -sympathique.

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème principal de cet article (théorème 3.5).

**Théorème.** — *Soit  $Y \rightarrow X$  un morphisme entre espaces  $k$ -affinoïdes  $\Gamma$ -stricts, supposé plat et à fibres géométriquement réduites. Il existe une famille finie  $(X_i \rightarrow X)$  de morphismes dont les images recouvrent  $X$  et telle que pour tout  $i$ , les conditions suivantes soient satisfaites, en posant  $Y_i = Y \times_X X_i$  :*

- ◊ l'espace  $X_i$  est affinoïde et  $\Gamma$ -strict ;
- ◊ si  $|k^\times| \neq \{1\}$  le morphisme  $X_i \rightarrow X$  est quasi-étale ;
- ◊ si  $|k^\times| = \{1\}$  le morphisme  $X_i \rightarrow X$  possède une factorisation  $X_i \rightarrow X'_i \rightarrow X$  où  $X'_i$  est affinoïde et  $\Gamma$ -strict, où  $X_i \rightarrow X'_i$  est fini, radiciel et plat et où  $X'_i \rightarrow X$  est quasi-étale ;
- ◊ l'espace  $Y_i$  possède une présentation  $\Gamma$ -sympathique sur  $X_i$ .

**Liens avec le théorème de la fibre réduite.** — Le théorème ci-dessus était déjà connu lorsque  $\Gamma = \{1\}$  (ce qui entraîne que  $|k^\times| \neq \{1\}$ ) et lorsque la dimension relative de  $Y \rightarrow X$  est constante : c'est alors en effet une conséquence du *théorème de la fibre réduite* de Bosch, Lütkebohmert et Raynaud ([BLR95], théorème 2.1) qui assure sous ces hypothèses l'existence, après un changement de base quasi-étale, d'un modèle *formel* affine de  $Y \rightarrow X$ , plat et à fibres géométriquement réduites ; et un tel modèle fournit une présentation  $\{1\}$ -sympathique de  $Y \rightarrow X$  (du moins, une présentation satisfaisant les conditions (1) à (4) ci-dessus ; mais il n'est pas très difficile d'imposer ensuite (5) et (6) quitte à procéder à un changement de base quasi-étale supplémentaire, provenant d'un morphisme étale au niveau de la fibre spéciale).

Notre énoncé est donc plus faible que le théorème de la fibre réduite lorsque celui-ci s'applique, mais il vaut sans hypothèse d'équidimensionalité et pour un groupe  $\Gamma$  arbitraire.

Précisons que nous n'utilisons pas dans notre preuve le théorème de la fibre réduite, et que nous le *retrouvons* sous certaines hypothèses additionnelles. En effet si la valeur absolue de  $k$  n'est pas triviale, si  $Y \rightarrow X$  est un morphisme plat et à fibres géométriquement réduites entre espaces strictement affinoïdes, et si  $X$  admet un modèle formel sur  $k^\circ$  à fibre spéciale réduite (c'est automatiquement le cas lorsque  $X$  est réduit et  $k$  algébriquement clos), il n'est pas difficile de construire à partir d'une présentation  $\{1\}$ -sympathique de  $Y$  sur  $X$  un modèle formel plat et à fibres géométriquement réduites du morphisme  $Y \rightarrow X$  (proposition 3.4).

Bien entendu, il est naturel de se demander si l'on peut espérer une version  $\Gamma$ -stricte du théorème de la fibre réduite pour  $\Gamma$  quelconque. C'est vraisemblable, mais cela requerrait en premier lieu de définir une variante  $\Gamma$ -graduée ou  $\Gamma$ -filtrée de la théorie des schémas formels, ne serait-ce que pour pouvoir formuler un énoncé.

**Motivations.** — Pour tout espace affinoïde  $\Gamma$ -strict  $X$ , l'application anti-continue  $X \rightarrow \tilde{X}$  induit une bijection  $\pi_0(X) \simeq \pi_0(\tilde{X})$ . Notre théorème peut donc être utilisé pour contrôler la variation des composantes connexes géométriques des fibres d'un morphisme plat et à fibres géométriquement réduites, ce dont nous avons besoin de manière cruciale dans notre travail [Duca] sur l'aplatissement par éclatements en géométrie de Berkovich. C'était notre principale motivation pour ce présent article et c'est la raison pour laquelle nous avons inclus les conditions (5) et (6) dans la définition d'une présentation sympathique.

Mentionnons que cette stratégie détournée pour comprendre la variation des composantes connexes en famille en géométrie analytique n'est pas nouvelle : elle a par exemple été suivie par Abbes et Saito dans [AS02] ou par Poineau dans [Poi08] (ces

auteurs travaillent dans le cadre strictement analytique en se fondant sur le théorème de la fibre réduite).

**À propos de notre démonstration.** — L'ingrédient majeur de ce travail est le théorème de finitude de Grauert et Remmert ; il est établi dans [GR66], mais on en trouve des variantes un peu renforcées dans la littérature postérieure, comme par exemple le théorème 1 de [BGR84] 6.2.4, ou le théorème 1.3 de [BLR95] – on peut voir ce dernier comme la version *absolue*, c'est-à-dire au-dessus de  $\mathrm{Spf} k^\circ$ , du théorème de la fibre réduite de Bosch, Lütkebohmert et Raynaud. Ce théorème de Grauert et Remmert ne porte que sur les algèbres strictement  $k$ -affinoïdes, et nous devons l'étendre au cas  $\Gamma$ -strict pour pouvoir nous en servir. C'est l'objet de la section 2. On y démontre un analogue du théorème 1 de [BGR84] 6.2.4 (théorème 2.23), dont on déduit un analogue du théorème 1.3 de [BLR95] (théorème 2.28) qui peut s'énoncer comme suit : *si  $A$  est une algèbre  $k$ -affinoïde  $\Gamma$ -stricte et géométriquement réduite, il existe une extension finie  $L$  de  $k$ , qu'on peut prendre séparable si  $|k^\times| \neq \{1\}$ , telle que  $A_L$  possède une présentation  $\Gamma$ -sympathique sur  $L$ .* Le théorème 2.23 se démontre par réduction au cas strict *via* une extension des scalaires de  $k$  à  $\mathcal{H}(\eta_r)$  pour une famille finie convenable  $r = (r_1, \dots, r_n)$  d'éléments de  $\Gamma$ , où  $\eta_r$  est le point de  $\mathbf{A}_k^{n, \mathrm{an}}$  donné par la semi-norme  $\sum a_I T^I \mapsto \max |a_i| \cdot r^I$ . (La descente de  $\mathcal{H}(\eta_r)$  à  $k$  fonctionne parce que le  $k$ -espace de Banach  $\mathcal{H}(\eta_r)$  est «somme directe orthogonale» de droites ; c'est évident si les  $r_i$  sont multiplicativement indépendants modulo  $|k^\times|$ , mais c'est vrai en toute généralité, cf. le lemme 2.11.)

Nous avons également besoin du «théorème de la fibre réduite sur un annéloïde de valuation» (corollaire 1.26), mais c'est en fait encore une conséquence du théorème de Grauert et Remmert. En effet, nous le prouvons en nous réduisant au cas non gradué, dans lequel il a été démontré par Temkin ([Tem10], étapes 2, 3 et 4 de la preuve du théorème 3.5.5) selon le schéma de preuve suivant : réduction au cas de hauteur finie par approximation, puis de hauteur 1 par dévissage, et procédé de complétion et décomplétion pour se ramener au théorème de Grauert-Remmert.

Disons maintenant quelques mots de la façon dont nous utilisons ces résultats pour démontrer notre théorème principal, en supposant (pour alléger un peu l'exposition) que  $\Gamma = \mathbf{R}_{>0}$  et que la valeur absolue de  $k$  n'est pas triviale ; nous écrirons «sympathique» au lieu de « $\mathbf{R}_{>0}$ -sympathique». Notre preuve fait appel de manière cruciale à la théorie de la réduction (graduée) des germes d'espaces analytiques, développée dans [Tem04] ; c'est un substitut à la géométrie formelle, plus souple d'utilisation, de nature plus locale, et qu'on peut employer sur des espaces non stricts.

Soit donc un morphisme  $Y \rightarrow X$  entre espaces  $k$ -affinoïdes, supposé plat et à fibres géométriquement réduites. Soient  $A$  et  $B$  les algèbres affinoïdes respectivement associées à  $X$  et  $Y$ . On fixe un point  $x$  de  $X$ , et on note  $C$  l'algèbre  $B \hat{\otimes}_A \mathcal{H}(x)$ . On fixe enfin une valuation  $|\cdot|$  appartenant à la réduction  $(\widetilde{X}, x)$  du germe  $(X, x)$  (c'est un ouvert quasi-compact et non vide de l'espace de Zariski-Riemann gradué  $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathcal{H}(x)}/\tilde{k}}^\circ$  de  $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$  sur  $\tilde{k}$ , égal à  $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathcal{H}(x)}/\tilde{k}}$  tout entier si et seulement si  $x \notin \partial X$ ). On note  $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$  l'annéloïde de  $|\cdot|$ .

Par compacité de  $X$  et par quasi-compacité de  $(\widetilde{X}, x)$ , il suffit d'exhiber un espace affinoïde  $V$  et un morphisme  $V \rightarrow X$  quasi-étale possédant les trois propriétés suivantes :

- (a) l'image  $W$  de  $V \rightarrow X$  (qui est un domaine analytique compact de  $X$ ) contient  $x$  ;
- (b)  $(\widetilde{W}, x)$  contient  $|\cdot|$  ;
- (c)  $Y \times_X V \rightarrow V$  admet une présentation sympathique.

Dans ce qui suit, l'expression «restreindre  $X$ » signifiera «remplacer  $X$  par  $V$  pour un certain espace affinoïde  $V$  muni d'un morphisme quasi-étale  $V \rightarrow X$  vérifiant les conditions (a) et (b) ci-dessus».

La fibre  $Y_x$  étant géométriquement réduite, elle est justiciable de notre variante  $\Gamma$ -stricet du théorème de Grauert et Remmert (théorème 2.28) ; elle affirme l'existence d'une extension finie séparable  $E$  de  $\mathcal{H}(x)$  telle que  $Y_{x,E}$  admette une présentation sympathique sur  $E$  ; on choisit un prolongement arbitraire de  $|\cdot|$  à  $\widetilde{E}$ , encore noté  $|\cdot|$ . Il existe un morphisme fini étale de germes  $(X', x') \rightarrow (X, x)$  tel que  $\mathcal{H}(x') = E$  ; on peut donc restreindre  $X$  de sorte que  $Y_x$  admette une présentation sympathique sur  $\mathcal{H}(x)$ . Soit  $B$  l'image de  $\widetilde{B}$  dans  $\widetilde{C}$ . L'annéloïde  $\widetilde{C}$  est entier sur  $\mathcal{H}(x) \cdot B$  ; il existe donc une sous- $\mathcal{H}(x)$ -algèbre  $R$  de  $\widetilde{C}$ , plate (car sans torsion) et de présentation finie, contenant  $B$  et entière sur  $\mathcal{H}(x) \cdot B$ , telle que  $R_{\mathcal{H}(x)} = \widetilde{C}$ . Remarquons que si  $C$  et  $\widetilde{C}$  ne dépendent que de la fibre  $Y_x$ , ce n'est pas le cas de l'annéloïde  $R$ , qui contient des informations sur le comportement de l'espace total  $Y$  au voisinage de  $Y_x$  dans la «direction» codée par la valuation  $|\cdot| \in (X, x)$ .

L'étape suivante consiste à appliquer le théorème de la fibre réduite sur un annéloïde de valuation au morphisme  $\text{Spec } R \rightarrow \text{Spec } \mathcal{H}(x)$ , ce qui est licite car sa fibre générique  $\text{Spec } \widetilde{C}$  est géométriquement réduite. Il affirme l'existence d'une extension valuée finie  $\Lambda$  de  $\mathcal{H}(x)$  et d'un sous-annéloïde  $R'$  de  $\widetilde{\Lambda}$ , fini sur  $R_\Lambda$ , tel que les fibres du morphisme naturel  $q: \text{Spec } R' \rightarrow \text{Spec } \Lambda^\circ$  soient géométriquement réduites ; quitte à agrandir  $\Lambda$ , on peut supposer que les composantes irréductibles des fibres de  $q$  sont géométriquement irréductibles. Par ailleurs le caractère géométriquement réduit des fibres de  $q$  entraîne l'existence d'un recouvrement ouvert fini  $(\Upsilon_j)$  de  $\text{Spec } R'$  tel que pour tout  $j$  et tout  $\xi \in \text{Spec } \Lambda^\circ$ , l'intersection  $\Upsilon_j \cap q^{-1}(\xi)$  soit ou bien vide ou bien une composante connexe de  $q^{-1}(\xi)$  (proposition 1.27). En réalisant  $\Lambda$  comme le corpoïde résiduel d'une extension finie séparable de  $\mathcal{H}(x)$  et en raisonnant comme plus haut, on voit qu'on peut restreindre  $X$  de sorte que  $\Lambda = \mathcal{H}(x)$ , puis supposer que  $R' = R$  (en remplaçant  $R$  par  $R'$ ).

En partant d'une présentation sympathique arbitraire de  $Y_x$  sur  $\mathcal{H}(x)$  et d'une présentation de  $R$  sur  $\mathcal{H}(x)$  on construit alors par différentes méthodes (relèvements, renormalisation, concaténation, petites perturbations...) une présentation sympathique de  $Y_x$  sur  $\mathcal{H}(x)$  qui a la vertu de s'étendre, quitte à restreindre  $X$ , en une présentation sympathique de  $Y$  sur  $X$  ; la platitude de  $Y$  sur  $X$  joue un rôle crucial dans cette étape.

**Remerciements.** — Je sais gré au rapporteur anonyme de sa lecture très attentive du manuscrit et de ses nombreuses remarques et suggestions, qui m'ont notamment permis de corriger une erreur importante dans la version initiale du critère 2.31 (d'autres modifications ont ensuite été nécessaires pour pouvoir utiliser la version correcte dudit critère; c'est ce qui a conduit à la rédaction de l'appendice).

## 1. Algèbre graduée

**1.1.** — Nous ferons un usage systématique du formalisme gradué introduit par Temkin dans [Tem04]. Nous avons toutefois choisi d'adopter une présentation de sa théorie qui diffère légèrement de l'originale et nous paraît un peu plus maniable (ce point de vue a déjà été suivi par l'auteur dans [Ducb], et par Marc Chapuis dans [Cha17]).

Plus précisément, donnons-nous un groupe abélien divisible  $D$  noté multiplicativement (en pratique,  $D$  sera le plus souvent contenu dans  $\mathbf{R}_{>0}$ ). Pour Temkin, un anneau  $D$ -gradué est un anneau  $A$  muni d'une décomposition en *somme directe*  $A = \bigoplus_{d \in D} A^d$  avec  $A^d \cdot A^{d'} \subset A^{dd'}$ . Or l'expérience montre que lorsqu'on utilise ces anneaux gradués en géométrie analytique il n'arrive *jamais* qu'on ait besoin d'additionner deux éléments homogènes de degrés différents. Il nous a donc semblé plus commode de considérer des décompositions en *unions disjointes*; l'avantage de ce choix est qu'il n'y a plus besoin de spécifier en permanence que les éléments manipulés sont homogènes, puisqu'ils le sont automatiquement; ceci permet d'alléger substantiellement la rédaction sans changer quoi que ce soit sur le fond.

Nous appellerons donc  *$D$ -annéloïde* un ensemble  $A$  muni des données suivantes :

- ◊ une décomposition  $A = \coprod_{d \in D} A^d$ ;
- ◊ sur chaque  $A^d$ , une loi de composition interne notée additivement qui fait de  $A^d$  un groupe abélien, de neutre  $0^d$ ;
- ◊ une loi de composition interne sur  $A$  associative et commutative, notée multiplicativement, qui possède un élément neutre  $1 \in A^1$  et induit pour tout  $(d, d')$  une application bi-additive  $A^d \times A^{d'} \rightarrow A^{dd'}$ .

Un élément  $a$  d'un  $D$ -annéloïde  $A$  appartient à un unique sous-ensemble  $A^d$ ; on dit que  $d$  est le *degré* de  $a$  et on le note  $\mathfrak{d}(a)$ ; si  $A'$  est une partie de  $A$ , nous noterons  $\mathfrak{d}(A')$  l'ensemble des  $\mathfrak{d}(a)$  pour  $a$  parcourant  $A'$ .

On emploiera le plus souvent la notation  $0$  au lieu de  $0^d$  si le degré en jeu est clairement indiqué par le contexte; on pourra ainsi par exemple écrire « $a = 0$ » au lieu de « $a = 0^{\mathfrak{d}(a)}$ », et on notera  $A_{\neq 0}$  l'ensemble des éléments non nuls de  $A$ , c'est-à-dire la réunion disjointe des  $A^d \setminus \{0^d\}$ . L'ensemble  $A_{\neq 0}$  est vide si et seulement si  $1 = 0$  (c'est-à-dire  $1 = 0^1$ !); on dit alors que  $A$  est nul.

Les  $D$ -annéloïdes forment une catégorie; les morphismes sont les applications qui préservent les degrés, commutent aux deux opérations et envoient  $1$  sur  $1$ . La catégorie des  $\{1\}$ -annéloïdes est celle des anneaux commutatifs unitaires.

Si  $E$  est un sous-ensemble de  $D$  et si  $A$  est un annéloïde, on notera  $A^E$  la réunion des  $A^d$  pour  $d \in E$ . Supposons de plus que  $E$  soit un sous-groupe de  $D$ . Pour tout annéloïde



$A$ , le sous-ensemble  $A^E$  hérite alors par restriction d'une structure de  $E$ -annéloïde. On dispose ainsi d'un foncteur de la catégorie des  $D$ -annéloïdes vers celle des  $E$ -annéloïdes. Ce foncteur possède un adjoint à gauche, le «prolongement par 0» qui envoie un  $E$ -annéloïde  $B$  sur le  $D$ -annéloïde  $A$  tel que  $A^d = B^d$  si  $d \in E$  et  $A^d = \{0^d\}$  sinon. Le prolongement par zéro induit une équivalence entre la catégorie des  $E$ -annéloïdes et celle des  $D$ -annéloïdes dont le degré de tout élément non nul appartient à  $E$ ; comme la plupart des propriétés que nous considérerons seront invariantes par cette équivalence de catégories, il arrivera souvent qu'on identifie subrepticement un  $E$ -annéloïde au  $D$ -annéloïde obtenu en le prolongeant par zéro.

Un  $D$ -corpoïde est un  $D$ -annéloïde non nul dans lequel tout élément non nul est inversible.

Si  $A$  est un  $D$ -annéloïde, un  $A$ -module est un ensemble  $M$  muni d'une décomposition  $M = \coprod_{d \in D} M^d$ , d'une structure de groupe abélien sur chacun des  $M^d$ , et d'une multiplication externe  $A \times M \rightarrow M$  qui induit pour chaque couple  $(d, d')$  une application bi-additive  $A^d \times M^{d'} \rightarrow M^{dd'}$  et vérifie les égalités

$$1 \cdot m = m \quad \text{et} \quad a(bm) = (ab)m$$

pour tout  $(a, b, m) \in A^2 \times M$ . (Lorsque  $A$  est un  $D$ -corpoïde, on parlera plutôt de  $A$ -espace vectoriel.) Une  $A$ -algèbre est un  $D$ -annéloïde  $B$  muni d'un morphisme  $A \rightarrow B$ ; c'est en particulier un  $A$ -module. Si  $F$  est un  $D$ -corpoïde, une extension de  $F$  est une  $F$ -algèbre qui est elle-même un  $D$ -corpoïde.

À partir de maintenant et dans toute la suite de cette section nous dirons simplement «annéloïde» et «corpoïde» – la graduation est donc indexée par  $D$  sauf mention expresse du contraire.

**1.2.** — La plupart des notions usuelles d'algèbre commutative admettent un avatar gradué ayant en général la même définition *mutatis mutandis* – on vient d'en voir quelques exemples. On peut ainsi définir ce que sont un idéal d'un annéloïde (puis un idéal premier ou maximal), un annéloïde intègre, un annéloïde réduit, un annéloïde local, la localisation d'un annéloïde par une partie multiplicative, le corpoïde des fractions d'un annéloïde intègre, le spectre d'un annéloïde, un élément entier sur un annéloïde (ou algébrique sur un corpoïde), le produit tensoriel de deux modules sur un annéloïde (puis un module plat), etc. Et une bonne partie des énoncés classiques se retranscrivent à peu près tels quels dans ce contexte, avec les «mêmes» démonstrations : on dispose ainsi d'une théorie de la dimension des espaces vectoriels et du degré de transcendance des extensions de corpoïdes, du lemme de Nakayama, du lemme de *going-down*, d'une théorie des valuations (nous donnons quelques précisions sur cette dernière au paragraphe 1.7 plus bas) ... Nous utiliserons tout ceci librement, et renvoyons le lecteur à différents textes pour les détails et (certaines) preuves : la section 1 de [Tem04], la section 1 de [Duc13] et la section 2.2 de [Ducb] (dans ces deux derniers textes, nous présentons notamment la théorie de Galois graduée), ou encore l'appendice A de [Duc18]. Le lecteur pourra aussi se reporter à la section 2 de [Poi] pour une version graduée du *Nullstellensatz* qui, une fois n'est pas coutume, n'est pas le décalque de sa version classique (ledit décalque est grossièrement faux); voir aussi à ce sujet [Ducb], 2.2.24 et 2.2.29.2.

Si  $A$  est un annéloïde, si  $M$  est un  $A$ -module et si  $B$  est une  $A$ -algèbre, le  $B$ -module  $B \otimes_A M$  sera souvent notée  $M_B$ .

Le spectre d'un annéloïde  $A$  possède un faisceau d'annéloïdes naturel à fibres locales; en recollant de tels objets, on obtient ce qu'on appelle un *schémoïde*. Si  $X$  est un schémoïde, le corpoïde résiduel d'un point  $x$  de  $X$  sera noté  $\kappa(x)$ , et l'application  $\mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \kappa(x)$  sera notée  $a \mapsto a(x)$ . Si  $Y \rightarrow X$  est un morphisme de schémoïdes, sa fibre en un point  $x$  de  $X$  sera notée  $Y_x$ ; c'est un  $\kappa(x)$ -schémoïde.

**1.3.** — Soit  $A$  un annéloïde. Si  $r = (r_i)_{i \in I}$  est une famille d'éléments de  $D$  et si  $T = (T_i)_{i \in I}$  est une famille d'indéterminées, nous noterons  $A[r \setminus T]$  l'annéloïde dont le sommande de degré  $d$  est constitué des sommes formelles finies du type  $\sum a_J T^J$  où  $J \in A^{dr^J}$  pour tout  $J$ . Chaque  $T_i$  est donc de degré  $r_i$  (et  $(A[r \setminus T], (T_i)_i)$  représente le foncteur qui envoie une  $A$ -algèbre  $B$  sur  $\prod_i B^{r_i}$ ).

Si  $F$  est un corpoïde et si  $r$  est comme ci-dessus,  $F[r \setminus T]$  est intègre et son corpoïde des fractions sera noté  $F(r \setminus T)$ ; lorsque  $r$  est  $F$ -libre, c'est-à-dire lorsque les  $r_i$  forment une famille libre du  $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel  $D/(\mathfrak{d}(F^\times)^\mathbf{Q})$ , le corpoïde  $F(r \setminus T)$  est simplement  $F[r \setminus T, r^{-1} \setminus S]/(S_i T_i - 1)_i$ .

Mentionnons que ce sont ces annéloïdes de polynômes avec degrés des indéterminées prescrits qui sont utilisés pour définir les notions d'éléments entiers ou algébriques : par exemple si  $B$  est une  $A$ -algèbre, un élément  $b$  de  $B$  est dit entier sur  $A$  s'il annule un polynôme unitaire appartenant à  $A[\mathfrak{d}(b) \setminus T]$ .

**1.4.** — Soit  $A$  un annéloïde et soit  $B$  une  $A$ -algèbre telle que

$$\mathfrak{d}(B_{\neq 0}) = \mathfrak{d}(A_{\neq 0}) = \mathfrak{d}(A^\times).$$

Dans ce cas pour tout élément  $r$  appartenant à  $\mathfrak{d}(B_{\neq 0})$  la flèche naturelle de  $A^r \otimes_{A^1} B^1$  vers  $B^r$  est un isomorphisme (et  $A^r$  est libre de rang 1 comme  $A^1$ -module) si bien que  $B \simeq A \otimes_{A^1} B^1$ .

Cette remarque peut permettre de démontrer une propriété en se ramenant au cas non gradué, grâce à un premier changement de base de la forme  $A \rightarrow A[r \setminus T, r^{-1} \setminus T^{-1}]$  ou  $A \rightarrow A(r \setminus T)$  si  $A$  est un corpoïde (pour une famille convenable  $r$  d'éléments de  $D$ ). Bien entendu, il faut s'assurer au préalable que la propriété concernée satisfait la descente relative aux changements de base de ce type, ce qui est souvent facile à établir par un calcul explicite. Donnons deux exemples.

**1.4.1.** — Si  $M$  est un  $A$ -module, il est fini si et seulement si  $M \otimes_A A[r \setminus T, r^{-1} \setminus T^{-1}]$  est fini sur  $A[r \setminus T, r^{-1} \setminus T^{-1}]$  (considérer les termes constants d'une famille finie de polynômes à coefficients dans  $M$  engendrant  $M \otimes_A A[r \setminus T, r^{-1} \setminus T^{-1}]$ ).

**1.4.2.** — Si  $X$  est un  $A$ -schémoïde et si  $\pi$  désigne la projection  $X_{A[r \setminus T, r^{-1} \setminus T^{-1}]} \rightarrow X$  une partie  $U$  de  $X$  est ouverte si et seulement si  $\pi^{-1}(U)$  est ouverte (remarquer que la section  $\sigma$  de  $\pi$  qui envoie un point  $\xi$  sur le point générique de  $\text{Spec } \kappa(\xi)[r \setminus T, r^{-1} \setminus T^{-1}]$  est continue).

**1.5. Quelques propriétés géométriques dans le cadre gradué.** — Nous allons utiliser la méthode générale évoquée au 1.4 pour étudier le comportement de certaines

propriétés des algèbres sur un corpoïde par extension des scalaires, en nous ramenant à ce qui est connu en algèbre commutative classique.

**1.5.1. Algèbres réduites sur un corpoïde parfait.** — Soit  $F$  un corpoïde parfait et soit  $A$  une  $F$ -algèbre réduite. Soit  $L$  une extension de  $F$ ; la  $L$ -algèbre  $A_L$  est encore réduite. Pour le voir, on choisit une famille  $r$  d'éléments de  $D$  telle que

$$\mathfrak{d}(L(r \setminus T)^\times) = \mathfrak{d}(F(r \setminus T)^\times) \supset \mathfrak{d}(A_{\neq 0}).$$

Soit  $p$  l'exposant caractéristique de  $F$ . Posons

$$K = \varinjlim F(r^{1/p^n} \setminus T^{1/p^n}) \quad \text{et} \quad \Lambda = \varinjlim L(r^{1/p^n} \setminus T^{1/p^n}).$$

On a alors  $\mathfrak{d}(A_{K \neq 0}) \subset \mathfrak{d}(K^\times) = \mathfrak{d}(\Lambda^\times) \supset \mathfrak{d}(A_{\Lambda \neq 0})$  (les deux relations d'inclusion sont des égalités dès que  $A$  est non nulle), si bien que

$$A_K = (A_K)^1 \otimes_{K^1} K, \quad (A_\Lambda)^1 = (A_K)^1 \otimes_{K^1} \Lambda^1 \quad \text{et} \quad A_\Lambda = (A_\Lambda)^1 \otimes_{\Lambda^1} \Lambda.$$

Pour montrer que  $A_L$  est réduite, il suffit de montrer que  $A_\Lambda$  est réduite, et même que  $(A_\Lambda)^1$  est réduite (en effet, si  $a$  est un élément non nul de  $A_\Lambda$ , son degré  $\mathfrak{d}(a)$  appartient à  $\mathfrak{d}(\Lambda^\times)$ , si bien qu'il existe  $\lambda \in \Lambda^\times$  tel que  $\lambda a$  soit de degré 1, et  $a$  est alors nilpotent si et seulement si  $\lambda a$  est nilpotent). Mais comme  $A$  est réduite,  $A_K$  est réduite par la forme même de  $K$ ; en particulier,  $(A_K)^1$  est réduite. Par ailleurs, puisque  $F$  est parfait,  $K$  est parfait, et  $K^1$  est *a fortiori* parfait. Il s'ensuit que  $(A_\Lambda)^1 = (A_K)^1 \otimes_{K^1} \Lambda^1$  est réduite.

**1.5.2. Algèbres géométriquement réduites.** — Soit  $F$  un corpoïde et soit  $A$  une  $F$ -algèbre. Soit  $L$  une extension parfaite de  $F$ . Il résulte de 1.5.1 que  $A_L$  est réduite si et seulement si  $A_\Lambda$  est réduite pour toute extension  $\Lambda$  de  $F$ ; si ces conditions équivalentes sont satisfaites nous dirons que  $A$  est géométriquement réduite.

Cette notion donne lieu par recollement à la notion de schémoïde géométriquement réduit sur  $F$ , qui se teste sur une extension parfaite de  $F$ .

**1.5.3. Algèbres intègres sur un corpoïde algébriquement clos.** — Soit  $F$  un corpoïde algébriquement clos et soit  $A$  une  $F$ -algèbre intègre. Soit  $L$  une extension de  $F$ ; la  $L$ -algèbre  $A_L$  est encore intègre. Pour le voir, on peut supposer par un argument de limite inductive que  $A$  et  $L$  sont de type fini sur  $F$  (respectivement comme algèbre et comme extension). Dans ce cas le sous-groupe de  $D/\mathfrak{d}(F^\times)$  engendré par  $\mathfrak{d}(A_{\neq 0})$  et  $\mathfrak{d}(L^\times)$  est de type fini, et partant libre de rang fini puisque  $\mathfrak{d}(F^\times)$  est divisible. Il existe alors une famille finie et  $F$ -libre  $r$  d'éléments de  $D$  telle que

$$\mathfrak{d}(L(r \setminus T)^\times) = \mathfrak{d}(F(r \setminus T)^\times) \supset \mathfrak{d}(A_{\neq 0}).$$

Posons  $K = F(r \setminus T)$  et  $\Lambda = L(r \setminus T)$ . On a

$$A_K = (A_K)^1 \otimes_{K^1} K, \quad (A_\Lambda)^1 = (A_K)^1 \otimes_{K^1} \Lambda^1 \quad \text{et} \quad A_\Lambda = (A_\Lambda)^1 \otimes_{\Lambda^1} \Lambda.$$

Pour montrer que  $A_L$  est intègre il suffit de montrer que  $A_\Lambda$  est intègre, et même que  $(A_\Lambda)^1$  est intègre (par un argument analogue à celui utilisé plus haut pour le caractère réduit).

La fermeture séparable de  $K$  dans  $A_K$  est triviale. En effet, soit  $M$  une extension finie séparable de  $K$ . Le groupe  $\mathfrak{d}(M^\times)$  est de rang rationnel fini sur  $\mathfrak{d}(F^\times)$ ; comme

ce dernier est divisible,  $\mathfrak{d}(M^\times)/\mathfrak{d}(F^\times)$  est libre de rang fini ; soit  $s = (s_1, \dots, s_n)$  une base de ce quotient. En choisissant pour tout  $i$  un élément de  $M^\times$  de degré  $s_i$  on obtient un plongement de  $F(s \setminus T)$  dans  $M$  ; on a alors  $\mathfrak{d}(F(s \setminus T)^\times) = \mathfrak{d}(M^\times)$  et  $M^1 = F^1 = F(s \setminus T)^1$  (la première égalité provenant du fait que  $F^1$  est algébriquement clos). Par conséquent  $M = F(s \setminus T)$  et un calcul direct montre que  $A_M$  est intègre ; par conséquent, si  $M$  n'est pas triviale elle n'admet aucun  $K$ -plongement dans  $A_K$ .

Dès lors la fermeture séparable de  $K^1$  dans  $(A_K)^1$  est triviale et  $(A_\Lambda)^1 = A^1 \otimes_{F^1} \Lambda^1$  est intègre.

**1.5.4. Algèbres géométriquement intègres.** — Soit  $F$  un corpoïde et soit  $A$  une  $F$ -algèbre. Soit  $L$  une extension algébriquement close de  $F$ . Il résulte de 1.5.1 que  $A_L$  est intègre si et seulement si  $A_\Lambda$  est intègre pour toute extension  $\Lambda$  de  $F$  ; si ces conditions équivalentes sont satisfaites nous dirons que  $A$  est géométriquement intègre.

**1.5.5.** — Un schémoïde  $X$  sur un corpoïde  $F$  est dit géométriquement irréductible si  $X_L$  est irréductible pour toute extension  $L$  de  $F$ .

Supposons qu'il existe une extension  $\Lambda$  séparablement close de  $F$  tel que  $X_\Lambda$  soit irréductible. Soit  $\Lambda'$  une clôture algébrique de  $\Lambda$ . Le schémoïde  $Y := (X_{\Lambda'})_{\text{red}}$  est homéomorphe à  $X_\Lambda$ , et est par conséquent irréductible ; et il est réduit par définition. Il résulte alors de 1.5.4 que  $Y_M$  est irréductible pour toute extension  $M$  de  $\Lambda'$  ; ceci entraîne que  $X_M$  est irréductible pour toute telle  $M$  (il est en effet homéomorphe à  $Y_M$ ), puis que  $X$  est géométriquement irréductible.

**1.6. Dimension.** — Soit  $F$  un corpoïde et soit  $A$  une  $F$ -algèbre de type fini. Soit  $L$  une extension de  $F$  telle que  $\mathfrak{d}(A_{L \neq 0}) = \mathfrak{d}(L^\times)$ . La dimension de Krull de  $A_L^1$  ne dépend alors pas de  $L$ , et est appelée  $F$ -dimension de  $A$ , ou dimension de  $A$  s'il n'y a pas d'ambiguïté (mais on prendra garde que cette notion dépend du corpoïde de base  $F$  : si  $\rho$  est un élément de  $D$  qui n'est pas de torsion modulo  $\mathfrak{d}(F^\times)$  alors  $F(\rho \setminus T)$  est de dimension 0 sur lui-même mais de dimension 1 sur  $F$ ).

Si les  $\mathfrak{p}_i$  sont les idéaux premiers minimaux de  $A$  alors

$$\dim_F A = \sup_i \text{deg.tr.}(\text{Frac}(A/\mathfrak{p}_i)/F)$$

comme on le voit en se ramenant au cas non gradué par extension des scalaires à un corpoïde  $L$  comme ci-dessus de la forme  $F(r \setminus T)$  avec  $r$  convenable (ce type d'extension a l'avantage de préserver l'intégrité).

On étend la notion de  $F$ -dimension aux schémoïdes de type fini sur  $F$  en posant pour un tel schémoïde  $X$

$$\dim_F X = \sup_{x \in X} \text{deg.tr.}(\text{Frac}(\kappa(x))/F).$$

Si  $x$  est un point de  $X$  la dimension de  $X$  en  $x$  est le maximum des dimensions des composantes irréductibles de  $X$  contenant  $x$ . Si  $f: Y \rightarrow X$  est un morphisme entre  $F$ -schémoïdes de type fini, la dimension relative de  $Y$  sur  $X$  en un point  $y$  de  $Y$  est la dimension de  $Y_{f(y)}$  en  $y$ .

**1.7.** — Soit  $A$  un annéloïde. Une *valuation* sur  $A$  est la donnée d'un groupe abélien ordonné  $\Gamma$  noté multiplicativement et d'une application  $|\cdot|: A \rightarrow \Gamma \cup \{0\}$  (où 0 est un

élément absorbant pour la multiplication et plus petit que tout élément de  $\Gamma$ ) telle que :

- ◇  $|1| = 1$  ;
- ◇  $|ab| = |a| \cdot |b|$  pour tout couple  $(a, b)$  d'éléments de  $A$  ;
- ◇  $|a + b| \leq \max(|a|, |b|)$  pour tout couple  $a$  et  $b$  d'éléments de même degré de  $A$ .

Deux valuations  $|\cdot|: A \rightarrow \Gamma \cup \{0\}$  et  $|\cdot|': A \rightarrow \Gamma' \cup \{0\}$  sont dites équivalentes s'il existe un groupe abélien ordonné  $\Gamma''$ , deux morphismes injectifs croissants  $i: \Gamma'' \rightarrow \Gamma$  et  $j: \Gamma'' \rightarrow \Gamma'$ , et une valuation  $|\cdot|'': F \rightarrow \Gamma'' \cup \{0\}$  telle que  $|\cdot| = i \circ |\cdot|''$  et  $|\cdot|' = j \circ |\cdot|''$ .

**1.8.** — Soit  $F$  un corpoïde valué (c'est-à-dire muni d'une valuation). Nous emploierons par défaut les notations suivantes :

- ◇  $|\cdot|$  pour la valuation de  $F$
- ◇  $F^\circ$  pour l'annéloïde  $\{z \in F, |z| \leq 1\}$  ; ce dernier est local et est appelé l'annéloïde de la valuation  $|\cdot|$  ;
- ◇  $F^{\circ\circ}$  pour l'unique idéal maximal de  $F^\circ$ , qui n'est autre que  $\{z \in F, |z| < 1\}$ .

**1.9.** — Soit  $A$  un annéloïde. Nous noterons  $\text{Spv}(A)$  le *spectre valuatif* de  $A$ , c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence de valuations sur  $A$ . On peut définir de manière équivalente  $\text{Spv}(A)$  comme l'ensemble des couples  $(x, |\cdot|)$  où  $x$  est un point de  $\text{Spec } A$  et  $|\cdot|$  une classe d'équivalence de valuations sur  $\kappa(x)$ . Si  $\xi$  est un point de  $\text{Spv}(A)$  correspondant à un couple  $(x, |\cdot|)$  le corpoïde valué  $(\kappa(x), |\cdot|)$  sera noté  $\kappa(\xi)$  et sa valuation structurale restera notée  $|\cdot|$  ; lorsqu'on voudra préciser que le morphisme d'évaluation  $a \mapsto a(x)$  est vu comme à valeurs dans le corpoïde valué  $\kappa(\xi)$  on l'écrira  $a \mapsto a(\xi)$ . Grâce à cette convention on a  $\xi(a) = |a(\xi)|$  pour tout  $a \in A$  et c'est la seconde écriture dont nous nous servirons la plupart du temps.

Si  $E$  est un sous-ensemble de  $A$  nous noterons  $\text{Spv}(A, E)$  le sous-ensemble de  $\text{Spv}(A)$  formé des points  $\xi$  tels que  $|a(\xi)| \leq 1$  pour tout  $a \in E$ .

**1.10.** — Soit  $F$  un corpoïde. Deux valuations sur  $F$  sont équivalentes si et seulement si elles ont même annéloïde ; un sous-annéloïde  $A$  de  $F$  est l'annéloïde d'une valuation de  $F$  si et seulement si il est local et maximal parmi les sous-annéloïdes locaux de  $F$  pour la relation de domination. Ceci équivaut à demander que pour tout  $x \in F$  on ait  $x \in A$  ou  $x^{-1} \in A$ .

On dispose d'une relation d'ordre sur l'ensemble des valuations de  $F$ , qui se définit *mutatis mutandis* comme dans la théorie classique ; rappelons brièvement en quoi elle consiste.

Donnons-nous donc deux valuations  $|\cdot|_1$  et  $|\cdot|_2$  sur  $F$  dont on note  $A$  et  $B$  les annéloïdes respectifs, et  $\kappa$  et  $\lambda$  les corpoïdes résiduels respectifs. Les assertions suivantes sont alors équivalentes :

- (i) il existe un sous-groupe convexe  $H$  de  $|F^\times|_1$  tel que  $|\cdot|_2$  soit (équivalente à) la composée de  $|\cdot|_1$  et de l'application quotient  $|F|_1 \rightarrow (|F^\times|_1/H) \cup \{0\}$  ;
- (ii) l'annéloïde  $B$  est égal à  $A_{\mathfrak{p}}$  pour un certain idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $A$  ;

(iii) il existe un annéloïde de valuation  $\alpha$  de corpoïde des fractions  $\lambda$  tel que  $A$  soit l'image réciproque de  $\alpha$  par la flèche de réduction  $B \rightarrow \lambda$ .

On dit alors que  $|\cdot|_1$  est plus fine que  $|\cdot|_2$ , ou qu'elle la raffine ; on dit aussi que  $|\cdot|_2$  est plus grossière que  $|\cdot|_1$ .

Indiquons quelques relations entre les différents objets évoqués dans les équivalences ci-dessus : s'il existe  $H$  comme dans (i), alors (ii) est vraie en prenant pour  $\mathfrak{p}$  l'ensemble des éléments  $a$  de  $A$  tels que  $|a|_1 \notin H$  ; s'il existe  $\mathfrak{p}$  comme dans (ii), alors (iii) est vraie en prenant pour  $\alpha$  l'annéloïde  $A/\mathfrak{p}$  et (i) est vraie en prenant pour  $H$  le groupe  $|B^\times|_1$  ; et s'il existe  $\alpha$  comme dans (iii) alors (ii) est vraie en prenant pour  $\mathfrak{p}$  l'image réciproque de l'idéal maximal de  $\alpha$ .

Soit  $|\cdot|$  une valuation sur  $F$  ; utilisons les notations standard  $F^\circ$  et  $F^{\circ\circ}$  pour l'annéloïde de  $|\cdot|$  et pour l'idéal maximal de celui-ci. La caractérisation (iii) de la relation de raffinement fournit une bijection entre l'ensemble des valuations de  $F$  plus fines que  $|\cdot|$  (à équivalence près) et l'ensemble des valuations sur le corpoïde  $F^\circ/F^{\circ\circ}$ . Soit maintenant  $\mathcal{V}$  l'ensemble des valuations sur  $F$  plus grossières que  $|\cdot|$ , muni de la relation de raffinement. La caractérisation (i) (resp. (ii)) de cette dernière fournit une bijection croissante (resp. décroissante) entre  $\mathcal{V}$  et l'ensemble des sous-groupes convexes de  $|F^\times|$  (resp. des idéaux premiers de  $F^\circ$ ) ; le premier étant totalement ordonné par inclusion, il en va de même du second. Le cardinal de  $\mathcal{V} \setminus \{|\cdot|\}$  est appelé la *hauteur* de  $|\cdot|$ .

**1.11. Valuations de Gauß.** — Soit  $F$  un corpoïde valué, soit  $r = (r_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments de  $D$ , et soit  $\gamma = (\gamma_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments d'un groupe ordonné contenant  $|F^\times|$ . On note  $F(r \setminus T / \gamma)$  le corpoïde  $F(r \setminus T)$  muni de la *valuation de Gauß de paramètre  $\gamma$*  définie par la formule  $\sum a_J T^J \mapsto \max |a_J| \cdot \gamma^J$ . Dans le cas où  $D = \{1\}$  on écrira  $F(T/\gamma)$  au lieu de  $F(1 \setminus T/\gamma)$ .

**1.12.** — Soient  $F, r$  et  $\gamma$  comme ci-dessus. Le corps valué  $F(r \setminus T / \gamma)^1$  est alors de la forme  $F^1(\Theta/\delta)$ . En effet, par le lemme de Zorn ou une récurrence transfinie, on se ramène au cas où l'ensemble  $I$  possède un unique élément  $i$  et on écrit  $r$  et  $\gamma$  au lieu de  $r_i$  et  $\gamma_i$ . On distingue deux cas.

◊ Le cas où  $r$  est d'ordre fini  $n$  modulo  $\mathfrak{d}(F^\times)$ . On choisit alors un élément  $\lambda$  de  $F^\times$  tel que  $r^n = \mathfrak{d}(\lambda)$  ; si l'on pose  $\delta = \gamma \cdot |\lambda|^{-1}$  et  $\Theta = T/\lambda$  alors  $F(r \setminus T / \gamma)^1$  s'identifie à  $F^1(\Theta/\delta)$ .

◊ Le cas où  $r$  n'est pas de torsion modulo  $n$ . On a alors  $F(r \setminus T / \gamma)^1 = F^1$ .

**1.13. Remarque.** — Soit  $F$  un corpoïde et soit  $r$  une famille d'éléments de  $D$ . Le corps  $F(r \setminus T)^1$  est alors transcendant pur sur  $F^1$  : il suffit en effet d'appliquer 1.12 en munissant  $F$  de la valuation triviale et en prenant  $\gamma = 1$  ou, de manière plus raisonnable, d'en reprendre la preuve sans se préoccuper des valuations.

**1.14. Corpoïdes résiduels.** — Soit  $F$  un corpoïde muni d'une valuation  $|\cdot|$ . Le *corpoïde résiduel* de  $F$  est le  $(D \times |F^\times|)$ -corpoïde

$$\tilde{F} := \coprod_{(d, \gamma) \in D \times |F^\times|} \{x \in F^d, |x| \leq \gamma\} / \{x \in F^d, |x| < \gamma\}.$$

Notons que  $\tilde{F}^{D \times \{1\}}$  est le corpoïde résiduel  $F^\circ/F^{\circ\circ}$  de l'annéloïde local  $F^\circ$ . Si  $x$  est un élément non nul de  $F$  on notera  $\tilde{x}$  son image dans  $\tilde{F}^{(\mathfrak{d}(x), |x|)}$ .

Soit  $L$  une extension valuée de  $F$  et soit  $(\ell_i)$  une famille d'éléments non nuls de  $L$ ; pour tout  $i$  posons  $r_i = \mathfrak{d}(\ell_i)$  et  $\gamma_i = |\ell_i|$ . Les faits suivants résultent immédiatement des définitions :

- (1) La famille  $(\tilde{\ell}_i)$  est libre sur  $\tilde{F}$  si et seulement si  $|\sum a_i \ell_i| = \max |a_i| \cdot \gamma_i$  pour toute famille  $(a_i)$  d'éléments presque tous nuls de  $F$  telle que les  $a_i \ell_i$  soient tous de même degré. Si c'est le cas, la famille  $(\ell_i)$  est alors libre sur  $F$ .
- (2) La famille  $(\tilde{\ell}_i)$  est algébriquement indépendante sur  $\tilde{F}$  si et seulement si il existe un  $F$ -isomorphisme de corpoïdes valués  $F(r_i \setminus T_i / \gamma_i)_i \simeq L$  envoyant  $T_i$  sur  $\ell_i$  pour tout  $i$ .

Il résulte de (1) que  $\dim_{\tilde{F}} \tilde{L} \leq \dim_F L$ . Mentionnons par ailleurs que  $\dim_{\tilde{F}} \tilde{L} = ef$  où  $e$  est l'indice de ramification de  $L$  sur  $F$ , c'est-à-dire l'indice de  $|F^\times|$  dans  $|L^\times|$ , et où  $f$  est son indice d'inertie, c'est-à-dire la dimension du  $\tilde{F}^{D \times \{1\}}$ -espace vectoriel  $\tilde{L}^{D \times \{1\}}$  (voir par exemple [Ducb], 2.2.46.3; précisons qu'ici les indices et dimensions sont à considérer comme des cardinaux).

**1.15.** — Soit  $F$  un corpoïde valué et soit  $L$  une extension algébrique de  $F$ . Soit  $r = (r_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments de  $D$ , soit  $\gamma = (\gamma_i)$  une famille d'éléments d'un groupe abélien ordonné contenant  $|F^\times|^\mathbf{Q}$ , et soit  $T = (T_i)$  une famille d'indéterminées. Munissons  $L$  d'un prolongement de  $|\cdot|$ , encore noté  $|\cdot|$ . L'unique valuation sur  $L(r \setminus T)$  qui prolonge les valuations données sur  $L$  et  $F(r \setminus T / \gamma)$  est alors la valuation de Gauß de paramètre  $\gamma$ .

En effet, fixons une telle valuation sur  $L(r \setminus T)$ , et soit  $\Lambda$  son corpoïde résiduel. Pour tout  $i$  notons  $\tilde{T}_i$  l'image de  $T_i$  dans  $\Lambda^{(r_i, \gamma_i)}$ . Comme les  $\tilde{T}_i$  sont algébriquement indépendants sur  $\tilde{F}$  et comme  $\tilde{L}$  est algébrique sur  $\tilde{F}$ , les  $\tilde{T}_i$  sont algébriquement indépendants sur  $\tilde{L}$ , ce qui permet de conclure.

**1.16. Prolongements d'une valuation à une extension algébrique.** — Soit  $F$  un corpoïde valué et soit  $L$  une extension algébrique de  $F$ .

**1.16.1.** — Supposons que  $L^1 = F^1$ . Pour tout  $x \in L^\times$ , il existe  $N > 0$  tel que  $\mathfrak{d}(x)^N \in \mathfrak{d}(F^\times)$ ; il en résulte qu'il existe  $\lambda \in F^\times$  tel que  $x^N / \lambda \in L^1 = F^1$ ; par conséquent  $x^N \in F^\times$ . Il s'ensuit que  $|\cdot|$  possède un unique prolongement  $|\cdot|$  à  $L$ , dont on munit ce dernier. Soit  $(\ell_i)$  une famille d'éléments de  $L^\times$  tels que les  $\mathfrak{d}(\ell_i)$  constituent un système de représentants de  $\mathfrak{d}(L^\times) / \mathfrak{d}(F^\times)$ . Tout élément de  $L^\times$  possède une unique écriture de la forme  $a \ell_i$  pour un certain  $i$  et un certain  $a \in F^\times$ ; les  $\ell_i$  forment donc une base de  $L$  sur  $F$ , et les  $\tilde{\ell}_i$  forment une base de  $\tilde{L}$  sur  $\tilde{F}$ .

**1.16.2.** — Supposons maintenant que  $\mathfrak{d}(L^\times) = \mathfrak{d}(F^\times)$ . On a alors  $L = L^1 \otimes_{F^1} F$  et tout élément de  $L^\times$  a une écriture de la forme  $\ell x$  avec  $\ell \in L^1$  et  $x \in F$ ; il en résulte que tout prolongement à  $L^1$  de la restriction de  $|\cdot|$  à  $F^1$  s'étend d'une unique manière en un prolongement de  $|\cdot|$  à  $L$ ; si on le note encore  $|\cdot|$  il est donné par la formule  $|\ell x| = |\ell| \cdot |x|$  et l'on a  $\tilde{L} = \tilde{L}^1 \otimes_{\tilde{F}^1} \tilde{F}$ .

**1.16.3.** — Plaçons-nous maintenant dans le cas général et posons  $\Lambda = L^{\mathfrak{d}(F^\times)}$ . En considérant le dévissage  $F \hookrightarrow \Lambda \hookrightarrow L$  on déduit de 1.16.1 et 1.16.2 les faits suivants :

- ◇ la restriction à  $L^1$  induit une bijection entre l'ensemble des extensions de  $|\cdot|$  à  $L$  et celui des extensions à  $L^1$  de la restriction de  $|\cdot|$  à  $F^1$  ;
- ◇ si l'on munit  $L$  d'un prolongement donné de  $|\cdot|$  on a

$$[\tilde{L} : \tilde{\Lambda}] = [L : \Lambda] \text{ et } \tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}^1 \otimes_{\tilde{F}^1} \tilde{F}.$$

**1.16.4.** — Supposons maintenant que  $L$  est finie sur  $F$ . Dans ce cas  $L^1$  est finie sur  $F^1$ , et la restriction de  $|\cdot|$  à  $F^1$  admet donc un ensemble fini  $\{|\cdot|_1, \dots, |\cdot|_r\}$  d'extensions à  $L^1$  ; pour tout  $i$ , il résulte de 1.16.3 que  $|\cdot|_i$  s'étend d'une unique manière en un prolongement de  $|\cdot|$  à  $L$ , qu'on note encore  $|\cdot|_i$  ; soit  $L_i$  (resp.  $\Lambda_i$ ) le corpoïde valué  $(L, |\cdot|_i)$  (resp.  $(\Lambda, |\cdot|_i)$ ). Notons  $e_i$  et  $f_i$  les indices d'inertie et de ramification de  $L_i^1$  sur  $F^1$ , et  $e_i^\sharp$  et  $f_i^\sharp$  les indices d'inertie et de ramification de  $L_i$  sur  $F$ . On sait que  $\sum e_i f_i \leq [L^1 : F^1]$ . En vertu de 1.16.3 on a

$$\begin{aligned} \sum e_i^\sharp f_i^\sharp &= \sum_i [\tilde{L}_i : \tilde{F}] \\ &= \sum_i [\tilde{L}_i : \tilde{\Lambda}_i] \cdot [\tilde{\Lambda}_i : \tilde{F}] \\ &= [L : \Lambda] \sum_i [\tilde{\Lambda}_i : \tilde{F}] \\ &= [L : \Lambda] \sum_i [\tilde{\Lambda}_i^1 : \tilde{F}^1] \\ &= [L : \Lambda] \sum_i e_i f_i \\ &\leq [L : \Lambda] \cdot [L^1 : F^1] \\ &= [L : \Lambda] \cdot [\Lambda : F] \\ &= [L : F]. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\sum e_i^\sharp f_i^\sharp \leq [L : F]$ , et l'on a plus précisément

$$\frac{\sum e_i^\sharp f_i^\sharp}{[L : F]} = \frac{\sum e_i f_i}{[L^1 : F^1]}.$$

Le quotient  $\frac{\sum e_i^\sharp f_i^\sharp}{[L : F]}$  est appelé le *défaut* de l'extension  $F \hookrightarrow L$ . On dit que cette extension est *sans défaut* si son défaut vaut 1.

**1.16.4.1.** — Par ce qui précède,  $F \hookrightarrow L$  est sans défaut si et seulement si  $F^1 \hookrightarrow L^1$  est sans défaut.

**1.16.4.2.** — Soit  $r$  une famille d'éléments de  $D$ , soit  $\Gamma$  un groupe abélien ordonné contenant  $|L^\times|$  et soit  $\gamma$  une famille d'éléments de  $L$ , paramétrée par le même ensemble que  $r$ . Il résulte de 1.15 que le défaut de  $F(r \setminus T / \gamma) \hookrightarrow L(r \setminus T)$  est égal à celui de  $L$  sur  $F$ .



**1.17.** — Soit  $F$  un corps valué. On dit que  $F$  est *stable*, ou que sa valuation  $|\cdot|$  est stable, si toute extension finie de  $F$  est sans défaut. Il découle de 1.16.4.1 que  $F$  est stable si et seulement si  $F^1$  est stable.

**1.17.1.** — Si  $|\cdot|$  est la composée d'une valuation  $|\cdot|^\star$  sur  $F$  et d'une valuation  $|\cdot|_\star$  alors  $|\cdot|$  est stable si et seulement si  $|\cdot|^\star$  et  $|\cdot|_\star$  le sont : on le démontre sans difficulté comme dans le cas classique, auquel on peut également se ramener puisque la stabilité se teste en degré 1.

**1.17.2.** — On suppose que  $D = \{1\}$  et que la valuation de  $F$  est de hauteur 1. Si  $F$  est stable, son complété  $\widehat{F}$  est stable d'après [BGR84], 3.6.2, Prop. 3 ; précisons que la définition de stabilité dans cet ouvrage (*op. cit.*, 3.6.1, Def. 1) n'est pas *a priori* la même que la nôtre, mais les deux coïncident en fait d'après *op. cit.*, 3.6.2, Prop. 5.

**1.17.3.** — Supposons toujours que  $D = \{1\}$  (mais on ne fait plus d'hypothèse sur la hauteur de la valuation). Soit  $\Gamma$  un groupe abélien ordonné contenant  $|F^\times|$  et soit  $\gamma = (\gamma_i)_{i \in I}$  une famille finie d'éléments de  $\Gamma$ . Si  $F$  est stable, alors  $F(T/\gamma)$  est stable : cela a été démontré par Kuhlmann, voir [Kuh10] ; pour des résultats partiels antérieurs, voir [Gru68], [Ohm89], [Tem10], [Tei14] ; pour une preuve plus récente fondée sur les travaux de Hrushovski et Loeser, voir [Duc14].

**1.17.4.** — On ne suppose plus que  $D = \{1\}$  ; nous allons brièvement expliquer comment étendre le résultat de 1.17.3 dans le contexte gradué, et pour une famille  $\gamma$  éventuellement infinie.

Soit donc  $r = (r_i)_{i \in I}$  une famille d'éléments de  $D$ , soit  $\Gamma$  un groupe abélien ordonné contenant  $|F^\times|^\mathbf{Q}$  et soit  $\gamma = (\gamma_i)$  une famille d'éléments de  $\Gamma$  ; soit  $T = (T_i)$  une famille d'indéterminées. Supposons que  $F$  est stable, et montrons que  $F(r \setminus T/\gamma)$  est stable. Comme la stabilité se teste en degré 1, il résulte de 1.3 qu'on peut se ramener au cas non gradué. Soit  $L$  une extension finie de  $F(T/\gamma)$ . Il existe un sous-ensemble fini  $J$  de  $I$  et une extension finie  $L_0$  de  $F(T_i/\gamma_i)_{i \in J}$  telle que  $L = L_0(T_i)_{i \in I \setminus J}$ . Par le cas fini énoncé au 1.17.3,  $L_0$  est une extension sans défaut de  $F(T_i/\gamma_i)_{i \in J}$ . Il s'ensuit en vertu de 1.16.4.2 que  $L = L_0(T_i)_{i \in I \setminus J}$  est une extension sans défaut du corps valué  $F(T/\gamma) = F(T_i/\gamma_i)_{i \in J}(T_i/\gamma_i)_{i \in I \setminus J}$ .

**1.18. Platitude sur un annéloïde de valuation.** — Soit  $F$  un corps valué. Un  $F^\circ$ -module est plat si et seulement si il est sans torsion ([Duc18], preuve du lemme 5.2.1). Par ailleurs, toute  $F^\circ$ -algèbre plate et de type fini est de présentation finie. En effet, soit  $A$  une telle algèbre. Choisissons une famille finie  $r = (r_1, \dots, r_n)$  d'éléments de  $D$  et une surjection  $F^\circ[r \setminus T] \rightarrow A$ . Soit  $I$  le noyau de cette surjection ; nous allons montrer que  $I$  est de type fini.

Expliquons tout d'abord pourquoi il suffit de prouver que c'est le cas après extension des scalaires à  $L^\circ$  où  $L$  est une extension valuée de  $F$  bien choisie. Écrivons  $I$  comme la réunion filtrante d'une famille  $(I_\lambda)$  d'idéaux de type fini. Par platitude,  $I_{L^\circ}$  et les  $I_{\lambda, L^\circ}$  sont des idéaux de  $L^\circ[r \setminus T]$ . Supposons  $I_{L^\circ}$  de type fini ; il coïncide alors avec  $I_{\lambda, L^\circ}$  pour un certain  $\lambda$ . Par conséquent,  $(I/I_\lambda)_{L^\circ}$  est nul, et il suffit de montrer que cela entraîne la nullité de  $(I/I_\lambda)$  ; nous allons plus précisément vérifier que tout sous- $F^\circ$ -module de type fini de  $(I/I_\lambda)$  est nul, ce qui permettra de conclure. Soit

$J$  un tel sous-module. Par platitude,  $J_{L^\circ}$  s'injecte dans  $(I/I_\lambda)_{L^\circ}$ , et est donc nul. Il s'ensuit que  $J_{L^\circ/L^{\circ\circ}}$  est nul, puis que  $J_{F^\circ/F^{\circ\circ}}$  est nul (car  $F^\circ/F^{\circ\circ} \hookrightarrow L^\circ/L^{\circ\circ}$  est une extension de corps), et l'on conclut à l'aide du lemme de Nakayama (gradué).

Nous allons appliquer cette remarque en prenant pour  $L$  le corps valué  $F(r_1 \setminus T_1/1, \dots, r_n \setminus T_n/1, (1 \setminus \Theta_\gamma/\gamma)_\gamma)$  où  $\gamma$  parcourt le groupe  $|F^\times|$ . Par construction, les  $r_i$  appartiennent à  $\mathfrak{d}(L)$  et  $|L^\times|$  est égal à  $|(L^1)^\times|$ . En étendant les scalaires à  $L^\circ$  on se ramène donc au cas où les  $r_i$  appartiennent à  $\mathfrak{d}(F)$  (puis par renormalisation au cas où ils sont tous égaux à 1), et où  $|F^\times|$  est égal à  $|(F^1)^\times|$ . Mais dans ce cas tout élément  $f$  de  $I$  est de la forme  $ag$  où  $a$  appartient à  $(F^\circ)^\times$  et où  $g$  est de degré 1. L'idéal  $I$  est donc engendré par le noyau de la surjection  $(F^\circ)^1[T] \rightarrow A^1$ , qui est de type fini par le cas classique (non gradué) de l'assertion à démontrer, cf. [Nag66] – mentionnons que ce résultat a été étendu des anneaux de valuation aux anneaux intègres quelconques par Raynaud et Gruson ([RG71], cor. 3.4.7).

**1.19. Lemme.** — *Soit  $Y \rightarrow X$  un morphisme plat, dominant et de présentation finie entre schémoïdes intègres, et soit  $d$  la dimension de sa fibre générique. Les fibres de  $Y \rightarrow X$  sont alors purement de dimension  $d$ .*

*Démonstration.* — Par une extension des scalaires à un corps valué de la forme  $F(r \setminus T)$  avec  $r$  convenable, on peut supposer  $Y \rightarrow X$  est induit par extension des scalaires de  $F^1$  à  $F$  par un morphisme de schémas usuels; il suffit maintenant d'établir le résultat pour ce dernier morphisme, c'est-à-dire dans le cadre non gradué. Mais il est alors bien connu; combiner par exemple la proposition 13.2.3 de [EGA IV<sub>3</sub>] et le corollaire 6.1.2 de [EGA IV<sub>2</sub>].  $\square$

**1.20. Corollaire.** — *Soit  $F$  un corps valué et soit  $X$  un  $F^\circ$ -schémoïde de type fini. tel que le morphisme  $X \rightarrow \text{Spec } F^{\text{circ}}$  soit générisant. Soit  $\xi$  un point de  $\text{Spec } F^\circ$ , soit  $Y$  une composante irréductible de  $X_\xi$ , soit  $d$  sa dimension et soit  $\tau$  son point générique. Il existe un ouvert  $U$  de  $X$  contenant  $\tau$  tel que les fibres de  $U \rightarrow X$  soient toutes purement de dimension  $d$ .*

*Démonstration.* — L'énoncé à montrer est insensible aux phénomènes de nilpotence; on peut donc supposer  $X$  réduit. Soit  $\eta$  le point générique de  $\text{Spec } F^\circ$ . Comme  $X \rightarrow \text{Spec } F^\circ$  est générisant, il existe une généralisation de  $\tau$  sur la fibre générique  $X_\eta$ ; autrement dit, l'ensemble  $\mathcal{Z}$  des composantes irréductibles  $Z$  de  $X_\eta$  telles que  $\tau \in \overline{Z}$  est non vide. Soit  $E$  la réunion des composantes irréductibles  $Z$  de  $X_\eta$  qui n'appartiennent pas à  $\mathcal{Z}$ . Par construction,  $\tau$  n'appartient pas au fermé  $\overline{E}$  de  $X$ ; posons  $U = X \setminus \overline{E}$ , et montrons que les fibres de  $U \rightarrow X$  sont purement de dimension  $d$ .

Soit  $Z \in \mathcal{Z}$ . Le  $F^\circ$ -schémoïde de type fini  $\overline{Z}$  muni de sa structure réduite est sans  $F^\circ$ -torsion, et partant plat (et dès lors de présentation finie, cf. 1.18). Le lemme 1.19 assure que les fibres de  $\overline{Z} \rightarrow X$  sont purement de dimension  $\dim Z$ ; or  $Y$  est une composante irréductible de  $\overline{Z}_\xi$  puisque  $\tau \in \overline{Z}$ ; en conséquence,  $\dim Z = d$  et les fibres de  $\overline{Z} \rightarrow X$  sont toutes purement de dimension  $d$ .

Comme  $X \rightarrow \text{Spec } F^\circ$  est générisant, tout point de  $U$  appartient à  $\overline{Z}$  pour au moins une composante irréductible  $Z$  de  $X_\eta$ ; puisque  $U$  est le complémentaire de  $\overline{E}$ ,

la composante  $Z$  appartient nécessairement à  $\mathcal{Z}$ . En conséquence,  $U$  est un ouvert du schémoïde réduit  $\bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} \overline{Z}$ . Les fibres de  $\overline{Z} \rightarrow X$  étant toutes purement de dimension  $d$  quel que soit  $Z \in \mathcal{Z}$ , il en va de même de celles de  $(\bigcup_{Z \in \mathcal{Z}} \overline{Z}) \rightarrow X$ , puis de celles de  $U \rightarrow X$ .  $\square$

**1.21. Définition.** — Soit  $R$  un annéloïde intègre de corps des fractions  $K$  et soit  $A$  une  $R$ -algèbre sans  $R$ -torsion et réduite. Le *normalisé faible* de  $A$  est la fermeture intégrale de  $A$  dans  $A_K$ . Nous dirons que la  $R$ -algèbre  $A$  est *faiblement normale* si elle est égale à son normalisé faible.

Ces notions permettent de définir par recollement la notion de normalisé faible d'un  $R$ -schémoïde réduit sans  $R$ -torsion, puis celle de  $R$ -schémoïde faiblement normal.

**1.22. Lemme.** — Soit  $F$  un corps valué, soit  $A$  une  $F^\circ$ -algèbre plate et soit  $a$  un élément de  $A_F$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $L$ -élément  $a$  est entier sur  $A$  ;
- (ii) on a  $|a(\xi)| \leq 1$  pour tout  $\xi \in \text{Spv}(A_F, A)$ .

*Démonstration.* — Il est clair que (i)  $\Rightarrow$  (ii). Supposons maintenant que (ii) soit vraie. Posons  $r = \mathfrak{v}(a)$ . Soit  $\mathbf{A}_A^{1,r}$  le schémoïde  $\text{Spec } A[r \setminus T]$  et soit  $\mathbf{P}_A^{1,r}$  le recollement de  $\mathbf{A}_A^{1,r}$  et  $\mathbf{A}_A^{1,r^{-1}} = \text{Spec } A[r^{-1} \setminus S]$  le long de l'isomorphisme  $D(T) \simeq D(S)$ ,  $S \mapsto T^{-1}$ . Soit  $Z$  le sous-schémoïde fermé de  $\mathbf{A}_{A_F}^{1,r} := \text{Spec } A_F[r \setminus T]$  défini par l'idéal  $(T - a)$  et soit  $\overline{Z}$  son adhérence schématique dans  $\mathbf{P}_A^{1,r}$ , c'est-à-dire le sous-schémoïde fermé de  $\mathbf{P}_A^{1,r}$  dont la trace sur  $\mathbf{A}_A^{1,r}$  est définie par le noyau de l'évaluation en  $a$ , et dont la trace sur  $\mathbf{A}_A^{1,r^{-1}}$  est définie par le noyau de  $A[r^{-1} \setminus S] \rightarrow A_F[r^{-1} \setminus S]/(aS - 1)$ .

Soit  $z \in \overline{Z}$ . Par construction  $\overline{Z}$  est sans  $F^\circ$ -torsion, et est dès lors plat sur  $F^\circ$ . Un morphisme plat étant générissant (la preuve est la même *mutatis mutandis* que dans le cas non gradué),  $z$  possède une généralisation  $\zeta$  située sur  $Z$ . Le choix d'un annéloïde de valuation dominant  $\mathcal{O}_{\{\zeta\}, z}$  (où  $\{\zeta\}$  est muni de sa structure réduite) fournit un point  $\xi$  de  $\text{Spv}(A_F, A)$  ; comme  $|a(\xi)| \leq 1$  d'après l'hypothèse (ii), le point  $z \in \mathbf{P}_A^{1,r}$  n'est pas le «point à l'infini de sa fibre» (défini par l'équation  $S = 0$ ). Par conséquent, la section à l'infini de  $\mathbf{P}_A^{1,r} \rightarrow \text{Spec } A$  ne rencontre pas  $\overline{Z}$ . Celui-ci est donc à la fois «projectif» et affine sur  $\text{Spec } A$ , et partant fini (on peut pour le voir se ramener au cas non gradué par le procédé général décrit au 1.4). Il s'ensuit que  $a$  est entier sur  $A$ .  $\square$

**1.23. Lemme.** — Soit  $F$  un corps valué et soit  $r$  une famille d'éléments de  $D$ . Soit  $X$  un  $F^\circ$ -schémoïde plat et soit  $Y$  le normalisé faible de  $X$ . Le normalisé faible du  $F(r \setminus T/1)^\circ$ -schémoïde  $X_{F(r \setminus T/1)^\circ}$  s'identifie à  $Y_{F(r \setminus T/1)^\circ}$ .

*Démonstration.* — On peut supposer que les schémoïdes  $X$  et  $Y$  sont affines ; posons  $A = \mathcal{O}_X(X)$  et  $B = \mathcal{O}_Y(Y)$ . Traitons tout d'abord le cas où  $B = A$ , c'est-à-dire celui où la  $F^\circ$ -algèbre  $A$  est faiblement normale ; il s'agit alors de prouver que la  $F(r \setminus T/1)^\circ$ -algèbre  $A_{F(r \setminus T/1)^\circ}$  est faiblement normale. Soit  $a$  un élément de  $A_{F(r \setminus T/1)^\circ}$  entier sur  $A_{F(r \setminus T/1)^\circ}$  ; ceci revient en vertu du lemme 1.22 à demander que  $|a(\xi)| \leq 1$

pour tout point  $\xi$  appartenant à  $\text{Spv}(A_{F(r\backslash T/1)}, A_{F(r\backslash T/1)^\circ})$ . Notre but est de montrer que  $a \in A_{F(r\backslash T/1)^\circ}$ . Écrivons

$$a = \frac{\sum a_I T^I}{\sum \lambda_I T^I}$$

où les  $a_I$  appartiennent à  $A_F$  et les  $\lambda_I$  appartiennent à  $F$  (et sont non tous nuls). Quitte à multiplier numérateur et dénominateur par un scalaire convenable, on peut supposer que  $\max |\lambda_I| = 1$ , c'est-à-dire que  $\lambda := \sum \lambda_I T^I$  appartient à  $F(r\backslash T/1)^{\circ \times}$ . Mais dans ce cas  $|\lambda(\xi)| = 1$  pour tout  $\xi \in \text{Spv}(F(r\backslash T/1), F(r\backslash T/1)^\circ)$ , ce qui entraîne que  $|\lambda(\xi)| = 1$  pour tout  $\xi \in \text{Spv}(A_{F(r\backslash T/1)}, A_{F(r\backslash T/1)^\circ})$ ; on peut donc remplacer  $a$  par  $\lambda a$  et se ramener ainsi au cas où  $a$  est de la forme  $\sum a_I T^I$ , les  $a_I$  étant des éléments de  $A_F$ . Soit  $\xi \in \text{Spv}(A_F, A)$  et soit  $\eta$  l'antécédent de  $\xi$  sur  $\text{Spv}(A_{F(r\backslash T/1)}, A_{F(r\backslash T/1)^\circ})$  induit par le morphisme naturel  $A_{F(r\backslash T/1)} \rightarrow \kappa(\xi)(r\backslash T/1)$ . On a  $|a(\eta)| \leq 1$  par hypothèse sur  $a$ . Par définition de  $\eta$ , cela signifie que  $|a_I(\xi)| \leq 1$  pour tout  $I$ . Ceci valant quelque soit  $\xi \in \text{Spv}(A_F, A)$ , chacun des  $a_I$  est entier sur  $A$ ; puisque  $A$  est  $F^\circ$ -normale, ceci entraîne que chacun des  $a_I$  appartient à  $A$ , puis que  $a \in A_{F(r\backslash T/1)^\circ}$ . Par conséquent,  $A_{F(r\backslash T/1)^\circ}$  est  $F(r\backslash T/1)^\circ$ -normale.

Traitons maintenant le cas général. Par construction,  $B_{F(r\backslash T/1)^\circ}$  est un sous-annéloïde de  $B_{F(r\backslash T/1)} = A_{F(r\backslash T/1)}$  qui contient  $A_{F(r\backslash T/1)^\circ}$  et est entier sur celui-ci; par le cas particulier déjà traité, la  $F(r\backslash T/1)^\circ$ -algèbre  $B_{F(r\backslash T/1)^\circ}$  est faiblement normale, ce qui achève la démonstration.  $\square$

**1.24. Lemme.** — Soit  $F$  un corpoïde valué et soit  $A$  une  $F^\circ$ -algèbre fidèlement plate. Supposons que  $\mathfrak{d}(A_{\neq 0}) = \mathfrak{d}(F^\times) = \mathfrak{d}(F^{\circ \times})$  et que ce groupe est divisible. Soit  $B$  le  $F^{\circ 1}$ -normalisé de  $A^1$ . Le produit tensoriel  $B \otimes_{F^{\circ 1}} F^\circ$  s'identifie au  $F^\circ$ -normalisé de  $A$ .

*Démonstration.* — En vertu de nos hypothèses on a  $A = A^1 \otimes_{F^{\circ 1}} F^\circ$ . Exactement comme dans la preuve du lemme 1.23 ci-dessus, il suffit de traiter le cas où  $B = A^1$ . Supposons donc que  $A^1$  est  $F^{\circ 1}$ -normale, et soit  $C$  une  $A$ -algèbre entière et  $F^\circ$ -plate telle que  $A_F \rightarrow C_F$  soit un isomorphisme. Comme  $\mathfrak{d}(A_{\neq 0})$  est divisible on a

$$\mathfrak{d}(C_{\neq 0}) = \mathfrak{d}(A_{\neq 0}) = \mathfrak{d}(F^\times) = \mathfrak{d}(F^{\circ \times})$$

si bien que  $C = C^1 \otimes_{F^{\circ 1}} F = C^1 \otimes_{A^1} A$ . Comme  $C^1$  est  $F^{\circ 1}$ -normale,  $A^1 \rightarrow C^1$  est un isomorphisme. Par conséquent,  $A \rightarrow C$  est un isomorphisme et  $A$  est  $F^\circ$ -normale.  $\square$

### 1.25. Théorème (d'après Grauert-Remmert et Temkin)

Soit  $F$  un corpoïde valué et soit  $X$  un  $F^\circ$ -schémoïde plat et de type fini.

- (1) Si le  $F^\circ$ -schémoïde  $X$  est à fibres géométriquement réduites, il est faiblement normal.
- (2) Supposons  $F$  stable et de hauteur finie,  $|F^\times|$  divisible et  $X_F$  réduit.
  - (2a) Si le  $F^\circ$ -schémoïde  $X$  est faiblement normal il est à fibres réduites.
  - (2b) Le normalisé faible de  $X$  est fini sur  $X$ .

*Démonstration.* — Les deux assertions sont locales sur  $X$ , ce qui permet de supposer que ce dernier est affine.

Commençons par l’assertion (1). Les lemmes 1.23 et 1.24 permettent de se ramener au cas non gradué, dans lequel (1) vaut d’après [Tem10], Prop. 3.5.2.

Supposons maintenant  $F$  stable et de hauteur finie,  $|F^\times|$  divisible et  $X_F$  réduit. Nous allons montrer que le normalisé faible  $Y$  de  $X$  est fini sur  $X$  et à fibres réduites sur  $\text{Spec } F^\circ$ , ce qui montrera à la fois (2a) et (2b). Là encore, les lemmes 1.23 et 1.24 permettent de se ramener au cas non gradué; l’assertion en vue vaut alors d’après [Tem10], étapes 2, 3 et 4 de la preuve du théorème 3.5.5. Précisons que Temkin travaille avec un corps valué  $F$  séparablement clos, mais son raisonnement s’applique en fait tout aussi bien lorsque  $F$  est stable à groupe des valeurs divisible, en raison des faits suivants : si  $F$  est stable et de hauteur 1, son complété  $\widehat{F}$  est encore stable; le théorème de finitude de Grauert et Remmert (ingrédient crucial de l’étape 2 de la preuve de Temkin) vaut encore pour les corps stables à groupe des valeurs divisibles ([BGR84], 6.4.1, Corollary 5).  $\square$

**1.26. Corollaire (Théorème de la fibre réduite, version graduée et valuée)**

*Soit  $F$  un corpoïde valué et soit  $X$  un  $F^\circ$ -schémoïde plat de type fini telle que  $X_F$  soit géométriquement réduit. Il existe une extension valuée finie  $L$  de  $F$  telle que le normalisé faible  $Y$  du  $L^\circ$ -schéma  $X_{L^\circ}$  soit fini sur  $X_{L^\circ}$  et tel que les fibres de  $Y \rightarrow \text{Spec } L^\circ$  soient géométriquement réduites et à composantes irréductibles géométriquement irréductibles. Pour toute extension valuée  $\Lambda$  de  $L$ , le schémoïde  $Y_{\Lambda^\circ}$  est le normalisé faible du  $\Lambda^\circ$ -schémoïde  $X_{\Lambda^\circ}$ .*

*Démonstration.* — Comme  $X$  est plat, il est de présentation finie et un argument de passage à la limite permet de supposer que la valuation de  $F$  est de hauteur finie. Soit  $K$  une clôture algébrique de  $F$  munie d’un prolongement quelconque de la valuation de  $F$ . L’assertion (2) du théorème 1.25 assure que le normalisé faible  $Z$  du  $K^\circ$ -schémoïde  $X_{K^\circ}$  est fini sur  $X_{K^\circ}$  et que les fibres de  $Z \rightarrow \text{Spec } K^\circ$  sont réduites. Il existe un sous-corpoïde  $L$  de  $K$  fini sur  $F$  et un  $L^\circ$ -schémoïde plat et de type fini  $Y$ , fini sur  $X_{L^\circ}$ , tel que  $Y_L = X_L$  et  $Z = Y_{K^\circ}$ ; les fibres de  $Y \rightarrow \text{Spec } L^\circ$  sont géométriquement réduites. Il résulte dès lors de l’assertion (1) du théorème 1.25 que pour toute extension valuée  $\Lambda$  de  $L$ , le schémoïde  $Y_{\Lambda^\circ}$  est le normalisé du  $\Lambda^\circ$ -schémoïde  $X_{\Lambda^\circ}$ ; c’est en particulier le cas lorsque  $\Lambda = L$ . Enfin comme la valuation de  $F$  est de hauteur finie le schéma  $\text{Spec } L^\circ$  est ensemblistement fini; quitte à agrandir  $L$ , on peut donc supposer que les composantes irréductibles des fibres de  $Y \rightarrow \text{Spec } L^\circ$  sont géométriquement irréductibles.  $\square$

**1.27. Proposition.** — *Soit  $F$  un corpoïde valué et soit  $X$  un  $F^\circ$ -schémoïde plat, de présentation finie et à fibres réduites.*

- (1) *Soient  $\eta$  et  $\xi$  deux points de  $\text{Spec } F^\circ$  avec  $\xi \in \overline{\{\eta\}}$ . Soient  $U_1, \dots, U_m$  les composantes connexes de  $X_\eta$ . Les  $(\overline{U_i})_\xi$  sont alors des ouverts fermés deux à deux disjoints de  $X_\xi$  et  $X_\xi = \coprod_i (\overline{U_i})_\xi$ .*

- (2) *Supposons que la valuation de  $F$  est de hauteur finie. Il existe alors un recouvrement ouvert fini  $(X_i)$  de  $X$  tel que pour tout  $\xi \in \text{Spec } F^\circ$  la fibre  $X_{i,\xi}$  est ou bien vide, ou bien une composante connexe de  $X_\xi$ .*

*Démonstration.* — Montrons tout d'abord (1). Quitte à remplacer  $F^\circ$  par  $F^\circ/\mathfrak{p}$ , où  $\mathfrak{p}$  est l'idéal premier de  $F^\circ$  correspondant à  $\eta$ , on peut supposer que  $\eta$  est le point générique de  $\text{Spec } F^\circ$ . Les  $(\overline{U}_i)_\xi$  sont des fermés de  $X_\xi$  par définition, et ils recouvrent  $X_\xi$  car  $X \rightarrow \text{Spec } F^\circ$  est plat et *a fortiori* générisant. Il suffit pour conclure de prouver que les  $(\overline{U}_i)_\xi$  sont deux à deux disjoints. Fixons donc deux indices  $i$  et  $j$  différents. Soit  $f$  la fonction sur  $X_\eta$  telle que  $f|_{U_i} = 1$  et  $f|_{X_F \setminus U_i} = 0$ . La fonction  $f$  annule le polynôme  $T^2 - T$  appartenant à  $F[T]$  ce qui entraîne, puisque  $X$  est faiblement normal sur  $F^\circ$  en vertu du théorème 1.25, que  $f$  se prolonge en une fonction  $\overline{f}$  sur  $X$ . On a alors  $\overline{f}(x) = 1$  pour tout  $x \in \overline{U}_i$  et  $\overline{f}(x) = 0$  pour tout  $x \in \overline{X \setminus U_i}$ , et en particulier pour tout  $x \in \overline{U}_j$ . En conséquence  $\overline{U}_i \cap \overline{U}_j = \emptyset$ .

Montrons maintenant (2). On suppose donc la valuation de  $F$  de hauteur finie. Soit  $\xi \in \text{Spec } F^\circ$  et soit  $x \in X_\xi$ . Pour toute générisation  $\eta$  de  $\xi$  sur  $\text{Spec } F^\circ$ , il existe d'après (1) une unique composante connexe  $U_\eta$  de  $X_\eta$  dont l'adhérence rencontre la composante connexe de  $x$  dans  $X_\xi$  (et  $\overline{U}_\eta$  contient en fait cette composante). Notons  $U$  la réunion des  $U_\eta$  où  $\eta$  parcourt l'ensemble des générisations de  $\xi$  dans  $\text{Spec } F^\circ$ . C'est une partie constructible de  $X$ . Nous allons montrer que  $U$  est ouverte, ce qui permettra de conclure puisque  $X$  est quasi-compact, puisque  $x \in U$  et puisque toute fibre de  $U \rightarrow \text{Spec } F^\circ$  est par construction une composante connexe d'une fibre de  $X \rightarrow \text{Spec } F^\circ$ . Pour montrer que  $U$  est ouverte, il suffit de s'assurer qu'elle est stable par générisation. Soit donc  $\eta$  une générisation de  $\xi$  dans  $\text{Spec } F^\circ$  et soit  $y \in U_\eta$ ; soit  $z$  une générisation de  $y$  sur  $X$ , dont on note  $\zeta$  l'image sur  $\text{Spec } F^\circ$ . Soit  $\Omega$  la composante connexe de  $z$  dans  $X_\zeta$ . Il résulte de (1) que  $\overline{\Omega}_\eta$  est une réunion de composantes connexes de  $X_\eta$ . Comme  $y$  est adhérent à  $z$ , il s'ensuit que  $\overline{\Omega}_\eta$  contient  $U_\eta$ , ce qui entraîne que  $\overline{\Omega}_\xi$  contient  $U_\xi$ ; il vient  $\Omega = U_\zeta$ , puis  $z \in U$ .  $\square$

## 2. Extension de la théorie de Grauert et Remmert

**2.1. Conventions générales.** — Dans cette section les valuations et normes sont sauf mention expresse du contraire à valeurs réelles. Un *polyrayon* est une famille finie de réels strictement positifs.

Nous utiliserons librement la géométrie analytique au sens de Berkovich ([Ber90], [Ber93]). En ce qui concerne les notions d'espace réduit ou géométriquement réduit dans ce contexte, nous renvoyons le lecteur au chapitre 2 de [Duc18], et plus particulièrement au paragraphe 2.6.9.

**2.1.1.** — On fixe pour toute la suite un corps ultramétrique complet  $k$ . Un polyrayon est dit  *$k$ -libre* si c'est une famille libre du  $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel  $\mathbf{R}_+^\times / |k^\times|^\mathbf{Q}$ . Si  $r$  est un polyrayon  $k$ -libre nous noterons  $k_r$  le corps  $k\{T/r, rT^{-1}\}$ .

**2.1.2.** — On fixe également un sous-groupe  $\Gamma$  de  $\mathbf{R}_+^\times$  tel que  $\Gamma \cdot |k^\times| \neq \{1\}$  (autrement dit,  $\Gamma$  est non trivial si la valeur absolue de  $k$  est triviale). Nous allons faire quelques

brefs rappels sur la théorie des espaces  $k$ -analytiques  $\Gamma$ -stricts; le lecteur trouvera davantage de détails et des justifications de nos assertions à la section 3.1 de [Duc18].

Une algèbre  $k$ -affinoïde  $A$  est dite  $\Gamma$ -stricte si elle peut s'écrire comme un quotient de  $k\{T_1/r_1, \dots, T_n/r_n\}$  pour une certaine famille  $(r_1, \dots, r_n)$  d'éléments de  $\Gamma$ , et il suffit pour que ce soit le cas que  $A$  puisse s'écrire comme un quotient de  $k\{T_1/r_1, \dots, T_n/r_n\}$  où les  $r_i$  appartiennent à  $(|k|^\times \cdot \Gamma)^\mathbf{Q}$ . Une algèbre  $k$ -affinoïde est  $\Gamma$ -stricte si et seulement si sa semi-norme spectrale prend ses valeurs dans  $(|k|^\times \cdot \Gamma)^\mathbf{Q} \cup \{0\}$ .

Un espace  $k$ -affinoïde est dit  $\Gamma$ -strict si son algèbre de fonctions analytiques est  $\Gamma$ -stricte. Un espace  $k$ -analytique  $X$  est dit  $\Gamma$ -strict s'il possède un  $G$ -recouvrement par des domaines affinoïdes  $\Gamma$ -stricts et si l'intersection de deux domaines affinoïdes  $\Gamma$ -stricts de  $X$  est  $G$ -recouverte par des domaines affinoïdes  $\Gamma$ -stricts (cette définition est compatible avec la précédente lorsque  $X$  est affinoïde). Tout point d'un bon espace  $k$ -analytique  $\Gamma$ -strict possède une base de voisinages affinoïdes  $\Gamma$ -stricts (c'est pour assurer cette dernière propriété que nous imposons la condition  $\Gamma \cdot |k|^\times \neq \{1\}$ ).

Notons deux cas particuliers extrêmes : si  $\Gamma = \mathbf{R}_+^\times$  tout espace  $k$ -analytique est  $\Gamma$ -strict (le lecteur qui souhaite ignorer la question des paramètres réels de définition des espaces analytiques peut donc supposer  $\Gamma = \mathbf{R}_+^\times$ ); si  $\Gamma = \{1\}$  (ce qui n'est possible que si  $k$  n'est pas trivialement valué), les espaces  $k$ -analytiques  $\Gamma$ -stricts sont les espaces strictement  $k$ -analytiques.

**2.1.3.** — Si  $A$  est un anneau muni d'une semi-norme sous-multiplicative  $\|\cdot\|$  nous noterons  $\tilde{A}$  le  $\Gamma$ -annéloïde résiduel de  $A$ , c'est-à-dire

$$\coprod_{\gamma \in \Gamma} \{a \in A, \|a\| \leq \gamma\} / \{a \in A, \|a\| < \gamma\}.$$

Si  $a$  est un élément de  $A$  et si  $s$  est un élément de  $\Gamma$  supérieur ou égal à  $\|a\|$  nous noterons  $\tilde{a}^s$  l'image de  $a$  dans  $\tilde{A}^s$ ; si  $\|a\| \in \Gamma$  nous écrirons  $\tilde{a}$  au lieu de  $\tilde{a}^{\|a\|}$ .

En particulier, nous noterons  $\tilde{k}$  le  $\Gamma$ -corpoïde résiduel de  $k$ , c'est-à-dire

$$\coprod_{\gamma \in \Gamma} \{x \in k, |x| \leq \gamma\} / \{x \in k, |x| < \gamma\}.$$

Si  $\Gamma = \mathbf{R}_+^\times$  c'est le corpoïde résiduel considéré par Temkin; si  $\Gamma = \{1\}$  c'est son corps résiduel au sens classique.

Si  $A$  est une algèbre  $k$ -affinoïde la notation  $\tilde{A}$  désignera toujours le  $\Gamma$ -annéloïde résiduel de  $A$  relatif à sa semi-norme spectrale; nous n'utiliserons cet objet que lorsque  $A$  est  $\Gamma$ -stricte, car il est essentiellement inexploitable sinon. Notons que comme la semi-norme spectrale commute aux puissances,  $\tilde{A}$  est réduit. Si  $X$  désigne l'espace  $\mathcal{M}(A)$ , le schémoïde  $\text{Spec } \tilde{A}$  sera noté  $\tilde{X}$ . On dispose d'une application de spécialisation de  $X$  vers  $\tilde{X}$  qui est anti-continue et surjective. La dimension de  $\tilde{X}$  est égale à celle de  $X$  – pour un énoncé un peu plus précis dont nous aurons besoin, voir le lemme A.1 en appendice.

**2.2.** — Un  $k$ -espace de Banach est un  $k$ -espace vectoriel  $M$  muni d'une norme ultramétrique  $\|\cdot\|$  telle que  $\|\lambda m\| = |\lambda| \cdot \|m\|$  pour tout  $(\lambda, m) \in k \times M$ , et pour laquelle il

est complet. Une  $k$ -algèbre de Banach est une  $k$ -algèbre  $A$  munie d'une norme sous-multiplicative qui en fait un  $k$ -espace de Banach. En pratique les seules  $k$ -algèbres de Banach auxquelles nous aurons affaire seront des algèbres affinoïdes, et un morphisme entre deux telles algèbres sera par définition un morphisme *borné* de  $k$ -algèbres.

Un module de Banach sur une  $k$ -algèbre de Banach  $A$  est un  $A$ -module  $M$  muni d'une norme  $\|\cdot\|$  qui en fait un  $k$ -espace de Banach et est telle que  $\|am\| \leq \|a\| \cdot \|m\|$  pour tout  $(a, m) \in A \times M$ .

**2.3.** — Soit  $A$  une  $k$ -algèbre de Banach.

**2.3.1.** — Soit  $r$  un réel  $> 0$ . On notera  $A(r)$  le  $A$ -module de Banach dont le  $A$ -module sous-jacent est  $A$  et dont la norme est  $a \mapsto r\|a\|$ .

Si  $M$  est un  $A$ -module Banach, le produit tensoriel  $M \hat{\otimes}_A A(r)$  a pour  $A$ -module sous-jacent le module  $M$  et pour norme l'application  $m \mapsto r\|m\|$ . Nous le noterons  $M(r)$ .

**2.3.2.** — Si  $(M_i)$  est une famille de  $A$ -modules de Banach, la *somme directe complétée*  $\widehat{\bigoplus} M_i$  est l'ensemble des familles  $(m_i) \in \prod M_i$  telles que pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'ensemble des indices  $i$  tels que  $\|m_i\| \geq \varepsilon$  soit fini; notons que la famille  $I$  peut être de cardinal quelconque, mais qu'un élément donné de  $\widehat{\bigoplus} M_i$  n'a qu'un nombre (au plus) dénombrable de composantes non nulles. On munit cette somme directe complétée de la norme  $(m_i) \mapsto \max \|m_i\|$ , qui en fait un  $A$ -module de Banach. Si la famille  $(M_i)$  est finie, on le notera simplement  $\bigoplus M_i$ .

**2.3.3.** — Soit  $M$  un  $A$ -module de Banach. Nous dirons qu'une famille finie  $(m_i)$  d'éléments de  $M$  est *fortement génératrice* si les  $m_i$  sont tous non nuls et si pour tout  $m \in M$  il existe une famille finie  $(a_i)$  d'éléments de  $A$  telle que  $m = \sum a_i m_i$  et  $\|m\| = \max \|a_i\| \cdot \|m_i\|$  (notons que pour avoir cette dernière égalité, il suffit que  $\|m\| \geq \max \|a_i\| \cdot \|m_i\|$  car l'autre inégalité est automatique).

Soit  $(m_i)$  une famille finie fortement génératrice de  $M$ . Soit  $(n_i)$  une famille d'éléments de  $M$  tels que  $\|n_i - m_i\| < \|m_i\|$  pour tout  $i$ . La famille  $(n_i)$  est alors fortement génératrice. En effet, soit  $m \in M$ . Puisque  $(m_i)$  est fortement génératrice, il existe une famille  $(a_i)$  d'éléments de  $A$  tels que  $m = \sum a_i m_i$  et  $\|m\| = \max \|a_i\| \cdot \|m_i\|$ . En posant  $\mu_i = m_i - n_i$  pour tout  $i$ , on a  $m = \sum a_i n_i + \sum a_i \mu_i$ . Soit  $\varepsilon$  le maximum des  $\|\mu_i\| \cdot \|m_i\|^{-1}$ ; on a  $\varepsilon < 1$  et

$$\left\| \sum a_i \mu_i \right\| \leq \max \|a_i\| \cdot \|\mu_i\| \leq \varepsilon \max \|a_i\| \cdot \|m_i\| = \varepsilon \|m\|.$$

On a donc écrit  $m = \sum a_i n_i + \mu$  avec  $\|\mu\| \leq \varepsilon \|m\|$ . En réitérant le processus et en utilisant la complétude de  $A$  on obtient une écriture de  $m$  sous la forme  $\sum \alpha_i n_i$  avec  $m = \max \|\alpha_i\| \cdot \|m_i\| = \max \|\alpha_i\| \cdot \|n_i\|$ .

**2.3.4.** — Soit  $M$  un  $A$ -module de Banach et soit  $N$  un sous-module de  $M$ . Nous dirons que  $N$  est *strictement fermé* dans  $M$  si la distance à  $N$  de tout élément de  $M$  est atteinte. La terminologie est consistante : si  $N$  est strictement fermé il est fermé (un élément de  $M$  à distance nulle de  $N$  appartiendra en effet alors à  $N$ ); c'est donc un  $A$ -module de Banach.



**2.3.5.** — Soit  $\varphi: N \rightarrow M$  une application  $A$ -linéaire bornée entre  $A$ -modules de Banach. Rappelons que  $\varphi$  est dite *admissible* si la norme quotient sur  $\varphi(N)$  est équivalente à la norme induite par celle de  $M$ . Nous dirons que  $\varphi$  est *fortement admissible* si tout élément  $m$  de  $\varphi(N)$  possède un antécédent  $n$  par  $\varphi$  tel que  $\|n\| = \|m\|$ . Cela revient à demander que la norme quotient sur  $\varphi(N)$  soit *égale* à la norme induite par celle de  $M$  et qu'elle soit de surcroît atteinte dans chaque fibre; cette dernière condition équivaut au caractère strictement fermé de  $\text{Ker}(\varphi)$  dans  $N$ .

Soit  $(m_i)$  une famille finie d'éléments non nuls de  $M$ . Il résulte des définitions que  $(m_i)$  est fortement génératrice si et seulement si l'application

$$\bigoplus_i A(\|m_i\|) \rightarrow M, (a_i) \mapsto \sum a_i m_i$$

est une surjection fortement admissible.

**2.4. Proposition.** — Soit  $r = (r_1, \dots, r_n)$  un polyrayon, soit  $A$  l'algèbre  $k$ -affinoïde  $k\{T/r\}$ , soit  $(\rho_j)$  une famille finie de réels strictement positifs et soit  $M$  le  $A$ -module  $\bigoplus A(\rho_j)$ . Soit  $N$  un sous- $A$ -module de  $M$ . Le sous-module  $N$  de  $M$  est strictement fermé et il possède une famille finie fortement génératrice.

*Démonstration.* — Soit  $s$  un polyrayon  $k$ -libre tel que  $|k_s^\times| \neq \{1\}$  et tel que les  $r_i$  soient tous de torsion modulo  $|k_s^\times|$ ; soit  $\Theta$  la famille d'indéterminées canonique de  $k_s$ .

Pour tout  $i$ , on note  $n_i$  l'ordre de  $r_i$  modulo  $|k_s^\times|$ , on choisit un élément  $\lambda_i$  de  $k_s$  tel que  $|\lambda_i| = r_i^{n_i}$ , et l'on pose  $S_i = T_i^{n_i}/\lambda_i$ . Notons  $E$  l'ensemble des  $n$ -uplets  $(e_1, \dots, e_n)$  tels que  $0 \leq e_i < n_i$  pour tout  $i$ . L'anneau  $k_s\{T/r\}$  est alors un  $k_s\{S\}$ -module libre de base  $(T^e)_{e \in E}$ , et l'on a de plus

$$\left\| \sum_{e \in E} \lambda_e T^e \right\| = \max_e \|\lambda_e\| \cdot r^e$$

pour toute famille  $(\lambda_e)$  d'éléments de  $k_s\{S\}$ . Il s'ensuit que  $M_s$  est isomorphe en tant que  $k_s\{S\}$ -module à  $\bigoplus_{j,e} k_s\{S\}(r^e \rho_j)$ .

Il résulte alors de [Gru68], III, §1, cor. de la prop. 1, que tout sous- $k_s\{S\}$ -module de  $M$  est strictement fermé dans  $M$  et possède une partie finie fortement génératrice. En particulier,  $A_s N$  est strictement fermé dans  $M_s$  et possède une partie finie fortement génératrice. Indiquons quelques conséquences de ces faits :

- $A_s N$  est complet, et partant égal au sous-module  $N_s$  de  $M_s$  constitué des séries en  $\Theta$  dont chaque coefficient appartient à  $N$ ;
- $N$  est de type fini (si  $(\sum n_{I,j} \Theta^I)_j$  est une famille génératrice finie de  $N_s$  alors  $(n_{0,j})_j$  est une partie génératrice finie de  $N$ );
- $N$  est strictement fermé dans  $M$  (si  $m \in M$  et si  $\sum n_I \Theta^I$  réalise la distance de  $m$  à  $N_s$  alors  $n_0$  réalise la distance de  $m$  à  $N$ ).

Soit  $(x_1, \dots, x_\ell)$  une partie finie fortement génératrice du  $k_s\{S\}$ -module  $N_s$ . Il résulte immédiatement des définitions que cette famille est *a fortiori* fortement génératrice pour  $N_s$  vu comme  $A_s$ -module.

Pour tout  $i$ , posons  $\sigma_i = \|x_i\|$ . Écrivons  $x_i = \sum_J x_{i,J} \Theta^J$  (où les  $x_{i,J}$  appartiennent à  $N$ ) et notons  $\mathcal{J}_i$  l'ensemble (fini et non vide) des indices  $J$  tels que  $\|x_{i,J}\| s^J = \sigma_i$ ; posons  $y_i = \sum_{J \notin \mathcal{J}_i} x_{i,J} \Theta^J$ .

Soit  $n$  appartenant à  $N$ . Il suffit de prouver qu'on peut écrire

$$n = \sum_{1 \leq i \leq \ell, J \in \mathcal{J}_i} a_{i,J} x_{i,J}$$

où les  $a_{i,J}$  appartiennent à  $A$  et vérifient les inégalités  $\|a_{i,J}\| s^{(-J)} \sigma_i \leq \|n\|$ . C'est évident si  $n = 0$ ; supposons désormais  $n \neq 0$  (ceci entraîne que  $N \neq \{0\}$  et donc que  $\ell > 0$ ). Comme  $(x_1, \dots, x_\ell)$  engendre fortement  $N_s$  on peut écrire  $n = \sum b_i x_i$  où les  $b_i$  sont des éléments de  $A_s$  tels que  $\|b_i\| \sigma_i \leq \|n\|$  pour tout  $i$ . Écrivons  $b_i = \sum_J b_{i,J} \Theta^J$ ; on a  $\|b_{i,J}\| s^J \sigma_i \leq \|n\|$  pour tout  $(i, J)$ . Comme  $n$  appartient à  $N$  (et donc est constante lorsqu'on la voit comme série en la multivariable  $\Theta$ ) on a

$$n = \sum_{i,J} b_{i,-J} x_{i,J} = \sum_{i,J \in \mathcal{J}_i} b_{i,-J} x_{i,J} + \sum_{i,J \notin \mathcal{J}_i} b_{i,-J} x_{i,J}.$$

Soit  $(i, J)$  un couple d'indices. On a  $\|b_{i,-J}\| s^{-J} \sigma_i \leq \|n\|$  et si de plus  $J \notin \mathcal{J}_i$  alors

$$\|b_{i,-J}\| s^J \|x_{i,J}\| \leq \|b_{i,-J}\| \cdot \|y_i\| \leq s^J \|n\| \sigma_i^{-1} \|y_i\|,$$

d'où finalement la majoration

$$\|b_{i,-J}\| \cdot \|x_{i,J}\| \leq \|n\| \sigma_i^{-1} \|y_i\|.$$

Posons  $\varepsilon = \max_i \sigma_i^{-1} \|y_i\|$ . On a  $0 \leq \varepsilon < 1$  et  $n$  s'écrit par ce qui précède

$$\sum_{i,J \in \mathcal{J}_i} b_{i,(-J)} x_{i,J} + \nu$$

avec  $\|b_{i,-J}\| s^{-J} \sigma_i \leq \|n\|$  pour tout  $(i, J)$  et  $\|\nu\| \leq \varepsilon \|n\|$ . En réitérant le processus et en utilisant la complétude de  $A$  on obtient une écriture de  $n$  de la forme

$$n = \sum_{1 \leq i \leq m, J \in \mathcal{J}_i} c_{i,J} x_{i,J}$$

où les  $c_{i,J}$  appartiennent à  $A$  et vérifient les inégalités  $\|c_{i,J}\| s^{-J} \sigma_i \leq \|n\|$ .  $\square$

**2.5. Proposition.** — Soient  $r$  et  $\rho = (\rho_i)$  deux polyrayons, soit  $A$  l'algèbre  $k$ -affinoïde  $k\{T/r\}$  et soit  $P$  le  $A$ -module de Banach fini  $\bigoplus A(\rho_i)$ . Soit  $\varphi$  un morphisme de  $P$  vers un  $A$ -module de Banach fini  $N$ . Soit  $L$  une extension complète de  $k$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\varphi$  est une surjection fortement admissible ;
- (ii)  $\varphi_L$  est une surjection fortement admissible.

*Démonstration.* — Plaçons-nous tout d'abord dans le cas où  $|k^\times| \neq \{1\}$ . Supposons que  $\varphi$  est une surjection fortement admissible. La surjection  $\varphi: P \rightarrow N$  contracte les normes, et la norme de  $N$  coïncide avec la norme quotient associée à  $\varphi$ ; il résulte alors de [Gru66], §3, Théorème 1 (1), que  $\varphi_L$  est une surjection contractant les normes et que la norme de  $N_L$  est égale à la norme quotient associée à  $\varphi_L$ ; comme  $\text{Ker}(\varphi_L)$  est strictement fermé dans  $P_L$  d'après la proposition 2.4,  $\varphi_L$  est fortement admissible.

Réciproquement, supposons  $\varphi_L$  fortement admissible. L'application  $\varphi_L$  est alors surjective; comme  $\varphi_L$  se déduit de  $\varphi$  par extension des scalaires algébrique de  $A$  à  $A_L$ , et comme  $A_L$  est fidèlement plat sur  $A$ , le morphisme  $\varphi$  est surjectif, et il est admissible par la variante ultramétrique du théorème de l'image ouverte (qui ne vaut que lorsque la valuation du corps de base n'est pas triviale).

Comme l'injection  $k \hookrightarrow L$  est isométrique, il découle de [Gru66], §3, Th. 1, que la flèche  $Q \rightarrow Q_L$  est isométrique pour tout  $k$ -espace de Banach  $Q$ . Il s'ensuit que  $\varphi$  diminue les normes, puisque c'est par hypothèse le cas de  $\varphi_L$ . Si l'on note  $N'$  le module  $N$  muni de la norme quotient, on a donc un diagramme  $P \rightarrow N' \hookrightarrow N$  d'applications  $k$ -linéaires diminuant les normes, la seconde étant un isomorphisme borné de  $k$ -espaces de Banach. On en déduit un diagramme  $P_L \rightarrow N'_L \hookrightarrow N_L$  dont la seconde flèche est un isomorphisme borné de  $L$ -espaces de Banach.

Par définition, la norme de  $N'$  est la norme quotient associée à la surjection de  $P$  vers  $N'$ , laquelle contracte les normes; le noyau de cette surjection étant strictement fermé dans  $P$  d'après la proposition 2.4, elle est fortement admissible. Il résulte alors de l'implication déjà établie que  $P_L \rightarrow N'_L$  est une surjection fortement admissible. Puisque  $\varphi_L$  est fortement admissible par hypothèse,  $N'_L \rightarrow N_L$  est isométrique. Les flèches  $N' \rightarrow N'_L$  et  $N \rightarrow N_L$  étant isométriques,  $N' \rightarrow N$  est isométrique et  $\varphi$  est fortement admissible.

Il reste à traiter le cas où  $k$  est trivialement valué. Soit  $t$  un réel strictement positif et soit  $L'$  une extension complète de  $k$  composée de  $L$  et  $k_t$ ; notons que si  $L$  est trivialement valué on a  $L' = L_t$ .

Par un calcul direct, on vérifie que  $\varphi$  est une surjection fortement admissible si et seulement si c'est le cas de  $\varphi_t$ . Il résulte de ce qui précède que  $\varphi_t$  est une surjection fortement admissible si et seulement si c'est le cas de  $\varphi_{L'}$ . Enfin,  $\varphi_{L'}$  est une surjection fortement admissible si et seulement si c'est le cas de  $\varphi_L$ , d'après ce qui précède si  $L$  n'est pas trivialement valué et par calcul direct sinon car alors  $L' = L_t$ . Par conséquent  $\varphi$  est une surjection fortement admissible si et seulement si c'est le cas de  $\varphi_L$ .  $\square$

**2.6. Définition.** — Soit  $V$  un  $k$ -espace de Banach. Une famille  $(v_j)_{j \in J}$  d'éléments non nuls de  $V$  sera appelée une *base de Schauder orthogonale* si le morphisme de  $k$ -espaces de Banach  $\bigoplus_i \widehat{k(\|v_j\|)} \rightarrow V$  qui envoie  $(\lambda_j)$  sur  $\sum \lambda_j v_j$  est une isométrie.

Plus concrètement, cela signifie que tout élément  $v$  de  $V$  a une unique écriture sous la forme  $\sum \lambda_j v_j$ , où  $(\lambda_j)$  est une famille de scalaires à support dénombrable dont les valeurs absolues tendent vers zéro, et que  $\|v\| = \max |\lambda_j| \cdot \|v_j\|$ .

**2.7. Remarque.** — La définition traditionnelle d'une base de Schauder orthogonale (cf. par exemple la définition 6 de [BGR84], §2.7.2) requiert que l'ensemble  $J$  d'indices soit dénombrable, mais nous nous permettons de la modifier en supprimant cette exigence.

**2.8. Remarque.** — Soit  $V$  un  $k$ -espace de Banach et soit  $v$  un élément non nul de  $V$ . Si  $V$  possède une base de Schauder orthogonale  $(v_i)$ , il résulte de la proposition 7 de [BGR84], §2.7.2 (appliquée à un sous-espace complet de  $V$  engendré topologiquement par une famille dénombrable de  $v_j$  et contenant  $v$ ) que  $V$  possède une base de Schauder orthogonale contenant  $v$ .

**2.9.** — Soit  $L$  une extension complète de  $k$  et soit  $\Lambda$  une extension complète de  $L$ . Si  $(\ell_i)$  est une base de Schauder orthogonale de  $L$  sur  $k$  et si  $(\lambda_j)$  est une base de Schauder orthogonale de  $\Lambda$  sur  $L$  alors  $(\ell_i \lambda_j)_{i,j}$  est une base de Schauder orthogonale de  $\Lambda$  sur  $k$ .

**2.10.** — Rappelons que si  $r$  est un polyrayon, nous désignons par  $\widehat{k(T/r)}$  le corps  $k(T)$  muni de la valuation de Gauß de paramètre  $r$ . Son complété  $\widehat{k(T/r)}$ , qui n'est autre que  $k_r$  si  $r$  est  $k$ -libre, s'identifie à  $\mathcal{H}(\eta_r)$  où  $\eta_r$  est le point de  $\mathbf{A}_k^{1,\text{an}}$  défini précisément par la norme de Gauß  $\sum a_i T^i \mapsto \max |a_i| \cdot r^i$ .

Si  $k$  est stable alors  $\widehat{k(T/r)}$  est stable : on peut le déduire de la stabilité de  $k(T/r)$  ([Kuh10]) et de la préservation de la stabilité par complétion en hauteur 1 ([Gru68], Remarque n° 3 page 57) ; on pourra aussi se reporter à la preuve de Michael Temkin ([Tem10], Th. 6.3.1).

**2.11. Lemme.** — Soit  $r$  un polyrayon. Le corps valué complet  $\widehat{k(T/r)}$  possède une base de Schauder orthogonale sur  $k$ .

**2.12. Remarque.** — D'après la remarque 2.8, le lemme ci-dessus entraînera l'existence d'une base de Schauder orthogonale de  $\widehat{k(T/r)}$  sur  $k$  contenant 1 ; mais en fait le lecteur vérifiera que la base de Schauder orthogonale construite dans notre preuve contient automatiquement 1.

*Démonstration du lemme 2.11.* — En vertu de 2.9 on peut raisonner par récurrence sur la longueur de  $r$  et donc supposer que celle-ci vaut 1 ; on désigne donc à partir de maintenant par  $r$  un réel strictement positif et par  $T$  une unique indéterminée.

Supposons que  $r \notin |k^\times|^\mathbf{Q}$ . Dans ce cas  $\widehat{k(T/r)} = k_r$  et la famille  $(T^i)_{i \in \mathbf{Z}}$  est une base de Schauder orthogonale de  $k_r$  sur  $k$ .

Supposons que  $r \in |k^\times|^\mathbf{Q}$  et soit  $N$  l'ordre de  $r$  modulo  $|k^\times|$ . La famille  $\{1, T, \dots, T^{N-1}\}$  est une base de Schauder orthogonale de  $\widehat{k(T/r)}$  sur  $k(T^N/r^N)$ . Il suffit donc de montrer que  $\widehat{k(T^N/r^N)}$  possède une base de Schauder orthogonale sur  $k$  ; ceci permet de se ramener au cas où  $r \in |k^\times|$  puis, par renormalisation de l'indéterminée, au cas où  $r = 1$ .

Fixons un ensemble  $\mathcal{P}$  de polynômes unitaires à coefficients dans  $k^\circ$  telle que  $P \mapsto \tilde{P}^1$  établisse une bijection entre  $\mathcal{P}$  et l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de  $\tilde{k}^1[T]$  (notons que chaque polynôme  $P$  est alors irréductible, puisque toute extension finie de  $k$  contenant une racine de  $P$  aura un indice d'inertie au moins égal à  $\deg P$ ) ; si la valeur absolue de  $k$  est non triviale, on suppose de plus que  $\mathcal{P}$  est constitué de polynômes séparables. Nous allons montrer que la famille  $\mathcal{B} := ((T^i)_{i \geq 0}, (\frac{T^d}{P^m})_{P \in \mathcal{P}, 0 \leq d < \deg P, m > 0})$  est une base de Schauder orthogonale de  $\widehat{k(T)}$  sur  $k$ .

Si la valeur absolue de  $k$  est triviale, c'est évident : dans ce cas, une base de Schauder orthogonale de  $\widehat{k(T)} = k(T)$  sur  $k$  en est simplement une base au sens usuel, et la théorie de la décomposition en éléments simples sur le corps  $k$  permet de conclure.

Supposons maintenant la valeur absolue de  $k$  n'est pas triviale. La théorie de la décomposition en éléments simples sur  $\tilde{k}^1$  assure que  $\mathcal{B}$  se réduit en une base de  $\tilde{k}^1(T)$  sur  $\tilde{k}^1$ ; il s'ensuit qu'elle constitue une base de Schauder orthogonale du sous-espace de Banach  $E$  de  $\widehat{k(T)}$  qu'elle engendre (topologiquement); il suffit maintenant de montrer que  $E = \widehat{k(T)}$ . Notons  $\eta$  le point de Gauß de  $\mathbf{P}_k^{1,\text{an}}$ ; on a  $\widehat{k(T)} = \mathcal{H}(\eta)$ .

Supposons tout d'abord que  $k$  est algébriquement clos. Chaque polynôme  $P$  est alors de la forme  $T - a_P$  avec  $a_P \in k^\circ$ ; les  $a_P$  constituent un système complet de représentants de  $k^\circ$  modulo  $k^{\circ\circ}$ . Soit  $f \in \kappa(\eta)$ . Il existe un voisinage affinoïde  $V$  de  $\eta$  sur lequel  $f$  est définie. Quitte à restreindre  $V$  on peut supposer qu'il est décrit par une conjonction d'inégalités de la forme

$$|T| \leq R \text{ et } |T - a_{P_1}| \geq r_1 \text{ et } \dots \text{ et } |T - a_{P_s}| \geq r_s$$

où  $1 < R$  et  $0 < r_j < 1$  pour tout  $j$ . Montrons que  $f$  (vue comme fonction analytique sur  $V$ ) s'écrit comme une somme

$$\sum a_i T^i + \sum_{j=1}^s \sum_i \frac{\alpha_{ij}}{(T - a_{P_j})^i}$$

où  $|a_i| R^i \rightarrow 0$  et  $|\alpha_{ij}| r_j^{-i} \rightarrow 0$  pour tout  $j$ ; cela assurera que  $f$  appartient à  $E$ , et partant que  $\kappa(\eta) \subset E$  et donc que  $E = \mathcal{H}(\eta)$  par densité de  $\kappa(\eta)$  dans  $\mathcal{H}(\eta)$ . On raisonne par récurrence sur  $s$ . Si  $s = 0$  alors  $V$  est le disque fermé de rayon  $R$  et l'assertion requise est évidente. Supposons  $s > 0$  et l'assertion vraie pour les entiers  $< s$ . La restriction de  $f$  à la couronne  $r_s \leq |T - a_{P_s}| < 1$  est de la forme  $\sum_{i \in \mathbb{Z}} \alpha_i (T - a_{P_s})^i$  où  $|\alpha_i| r_s^i$  tend vers 0 quand  $i$  tend vers  $-\infty$  (et où  $\alpha_i r_s^i$  tend vers 0 lorsque  $i$  tend vers  $+\infty$  pour tout  $r < 1$ ). Posons  $g = f - \sum_{i < 0} \alpha_i (T - a_{P_s})^i$ . La fonction  $g$  est alors une fonction analytique sur  $V$  qui se prolonge par construction au voisinage affinoïde de  $\eta$  défini par les inégalités

$$|T| \leq R \text{ et } |T - a_{P_1}| \geq r_1 \text{ et } \dots \text{ et } |T - a_{P_{s-1}}| \geq r_{s-1}.$$

On conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence à  $g$ .

Il reste à traiter le cas où le corps  $k$  n'est plus nécessairement algébriquement clos. Soit  $\widehat{k^a}$  le complété d'une clôture algébrique de  $k$  et soit  $Q$  le quotient  $\mathcal{H}(\eta)/E$ , muni de la norme quotient. Il s'agit de montrer que  $Q$  est nul; mais  $Q \otimes_k \widehat{k^a}$  s'injecte d'après [Gru66], §3, Th. 1 dans  $Q \widehat{\otimes}_k \widehat{k^a}$ ; il suffit donc de montrer que ce dernier est nul; comme la suite  $0 \rightarrow E \widehat{\otimes}_k \widehat{k^a} \rightarrow \mathcal{H}(\eta) \widehat{\otimes}_k \widehat{k^a} \rightarrow Q \widehat{\otimes}_k \widehat{k^a} \rightarrow 0$  est exacte en vertu de *loc. cit.*, il suffit finalement de vérifier que  $E \widehat{\otimes}_k \widehat{k^a} = \mathcal{H}(\eta) \widehat{\otimes}_k \widehat{k^a}$ .

La norme de  $\mathcal{H}(\eta)$  est universellement multiplicative (Berkovich, cf. [Duc09], Lemme 1.8 et exemple 1.9); en particulier, la norme tensorielle de  $\mathcal{H}(\eta) \widehat{\otimes}_k \widehat{k^a}$  est multiplicative, et coïncide donc avec sa norme spectrale. Or comme le point de Gauß  $\eta_{\widehat{k^a}}$  de  $\mathbf{P}_{\widehat{k^a}}^{1,\text{an}}$  est invariant sous l'action de Galois, c'est l'unique antécédent de  $\eta$  sur  $\mathbf{P}_{\widehat{k^a}}^{1,\text{an}}$ , et  $\mathcal{M}(\mathcal{H}(\eta) \widehat{\otimes}_k \widehat{k^a})$  est donc réduit au singleton  $\{\eta_{\widehat{k^a}}\}$ . Il s'ensuit que le morphisme naturel  $\mathcal{H}(\eta) \widehat{\otimes}_k \widehat{k^a} \rightarrow \mathcal{H}(\eta_{\widehat{k^a}})$  est un isomorphisme isométrique; on identifie désormais  $\mathcal{H}(\eta) \widehat{\otimes}_k \widehat{k^a}$  à  $\mathcal{H}(\eta_{\widehat{k^a}})$ .

Pour tout  $i \geq 0$  on a  $T^i \in E \widehat{\otimes}_k \widehat{k^a}$ . Soit maintenant  $P$  un élément de  $\mathcal{P}$  et soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_{\deg P}$  ses racines dans  $\widehat{k^a}$ . Pour tout entier  $m$ , le sous- $\widehat{k^a}$ -espace vectoriel de  $\mathcal{H}(\eta_{\widehat{k^a}})$  engendré par les éléments de la forme  $T^d/P^\ell$  avec  $0 \leq d < \deg P$  et  $1 \leq \ell \leq m$  est contenu (par décomposition en éléments simples) dans celui engendré par les  $\frac{1}{(T-\alpha_i)^\ell}$  pour  $i$  variant entre 1 et  $\deg P$  et  $\ell$  entre 1 et  $m$ ; pour des raisons de dimension, ces deux sous-espaces vectoriels coïncident. Par conséquent, pour tout entier  $m > 0$ , tout polynôme  $P \in \mathcal{P}$  et toute racine  $\alpha$  de  $P$  dans  $\widehat{k^a}$ , l'élément  $\frac{1}{(T-\alpha)^m}$  appartient à  $E \widehat{\otimes}_k \widehat{k^a}$ . Comme l'ensemble des racines dans  $\widehat{k^a}$  des polynômes  $P$  appartenant à  $\mathcal{P}$  contient un système de représentants de  $(\widehat{k^a})^\circ$  modulo  $(\widehat{k^a})^{\circ\circ}$  on déduit du cas algébriquement clos déjà traité que  $E \widehat{\otimes}_k \widehat{k^a} = \mathcal{H}(\eta_{\widehat{k^a}})$ .  $\square$

**2.13. Définition.** — Soit  $A$  une algèbre  $k$ -affinoïde et soit  $r$  un polyrayon. Nous dirons qu'un morphisme  $\varphi: k\{T/r\} \rightarrow A$  est *distingué* si tout élément  $a$  de  $A$  possède un antécédent  $b$  par  $\varphi$  tel que  $\|b\|$  soit égal à la semi-norme spectrale de  $a$ .

**2.14.** — Soit  $\varphi: k\{T/r\} \rightarrow A$  un morphisme. Si  $\varphi$  est distingué la semi-norme spectrale de  $A$  est une norme, ce qui équivaut à dire que  $A$  est réduite. Et si  $A$  est réduite alors  $\varphi$  est distingué si et seulement si c'est une surjection fortement admissible lorsque  $A$  est munie de sa norme spectrale : cela résulte de la définition et du fait que  $\varphi$  diminue les normes spectrales.

**2.15. Définition.** — Soit  $A$  une algèbre  $k$ -affinoïde. Nous dirons que  $A$  est *distinguée* s'il existe un polyrayon  $r$  et une surjection distinguée  $u: k\{T/r\} \rightarrow A$ .

Nous dirons que  $A$  est  $\Gamma$ -distinguée s'il existe une surjection distinguée  $k\{T/r\} \rightarrow A$  pour un certain polyrayon  $r$  constitué d'éléments de  $\Gamma$ .

**2.16. Remarque.** — Lorsque la valuation de  $k$  n'est pas triviale, une algèbre strictement  $k$ -affinoïde est  $\{1\}$ -distinguée si et seulement si elle est distinguée au sens de [BGR84], 6.4.3.

**2.17.** — Soit  $A$  une algèbre  $k$ -affinoïde distinguée dont on note  $\|\cdot\|$  la norme spectrale (rappelons que  $A$  est réduite d'après 2.14).

**2.17.1.** — Il existe un morphisme distingué  $\psi: k\{\Theta_1/\rho_1, \dots, \Theta_m/\rho_m\} \rightarrow A$  tel que  $\|\psi(\Theta_i)\| = \rho_i$  pour tout  $i$ . Partons en effet d'un morphisme distingué quelconque  $\varphi: k\{T_1/r_1, \dots, T_n/r_n\} \rightarrow A$ ; pour tout  $i$  on pose  $\rho_i = \|\varphi(T_i)\|$ . Soit  $I$  l'ensemble des indices  $i$  tels que  $\rho_i > 0$ ; on a  $\varphi(T_i) = 0$  pour tout  $i \notin I$ . Le morphisme  $\varphi: k\{T/r\} \rightarrow A$  admet alors une factorisation

$$k\{T/r\} \xrightarrow{\chi} k\{\Theta_i/\rho_i\}_{i \in I} \xrightarrow{\psi} A$$

où  $\chi$  envoie  $T_i$  sur  $\Theta_i$  si  $i \in I$  et sur 0 sinon, et où  $\psi$  envoie  $\Theta_i$  sur  $\varphi(T_i)$  pour tout  $i \in I$ . Soit  $a \in A$ . Il possède un antécédent  $b$  par  $\varphi$  tel que  $\|b\| = \|a\|$ . On a alors  $a = \psi(\chi(b))$  et  $\|a\| \leq \|\chi(b)\| \leq \|b\| = \|a\|$ , si bien que  $\|\chi(b)\| = \|a\|$ .

**2.17.2.** — Donnons-nous un morphisme  $\psi: k\{\Theta_1/\rho_1, \dots, \Theta_m/\rho_m\} \rightarrow A$  comme au 2.17.1 ci-dessus. Pour tout  $i$ , on pose  $f_i = \psi(\Theta_i)$  et on suppose donné un élément  $g_i \in A$  tel que  $\|f_i - g_i\| < \rho_i$ .

Soit  $a \in A$ . Comme  $\psi$  est distingué il existe une série  $\sum \alpha_I \Theta^I$  appartenant à  $k\{\Theta/\rho\}$  telle que  $a = \sum \alpha_I f^I$  et  $\max |\alpha_I| \rho^I = \|a\|$ . En écrivant  $f_i = g_i + (f_i - g_i)$  et en développant l'égalité  $a = \sum \alpha_I f^I$  on voit qu'il existe une série  $\sum \beta_I \Theta^I$  appartenant à  $k\{\Theta/\rho\}$  telle que  $a = \sum \beta_I g^I$  et telle que  $\max |\beta_I| \rho^I = \|a\|$ . Par conséquent, le  $\psi': k\{\Theta_1/\rho_1, \dots, \Theta_m/\rho_m\} \rightarrow A$  qui envoie  $\Theta_i$  sur  $g_i$  pour tout  $i$  est lui aussi une surjection distinguée.

**2.18. Remarque.** — Soit  $A$  une algèbre  $k$ -affinoïde distinguée. Si  $A$  est  $\Gamma$ -distinguée, il existe une surjection distinguée  $k\{T/r\} \rightarrow A$  avec  $r$  constitué d'éléments de  $\Gamma$ , ce qui implique que  $\|A\| \subset |k| \cdot \Gamma$  (et entraîne par ailleurs que  $A$  est  $\Gamma$ -stricte).

Réciproquement, supposons que  $\|A\| \subset |k| \cdot \Gamma$ , et choisissons une surjection distinguée  $k\{T/r\} \rightarrow A$ . Il résulte de 2.17.1 que  $k\{T/r\} \rightarrow A$  se factorise par une surjection distinguée  $v: k\{\Theta_1/\rho_1, \dots, \Theta_n/\rho_n\} \rightarrow A$  telle que  $\|v(\Theta_i)\| = \rho_i$  pour tout  $i$ . Chacun des  $\rho_i$  appartient donc à  $\|A\| \setminus \{0\} \subset |k^\times| \cdot \Gamma$ . En renormalisant convenablement les indéterminées on obtient une surjection distinguée  $w: k\{\Theta'_1/\rho'_1, \dots, \Theta'_n/\rho'_n\} \rightarrow A$  où chacun des  $\rho'_i$  appartient à  $\Gamma$  (et où  $\|w(\Theta'_i)\| = \rho'_i$  pour tout  $i$ ). Il s'ensuit que  $A$  est  $\Gamma$ -distinguée.

**2.19. Lemme.** — Soit  $A$  une  $k$ -algèbre affinoïde et soit  $L$  une extension complète de  $k$  possédant une base de Schauder orthogonale sur  $k$ . On fait les hypothèses suivantes :

- (a) l'algèbre  $A$  est réduite ;
- (b) lorsqu'on munit  $A$  de sa norme spectrale, la norme tensorielle de  $A_L$  coïncide avec sa (semi)-norme spectrale (ce qui implique que  $A_L$  est réduite).

Les assertions suivantes sont alors équivalentes :

- (i) l'algèbre  $k$ -affinoïde  $A$  est distinguée ;
- (ii) l'algèbre  $L$ -affinoïde  $A_L$  est distinguée.

*Démonstration.* — Choisissons une base de Schauder  $(\Theta_j)_{j \in J}$  de  $L$  sur  $k$ , en faisant en sorte qu'il existe  $0 \in J$  tel que  $\Theta_0 = 1$  (remarque 2.8). Supposons  $A$  distinguée et choisissons un morphisme distingué  $\varphi: k\{T/r\} \rightarrow A$ . Le morphisme  $\varphi$  est une surjection fortement admissible et la proposition 2.5 (que l'on applique en voyant  $A$  comme un  $k\{T/r\}$ -module de Banach fini *via*  $\varphi$ ) assure que  $\varphi_L$  est une surjection fortement admissible lorsque  $A_L$  est munie de sa norme tensorielle, qui coïncide ici par hypothèse avec sa norme spectrale. Par conséquent  $\varphi_L$  est distingué et  $A_L$  est distinguée.

Réciproquement, supposons  $A_L$  distinguée. On note  $\|\cdot\|$  les normes spectrales de  $A$  et  $A_L$ . Choisissons un morphisme distingué  $L\{T_1/r_1, \dots, T_n/r_n\} \rightarrow A_L$ , et notons  $f_i$  l'image de  $T_i$  pour tout  $i$ . Il résulte de 2.17 qu'on peut supposer que  $\|f_i\| = r_i$  pour tout  $i$  puis, quitte à perturber si besoin le morphisme  $L\{T/r\} \rightarrow A_L$ , que  $f_i$  est pour tout  $i$  une somme finie  $\sum \lambda_{i,j} \Theta_j$  (où les  $\lambda_{i,j}$  appartiennent à  $A$ ). Pour tout  $(i, j)$  tel que  $\lambda_{i,j} \neq 0$  on pose  $s_{i,j} = \|\lambda_{i,j}\|$ ; les réels  $s_{i,j}$  sont tous strictement positifs; on a par ailleurs  $r_i = \|f_i\| = \max_j s_{i,j} \rho_j$ . Soit  $\varphi: k\{S_{i,j}/s_{i,j}\}_{i,j} \rightarrow A$  le morphisme qui envoie

$S_{i,j}$  sur  $\lambda_{i,j}$  pour tout  $(i,j)$ ; on note  $\varphi_L: L\{S_{i,j}/s_{i,j}\}_{i,j} \rightarrow A_L$  le morphisme déduit de  $\varphi$  par extension des scalaires.

Soit  $a$  appartenant à  $A$ . Par hypothèse, il existe un élément  $\sum a_I T^I$  de  $L\{T/r\}$  tel que  $a = \sum a_I f^I$  et  $\max |a_I| r^I = \|a\|$ . Comme

$$\left\| \sum_j S_{i,j} \Theta_j \right\| = \max_j s_{i,j} \rho_j = r_i$$

pour tout  $i$ , on peut évaluer la série  $\sum a_I T^I$  en  $(\sum_j S_{i,j} \Theta_j)_{1 \leq i \leq n}$ . On obtient un élément  $b \in L\{S_{i,j}/s_{i,j}\}_{i,j}$ , de norme majorée par  $\|\sum a_I f^I\| = \|a\|$ , et qui vérifie par construction l'égalité  $\varphi_L(b) = a$ . Puisque  $a \in A$  on a également  $\varphi(b_0) = a$  où  $b_0$  désigne le coefficient de  $\Theta_0 = 1$  dans la décomposition de  $b$  sur la «base»  $(\Theta_j)$ . Par ailleurs la définition de la norme de  $L\{S_{i,j}/s_{i,j}\}_{i,j}$  entraîne que  $\|b_0\| \leq \|b\| \leq \|a\|$ . Comme  $\varphi$  contracte les normes spectrales il vient  $\|b_0\| = \|a\|$ .  $\square$

**2.20. Lemme.** — Soit  $A$  une algèbre  $k$ -affinoïde réduite, munie de sa norme spectrale  $\|\cdot\|$ . Soit  $r = (r_1, \dots, r_n)$  un polyrayon, soit  $\|\cdot\|$  la norme tensorielle de  $A_{\widehat{k(T/r)}}$  et soit  $\|\cdot\|_\infty$  sa semi-norme spectrale. On a l'égalité  $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|$ , et de plus  $\|A_{\widehat{k(T/r)}}\|$  est égal à  $\|A\| \cdot r_1^{\mathbf{Z}} \cdot \dots \cdot r_n^{\mathbf{Z}}$ .

**2.21. Remarque.** — On sait que  $\|\cdot\|_\infty$  est une norme car  $A$  est réduite et car  $\widehat{k(T/r)}$  est analytiquement séparable, cf. [Duc09], exemple 1.9 et théorème 3.1; mais nous n'allons pas utiliser ce fait dans la preuve du lemme, qui le redémontrera donc au passage.

*Preuve du lemme 2.20.* — Soit  $P$  un élément de  $A_{\widehat{k(T/r)}}$  de la forme  $\sum a_I T^I$  où  $I$  parcourt un ensemble fini. On a  $\|P\| \leq \max_I \|a_I\| \cdot r^I$ . Soit  $\pi: \mathcal{M}(A_{\widehat{k(T/r)}}) \rightarrow \mathcal{M}(A)$  l'application continue naturelle. On a les égalités

$$\begin{aligned} \|P\|_\infty &= \sup_{y \in \mathcal{M}(A_{\widehat{k(T/r)}})} |P(y)| \\ &= \sup_{x \in \mathcal{M}(A)} \sup_{y \in \pi^{-1}(x)} |P(y)| \\ &= \sup_{x \in \mathcal{M}(A)} \max_I |a_I(x)| r^I \\ &= \max_I \|a_I\| r^I. \end{aligned}$$

Comme on a par ailleurs  $\|P\|_\infty \leq \|P\|$ , il vient  $\|P\|_\infty = \|P\| = \max_I \|a_I\| r^I$ .

On conclut en remarquant que  $\|\cdot\|$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont des normes de  $\widehat{k(T/r)}$ -espaces vectoriels et que les éléments  $P$  comme ci-dessus engendrent un sous- $\widehat{k(T/r)}$ -espace vectoriel dense de  $A_{\widehat{k(T/r)}}$ .  $\square$

La proposition suivante fait appel de manière cruciale à la notion de  $\Gamma$ -annéloïde résiduel introduite au 2.1.3.



**2.22. Proposition.** — Soit  $r = (r_1, \dots, r_n)$  un polyrayon constitué d'éléments de  $\Gamma$  et soit  $I$  un idéal de  $k\{T/r\}$ . Soit  $(a_1, \dots, a_m)$  une famille fortement génératrice de  $I$  telle que  $\|a_i\| \in \Gamma$  pour tout  $i$ . Soit  $A$  l'algèbre quotient  $k\{T/r\}/I$  et soit  $\|\cdot\|_q$  sa norme quotient.

- (1) La norme quotient  $\|\cdot\|_q$  est sous-multiplicative et à valeurs dans  $|k| \cdot \Gamma$ . On note  $\tilde{A}_q$  le  $\Gamma$ -annéloïde résiduel de  $(A, \|\cdot\|_q)$ .
- (2) La surjection  $k\{T/r\} \rightarrow A$  induit un isomorphisme  $\tilde{k}[r\backslash T]/(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m) \simeq \tilde{A}_q$ .
- (3) Les assertions suivantes sont équivalentes :
  - (i) La surjection  $k\{T/r\} \rightarrow A$  est distinguée.
  - (ii) La surjection  $k\{T/r\} \rightarrow A$  induit un isomorphisme de  $\tilde{k}$ -algèbres

$$\tilde{k}[r\backslash T]/(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m) \simeq \tilde{A}$$

(rappelons que  $\tilde{A}$  désigne le  $\Gamma$ -annéloïde résiduel de  $A$  relatif à sa semi-norme spectrale).

- (iii) La  $\tilde{k}$ -algèbre  $\tilde{k}[r\backslash T]/(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m)$  est réduite.

*Démonstration.* — La norme de  $k\{T/r\}$  est multiplicative, ce qui entraîne que  $\|\cdot\|_q$  est sous-multiplicative. Par ailleurs, l'idéal  $I$  est strictement fermé dans  $k\{T/r\}$  d'après la proposition 2.4, ce qui implique que  $k\{T/r\} \rightarrow A$  est fortement admissible lorsqu'on voit  $A$  comme munie de  $\|\cdot\|_q$ . La norme de  $k\{T/r\}$  étant à valeurs dans  $|k| \cdot \Gamma$ , il en résulte que  $\|A\|_q \subset |k| \cdot \Gamma$ .

**2.22.1.** — Montrons que le morphisme  $\tilde{k}[r\backslash T]/(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m) \rightarrow \tilde{A}_q$  est bijectif. Pour tout  $a \in A$  et tout élément  $R$  de  $\Gamma$  supérieur ou égal à  $\|a\|_q$  on note  $\tilde{a}_q^R$  l'image de  $a$  dans  $\tilde{A}_q^R$ , et l'on omettra le  $R$  en exposant si  $R = \|a\|_q$ .

Commençons par la surjectivité. Soit  $\alpha \in \tilde{A}_q$ ; montrons qu'il possède un antécédent dans  $\tilde{k}[r\backslash T]$ . C'est clair si  $\alpha = 0$ . Supposons que  $\alpha \neq 0$  et choisissons un élément  $a$  de  $A$  de norme appartenant à  $\Gamma$  et tel que  $\alpha = \tilde{a}_q$ . Puisque  $k\{T/r\} \rightarrow A$  est fortement admissible relativement à  $\|\cdot\|_q$ , il existe un antécédent  $b$  de  $a$  dans  $k\{T/r\}$  tel que  $\|b\| = \|a\|_q$ . L'élément  $\alpha = \tilde{a}_q$  de  $\tilde{A}_q$  est alors égal à l'image de  $\tilde{b}$ .

Soit maintenant  $\beta$  un élément de  $\tilde{k}[r\backslash T]$ . Nous allons montrer que l'image de  $\beta$  dans  $\tilde{A}_q$  est nulle si et seulement si  $\beta \in (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m)$ . On peut supposer  $\beta$  non nul; il est alors égal à  $\tilde{b}$  pour un certain élément  $b$  de  $k\{T/r\}$  dont la norme appartient à  $\Gamma$ ; notons  $a$  l'image de  $b$  dans  $A$ . L'image de  $\beta$  dans  $\tilde{A}_q$  est égale à  $\tilde{a}_q^R$ .

Supposons que  $\beta$  appartienne à  $(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m)$ . Il existe alors  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k\{T/r\}$  tels que  $\|\lambda_i\| \cdot \|a_i\| \leq R$  pour tout  $i$  et tels que  $\|b - \sum \lambda_i a_i\| < R$ . Comme  $b - \sum \lambda_i a_i$  a également pour image  $a$  dans  $A$ , il vient  $\|a\|_q < R$  puis  $\tilde{a}_q^R = 0$ .

Inversement, supposons que  $\tilde{a}_q^R = 0$ . Cela signifie que  $\|a\|_q < R$ . Par conséquent,  $a$  possède un antécédent  $c$  dans  $k\{T/r\}$  tel que  $\|c\| < R$ . Puisque  $b$  et  $c$  ont même image dans  $A$ , la différence  $b - c$  appartient à  $I$ . Comme les  $a_i$  engendrent fortement  $I$ , il existe une famille  $(\lambda_i)$  d'éléments de  $k\{T/r\}$  tels que  $\|\lambda_i\| \cdot \|a_i\| \leq \|b - c\| = R$  pour tout  $i$  et telle que  $b - c = \sum \lambda_i a_i$ . Mais on a alors  $\beta = \tilde{b} = \sum_{i \in I} \lambda_i \tilde{a}_i$  où  $I$  désigne l'ensemble des indices  $i$  tels que  $\|\lambda_i\| \cdot \|a_i\| = \|b\|$ .

**2.22.2.** — Montrons maintenant (3) par implications circulaires. Si  $k\{T/r\} \rightarrow A$  est distinguée, la norme  $\|\cdot\|_q$  coïncide avec la norme spectrale de  $A$ , et (ii) se déduit alors de (2). Si (ii) est vraie alors (iii) est vraie car  $\tilde{A}$  est réduite. Enfin si (iii) est vraie alors on déduit de (2) que  $\|\cdot\|_q$  commute aux puissances, ce qui implique qu'elle coïncide avec la semi-norme spectrale de  $A$ , c'est-à-dire que  $k\{T/r\} \rightarrow A$  est distinguée.  $\square$

**2.23. Théorème.** — *Supposons que le corps  $k$  est stable et soit  $A$  une algèbre  $k$ -affinoïde. L'algèbre  $A$  est distinguée si et seulement si elle est réduite.*

*Démonstration.* — Comme  $\Gamma$  ne joue pas de rôle dans l'énoncé, on peut le supposer égal à  $\mathbf{R}_{>0}$  (il va intervenir ci-dessous implicitement à travers les annéloïdes résiduels). On sait que si  $A$  est distinguée, elle est réduite. Réciproquement, supposons  $A$  réduite et munissons-la de sa norme spectrale  $\|\cdot\|$ . La réduction  $\tilde{A}$  est de type fini sur  $\tilde{k}$ ; par conséquent,  $\mathfrak{d}(\tilde{A}_{\neq 0})$  est un monoïde de type fini sur  $\mathfrak{d}(\tilde{k}^\times)$ , ce qui veut dire que le monoïde des valeurs non nulles de la norme spectrale de  $A$  est de type fini sur  $|k^\times|$ . Il existe donc un polyrayon  $r = (r_1, \dots, r_n)$  tel que  $\widehat{k(T/r)}$  ne soit pas trivialement valué et tel que  $\|A\| \subset |k| \cdot r_1^{\mathbf{Z}} \cdot \dots \cdot r_n^{\mathbf{Z}}$ .

Les lemmes 2.11 et 2.20 assurent qu'on peut appliquer le lemme 2.19 à l'extension  $\widehat{k(T/r)}$  de  $k$ , ce qui signifie qu'on peut s'assurer du caractère distingué de  $A$  après passage au corps  $\widehat{k(T/r)}$  (notons que l'algèbre  $A_{\widehat{k(T/r)}}$  est encore réduite d'après le lemme 2.20, voir aussi la remarque 2.21). Par ailleurs, le corps valué  $\widehat{k(T/r)}$  est stable (2.10), et  $\|A_{\widehat{k(T/r)}}\| = \|A\| \cdot r_1^{\mathbf{Z}} \cdot \dots \cdot r_n^{\mathbf{Z}}$  par le lemme 2.20. Par conséquent on peut supposer, quitte à étendre les scalaires à  $\widehat{k(T/r)}$ , que la valeur absolue de  $k$  n'est pas triviale et que  $\|A\| \subset |k|$  (avec égalité si  $A \neq \{0\}$ ), ce qui implique que  $A$  est strictement  $k$ -affinoïde.

Récapitulons :  $A$  est une algèbre strictement  $k$ -affinoïde réduite sur le corps  $k$  qui est non trivialement valué et stable, et  $\|A\| \subset |k|$ . En vertu de [BGR84], 6.4.3, Th. 1, ceci entraîne que  $A$  est distinguée (et même  $\{1\}$ -distinguée).  $\square$

Le lemme suivant est un cas particulier facile de résultats très généraux de descente établis par Conrad et Temkin dans leur prépublication [CT]. Nous en donnons une preuve directe pour la commodité du lecteur.

**2.24. Lemme.** — *Soit  $u: A \rightarrow B$  un morphisme d'algèbres  $k$ -affinoïdes, et soit  $k^a$  une clôture algébrique de  $k$ . Si  $u_{\widehat{k^a}}: A_{\widehat{k^a}} \rightarrow B_{\widehat{k^a}}$  est une surjection admissible alors  $u$  est une surjection admissible.*

*Démonstration.* — Comme  $\Gamma$  n'apparaît pas dans l'énoncé, on peut le supposer égal à  $\mathbf{R}_{>0}$ . Posons  $C = A_{\widehat{k^a}}$  et  $D = B_{\widehat{k^a}}$ . L'annéloïde  $\tilde{C}$  est fini sur  $\tilde{A} \otimes_{\tilde{k}} \tilde{k^a}$  d'après [Tem04], Prop. 3.1 (v), et  $\tilde{A} \rightarrow \tilde{C}$  est injective car  $A \rightarrow A_{\widehat{k^a}}$  préserve les semi-normes spectrales puisque  $\mathcal{M}(A_{\widehat{k^a}}) \rightarrow \mathcal{M}(A)$  est surjectif. Le morphisme  $\tilde{A} \rightarrow \tilde{C}$  est en conséquence une injection entière. De même,  $\tilde{B} \rightarrow \tilde{D}$  est une injection entière. Par ailleurs, notre hypothèse sur  $u_{\widehat{k^a}}$  implique que  $\tilde{D}$  est finie sur  $\tilde{C}$ , et *a fortiori* entière sur  $\tilde{A}$ . Par conséquent, la sous- $\tilde{A}$ -algèbre  $\tilde{B}$  de  $\tilde{D}$  est entière sur  $\tilde{A}$  (et même finie sur

$\tilde{A}$  puisque  $\tilde{B}$  est de type fini sur  $\tilde{k}$ ). Cela signifie que  $\mathcal{M}(B) \rightarrow \mathcal{M}(A)$  est sans bord ([Tem04], prop. 3.4) ; comme il s'agit d'un morphisme entre espaces affinoïdes, il est fini ([Ber90], Cor. 2.5.13). Dès lors  $B$  est un  $A$ -module de Banach fini, et  $D = B \otimes_A C$ . Or  $C$  est une  $A$ -algèbre fidèlement plate ([Ber93], Lemma 2.1.2) ; par conséquent, la surjectivité de  $u_{\tilde{k}^a}$  entraîne celle de  $u$ .  $\square$

**2.25. Lemme.** — Soit  $A$  une algèbre  $k$ -affinoïde  $\Gamma$ -stricte géométriquement réduite, soit  $r$  un polyrayon constitué d'éléments de  $\Gamma$  et soit  $u: k\{T/r\} \rightarrow A$  un morphisme surjectif. Soit  $(a_1, \dots, a_m)$  une famille fortement génératrice de  $\text{Ker}(u)$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) la  $\tilde{k}$ -algèbre  $\tilde{k}[r\backslash T]/(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m)$  est géométriquement réduite ;
- (ii) pour toute extension complète  $L$  de  $k$ , le morphisme  $u_L$  est distingué ;
- (iii) le morphisme  $u$  est distingué et il existe une extension complète algébriquement close  $L$  de  $k$  telle que  $u_L$  soit distingué ;
- (iv) le morphisme  $u$  est distingué et  $\tilde{A}$  est géométriquement réduite.

**2.26. Remarque.** — Comme tout idéal de  $k\{T/r\}$  admet une famille fortement génératrice (proposition 2.4), les assertions (ii), (iii) et (iv) du lemme ci-dessus sont équivalentes pour tout morphisme surjectif  $u: k\{T/r\} \rightarrow A$ .

*Démonstration.* — Notons pour commencer que la proposition 2.5 assure que  $(a_1, \dots, a_m)$  est une famille fortement génératrice de  $\text{Ker}(u_L)$  pour toute extension complète  $L$  de  $k$ .

L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) découle de la proposition 2.22, et (ii) $\Rightarrow$ (iii) est évidente. Supposons que (iii) soit vraie. Comme  $u$  et  $u_L$  sont distingués, la proposition 2.22 entraîne que les applications naturelles  $\tilde{k}[r\backslash T]/(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m) \rightarrow \tilde{A}$  et  $\tilde{L}[r\backslash T]/(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m) \rightarrow \tilde{A}_L$  sont des isomorphismes. Par conséquent le morphisme naturel  $\tilde{A} \otimes_{\tilde{k}} \tilde{L} \rightarrow \tilde{A}_L$  est un isomorphisme ; comme le but de cet isomorphisme est réduit, sa source l'est aussi et  $\tilde{A}$  est donc géométriquement réduite.

Enfin supposons que (iv) soit vraie. Comme  $u$  est distingué, la proposition 2.22 assure que  $\tilde{k}[r\backslash T]/(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m) \rightarrow \tilde{A}$  est un isomorphisme. Si  $L$  est une extension complète de  $k$  le quotient  $\tilde{L}[r\backslash T]/(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m)$  est donc isomorphe à  $\tilde{A} \otimes_{\tilde{k}} \tilde{L}$  et est par conséquent réduit d'après nos hypothèses, d'où (i).  $\square$

**2.27. Définition.** — Soit  $A$  une algèbre  $k$ -affinoïde. Si  $r$  est un polyrayon, un morphisme surjectif  $u: k\{T/r\} \rightarrow A$  est dit *universellement distingué* si  $u_L$  est distingué pour toute extension complète  $L$  de  $k$ .

L'algèbre  $A$  est dite *universellement distinguée* (resp. *universellement  $\Gamma$ -distinguée*) s'il existe un polyrayon  $r$  (resp. un polyrayon  $r$  constitué d'éléments de  $\Gamma$ ) et une surjection universellement distinguée  $u: k\{T/r\} \rightarrow A$ . Si c'est le cas on peut toujours faire en sorte que  $\|u(T_i)\| = r_i$  pour tout  $i$ , par le même procédé que celui décrit au 2.17 (resp. 2.18).

**2.28. Théorème.** — Soit  $A$  une algèbre  $k$ -affinoïde  $\Gamma$ -stricte et géométriquement réduite. Il existe une extension finie  $L$  de  $k$ , qu'on peut prendre séparable si  $|k^\times| \neq \{1\}$ , telle que  $A_L$  soit universellement  $\Gamma^{\mathbf{Q}}$ -distinguée.

*Démonstration.* — Quitte à remplacer  $\Gamma$  par  $\Gamma^{\mathbf{Q}}$  (ce qui ne change pas la notion d'algèbre  $\Gamma$ -stricte) on peut supposer que  $\Gamma$  est divisible. Pour toute extension complète  $F$  de  $k$ , l'algèbre  $A_F$  est réduite et on la considèrera toujours comme munie de sa norme spectrale qu'on notera  $\|\cdot\|$  (cette notation n'est pas ambiguë car comme  $\mathcal{M}(A_F) \rightarrow \mathcal{M}(A)$  est surjective,  $A \hookrightarrow A_F$  préserve les normes spectrales). Soit  $k^a$  une clôture algébrique de  $k$ . Le corps  $\widehat{k^a}$  est stable, et l'algèbre  $A_{\widehat{k^a}}$  est réduite. Le théorème 2.23 assure alors que  $A_{\widehat{k^a}}$  est distinguée. Il existe donc un polyrayon  $r = (r_1, \dots, r_n)$  et une surjection distinguée  $v: \widehat{k^a}\{T/r\} \rightarrow A_{\widehat{k^a}}$ . Puisque  $A$  est  $\Gamma$ -stricte et  $\Gamma$  divisible, on a  $\|A_{\widehat{k^a}}\| \subset |\widehat{k^a}| \cdot \Gamma$ ; en vertu de la remarque 2.18 on peut donc supposer que chacun des  $r_i$  appartient à  $\Gamma$ . Il résulte par ailleurs de 2.17 que quitte à perturber un peu  $v$ , on peut supposer qu'il existe une extension finie  $L$  de  $k$ , et même finie séparable si  $|k^\times| \neq \{1\}$ , telle que  $v(T_i) \in A_L$  pour tout  $i$ . Soit  $J$  le noyau de  $v$ . La proposition 2.4 assure que  $J$  possède une famille finie fortement génératrice  $(a_1, \dots, a_m)$ , et il découle de 2.3.3 qu'on peut supposer, quitte à agrandir  $L$  et à perturber un peu les  $a_i$ , que les  $a_i$  appartiennent à  $L\{T/r\}$ .

Notons  $u$  le morphisme  $L\{T/r\} \rightarrow A_L$  qui envoie  $T_i$  sur  $v(T_i)$  pour tout  $i$ , et  $I$  l'idéal  $(a_1, \dots, a_m)$  de  $L\{T/r\}$ . On a par construction  $v = u_{\widehat{k^a}}$  et  $J = I_{\widehat{k^a}}$ . Comme  $v$  est une surjection admissible, le lemme 2.24 assure que  $u$  est une surjection admissible. Puisque  $v = u_{\widehat{k^a}}$  on a  $\text{Ker}(v) = \text{Ker}(u)_{\widehat{k^a}}$ , et on a d'autre part  $\text{Ker}(v) = J = I_{\widehat{k^a}}$ . Par fidèle platitude de  $A_{\widehat{k^a}}$  sur  $A_L$  ([Ber93], Lemma 2.1.2), il vient  $\text{Ker}(u) = I$ . Comme  $(a_1, \dots, a_m)$  engendre fortement  $J$ , il résulte de la proposition 2.5 (et de la fin de 2.3.5) que  $(a_1, \dots, a_m)$  engendre fortement  $I$ . Le morphisme  $v$  étant distingué, la proposition 2.22 entraîne que  $\widehat{k^a}[T/r]/(\widetilde{a}_1, \dots, \widetilde{a}_r)$  est réduite. Il résulte alors du lemme 2.25 que  $u$  est universellement distingué. En conséquence,  $A_L$  est universellement distingué.  $\square$

**2.29. Remarque.** — On ne peut pas espérer que l'énoncé du théorème ci-dessus vaille en général avec  $\Gamma$  à la place de  $\Gamma^{\mathbf{Q}}$ . En effet supposons qu'il existe un élément  $r$  appartenant à  $\Gamma^{\mathbf{Q}} \setminus (\Gamma \cdot |k^\times|^{\mathbf{Q}})$ . Pour toute extension finie  $L$  de  $k$  on a alors

$$|L_r^\times| = |L^\times| \cdot r^{\mathbf{Z}} \not\subset |L^\times| \cdot \Gamma,$$

si bien que  $L_r$  n'est jamais  $\Gamma$ -distinguée. En revanche, la présentation canonique  $k\{T/r, rS\}/(ST - 1) \simeq k_r$  est universellement  $\Gamma^{1/N}$ -distinguée, où  $N$  est l'ordre de  $r$  modulo  $\Gamma$ .

**2.30. Proposition.** — Soit  $A$  une algèbre  $k$ -affinoïde  $\Gamma$ -stricte géométriquement réduite, soit  $r$  un polyrayon constitué d'éléments de  $\Gamma$  et soit  $u: k\{T/r\} \rightarrow A$  une surjection admissible. On note  $I$  le noyau de  $u$ . Soit  $(a_1, \dots, a_m)$  une famille génératrice de  $I$  constituée d'éléments non nuls et telle que pour toute extension complète  $L$  de  $k$ , les propriétés suivantes soient satisfaites :

- (a)  $\widetilde{L}[r\{T\}]/(\widetilde{a}_1, \dots, \widetilde{a}_m)$  est réduite;
- (b) la flèche naturelle  $\widetilde{L}[r\{T\}]/(\widetilde{a}_1, \dots, \widetilde{a}_m) \rightarrow \widehat{(A_L)}$  est injective.

La famille  $(a_i)$  engendre alors fortement  $I$ , et  $u$  est universellement distingué.

*Démonstration.* — Soit  $\|\cdot\|$  la norme spectrale de  $A$ . Il suffit de montrer que la famille  $(a_i)$  engendre fortement  $I$ . Il découlera alors de la proposition 2.5, de l'hypothèse (a)

et de la proposition 2.22 que  $u_L$  est distingué pour toute extension complète  $L$  de  $k$ , et donc que  $u$  est universellement distingué.

Par ailleurs pour montrer que la famille  $(a_i)$  engendre fortement  $I$ , il suffit de le faire après une extension quelconque des scalaires (prop. 2.5). Comme nos hypothèses sont elles-mêmes invariantes par une telle extension, on peut supposer que  $k$  est algébriquement clos, et que  $\Gamma \subset |k^\times| \neq \{1\}$  (l'algèbre  $A$  est alors strictement  $k$ -affinoïde). Cette dernière hypothèse permet de se ramener aussitôt par renormalisation des indéterminées au cas où  $r = 1$ . Comme on peut multiplier chacun des  $a_i$  par un scalaire sans changer le caractère fortement générateur éventuel de  $(a_i)$  ni nos hypothèses sur l'algèbre  $\tilde{k}[r\backslash T]/(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m)$ , on peut supposer que  $\|a_i\| = 1$  pour tout  $i$ .

Soit  $J$  le noyau de  $k^\circ\{T\} \rightarrow A$ . Pour que la famille  $(a_1, \dots, a_m)$  engendre fortement  $I$ , il faut et il suffit qu'elle engendre  $J$  sur  $k^\circ\{T\}$ . La condition énoncée est en effet clairement nécessaire par définition d'une famille fortement génératrice. Réciproquement, supposons que  $(a_1, \dots, a_m)$  engendre  $J$  sur  $k^\circ\{T\}$  et soit  $a \in k\{T\}$ ; montrons qu'on peut écrire  $a$  sous la forme  $\sum \alpha_i a_i$  avec  $\|\alpha_i\| \leq \|a\|$  pour tout  $i$ . C'est évident si  $a = 0$ ; sinon  $\|a\| \in |k^\times|$ , si bien que quitte à diviser  $a$  par un scalaire convenable, on peut supposer que  $\|a\| = 1$ ; mais l'assertion requise découle alors directement du fait que  $(a_1, \dots, a_m)$  engendre  $J$  sur  $k^\circ\{T\}$ .

Il suffit donc pour conclure de démontrer que  $(a_1, \dots, a_m)$  engendre  $J$  sur  $k^\circ\{T\}$ . Comme  $A^\circ$  est plat sur  $k^\circ$ , l'idéal  $J$  de  $k^\circ\{T\}$  est de type fini, cf. [BL93a], Prop. 1.1 (c). Soit  $b$  un élément non nul de  $J$  et soit  $\mu$  un élément de  $k^\circ$  tel que  $\|b\| = |\mu|$ . L'image de  $b/\mu$  dans  $A$  est nulle, et l'image de  $b/\mu$  dans  $\tilde{k}^1[T]/(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m)$  est donc également nulle par injectivité du morphisme  $\tilde{k}[T]/(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m) \rightarrow \tilde{A}$ . Il existe donc  $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \nu$  dans  $k^\circ\{T\}$  et  $\varepsilon$  dans  $k^{\circ\circ}$  tels que  $b/\mu = \sum_i \lambda_i a_i + \varepsilon \nu$ . Comme  $u(a_i) = 0$  pour tout  $i$ , il vient  $\varepsilon u(\nu) = 0$  et donc  $\varepsilon = 0$  ou  $u(\nu) = 0$ , c'est-à-dire  $\nu \in J$ ; dans les deux cas on a  $b \in I + k^{\circ\circ}J$ . Le  $k^\circ\{T\}$ -module de type fini  $J/I$  satisfait donc l'égalité  $J/I = k^{\circ\circ}J/I$ . Le lemme de Nakayama assure alors l'existence d'un élément  $\omega \in k^{\circ\circ}\{T\}$  tel que  $(1 + \omega)(J/I) = 0$ . Puisque  $1 + \omega$  est inversible dans  $k^\circ\{T\}$  il vient  $J = I$ .  $\square$

**2.31. Un critère utile.** — Reprenons les notations de la proposition 2.30. Nous allons énoncer un critère pour que les hypothèses de celle-ci soient satisfaites, auquel nous ferons appel lors de la preuve du théorème principal.

Supposons que la  $\tilde{k}$ -algèbre  $\tilde{k}[r\backslash T]/(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m)$  est géométriquement réduite. Soit  $L$  une extension complète de  $k$ . Elle satisfait alors l'hypothèse (a). Par ailleurs, le morphisme naturel de  $\tilde{L}[r\backslash T]/(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m)$  vers  $\widetilde{(A_L)}$  est entier d'après [Tem04], Prop. 3.1 (v), et il induit donc un morphisme fermé de  $\text{Spec } \widetilde{(A_L)}$  vers  $\text{Spec } \tilde{L}[r\backslash T]/(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m)$ . Il en résulte, l'annéloïde  $\tilde{L}[r\backslash T]/(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m)$  étant réduit, que  $\tilde{L}[r\backslash T]/(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m)$  s'injecte dans  $\widetilde{(A_L)}$  si et seulement si  $\text{Spec } \widetilde{(A_L)}$  se surjecte sur  $\text{Spec } \tilde{L}[r\backslash T]/(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m)$ .

Pour que cette dernière condition soit satisfaite, nous allons montrer qu'il suffit que le schémoïde  $\mathcal{X} := \text{Spec } \tilde{k}[r\backslash T]/(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m)$  possède les deux propriétés suivantes, en notant  $\mathbf{E}$  l'ensemble de ses points maximaux :

- ( $\alpha$ ) pour tout  $\xi \in \mathbf{E}$ , la composante irréductible  $\overline{\{\xi\}}$  de  $\mathbf{X}$  est géométriquement irréductible;
- ( $\beta$ ) pour tout  $\xi \in \mathbf{E}$ , il existe un élément  $f$  non nul de  $k\{T/r\}$  tel que  $\tilde{f}(\eta) = 0$  pour tout  $\eta \in \mathbf{E} \setminus \{\xi\}$ , un domaine affinoïde  $V$  de  $\mathcal{M}(A)$  purement de dimension  $d := \dim \overline{\{\xi\}}$ , et un point  $v$  de  $V$  tel que  $|u(f)(v)| = \|f\|$ .

Supposons en effet que ce soit le cas, et montrons que chacun des points maximaux de  $\mathbf{X}_{\tilde{L}}$  appartient à l'image de  $\text{Spec } \widetilde{A}_L$ ; cela permettra de conclure, puisque la flèche  $\text{Spec } \widetilde{A}_L \rightarrow \mathbf{X}_{\tilde{L}}$  est fermée.

Soit donc  $\zeta$  un point maximal de  $\mathbf{X}_{\tilde{L}}$  et soit  $\xi$  son image sur  $\mathbf{X}$ ; l'hypothèse ( $\alpha$ ) assure que  $\zeta$  est l'unique antécédent de  $\xi$  sur  $\mathbf{X}_{\tilde{L}}$ . Soit  $W$  le domaine affinoïde de  $\mathcal{M}(A_L)$  défini par l'égalité  $|u(f)| = \|f\|$ . L'hypothèse ( $\beta$ ) assure que  $W$  rencontre  $V_L$ , qui est purement de dimension  $d$ ; en particulier,  $W$  rencontre au moins une composante irréductible de dimension  $d$  de  $\mathcal{M}(A_L)$ , si bien que l'ouvert  $\widetilde{W}$  de  $\text{Spec } \widetilde{A}_L$  rencontre au moins une composante irréductible de dimension  $d$  de ce dernier (lemme A.1); soit  $\omega$  son point générique. Par définition de  $W$ , la fonction  $\widetilde{u}(f)$  ne s'annule pas en  $\omega$ ; par conséquent, l'image de  $\omega$  sur  $\mathbf{X}$  n'appartient pas au lieu des zéros de  $\tilde{f}$ , lequel contient  $\{\eta\}$  pour tout point maximal  $\eta$  différent de  $\xi$  (en vertu de l'hypothèse ( $\beta$ )). Il s'ensuit que l'image de  $\omega$  sur  $\mathbf{X}_L$  est située sur  $\overline{\{\zeta\}}$ . Comme  $\text{Spec } \widetilde{A}_L \rightarrow \mathbf{X}_L$  est fini et comme  $\omega$  est le point générique d'une composante irréductible de dimension  $d$ , on en déduit que l'image de  $\omega$  sur  $\mathbf{X}_L$  est égale à  $\zeta$ .

### 3. Le théorème principal

**3.1.** — Nous suivons toujours les conventions générales décrite aux paragraphes 2.1 et sq.

**3.1.1.** — Nous ferons un grand usage dans ce qui va suivre de la théorie de la réduction des germes d'espaces analytiques introduite par Temkin dans [Tem04], et plus précisément de sa déclinaison  $\Gamma$ -stricte développée au chapitre 3 de [Duc18] (dans lequel nous décrivons en détail la théorie).

Rappelons simplement ici quelques notations utiles. Si  $F \hookrightarrow L$  est une extension de corpoïdes  $\Gamma$ -gradués, on note  $\mathbf{P}_{L/F}$  l'ensemble des (classes d'équivalence de) valuations sur  $L$  qui sont triviales sur  $F$ . Pour toute partie  $E$  de  $L$ , on note  $\mathbf{P}_{L/F}\{E\}$  le sous-ensemble de  $\mathbf{P}_{L/F}$  formé des valuations dont l'annéloïde contient  $E$ . Les  $\mathbf{P}_{L/F}\{E\}$  pour  $E$  fini engendrent une topologie dont on munit  $\mathbf{P}_{L/F}$ ; ce dernier est alors quasi-compact.

Si  $(X, x)$  est un germe d'espace  $k$ -analytique  $\Gamma$ -strict, nous noterons  $\widetilde{(X, x)}$  la «partie  $\Gamma$ -stricte» de sa réduction à la Temkin, qui est notée  $\widetilde{(X, x)}^\Gamma$  dans [Duc18] (voir les paragraphes 3.5.3 et 3.5.9 de *op. cit.* pour sa définition et ses principales propriétés). C'est un ouvert quasi-compact et non vide de  $\mathbf{P}_{\mathcal{H}(y)/\tilde{k}}$ .

**3.1.2.** — Nous utiliserons également la notion de platitude en géométrie analytique telle qu'elle est introduite et étudiée dans [Duc18] (voir notamment le chapitre 4 de *op. cit.*).

Nous nous servons à plusieurs reprises du résultat suivant : si  $p: Y \rightarrow X$  est un morphisme plat entre espaces  $k$ -analytiques compacts et  $\Gamma$ -stricts alors  $p(Y)$  est un domaine analytique (compact) et  $\Gamma$ -strict de  $X$ . Lorsque  $\Gamma = \{1\}$  c'est un résultat de Raynaud (cf. [BL93b], Cor. 5.11). On trouvera dans [Duc18] une démonstration du cas général par réduction au cas où  $\Gamma = \{1\}$ , ainsi qu'une nouvelle preuve de ce dernier sans modèles formels (ils sont remplacés par la réduction des germes d'espaces analytiques); cf. *op. cit.*, théorèmes 9.1.3 et 9.2.1.

Nous aurons également besoin d'un énoncé technique sur le lieu d'équidimensionalité d'un morphisme plat, que nous démontrons en appendice (théorème A.2).

**3.2. Définition.** — Soit  $A \rightarrow B$  un morphisme entre algèbres  $k$ -affinoïdes  $\Gamma$ -strictes; posons  $X = \mathcal{M}(A)$  et  $Y = \mathcal{M}(B)$ . Une présentation  $B \simeq A\{T/r\}/(a_1, \dots, a_m)$  de  $B$  sur  $A$  (ou de  $Y$  sur  $X$ ) est dite  $\Gamma$ -*sympathique* si elle possède les propriétés suivantes, en notant  $D$  le polydisque relatif  $\mathcal{M}(A\{T/r\})$  :

- (1) le polyrayon  $r$  est constitué d'éléments de  $\Gamma$ ;
- (2) pour tout  $i$  compris entre 1 et  $m$  la semi-norme spectrale  $\rho_i$  de  $a_i$  appartient à  $\Gamma$ , et pour tout  $x \in X$  la norme spectrale de  $a_i|_{D_x}$  est encore égale à  $\rho_i$ ;
- (3) pour tout point  $x$  de  $\mathcal{M}(A)$ , la famille  $(a_1|_{D_x}, \dots, a_m|_{D_x})$  est une famille fortement génératrice de l'idéal qu'elle engendre dans  $\mathcal{H}(x)\{T/r\}$ ;
- (4) le morphisme naturel  $p: \text{Spec } \tilde{A}[r\backslash T]/(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m) \rightarrow \tilde{X}$  est plat et à fibres géométriquement réduites;
- (5) les composantes irréductibles des fibres de  $p$  sont géométriquement irréductibles;
- (6) il existe un recouvrement ouvert fini  $(\Omega_i)$  de  $\text{Spec } \tilde{A}[r\backslash T]/(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m)$  tel que pour tout  $i$  et tout  $\xi \in \tilde{X}$  l'intersection  $p^{-1}(\xi) \cap \Omega_i$  soit ou bien vide, ou bien une composante connexe de  $p^{-1}(\xi)$ .

**3.3.** — Soient  $A$  et  $B$  comme ci-dessus, soit  $B \simeq A\{T/r\}/(a_1, \dots, a_m)$  une présentation  $\Gamma$ -sympathique de  $B$  et soit  $D$  le polydisque relatif  $\mathcal{M}(A\{T/r\})$ .

**3.3.1.** — Soit  $L$  une extension complète de  $k$  et soit  $x$  un  $L$ -point de  $\mathcal{M}(A)$ . Il découle alors des conditions (1) à (4) de la définition d'une présentation sympathique, de la proposition 2.5 couplée à la fin de 2.3.5, de la proposition 2.22 et du lemme 2.25 que  $(a_1|_{D_x}, \dots, a_m|_{D_x})$  est une famille fortement génératrice de l'idéal de  $L\{T/r\}$  qu'elle engendre, que la surjection  $L\{T/r\} \rightarrow L\{T/r\}/(a_1|_{D_x}, \dots, a_m|_{D_x})$  est universellement distinguée, et que  $\tilde{Y}_x \rightarrow \text{Spec } \tilde{L}[r\backslash T]/(\tilde{a}_1|_{D_x}, \dots, \tilde{a}_m|_{D_x})$  est un isomorphisme. Une présentation  $\Gamma$ -sympathique d'un morphisme entre espaces  $k$ -affinoïdes  $\Gamma$ -stricts fournit ainsi entre autres une description uniforme et universelle des réductions (graduées) de ses fibres.

**3.3.2.** — Soit  $C$  une algèbre affinoïde  $\Gamma$ -stricte sur une extension complète de  $k$  et soit  $A \rightarrow C$  un morphisme; rappelons qu'on désigne par  $B_C$  l'algèbre  $B \hat{\otimes}_A C$ . L'isomorphisme  $B_C \simeq C\{T/r\}/(a_1, \dots, a_m)$  est alors une présentation  $\Gamma$ -sympathique de  $B_C$  sur  $C$ . C'est en effet une conséquence de la stabilité des propriétés (1) à (6) de la définition par extension des scalaires, stabilité qui se voit comme suit : elle est

évidente en ce qui concerne (1), (2), (4) et (5); en ce qui concerne (3), cela a été expliqué en 3.3.1; et en ce qui concerne (6), elle est immédiate une fois remarqué qu'en vertu de (5), les composantes connexes des fibres de  $p$  sont géométriquement connexes.

**3.3.3.** — Si  $\Gamma = \{1\}$  et si  $A$  est distinguée (ce qui est par exemple le cas dès que  $k$  est algébriquement clos et que  $A$  est réduite), on peut déduire de la présentation  $\{1\}$ -sympathique de  $B$  sur  $A$  que nous nous sommes donnée un modèle formel plat et à fibres réduites de  $\mathcal{M}(B) \rightarrow \mathcal{M}(A)$ , comme en atteste la proposition suivante.

**3.4. Proposition.** — *Supposons que  $\Gamma = \{1\}$  (ce qui entraîne que  $k$  n'est pas trivialement valué). Soit  $A \rightarrow B$  un morphisme entre algèbres strictement  $k$ -affinoïdes, et soit  $B \simeq A\{T\}/(a_1, \dots, a_m)$  une présentation  $\{1\}$ -sympathique de  $B$  sur  $A$ . Si  $A$  est  $\{1\}$ -distinguée il existe  $b_1, \dots, b_\ell$  appartenant à  $A^\circ\{T\}$  tels que le morphisme*

$$q: \mathrm{Spf}(A^\circ\{T\}/(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_\ell)) \rightarrow \mathrm{Spf} A^\circ$$

possède les propriétés suivantes :

- (a) la fibre générique de  $q$  s'identifie à  $\mathcal{M}(B) \rightarrow \mathcal{M}(A)$ ;
- (b)  $q$  est plat;
- (c) le morphisme induit par  $q$  entre les fibres spéciales de ses source et but s'identifie à  $\mathrm{Spec} \tilde{A}[T]/(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m) \rightarrow \mathrm{Spec} \tilde{A}$ ;
- (d) les fibres de  $q$  sont géométriquement réduites;
- (e) les composantes irréductibles des fibres de  $q$  sont géométriquement irréductibles;
- (f) il existe un recouvrement ouvert fini  $(\Omega_i)$  de  $\mathrm{Spf}(A^\circ\{T\}/(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_\ell))$  tel que pour tout indice  $i$ , chaque fibre de  $q|_{\Omega_i}$  soit ou bien vide, ou bien une composante connexe de la fibre correspondante de  $q$ .

*Démonstration.* — Mentionnons tout d'abord que comme  $\Gamma = \{1\}$ , les réductions graduées sont ici les réductions usuelles; les applications ordinaires de réduction sont celles que nous notons  $a \mapsto \tilde{a}^1$ ; remarquons que l'on a  $\tilde{a}_i^1 = \tilde{a}_i$  pour tout  $i$  puisque  $a_i$  est de norme spectrale 1. On note  $D$  le polydisque unité relatif  $\mathcal{M}(A\{T\})$ .

La proposition 1.1 de [BL93a] assure qu'il existe une famille finie  $(b_1, \dots, b_\ell)$  d'éléments de  $A^\circ\{T\}$  telle que le quotient de  $A^\circ\{T\}/(a_1, \dots, a_m)$  par son idéal de  $k^\circ$ -torsion soit isomorphe au quotient  $A^\circ\{T\}/(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_\ell)$ . Nous allons montrer que cette famille  $(b_1, \dots, b_\ell)$  convient. Il suffit de s'assurer que (a), (b) et (c) sont vérifiées, car les assertions (d), (e), et (f) découleront alors de (c) et de la définition d'une présentation  $\{1\}$ -sympathique.

**3.4.1.** — Par construction, l'image de chacun des  $b_i$  dans  $A\{T\}/(a_1, \dots, a_m)$  est nulle (car de  $k^\circ$ -torsion). Par conséquent,  $A\{T\}/(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_\ell)$  s'identifie à  $B$ , d'où (a).

**3.4.2.** — Posons  $\mathfrak{B} = A^\circ\{T\}/(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_\ell)$ . On a

$$\mathfrak{B} \otimes_{A^\circ} \tilde{A} = \tilde{A}[T]/(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m, \tilde{b}_1^1, \dots, \tilde{b}_\ell^1).$$



Soit  $\xi \in \text{Spec } \tilde{A}$  et soit  $x$  un point de  $\mathcal{M}(A)$  se spécialisant en  $\xi$ . On a

$$\mathfrak{B} \hat{\otimes}_{A^\circ} \text{Spf } \mathcal{H}(x)^\circ = \mathcal{H}(x)^\circ \{T\} / (a_1|_{D_x}, \dots, a_m|_{D_x}, b_1|_{D_x}, \dots, b_\ell|_{D_x}).$$

Comme les  $(a_i|_{D_x})$  forment une famille fortement génératrice de l'idéal qu'ils engendrent dans  $\mathcal{H}(x)\{T\}$ , c'est une famille génératrice de l'intersection de cet idéal avec  $\mathcal{H}(x)^\circ \{T\}$ . Par conséquent, les  $b_i|_{D_x}$  appartiennent à l'idéal de  $\mathcal{H}(x)^\circ \{T\}$  engendré par les  $a_i|_{D_x}$ , si bien que l'image de  $\widetilde{b_i^1|_{D_x}}$  dans  $\widetilde{\mathcal{H}(x)[T]} / (\widetilde{a_1|_{D_x}}, \dots, \widetilde{a_m|_{D_x}})$  est nulle pour tout  $i$ . On en déduit que pour tout  $i$ , l'image de  $\widetilde{b_i^1}$  dans  $\tilde{A}[T] / (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m)$  s'annule en tout point de  $(\text{Spec } \tilde{A}[T] / (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m))_\xi$ . Ceci valant pour tout  $\xi \in \text{Spec } \tilde{A}$ , l'image de  $\widetilde{b_i^1}$  dans  $\tilde{A}[T] / (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m)$  est nilpotente. Or comme  $\text{Spec } \tilde{A}[T] / (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m) \rightarrow \text{Spec } \tilde{A}$  est plat et à fibres réduites, et comme  $\tilde{A}$  est réduite,  $\tilde{A}[T] / (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m)$  est réduite (combiner les propositions 6.4.1 et 6.5.3 de [EGA IV<sub>2</sub>]). Par conséquent, l'image de  $\widetilde{b_i^1}$  dans  $\tilde{A}[T] / (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m)$  est nulle pour tout  $i$ . Il vient

$$\mathfrak{B} \otimes_{A^\circ} \tilde{A} = \tilde{A}[T] / (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m).$$

La fibre spéciale du morphisme de schémas formels  $\text{Spf } \mathfrak{B} \rightarrow \text{Spf } A^\circ$  s'identifie donc à  $\text{Spec } \tilde{A}[T] / (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m) \rightarrow \text{Spec } \tilde{A}$ , d'où (c).

**3.4.3.** — Nous allons montrer que  $\mathfrak{B}$  est plat sur  $A^\circ$ , ce qui achèvera la démonstration de la proposition. En vertu du lemme 1.6 de [BL93a], il suffit de vérifier que pour tout  $\lambda$  non nul dans  $k^{\circ\circ}$ , la  $(A^\circ/\lambda A^\circ)$ -algèbre  $\mathfrak{B}/\lambda \mathfrak{B}$  est plate. Fixons donc un tel  $\lambda$ . Les  $k^\circ$ -algèbres  $A^\circ$  et  $\mathfrak{B}$  sont plates par construction ; par conséquent, les  $k^\circ/(\lambda)$ -algèbres de présentation finie  $A^\circ/\lambda A^\circ$  et  $\mathfrak{B}/\lambda \mathfrak{B}$  sont plates. Or  $k^\circ/(\lambda)$  est local et son idéal maximal  $k^{\circ\circ}/\lambda k^\circ$  est constitué d'éléments nilpotents. On déduit alors du théorème 11.3.10 de [EGA IV<sub>3</sub>] que pour que  $\mathfrak{B}/\lambda \mathfrak{B}$  soit plat sur  $A^\circ/\lambda A^\circ$ , il suffit que  $\mathfrak{B}/k^{\circ\circ} \mathfrak{B} = \tilde{A}[T] / (\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m)$  soit plat sur  $A^\circ/k^{\circ\circ} = \tilde{A}$ , ce qui est le cas par hypothèse (l'égalité  $A^\circ/k^{\circ\circ} = \tilde{A}$  est une conséquence immédiate du caractère  $\{1\}$ -distingué de  $A$ ).  $\square$

**3.5. Théorème.** — *Supposons que  $\Gamma$  est divisible. Soit  $Y \rightarrow X$  un morphisme entre espaces  $k$ -affinoïdes  $\Gamma$ -stricts, supposé plat et à fibres géométriquement réduites. Il existe une famille finie  $(X_i \rightarrow X)$  de morphismes dont les images recouvrent  $X$  et telle que pour tout  $i$ , les conditions suivantes soient satisfaites :*

- ◇ l'espace  $X_i$  est affinoïde et  $\Gamma$ -strict ;
- ◇ le morphisme  $X_i \rightarrow X$  possède une factorisation  $X_i \rightarrow X'_i \rightarrow X$  où  $X'_i$  est affinoïde et  $\Gamma$ -strict, où  $X_i \rightarrow X'_i$  est fini, radiciel et plat et où  $X'_i \rightarrow X$  est quasi-étale ;
- ◇ si on a de plus  $|\mathcal{H}(x)^\times| \neq \{1\}$  pour tout  $x \in X$  (c'est notamment le cas dès que la valuation de  $k$  est non triviale) alors  $X_i \rightarrow X$  est quasi-étale ;
- ◇ le morphisme  $Y \times_X X_i \rightarrow X_i$  possède une présentation  $\Gamma$ -sympathique.

**3.6. Remarque.** — L'hypothèse que  $\Gamma$  est divisible n'est pas très contraignante. En effet, supposons donné un morphisme  $Y \rightarrow X$  entre espaces affinoïdes  $\Gamma$ -stricts, plat et

à fibres réduites, mais sans hypothèse sur  $\Gamma$ . Comme les espaces  $X$  et  $Y$  sont  $\Gamma$ -stricts, ils sont  $\Gamma^{\mathcal{Q}}$ -stricts, et le théorème ci-dessus peut alors être appliqué en remplaçant  $\Gamma$  par  $\Gamma^{\mathcal{Q}}$ .

*Démonstration du théorème 3.5.* — L'assertion à prouver est locale sur  $X$ ; il suffit donc de montrer qu'elle vaut au-dessus d'un voisinage affinoïde  $\Gamma$ -strict convenable d'un point  $x$  donné sur  $X$ . On note  $A$  et  $B$  les algèbres de fonctions analytiques respectives de  $X$  et  $Y$ , et l'on pose  $C = B \hat{\otimes}_A \mathcal{H}(x)$ .

**3.6.1.** — Puisque  $C$  est géométriquement réduite par hypothèse, le théorème 2.28 assure qu'il existe une extension finie  $E$  de  $\mathcal{H}(x)$ , séparable si  $\mathcal{H}(x)$  n'est pas trivialement valué, telle que  $C_E$  soit universellement  $\Gamma$ -distinguée. Choisissons une surjection  $v: E\{T_1/r_1, \dots, T_n/r_n\} \rightarrow C_E$  universellement distinguée avec les  $r_i$  appartenant à  $\Gamma$ . Pour tout  $i$ , on pose  $f_i = v(T_i)$ ; on peut supposer que  $\|f_i\| = r_i$  quel que soit  $i$  (remarque 2.18).

Soit  $|\cdot|$  une valuation appartenant à la réduction  $(\widetilde{X}, x)$  du germe  $(X, x)$ . Choisissons un prolongement de  $|\cdot|$  à  $\widetilde{E}$ , encore noté  $|\cdot|$ ; suivant nos conventions générales en matière de corps valués, l'anneau de la valuation  $|\cdot|$  de  $\widetilde{E}$  sera noté  $\widetilde{E}^\circ$ . Notons que  $\widetilde{E}$  est de degré de transcendance fini sur  $\tilde{k}$ ; par conséquent, la hauteur de  $|\cdot|$  est finie.

Soit  $B$  l'image de  $\widetilde{B}$  dans  $\widetilde{C}_E$ . La  $\widetilde{E}$ -algèbre  $\widetilde{C}_E$  est entière sur  $\widetilde{E} \cdot B$  (cela se prouve de la même manière que les assertions (iv) et (v) de [Tem04], Prop. 3.1). Il existe donc une famille finie  $\beta_1, \dots, \beta_\ell$  d'éléments de  $\widetilde{C}_E$ , entiers sur  $\widetilde{E}^\circ \cdot B$ , et qui engendrent  $\widetilde{C}_E$  comme  $\widetilde{E}$ -algèbre. Quitte à agrandir la famille  $(\beta_i)$ , on peut supposer qu'elle contient une famille génératrice de  $B$  comme  $\tilde{k}$ -algèbre. Puisque  $C_E$  est universellement distinguée, la  $\widetilde{E}$ -algèbre  $\widetilde{C}_E$  est géométriquement réduite (et  $\widetilde{C}_\Lambda = (\widetilde{C}_E)_{\widetilde{\Lambda}}$  pour toute extension complète  $\Lambda$  de  $E$ ). D'après la version graduée et valuée du théorème de la fibre réduite (corollaire 1.26), il existe une extension valuée finie  $L$  de  $\widetilde{E}$  telle que le normalisé faible  $R$  de la  $L^\circ$ -algèbre  $L^\circ[\beta_1, \dots, \beta_\ell]$  soit fini sur  $L^\circ[\beta_1, \dots, \beta_\ell]$ , telle que les fibres de  $\text{Spec } R \rightarrow \text{Spec } L^\circ$  soient géométriquement réduites et à composantes irréductibles géométriquement irréductibles, et telle que  $R_{\Lambda^\circ}$  soit le normalisé faible de  $\Lambda^\circ[\beta_1, \dots, \beta_\ell]$  pour toute extension valuée  $\Lambda$  de  $\widetilde{L}$ . Quitte à remplacer  $E$  par une extension finie convenable (et même finie séparable si la valuation de  $\mathcal{H}(x)$  n'est pas triviale) on peut supposer que  $L = \widetilde{E}$ . La  $\widetilde{E}^\circ$ -algèbre  $R$  possède dès lors les propriétés suivantes :

- ◊ elle est de type fini et  $\widetilde{E} \cdot R = \widetilde{C}_E$ ;
- ◊ elle contient  $B$  et est finie sur  $\widetilde{E}^\circ \cdot B$ ;
- ◊ le morphisme  $\text{Spec } R \rightarrow \text{Spec } \widetilde{E}^\circ$  est plat à fibres géométriquement réduites, et les composantes irréductibles de ses fibres sont géométriquement irréductibles.

**3.6.2.** — Pour tout  $i$  compris entre 1 et  $n$ , la réduction  $\tilde{f}_i$  est un élément non nul de  $\widetilde{C}_E$ . Il existe un élément  $\lambda_i$  non nul de  $\widetilde{E}^\circ$  tel que  $\lambda_i \tilde{f}_i$  appartienne à  $R$ . Relevons  $\lambda_i$  en un élément  $\ell_i$  de  $E$  de valeur absolue  $\mathfrak{d}(\lambda_i)$ . Le morphisme

$$v: E\{T_1/r_1, \dots, T_n/r_n\} \rightarrow C_E, T_i \mapsto f_i$$

étant une surjection universellement distinguée il en va de même de

$$E\{T_1/|\ell_1| \cdot r_1, \dots, T_n/|\ell_n| \cdot r_n\} \rightarrow C_E, T_i \mapsto \ell_i f_i.$$

On peut donc se ramener au cas où chacune des  $\tilde{f}_i$  appartient à  $R$ .

Soit  $\alpha_1, \dots, \alpha_p$  une famille d'éléments non nuls de l'annéloïde  $R$  telle que les  $\tilde{f}_i$  et les  $\alpha_i$  engendrent  $R$  comme  $\tilde{E}^\circ$ -algèbre. Fixons  $i$  entre 1 et  $p$ .

Pour tout  $i$ , relevons  $\alpha_i$  en un élément  $a_i$  de  $C_E$  de norme spectrale égale à  $\mathfrak{d}(\alpha_i)$ . Le morphisme

$$E\{T_1/r_1, \dots, T_n/r_n, T_{n+1}/\mathfrak{d}(\alpha_1), \dots, T_{n+p}/\mathfrak{d}(\alpha_p)\} \rightarrow C_E, \begin{cases} T_i & \mapsto f_i \text{ si } i \leq n \\ T_i & \mapsto a_{i-n} \text{ sinon} \end{cases}$$

est encore une surjection universellement distinguée. En concaténant la famille des  $f_i$  et celle des  $a_i$  et en renumérotant, on se ramène finalement au cas où  $(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n)$  est une famille génératrice de  $R$  comme  $\tilde{E}^\circ$ -algèbre.

**3.6.3.** — Nous allons maintenant montrer l'existence d'un espace affinoïde  $\Gamma$ -strict  $X'$  muni d'un morphisme  $X' \rightarrow X$  et qui possède les propriétés suivantes :

- ◊ le point  $x$  possède un unique antécédent  $x'$  sur  $X'$ , et  $\mathcal{H}(x') \simeq_{\mathcal{H}(x)} E$ ;
- ◊ le morphisme  $X' \rightarrow X$  admet une factorisation  $X' \rightarrow X'' \rightarrow X_0$  où :
  - $X_0$  est un voisinage affinoïde  $\Gamma$ -strict de  $x$  dans  $X$ ;
  - $X'' \rightarrow X_0$  est fini étale;
  - $X' = X''$  si  $|\mathcal{H}(x)^\times| \neq \{1\}$ , et  $X' \rightarrow X''$  est fini, radiciel et plat sinon.

**3.6.3.1.** *Le cas où  $|\mathcal{H}(x)^\times| \neq \{1\}$ .* — Dans ce cas  $E$  est séparable sur  $\mathcal{H}(x)$  et il résulte du théorème 4.4.1 de [Ber93] que l'extension  $\mathcal{H}(x) \hookrightarrow E$  est induite par un morphisme étale  $(X', x') \rightarrow (X, x)$  de germes d'espaces  $k$ -analytiques, d'où notre assertion.

**3.6.3.2.** *Le cas où  $|\mathcal{H}(x)^\times| = 1$ .* — Le corps  $\mathcal{H}(x)$  n'est alors autre que le corps résiduel  $\kappa(x)$  de  $\mathcal{O}_{X,x}$ . En dévissant l'extension  $E$  en ses parties séparable et radicielle on obtient l'existence d'une  $\mathcal{O}_{X,x}$ -algèbre locale, finie et étale  $E_1$  et d'une  $E_1$ -algèbre locale, finie, radicielle et plate  $E_2$  telles que  $E_2 \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \kappa(x) = E$ . Il existe, là encore par le théorème 4.4.1 de [Ber93], un voisinage affinoïde  $\Gamma$ -strict  $X_0$  de  $x$  dans  $X$  tel que  $E_1$  soit induite par une  $\mathcal{O}_X(X_0)$ -algèbre finie étale; si  $X''$  désigne l'espace affinoïde correspondant le point  $x$  a un unique antécédent  $x''$  sur  $X''$  et  $E_1 = \mathcal{O}_{X'',x''}$ . Il existe un voisinage affinoïde  $\Gamma$ -strict  $X_0''$  de  $x''$  dans  $X''$  tel que  $E_2$  soit induite par une  $\mathcal{O}_{X''}(X_0'')$ -algèbre finie, radicielle et plate; si  $X'$  désigne l'espace affinoïde correspondant le point  $x''$  a un unique antécédent  $x'$  sur  $X'$  et  $E_2 = \mathcal{O}_{X',x'}$ . Quitte à restreindre  $X_0$  et  $X''$  on peut supposer que  $X_0'' = X_0$ , et le morphisme  $X' \rightarrow X$  possède alors les propriétés requises.

**3.6.3.3.** *Choix de fonctions prolongeables à  $X'$ .* — Quitte à restreindre  $X_0, X''$  et  $X'$  on peut supposer par approximation que la fonction  $f_i$  provient pour tout  $i$  d'une fonction analytique sur  $Y' := Y \times_X X'$ , notée  $\varphi_i$ . Il suffit en effet de s'assurer que les propriétés qu'on impose aux  $f_i$  sont stables par petites perturbations. Or c'est évident en ce qui concerne les propriétés résiduelles, et en ce qui concerne le caractère

universellement distingué du morphisme  $v: E\{T_1/r_1, \dots, T_n/r_n\} \rightarrow C_E$ ,  $T_i \mapsto f_i$  c'est une conséquence de 2.17.

**3.6.4. Simplification du problème.** — Il suffit maintenant de montrer l'existence d'un domaine affinoïde  $\Gamma$ -strict  $V$  de  $X'$  contenant  $x'$ , tel que  $(\widetilde{V}, x')$  contienne la valuation  $|\cdot|$  de  $\widetilde{\mathcal{H}}(x') = \widetilde{E}$ , et tel que  $Y' \times_{X'} V = Y \times_X V$  possède une présentation  $\Gamma$ -sympathique sur  $V$ .

Supposons en effet avoir exhibé un tel domaine. La preuve du lemme 2.4 de [Duc03] (théorème de Gerritzen-Grauert dans le cas non nécessairement strict) assure que  $V$  est une union finie de domaines rationnels dont la définition ne fait intervenir que des scalaires appartenant à  $\Gamma$ ; on peut donc supposer que  $V$  est un tel domaine. Dans ce cas c'est l'image réciproque d'un domaine affinoïde  $\Gamma$ -strict  $V_0$  de  $X''$  (si  $|\mathcal{H}(x)^\times| \neq \{1\}$  alors  $X' \simeq X''$  et il n'y a rien à faire; sinon il suffit d'élever les inégalités définissant  $V$  dans  $X'$  à une puissance convenable de l'exposant caractéristique de  $k$ ). Le morphisme  $V \rightarrow X$  admet donc une factorisation  $V \rightarrow V_0 \rightarrow X$  où  $V_0$  est affinoïde et  $\Gamma$ -strict, où  $V_0 \rightarrow X$  est quasi-étale et où  $V \rightarrow V_0$  est fini, radiciel et plat, et est un isomorphisme si  $|\mathcal{H}(x)^\times| \neq \{1\}$ .

Comme  $V$  est plat sur  $X$  et comme  $V$  est  $\Gamma$ -strict l'image de ce morphisme est un domaine analytique compact  $\Gamma$ -strict  $U$  de  $X$  contenant  $x$ . La réduction  $(\widetilde{U}, x)$  contient par functorialité la valuation  $|\cdot|$  de  $\widetilde{\mathcal{H}}(x)$ .

Le point  $x$  et la valuation  $|\cdot| \in (\widetilde{X}, x)$  ayant été choisis arbitrairement, il s'ensuit en vertu de la quasi-compacité des réductions de germes et de la compacité de  $X$  qu'il existe une famille couvrante de  $X$  possédant les propriétés requises.

**3.6.5.** — Nous allons donc désormais chercher à exhiber un domaine  $V$  comme au 3.6.4. On remplace  $X$  par  $X'$ , etc. ce qui permet de supposer à partir de maintenant que  $X' = X, x' = x, Y' = Y$  et  $E = \mathcal{H}(x)$ . Notons  $\mathcal{V}$  l'ensemble des domaines affinoïdes  $\Gamma$ -stricts de  $X$  contenant  $x$  et tels que  $(\widetilde{V}, x)$  contienne  $|\cdot|$ . Notre but est de construire un domaine appartenant à  $\mathcal{V}$  au-dessus duquel  $Y$  possède une présentation  $\Gamma$ -sympathique. Nous rédigerons le raisonnement comme suit : nous «restreindrons»  $X$  de façon répétée, ce qui voudra dire par convention que nous le remplaçons par un élément bien choisi de  $\mathcal{V}$ ; lorsqu'il arrivera qu'il suffise de remplacer  $X$  par un voisinage  $\Gamma$ -strict de  $x$  dans  $X$ , nous dirons que nous restreignons  $X$  autour de  $x$ ; et nous montrerons à la fin que  $Y$  possède une présentation sympathique sur  $X$ .

**3.6.5.1.** — Soit  $h$  la hauteur de  $|\cdot|$ . On note  $\tau_0, \dots, \tau_h$  les points de  $\text{Spec } \widetilde{\mathcal{H}}(x)^\circ$ , numérotés de sorte que  $\tau_{i+1}$  soit une spécialisation de  $\tau_i$  pour tout  $i$  entre 0 et  $h-1$ ; le point  $\tau_0$  est donc le point générique de  $\text{Spec } \widetilde{\mathcal{H}}(x)^\circ$ , et  $\tau_h$  est son point fermé. Pour tout  $i$  compris entre 0 et  $h-1$  on choisit un élément  $\nu_i$  de  $\widetilde{\mathcal{H}}(x)^\circ$  s'annulant en  $\tau_{i+1}$  mais pas en  $\tau_i$ , et on pose  $\nu_h = 1$ . Le lieu d'inversibilité  $D(\nu_i)$  de  $\nu_i$  sur  $\text{Spec } \widetilde{\mathcal{H}}(x)^\circ$  est exactement  $\{\tau_j\}_{i \geq j \geq 0}$ ; on fixe une fonction  $\theta_i \in \mathcal{O}_{X,x}$  telle que  $|\theta_i(x)| \in \Gamma$  et  $\theta_i(x) = \nu_i$ ; on restreint  $X$  autour de  $x$  de sorte que  $\theta_i \in A$  pour tout  $i$ ; on suppose par ailleurs que  $\theta_h = 1$ .

**3.6.5.2.** — Pour tout  $V \in \mathcal{V}$  nous noterons  $A_V$  et  $B_V$  les algèbres de fonctions analytiques respectives de  $V$  et  $Y \times_X V$ ; nous désignerons par  $\widetilde{A}_V$  l'image de  $\widetilde{A}_V$  dans  $\widetilde{\mathcal{H}}(x)$ , et par  $\widetilde{B}_V$  celle de  $\widetilde{B}_V$  dans  $\widetilde{\mathcal{C}}$ ; remarquons que  $\mathbf{B}_X$  est ce que nous notons simplement  $\mathbf{B}$ , et nous écrirons de même  $\mathbf{A}$  au lieu de  $\mathbf{A}_X$ . Pour tout espace affinoïde  $Z$  nous désignerons par  $\|\cdot\|_Z$  la semi-norme spectrale de l'anneau des fonctions analytiques sur  $Z$  (et le cas échéant nous écrirons  $\|a\|_Z$  plutôt que  $\|a\|_Z$ ).

Soit  $V \in \mathcal{V}$ . Par construction,  $(\widetilde{V}, x) = \mathbf{P}_{\widetilde{\mathcal{H}}(x)/\widetilde{k}}\{\mathbf{A}_V\}$ ; en particulier,  $\widetilde{\mathcal{H}}(x)^\circ \supset \mathbf{A}_V$ .

Réciproquement soit  $\theta$  un élément de  $\mathcal{O}_{X,x}^\times$  tel que  $|\theta(x)| \in \Gamma$  et  $\widetilde{\theta}(x) \in \widetilde{\mathcal{H}}(x)^\circ$ , et soit  $W$  un voisinage affinoïde  $\Gamma$ -strict de  $x$  dans  $X$  sur lequel  $\theta$  est définie.

Soit  $V$  le domaine affinoïde  $\Gamma$ -strict de  $W$  défini par l'inégalité  $|\theta| \leq |\theta(x)|$ ; le domaine  $V$  contient  $x$ , et  $\|\theta\|_V = |\theta(x)|$  par construction. On a

$$(\widetilde{V}, x) = (\widetilde{X}, x) \cap \mathbf{P}_{\widetilde{\mathcal{H}}(x)/\widetilde{k}}\{\widetilde{\theta}(x)\}$$

et  $(\widetilde{V}, x)$  contient par conséquent  $|\cdot|$ , si bien que  $V \in \mathcal{V}$ . L'égalité  $\|\theta\|_V = |\theta(x)|$  assure que l'image de l'élément  $\widetilde{\theta}$  de  $\widetilde{A}_V$  dans  $\widetilde{\mathcal{H}}(x)$  est alors égale à  $\theta(x)$ , et ce dernier appartient par conséquent à  $\mathbf{A}_V$ .

On déduit de ce qui précède que  $\widetilde{\mathcal{H}}(x)^\circ$  est la réunion filtrante des  $\mathbf{A}_V$  pour  $V$  parcourant  $\mathcal{V}$ .

**3.6.5.3.** — Il résulte de 3.6.5.2 qu'on peut restreindre  $X$  de sorte que  $\|\theta_i\|_X = |\theta_i(x)|$  pour tout  $i$ . Pour tout  $V \in \mathcal{V}$ , notons  $V_i$  le domaine affinoïde  $\Gamma$ -strict de  $V$  défini par l'égalité  $|\theta_i| = |\theta_i(x)|$  (remarquons que comme  $\theta_h = 1$  tout domaine  $V$  appartenant à  $\mathcal{V}$  vérifie  $\|\theta_h\|_V = |\theta_h(x)|$ , et on a alors  $V_h = V$ ). L'image de l'élément  $\widetilde{\theta}_i$  de  $\widetilde{A}_V$  dans  $\widetilde{\mathcal{H}}(x)$  est alors égale à  $\nu_i$  (qui appartient donc à  $\mathbf{A}_V$ ) et l'annéloïde  $\widetilde{A}_{V_i}$  s'identifie à  $\widetilde{A}_V[\frac{1}{\theta_i}]$ . Il vient  $\mathbf{A}_{V_i} = \mathbf{A}_V[\frac{1}{\nu_i}]$ .

L'annéloïde de valuation  $\mathcal{O}_{\text{Spec } \widetilde{\mathcal{H}}(x)^\circ, \tau_i}$  est égal à  $\widetilde{\mathcal{H}}(x)^\circ[\frac{1}{\nu_i}]$ . Il peut en conséquence s'écrire comme la réunion filtrante des  $\mathbf{A}_V[\frac{1}{\nu_i}] = \mathbf{A}_{V_i}$  pour  $V$  parcourant  $\mathcal{V}$ .

**3.6.6.** — Par construction, les  $\widetilde{f}_i$  engendrent  $R$ , et ils sont en particulier entiers sur  $\widetilde{\mathcal{H}}(x)^\circ \cdot \mathbf{B}$ ; et par ailleurs  $R$  contient  $\mathbf{B}$ , qui est de type fini sur  $\widetilde{k}$ . En vertu de 3.6.5.2, il existe par conséquent  $V \in \mathcal{V}$  tel que les  $\widetilde{f}_i$  soient entiers sur  $\mathbf{A}_V \cdot \mathbf{B} \subset \mathbf{B}_V$  et tels que  $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}_V[\widetilde{f}_1, \dots, \widetilde{f}_n]$ . On peut donc restreindre  $X$  de sorte que les  $\widetilde{f}_i$  soient entiers sur  $\mathbf{B}$  et que  $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}[\widetilde{f}_1, \dots, \widetilde{f}_n]$ .

**3.6.7.** — Nous allons maintenant établir un résultat général que nous appliquerons à plusieurs reprises dans la suite. Soit  $W \in \mathcal{V}$  et soit  $\chi$  une fonction analytique sur  $Y_W$ . On pose  $h = \chi|_{Y_x}$  et on suppose que  $\rho := \|h\|_{Y_x}$  est un élément de  $\Gamma$ .

**3.6.7.1.** — Supposons que  $\widetilde{h}$  appartient à  $R$ . Nous allons montrer qu'il existe un élément  $V$  de  $\mathcal{V}$  contenu dans  $W$  et tel que  $\|\chi\|_{Y_V} = \rho$  (il suffit pour que ce soit le cas que  $\|\chi\|_{Y_V}$  soit majorée par  $\rho$ , puisque  $\|\chi\|_{Y_x} = \|h\|_{Y_x} = \rho$ ).

Comme  $\widetilde{h}$  appartient à  $R$ , elle est entière sur  $\mathbf{B} \cdot \widetilde{\mathcal{H}}(x)^\circ$ . Il existe donc  $V \in \mathcal{V}$  tel que  $V \subset W$  et tel que  $\widetilde{h}$  soit entière sur  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}_V \subset \mathbf{B}_V$ . Il existe par conséquent un

entier  $N > 0$ , un sous-ensemble  $I$  de  $\{0, \dots, N-1\}$  et une famille  $(b_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $B_V$  possédant les propriétés suivantes :

- ◇ pour tout  $i \in I$  on a  $\|b_i\|_{Y_V} = \|b_i\|_{Y_x} = \rho^{N-i}$ .
- ◇  $|h^N + \sum_{i \in I} (b_i|_{Y_x})h^i| < \rho^N$  sur tout  $Y_x$ .

On a alors  $|h^N + \sum_{i \in I} b_i \chi^i| < \rho^N$  au-dessus d'un voisinage de  $x$  dans  $V$  (par propriété topologique de  $Y \rightarrow X$ ). Quitte à restreindre  $V$  autour de  $x$ , on peut donc supposer que  $|\chi^N + \sum_{i \in I} b_i \chi^i| < \rho^N$  sur tout  $Y_V$ . Ceci entraîne que  $|\chi| \leq \rho$  en tout point de  $Y_V$  : en effet s'il existait  $z \in Y_V$  tel que  $|\chi(z)| > \rho$  on aurait pour tout  $i \in I$  l'inégalité  $\rho^N > |b_i(z)|\rho^i$  car  $|b_i| \leq \rho^{N-i}$  sur tout  $Y_V$  ; mais ceci impliquerait que  $|\chi^N(z) + \sum_{i \in I} b_i \chi^i(z)| = \rho^N$ , ce qui est absurde.

**3.6.7.2.** — On suppose toujours que  $\tilde{h}$  appartient à  $R$ . Soit  $i$  un entier compris entre 0 et  $h$  tel que l'ouvert  $D(\tilde{h})$  de  $\text{Spec } R$  rencontre  $(\text{Spec } R)_{\tau_i}$ . Soit  $t$  un point maximal de  $(\text{Spec } R)_{\tau_i}$  situé sur  $D(\tilde{h})$ , et soit  $d$  la dimension de  $\overline{\{t\}}_{\tau_i}$ . Le paragraphe 3.6.7.1 assure qu'il existe un domaine  $V \in \mathcal{V}$  contenu dans  $W$  tel que  $\|\chi\|_{Y_V} = \rho$ . Nous allons montrer qu'on peut choisir un tel  $V$  en imposant de surcroît que pour tout  $z \in V_i$  il existe un domaine affinoïde  $\Gamma$ -strict de  $Y_z$ , non vide et purement de dimension  $d$ , sur lequel  $|\chi|$  prend la valeur  $\rho$ .

Commençons par restreindre  $X$  de sorte que  $\chi$  soit défini sur  $Y$  tout entier (autrement dit,  $W = X$ ) et que l'on ait  $\|\chi\|_Y = \rho$ , ce qui est possible d'après 3.6.7.1. Il résulte du corollaire 1.20 qu'il existe un voisinage ouvert de  $t$  dans  $\text{Spec } R$  purement de dimension relative  $d$  sur  $\text{Spec } \widehat{\mathcal{H}}(x)$  ; on peut toujours supposer ce voisinage de la forme  $D(\alpha)$  pour un certain  $\alpha$  non nul de  $R$ , dont on note  $\rho'$  le degré ; quitte à restreindre  $X$  autour de  $x$ , on peut supposer que  $\alpha = a|_{Y_x}$  pour une certaine fonction analytique  $a$  sur  $Y$  telle que  $\|a\|_{Y_x} = \rho'$ .

En vertu de 3.6.7.1, on peut restreindre  $X$  de sorte que  $\|a\|_Y = \rho'$ . Soit  $Y'$  le domaine affinoïde de  $Y$  défini par l'égalité  $|a| = \rho'$ . La fibre  $Y'_x$  a pour réduction  $D(\alpha)_{\tau_0}$ , qui est purement de dimension  $d$  par hypothèse. Il s'ensuit que  $Y'_x$  est purement de dimension  $d$  (lemme A.1). Le morphisme  $Y' \rightarrow X$  est plat, et ses fibres sont géométriquement réduites ; elles sont en particulier réduites, et satisfont *a fortiori* la propriété  $(S_1)$ . Il découle alors du théorème A.2 et de la propriété topologique de  $Y' \rightarrow X$  que quitte à restreindre  $X$  autour de  $x$ , on peut supposer que les fibres de  $Y' \rightarrow X$  sont purement de dimension  $d$ .

Nous allons montrer qu'il existe un élément  $V$  de  $\mathcal{V}$  tel que pour tout  $z \in V_i$ , la fonction  $|a\chi|$  prenne la valeur  $\rho\rho'$  sur  $Y_z$  ; compte-tenu du fait que  $\|\chi\|_Y = \rho$  et  $\|a\|_Y = \rho'$ , cela signifie qu'il existe un point de  $Y_z$  en lequel  $|\chi| = \rho$  et  $|a| = \rho'$ , c'est-à-dire encore qu'il existe un point de  $Y_z$  en lequel  $|\chi| = \rho$  et qui est situé sur le domaine affinoïde  $\Gamma$ -strict  $Y'_z$  de  $Y_z$ , lequel est purement de dimension  $d$ .

Pour alléger les notations, on peut remplacer  $\chi$  par  $a\chi$  et  $\rho$  par  $\rho'\rho$  (et bien sûr  $h$  par  $(a|_{Y_x})h$ ) ; il s'agit alors maintenant simplement de montrer qu'il existe un élément  $V$  de  $\mathcal{V}$  tel que pour tout  $z \in V_i$ , la fonction  $|\chi|$  prenne la valeur  $\rho$  sur  $Y_z$ , c'est-à-dire encore, compte-tenu du fait que  $\|\chi\|_Y = \rho$ , tel que  $\|\chi\|_{Y_z} = \rho$  pour tout  $z \in V_i$ . Après ces substitutions, la fonction  $\tilde{h}$  est encore inversible en le point (maximal)  $t$  de la fibre  $(\text{Spec } R)_{\tau_i}$ .

Notons  $|\cdot|^\star$  la valuation de  $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$  d'annéloïde  $\mathcal{O}_{\text{Spec } \widetilde{\mathcal{H}(x)}^\circ, \tau_i}$ . Le morphisme  $\text{Spec } R \rightarrow \text{Spec } \widetilde{\mathcal{H}(x)}^\circ$  est plat et donc générisant; il existe par conséquent un point  $t'$  de  $(\text{Spec } R)_{\tau_0}$  qui se spécialise en  $t$ . Soit  $y$  un point de  $Y_x$  dont l'image sur  $\widetilde{Y}_x$  est égale à  $t'$ . Choisissons une valuation de  $\kappa(t')$  dont l'annéloïde domine  $\mathcal{O}_{\{t'\}, t'}$ , et prolongeons-la arbitrairement en une valuation de  $\widetilde{\mathcal{H}(y)}$ ; celle-ci induit la valuation  $|\cdot|^\star$  sur  $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$  et on la note encore  $|\cdot|^\star$ . Par construction, l'annéloïde de  $|\cdot|^\star$  dans  $\widetilde{\mathcal{H}(y)}$  contient l'image de  $R$ , et en particulier l'image de  $\widetilde{\mathcal{H}(x)}^\circ \cdot \mathbf{B}$ , et *a fortiori* celle de  $\mathbf{B}$ ; il s'ensuit que  $|\cdot|^\star \in (\widetilde{Y}, y)$ . Notons également que comme  $\tilde{h}$  est inversible en  $t$  on a  $|\tilde{h}(t')|^\star = 1$ . Ceci entraîne que  $|h(y)| = \rho$  et que  $|\tilde{h}(y)|^\star = 1$ .

Soit  $\Omega$  le domaine affinoïde  $\Gamma$ -strict de  $Y$  défini par l'égalité  $|\chi| = \rho$ . Par définition de  $\Omega$  on a  $(\widetilde{\Omega}, y) = (\widetilde{Y}, y) \cap \mathbf{P}_{\widetilde{\mathcal{H}(y)}/\tilde{k}}\{\tilde{h}(y), \tilde{h}(y)^{-1}\}$ ; en particulier,  $(\widetilde{\Omega}, y)$  contient  $|\cdot|^\star$ .

Par platitude, l'image de  $\Omega$  sur  $X$  est un domaine analytique  $\Gamma$ -strict et compact  $U$  de  $X$ , qui contient  $x$ . Par functorialité,  $(\widetilde{U}, x)$  contient la valuation  $|\cdot|^\star$  de  $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ . L'annéloïde  $\mathbf{A}_U$  est donc contenu dans  $\mathcal{O}_{\text{Spec } \widetilde{\mathcal{H}(x)}^\circ, \tau_i}$ , et il existe de ce fait un élément  $V$  de  $\mathcal{V}$  tel que  $\mathbf{A}_U \subset \mathbf{A}_{V_i}$ . Cette dernière inclusion assure que  $(\widetilde{V}_i, x)$  est contenu dans  $(\widetilde{U}, x)$ . Il existe donc un voisinage affinoïde  $\Gamma$ -strict  $X'$  de  $x$  dans  $X$  tel que  $X' \cap V_i \subset U$ . Quitte à remplacer  $V$  par  $V \cap X'$  on peut supposer que  $V_i \subset U$ ; par définition de  $U$  il existe alors pour tout point  $z$  de  $V_i$  un point de  $Y_z$  en lequel  $|\chi| = \rho$ . Il s'ensuit que  $V$  satisfait aux conditions requises.

**3.6.8.** — En vertu de 3.6.7.1 on peut restreindre  $X$  de sorte que  $\|\varphi_i\|_Y = r_i$  pour tout  $i$  (les  $\varphi_i$  ont été définies en 3.6.3.3).

Notons  $D = \mathcal{M}(A\{T_1/r_1, \dots, T_n/r_n\})$  le  $k$ -polydisque fermé relatif de polyrayon  $(r_1, \dots, r_n)$  sur  $X$ . Soit  $\pi: Y \rightarrow D$  le morphisme défini par le  $n$ -uplet  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ . Par construction, la restriction  $\pi|_{Y_x}: Y_x \rightarrow D_x$  est une immersion fermée.

Soit  $y \in Y_x$ ; posons  $z = \pi(y)$ . Soit  $J$  l'ensemble des indices  $i$  tels que  $|T_i(z)| = r_i$ ; c'est aussi l'ensemble des indices  $i$  tels que  $|f_i(y)| = r_i$ , c'est-à-dire aussi celui des indices  $i$  tel que  $\tilde{f}_i(\tilde{y}) \neq 0$ , en désignant par  $\tilde{y}$  l'image de  $y$  sur  $\widetilde{Y}_x$ . Le corpoïde  $\widetilde{\mathcal{H}(z)}$  est une extension de  $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$  et

$$(\widetilde{D}, z) = \mathbf{P}_{\widetilde{\mathcal{H}(z)}/\tilde{k}}\{\mathbf{A} \cup \{T_i(z)\}_{i \in J}\}.$$

L'image réciproque  $\mathcal{U}$  de  $(\widetilde{D}, z)$  sur  $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathcal{H}(y)}/\tilde{k}}$  est donc égale à

$$\mathbf{P}_{\widetilde{\mathcal{H}(y)}/\tilde{k}}\{\mathbf{A} \cup \{f_i(y)\}_{i \in J}\}.$$

Le sous-annéloïde de  $\widetilde{\mathcal{H}(y)}$  engendré par  $\mathbf{A}$  et les  $f_i(y)$  pour  $i \in J$  est celui engendré par  $\mathbf{A}$  et les  $\tilde{f}_i(\tilde{y})$  pour  $i$  variant entre 1 et  $n$ , c'est-à-dire par l'image de l'annéloïde  $\mathbf{A}[\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n]$  de  $\tilde{C}$ . Puisque  $\mathbf{A}[\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n]$  contient  $\mathbf{B}$  et est entier sur celui-ci, l'ouvert  $\mathcal{U}$  est égal à  $\mathbf{P}_{\widetilde{\mathcal{H}(y)}/\tilde{k}}\{\mathbf{B}\}$ , c'est-à-dire à  $(\widetilde{Y}, y)$ ; en conséquence,  $\pi$  est sans bord en  $y$ . Ceci valant pour tout  $y \in Y_x$  il en résulte par propriété topologique qu'il existe un ouvert  $X'$  de  $X$  contenant  $x$  tel que  $Y_{X'} \rightarrow D_{X'}$  soit sans bord. Quitte à remplacer

$X$  par un voisinage affinoïde  $\Gamma$ -strict de  $x$  dans  $X'$ , on peut donc supposer que  $\pi$  est sans bord. Puisque  $Y$  et  $D$  sont affinoïdes, cela entraîne que  $\pi$  est fini.

Comme  $\pi|_{Y_x}$  est une immersion fermée, la restriction du morphisme canonique  $\mathcal{O}_D \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_Y$  à la fibre  $D_x$  est surjective. On en déduit que  $\mathcal{O}_D \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_Y$  est surjectif au voisinage de  $D_x$  dans  $D$  (c'est une conséquence du lemme de Nakayama, voir [Duc18], 2.5.4). Par propriété topologique on peut encore restreindre  $X$  autour de  $x$  de sorte que  $\mathcal{O}_D \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_Y$  soit surjective, ce qui signifie que  $\pi$  est une immersion fermée.

**3.6.9.** — Soit  $I$  le noyau du morphisme surjectif  $A\{T/r\} \rightarrow B$ . Remarquons que  $I\mathcal{H}(x)\{T/r\}$  est le noyau de la surjection distinguée  $v: \mathcal{H}(x)\{T/r\} \rightarrow C, T_i \mapsto f_i$ ; nous noterons  $\tilde{v}: \widehat{\mathcal{H}(x)}[r\backslash T] \rightarrow \tilde{C}$  la surjection induite. Comme les  $\tilde{f}_i$  engendrent  $R$  comme  $\widehat{\mathcal{H}(x)}^\circ$ -algèbre, le morphisme  $\tilde{v}$  induit une flèche surjective  $\widehat{\mathcal{H}(x)}^\circ[r\backslash T] \rightarrow R$ .

Nous allons montrer qu'on peut restreindre  $X$  de sorte qu'il existe une famille finie  $(a_1, \dots, a_m)$  satisfaisant les propriétés suivantes, en posant  $h_i = a_i|_{Y_x}$  quel que soit  $i$ :

- ◇ les  $h_i$  forment une famille fortement génératrice de  $\text{Ker}(v)$  et pour tout  $i$  la norme spectrale  $\rho_i := \|h_i\|_{Y_x}$  appartient à  $\Gamma$ ;
- ◇ les  $\tilde{h}_i$  appartiennent à  $\widehat{\mathcal{H}(x)}^\circ[r\backslash T]$ , sont de norme 1 pour la norme de Gauß  $\sum \alpha_I T^I \mapsto \max|\alpha_I|$ , et engendrent en tant qu'idéal de  $\widehat{\mathcal{H}(x)}^\circ[r\backslash T]$  le noyau de la surjection  $\widehat{\mathcal{H}(x)}^\circ[r\backslash T] \rightarrow R$  induite par  $\tilde{v}$ ;
- ◇ pour tout  $z \in X$  et tout  $i$  on a  $\|h_i\|_{Y_z} = \rho_i$ .

**3.6.9.1.** — On commence par choisir une famille  $(h_1, \dots, h_m)$  fortement génératrice de  $\text{Ker}(v)$  (proposition 2.4). Comme cette propriété est stable par petites perturbations d'après 2.3.3 on peut supposer quitte à restreindre  $X$  que  $h_i$  est pour tout  $i$  la restriction d'une fonction analytique  $a_i$  sur  $D$  appartenant à  $I$ .

**3.6.9.2.** — Complétons  $(a_1, \dots, a_m)$  en une famille  $(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_p)$  qui engendre  $I$ .

Soit  $j$  un indice tel que  $b_j|_{Y_x} = 0$  et soit  $Y'$  le sous-espace analytique fermé de  $D$  défini par l'idéal  $((a_i)_i, (b_i)_{i \neq j})$ . Considérons par abus  $\mathcal{O}_Y$  et  $\mathcal{O}_{Y'}$  comme des faisceaux cohérents sur  $D$ . On a une surjection naturelle  $\mathcal{O}_{Y'} \rightarrow \mathcal{O}_Y$ , dont la restriction à  $D_x$  est bijective par choix de  $j$ . Or  $Y$  est plat sur  $X$ , ce qui signifie que  $\mathcal{O}_Y$  est plat sur  $X$ . Il en résulte que  $\mathcal{O}_{Y'} \rightarrow \mathcal{O}_Y$  est un isomorphisme au voisinage de  $D_x$  ([Duc18], lemme 4.5.10). Par propriété topologique on peut donc restreindre  $X$  autour de  $x$  de sorte que  $I$  soit engendré par les  $a_i$  pour  $i$  compris entre 1 et  $m$  et par les  $b_i$  pour  $i$  compris entre 1 et  $p$  et différent de  $j$ .

En répétant l'opération autant de fois qu'il est nécessaire et en renumérotant les  $b_i$  on voit qu'on peut finalement restreindre  $X$  autour de  $x$  de sorte  $I$  soit engendré par une famille  $(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_p)$  avec  $b_i|_{Y_x} \neq 0$  pour tout  $i$ . La famille  $(h_1, \dots, h_m, b_1|_{Y_x}, \dots, b_p|_{Y_x})$  est alors encore une famille fortement génératrice de  $\text{Ker}(v)$ . En incorporant  $(b_1, \dots, b_p)$  à la famille des  $a_i$  on se ramène au cas où cette dernière engendre  $I$ .



**3.6.9.3.** — La norme spectrale de  $\mathcal{H}(x)\{T/r\}$  étant à valeurs dans  $|\mathcal{H}(x)^\times| \cdot \Gamma$ , il existe des éléments  $\lambda_i \in \mathcal{O}_{X,x}^\times$  tels que  $|\lambda_i| \cdot \|h_i\|_{Y_x} \in \Gamma$  pour tout  $i$  et tel que l'élément  $\widetilde{\lambda_i(x)h_i}$  de  $\widetilde{\mathcal{H}(x)[r\backslash T]}$  soit de norme (de Gauß) égale à 1. En restreignant  $X$  autour de  $x$  pour que chaque  $\lambda_i$  soit définie et inversible sur  $X$ , et en multipliant  $a_i$  par  $\lambda_i$  pour tout  $i$ , on se ramène au cas où  $\rho_i := \|h_i\|_{Y_x}$  appartient à  $\Gamma$  pour tout  $i$  et où chacun des  $\widetilde{h_i}$  est de norme 1.

**3.6.9.4.** — Pour tout  $i$  l'élément  $\widetilde{h_i}$  de  $\widetilde{\mathcal{H}(x)[r\backslash T]}$  appartient à  $\widetilde{\mathcal{H}(x)}^\circ[r\backslash T]$  (car il est de norme 1) et au noyau de  $\widetilde{v}$ . Complétons  $(\widetilde{h_1}, \dots, \widetilde{h_m})$  en une famille génératrice  $(\widetilde{h_1}, \dots, \widetilde{h_m}, \alpha_1, \dots, \alpha_p)$  de  $\text{Ker}(\widetilde{v}|_{\widetilde{\mathcal{H}(x)}^\circ[r\backslash T]})$  sur  $\widetilde{\mathcal{H}(x)}^\circ[r\backslash T]$ , avec les  $\alpha_j$  tous non nuls. Pour tout  $j$ , choisissons  $\lambda_j \in \mathcal{H}(x)^\times$  tel que  $\lambda_j \alpha_j$  soit de norme 1. L'élément  $\lambda_j \alpha_j$  appartient encore à  $\text{Ker}(\widetilde{v})$ , et  $|\lambda_j| \geq 1$ . Puisque  $\alpha_j = \lambda_j^{-1}(\lambda_j \alpha_j)$ , la famille  $(\widetilde{h_1}, \dots, \widetilde{h_m}, \lambda_1 \alpha_1, \dots, \lambda_p \alpha_p)$  engendre encore  $\text{Ker}(\widetilde{v}) \cap \widetilde{\mathcal{H}(x)}^\circ[r\backslash T]$ ; par conséquent on peut, quitte à remplacer  $\alpha_j$  par  $\lambda_j \alpha_j$  pour tout  $j$ , supposer que les  $\alpha_j$  sont tous de norme 1.

Chacun des  $\alpha_j$  appartient à  $\text{Ker}(\widetilde{v})$ . Or comme  $v$  est distingué et comme  $(h_1, \dots, h_m)$  est une famille fortement génératrice de  $\text{Ker}(v)$ , le noyau de  $\widetilde{v}$  est engendré par les  $\widetilde{h_i}$  d'après la proposition 2.14. Chaque  $\alpha_j$  appartient donc à  $(\widetilde{h_1}, \dots, \widetilde{h_m})$  et peut dès lors se relever en un élément  $\alpha'_j$  appartenant à l'idéal  $(h_1, \dots, h_m)$  de l'anneau  $\kappa(x)[T] \subset \mathcal{H}(x)\{T/r\}$ . Quitte à restreindre  $X$  autour de  $x$  on peut supposer que chacun des  $\alpha'_j$  est la restriction d'un élément  $\alpha''_j$  appartenant à l'idéal  $(a_1, \dots, a_m)$  de l'anneau  $A[T] \subset A\{T/r\}$ , et en particulier à  $I$ . En incorporant les  $\alpha''_j$  à la famille des  $a_i$ , on se ramène au cas où  $(\widetilde{h_1}, \dots, \widetilde{h_m})$  est une famille génératrice de  $\text{Ker}(\widetilde{v}|_{\widetilde{\mathcal{H}(x)}^\circ[r\backslash T]})$  sur  $\widetilde{\mathcal{H}(x)}^\circ[r\backslash T]$ .

**3.6.9.5.** — Pour tout  $i$ , on écrit  $a_i = \sum a_{i,J} T^J$ , et on pose  $h_{i,J} = a_{i,J}|_{Y_x}$  pour tout  $(i, J)$ .

À chaque indice  $i$  on associe les sous-ensembles suivants de  $\mathbf{Z}_{\geq 0}^n$  :

- ◇  $\mathcal{I}_0(i) = \{J, |h_{i,J}| \cdot r^J < \rho_i\}$ .
- ◇  $\mathcal{I}_1(i) = \{J, |h_{i,J}| \cdot r^J = \rho_i \text{ et } |\widetilde{h_{i,J}}| < 1\}$ .
- ◇  $\mathcal{I}_2(i) = \{J, |h_{i,J}| \cdot r^J = \rho_i \text{ et } |\widetilde{h_{i,J}}| = 1\}$ .

(Nos hypothèses entraînent que  $\mathbf{Z}_{\geq 0}^n = \mathcal{I}_0(i) \cup \mathcal{I}_1(i) \cup \mathcal{I}_2(i)$ , que  $\mathcal{I}_1(i)$  et  $\mathcal{I}_2(i)$  sont finis, et que  $\mathcal{I}_2(i) \neq \emptyset$ .) On pose  $b_i = \sum_{J \in \mathcal{I}_0(i)} a_{i,J} T^J$ .

Par construction,  $\|b_i\|_{Y_x} < \rho_i$  pour tout  $i$ . Par propriété topologique on peut donc supposer quitte à restreindre  $X$  autour de  $x$  que chaque  $b_i$  est de norme spectrale strictement inférieure à  $\rho_i$ .

Soit  $X'$  le domaine affinoïde  $\Gamma$ -strict de  $X$  défini par les conditions

$$\{|a_{i,J}| \cdot r^J \leq \rho_i\}_{1 \leq i \leq m, J \in \mathcal{I}_1(i)} \text{ et } \{|a_{i,J}| \cdot r^J = \rho_i\}_{1 \leq i \leq m, J \in \mathcal{I}_2(i)}.$$

Le domaine  $X'$  contient  $x$ , et

$$\widetilde{(X', x)} = \widetilde{(X, x)} \cap \mathbf{P}_{\widetilde{\mathcal{H}(x)}/\widetilde{k}} \{ \{ \widetilde{h_{i,J}} \}_{J \in \mathcal{I}_1(i)} \cup \{ \widetilde{h_{i,J}}, \widetilde{h_{i,J}}^{-1} \}_{J \in \mathcal{I}_2(i)} \}.$$

En particulier,  $(\widetilde{X'}, x)$  contient  $|\cdot|$ . On peut donc restreindre  $X$  de sorte que  $X' = X$ . Il résulte alors de nos constructions que pour tout  $z \in V$  et tout  $i$  compris entre 1 et  $m$  la norme spectrale  $\max |a_{i,j}(z)| \cdot r^j$  de  $a_i|_{Y_z}$  est égale à  $\rho_i$ .

(On aurait pu également invoquer 3.6.7.1 et 3.6.7.2 dans le cas où  $Y = D$ , où  $f_i = T_i$ , où  $R = \widetilde{\mathcal{H}(x)}^\circ [r \setminus T]$  et où  $t$  est le point générique de la fibre spéciale – une fonction appartenant à  $\widetilde{\mathcal{H}(x)}^\circ [r \setminus T]$  est inversible en ce point précisément si sa norme de Gauß vaut 1 ; mais la preuve ci-dessus est plus élémentaire.)

**3.6.10.** — Pour tout  $i$  compris entre 0 et  $h$  et tout point maximal  $t$  de  $(\text{Spec } R)_{\tau_i}$ , il existe  $G_t \in \mathcal{H}(x)\{T/r\}$ , dont on note  $g_t$  l'image dans  $C$ , telle que les propriétés suivantes soient satisfaites :

- ◇ les réels  $\|G_t\|_{D_x}$  et  $\|g_t\|_{Y_x}$  sont égaux à un même élément  $r'_t$  de  $\Gamma$  ;
- ◇ la réduction  $\widetilde{G}_t$  appartient à  $\widetilde{\mathcal{H}(x)}^\circ [r \setminus T]$  (ce qui entraîne que  $\widetilde{g}_t$  appartient à  $R$ ) ;
- ◇ l'élément  $\widetilde{g}_t$  de  $R$  est inversible en  $t$  et s'annule en les autres points maximaux de  $(\text{Spec } R)_{\tau_i}$ .

(Pour construire  $g_t$ , on commence par choisir un élément de  $R$  satisfaisant la dernière propriété, ce qui est possible car la réunion des adhérences dans  $\text{Spec } R$  des points maximaux de  $(\text{Spec } R)_\tau$  autres que  $t$  est un fermé de Zariski de  $\text{Spec } R$  qui ne contient pas  $t$  ; on élève ensuite cet élément dans  $\widetilde{\mathcal{H}(x)}^\circ [r \setminus T]$  puis dans  $\mathcal{H}(x)\{T/r\}$ ).

Les propriétés de  $G_t$  étant stables par petites perturbations, on peut supposer quitte à restreindre  $X$  autour de  $x$  que  $G_t$  est la restriction d'une fonction  $\Psi_t$  appartenant à  $A\{T/r\}$  ; on note  $\psi_t$  l'image de  $\Psi_t$  dans  $B$ .

Pour tout  $(i, t)$ , les valuations des coefficients de  $\widetilde{G}_t$  sont toutes inférieures ou égales à 1. Un raisonnement analogue à celui tenu au 3.6.9.5 montre alors qu'on peut supposer quitte à restreindre  $X$  que pour tout  $(i, t)$  on a  $|\Psi_t| \leq r'_t$  sur  $D$  tout entier (ce qui entraîne que  $|\psi_t| \leq r'_t$  sur  $Y$  tout entier).

Par ailleurs il résulte de 3.6.7.2 qu'on peut, quitte à encore restreindre  $X$ , supposer que pour tout  $(i, t)$  et tout  $z \in X_i$ , la fonction  $|\psi_t|$  atteint la valeur  $r'_t$  sur un domaine affinoïde  $\Gamma$ -strict de  $Y_z$  purement de dimension  $\dim \{t\}_{\tau_i}$ .

**3.6.11.** — Puisque  $(\widetilde{h}_1, \dots, \widetilde{h}_m)$  engendre  $\text{Ker}(\widetilde{v}|_{\widetilde{\mathcal{H}(x)}^\circ [r \setminus T]})$ , on a un isomorphisme de  $\widetilde{\mathcal{H}(x)}^\circ$ -algèbres

$$\widetilde{\mathcal{H}(x)}^\circ [r \setminus T] / (\widetilde{h}_1, \dots, \widetilde{h}_m) \simeq R.$$

Comme chaque  $h_i$  se prolonge en la fonction  $a_i$  sur  $D$  et comme  $\|a_i\|_D = \rho_i$ , les  $\widetilde{h}_i$  appartiennent tous à  $A[r \setminus T]$  ; pour une raison, analogue, les  $\widetilde{G}_t$  appartiennent tous à  $A[r \setminus T]$ . Pour tout  $V \in \mathcal{V}$ , posons  $M_V = A_V[r \setminus T] / (\widetilde{h}_1, \dots, \widetilde{h}_m)$  ; on écrit  $M$  au lieu de  $M_X$ .

Nous allons maintenant montrer qu'on peut restreindre  $X$  de sorte que le morphisme  $\text{Spec } M \rightarrow \text{Spec } A$  satisfasse les propriétés suivantes :

- (a) il est plat et à fibres géométriquement réduites ;

- (b) les composantes irréductibles de ses fibres sont géométriquement irréductibles ;
- (c) pour tout  $i$  compris entre 0 et  $h$ , pour tout point  $\sigma$  de  $\text{Spec } \mathbf{A}$  tel que  $\nu_i(\sigma) \neq 0$  et  $\nu_{i+1}(\sigma) = 0$ , et pour tout point maximal  $s$  de  $(\text{Spec } \mathbf{M})_\sigma$ , il existe un point maximal  $t$  de  $(\text{Spec } R)_{\tau_i}$  tel que l'image  $\check{G}_t$  de  $\widetilde{G}_t$  dans  $\mathbf{M}$  soit inversible en  $s$  et s'annule en les autres points maximaux de  $(\text{Spec } \mathbf{M})_\sigma$ , et tel que  $\dim \overline{\{s\}}_\sigma$  soit égal à  $\dim \overline{\{t\}}_{\tau_i}$  ;
- (d) il existe un recouvrement fini  $(\Omega_j)$  de  $\text{Spec } \mathbf{M}$  tel que pour tout  $j$ , chaque fibre non vide de  $\Omega_j \rightarrow \text{Spec } \mathbf{A}$  soit une composante connexe de la fibre correspondante de  $\text{Spec } \mathbf{M} \rightarrow \text{Spec } \mathbf{A}$ .

**3.6.11.1.** — Comme  $\text{Spec } R$  est plat sur  $\text{Spec } \widetilde{\mathcal{H}(x)}^\circ$ ,  $\text{Spec } \mathbf{M}_V \rightarrow \text{Spec } \mathbf{A}_V$  est plat pour tout élément  $V$  de  $\mathcal{V}$  suffisamment petit : la méthode 1.4 permet en effet de se ramener à l'assertion analogue dans le cas non gradué, qui est le théorème 11.2.6 (ii) de [EGA IV<sub>3</sub>].

**3.6.11.2.** — Pour tout élément  $V$  de  $\mathcal{V}$ , notons  $E_V$  l'ensemble des points de  $\text{Spec } \mathbf{A}_V$  tels que la fibre correspondante de  $\text{Spec } \mathbf{M}_V \rightarrow \text{Spec } \mathbf{A}_V$  soit géométriquement réduite.

Pour tout  $V$ , l'ensemble  $E_V$  est une partie constructible de  $\text{Spec } \mathbf{A}_V$  (on utilise 1.4 pour se ramener au cas non gradué, et c'est alors le théorème 9.7.7 (iii) de [EGA IV<sub>3</sub>]) ; elle dépend de manière cartésienne de  $V$ .

Comme les fibres de  $\text{Spec } R \rightarrow \text{Spec } \widetilde{\mathcal{H}(x)}^\circ$  sont géométriquement réduites, la limite projective des  $\text{Spec } \mathbf{M}_V \setminus E_V$  est vide ; par compacité constructible, il existe  $V$  tel que  $E_V = \text{Spec } \mathbf{M}_V$ .

**3.6.11.3.** — Soit  $i$  compris entre 0 et  $h$  et soit  $t$  un point maximal de  $(\text{Spec } R)_{\tau_i}$ . Pour tout élément  $V$  de  $\mathcal{V}$  notons  $E_V^1$  l'ensemble des points  $\sigma$  de  $\text{Spec } \mathbf{A}_V$  tels que  $\nu_i(\sigma) \neq 0$ , tels que  $\nu_{i+1}(\sigma) = 0$  et tels que la fibre en  $\sigma$  de l'ouvert  $D(\check{G}_t)$  de  $\text{Spec } \mathbf{M}_V$  soit géométriquement irréductible et de dimension  $\dim \overline{\{t\}}_{\tau_i}$ . C'est une partie constructible de  $\text{Spec } \mathbf{A}_V$  (on utilise 1.4 pour se ramener au cas non gradué, et on combine alors la proposition 9.2.6 et le théorème 9.7.7 (i) de [EGA IV<sub>3</sub>]) ; elle dépend de manière cartésienne de  $V$ . Comme la partie correspondante de  $\text{Spec } \widetilde{\mathcal{H}(x)}^\circ$  est égale à  $\{\tau_i\}$ , c'est-à-dire précisément à l'ensemble des points de  $\text{Spec } \widetilde{\mathcal{H}(x)}^\circ$  en lesquels  $\nu_i$  est inversible et  $\nu_{i+1}$  nul, un argument de compacité constructible permet là encore de conclure que  $E_V^1$  est pour  $V$  assez petit l'ensemble des points  $\sigma$  de  $\text{Spec } \mathbf{A}_V$  tels que  $\nu_i(\sigma) \neq 0$  et  $\nu_{i+1}(\sigma) = 0$ .

**3.6.11.4.** — Soit  $i$  compris entre 0 et  $h$ . Pour tout élément  $V$  de  $\mathcal{V}$  notons  $E_V^2$  l'ensemble des points  $\sigma$  de  $\text{Spec } \mathbf{A}_V$  tels que  $\nu_i(\sigma) \neq 0$ , tels que  $\nu_{i+1}(\sigma) = 0$  et tels que la réunion des ouverts  $D(\check{G}_t)$  de  $\text{Spec } \mathbf{M}_V$  pour  $t$  parcourant l'ensemble des points maximaux de  $(\text{Spec } R)_{\tau_i}$  contienne une partie dense de  $(\text{Spec } \mathbf{M}_V)_\sigma$ . C'est une partie constructible de  $\text{Spec } \mathbf{M}_V$  (on utilise 1.4 pour se ramener au cas non gradué, et c'est alors la proposition 9.5.3 de [EGA IV<sub>3</sub>]) ; elle dépend de manière cartésienne de  $V$ . Comme la partie correspondante de  $\text{Spec } \widetilde{\mathcal{H}(x)}^\circ$  est égale à  $\{\tau_i\}$ , c'est-à-dire précisément à l'ensemble des points de  $\text{Spec } \widetilde{\mathcal{H}(x)}^\circ$  en lesquels  $\nu_i$  est inversible et  $\nu_{i+1}$  nul, un argument de compacité constructible permet là encore de conclure que

$E_V^2$  est pour  $V$  assez petit l'ensemble des points  $\sigma$  de  $\text{Spec } A_V$  tels que  $\nu_i(\sigma) \neq 0$  et  $\nu_{i+1}(\sigma) = 0$ .

**3.6.11.5.** — En vertu de la proposition 1.27 il existe un recouvrement ouvert fini  $(\Upsilon_j)_j$  de  $\text{Spec } R$  tel que pour tout  $j$ , chaque fibre non vide de  $\Upsilon_j \rightarrow \text{Spec } \widetilde{\mathcal{H}(x)}$  soit une composante connexe de la fibre correspondante de  $\text{Spec } R \rightarrow \text{Spec } \mathcal{H}(x)$ . Chaque  $\Upsilon_j$  est quasi-compact; si on prend  $V$  suffisamment petit, on peut donc faire en sorte que  $\Upsilon_j$  provienne pour tout  $j$  d'un ouvert  $\Omega_{j,V}$  de  $\text{Spec } M_V$ , dépendant de manière cartésienne de  $V$ .

Les  $\Upsilon_j$  recouvrant  $\text{Spec } R$ , un argument de compacité constructible montre que si  $V$  est assez petit les  $\Omega_{j,V}$  recouvrent  $\text{Spec } M_V$ .

Pour tout  $j$  et tout  $V$  assez petit pour que cela ait un sens, notons  $E_{j,V}^3$  l'image de  $\Omega_{j,V}$  sur  $\text{Spec } A_V$ , et  $E_{j,V}^4$  le sous-ensemble de  $E_{j,V}^3$  formé des points en lesquels la fibre de  $\Omega_{j,V} \rightarrow \text{Spec } A_V$  est géométriquement connexe. Les ensembles  $E_{j,V}^3$  et  $E_{j,V}^4$  sont constructibles (pour le second, cela découle du corollaire 9.7.9 de [EGA IV<sub>3</sub>]); ils dépendent de manière cartésienne de  $V$ , et les deux sous-ensembles correspondants de  $\text{Spec } \widetilde{\mathcal{H}(x)}$  coïncident par choix des  $\Upsilon_j$ , et parce que les composantes irréductibles des fibres de  $\text{Spec } R \rightarrow \text{Spec } \widetilde{\mathcal{H}(x)}$  sont géométriquement irréductibles. Il s'ensuit par un argument de compacité constructible qu'on a pour  $V$  suffisamment petit l'égalité  $E_{j,V}^3 = E_{j,V}^4$  pour tout  $j$ , ce qui signifie que les fibres de  $\Omega_{j,V} \rightarrow \text{Spec } A_V$  sont géométriquement connexes.

Enfin, soient  $j$  et  $\ell$  deux indices distincts. Pour tout  $V$  suffisamment petit pour que cela ait un sens, notons  $E_{j,\ell,V}^5$  et  $E_{j,\ell,V}^6$  les images respectives de  $\Omega_{j,V} \cap \Omega_{\ell,V}$  et  $\Omega_{j,V} \triangle \Omega_{\ell,V}$  sur  $\text{Spec } A_V$ . Ce sont des parties constructibles de  $\text{Spec } A_V$ , dépendant de manière cartésienne de  $V$ ; par construction, les parties correspondantes de  $\text{Spec } \widetilde{\mathcal{H}(x)}$  sont disjointes. En utilisant une dernière fois un argument de compacité constructible, on en déduit que si  $V$  est assez petit alors  $E_{j,\ell,V}^5 \cap E_{j,\ell,V}^6 = \emptyset$ , ce qui signifie que pour tout  $\sigma \in \text{Spec } A_V$ , les fibres de  $\Omega_{j,V}$  et  $\Omega_{\ell,V}$  en  $\sigma$  sont ou bien disjointes, ou bien égales.

**3.6.11.6.** — Il résulte des paragraphes précédents qu'on peut restreindre  $X$  de sorte que  $\text{Spec } M \rightarrow \text{Spec } A$  satisfasse les propriétés (a), (b), (c) et (d) requises.

**3.6.12.** *Fin de la démonstration.* — Soit  $\tilde{x}$  l'image de  $x$  sur  $\tilde{X}$  et soit  $\Omega$  l'image réciproque de  $\{\tilde{x}\}$  sur  $X$ . C'est un voisinage ouvert de  $x$  dans  $X$ . Soit  $V$  un voisinage affinoïde  $\Gamma$ -strict de  $x$  dans  $\Omega$ . Le morphisme  $\tilde{A} \rightarrow \tilde{A}_V$  induit par l'inclusion  $V \hookrightarrow X$  se factorise alors par l'image de  $\tilde{A}$  dans  $\kappa(\tilde{x})$ , qui s'identifie elle-même à  $A$ . Modulo cette identification, l'image de  $a_i|_{D_V}$  dans  $\tilde{A}_V[r \setminus T]$  est égale à  $\tilde{h}_i$  pour tout  $i$ , celle de  $\Psi_t|_{D_V}$  est égale à  $\tilde{G}_t$  pour tout  $t$ , et celle de  $\theta_i$  est égale à  $\nu_i$  pour tout  $i$ .

En remplaçant  $X$  par  $V$  on se ramène alors au cas où le morphisme

$$q: \text{Spec } \tilde{A}[r \setminus T]/(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m) \rightarrow \tilde{X}$$

satisfait les propriétés suivantes :

- (a) il est plat et à fibres géométriquement réduites;

- (b) les composantes irréductibles de ses fibres sont géométriquement irréductibles ;
- (c) pour tout  $i$  compris entre 0 et  $h$ , pour tout point  $\sigma$  de  $\text{Spec } \tilde{A}$  appartenant à  $D(\tilde{\theta}_i) \setminus D(\tilde{\theta}_{i+1})$  et pour tout point maximal  $s$  de  $q^{-1}(\sigma)$ , il existe un point maximal  $t$  de  $(\text{Spec } R)_{\tau_i}$  tel que l'image  $\tilde{\Psi}_t$  de  $\tilde{\Psi}_\sigma$  dans  $\tilde{A}[r \setminus T]/(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m)$  soit inversible en  $s$  et s'annule en les autres points maximaux de  $q^{-1}(\sigma)$ , et telle que  $\dim \overline{\{s\}}_\sigma = \dim \overline{\{t\}}_{\tau_i}$  ;
- (d) il existe un recouvrement ouvert fini  $(\Omega_j)$  de  $\text{Spec } \tilde{A}[r \setminus T]/(\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_m)$  tel que pour tout  $j$  et tout  $\xi \in \tilde{X}$ , l'intersection  $\Omega_j \cap q^{-1}(\xi)$  soit ou bien vide, ou bien une composante connexe de  $q^{-1}(\xi)$ .

Soit  $z$  un point de  $X$ . Soit  $i$  un entier compris entre 0 et  $h$  tel que  $z \in X_i$ , et minimal pour cette propriété (rappelons que comme  $\theta_h = 1$ , le point  $z$  appartient automatiquement à  $X_h$ ). L'image de  $z$  sur  $\text{Spec } \tilde{A}$  appartient alors à  $D(\tilde{\theta}_i) \setminus D(\tilde{\theta}_{i+1})$ . Par ce qui précède,  $\text{Spec } \mathcal{H}(z)[r \setminus T]/(\overline{a_1|_{Y_z}}, \dots, \overline{a_m|_{Y_z}})$  est géométriquement réduit, et ses composantes irréductibles sont géométriquement intègres.

Par ailleurs, soit  $s$  un point maximal de  $\text{Spec } \mathcal{H}(z)[r \setminus t]/(\overline{a_1|_{Y_z}}, \dots, \overline{a_m|_{Y_z}})$ . Il existe alors un point maximal  $t$  de  $(\text{Spec } R)_{\tau_i}$  tel que  $\tilde{\Psi}_t$  soit inversible en  $s$  et s'annule en tous les autres points maximaux de  $\text{Spec } \mathcal{H}(z)[r \setminus t]/(\overline{a_1|_{Y_z}}, \dots, \overline{a_m|_{Y_z}})$ , et tel que  $\dim \overline{\{s\}} = \dim \overline{\{t\}}_{\tau_i}$ . L'image de  $\tilde{\Psi}_t$  dans  $B$  est égale à  $\psi_t$ . On a  $\|\tilde{\Psi}_t\|_{D_z} = r'_t$  ; et comme  $z$  appartient à  $X_i$ , il existe un domaine affinoïde  $\Gamma$ -strict non vide de  $Y_z$ , purement de dimension  $\dim \overline{\{t\}}_{\tau_i}$ , sur lequel  $|\psi_t|$  prend la valeur  $r'_t$ . On déduit alors de la proposition 2.30 et du critère 2.31, qui garantit que les hypothèses de cette dernière sont satisfaites ici, que  $B \simeq A\{T/r\}/(a_1, \dots, a_m)$  est une présentation  $\Gamma$ -sympathique de  $B$  sur  $A$ . □

## Appendice A. Autour de la dimension des espaces analytiques

Le but de cet appendice est de démontrer différents résultats auxiliaires en théorie de la dimension, qui sont utilisés dans l'article et peuvent avoir par ailleurs leur intérêt propre.

Le premier de ces énoncés est certainement bien connu ; nous en donnons une démonstration pour la commodité du lecteur.

**A.1. Lemme.** — *Soit  $X$  un espace  $k$ -affinoïde, soit  $(X_i)$  la famille de ses composantes irréductibles et pour tout  $i$ , soit  $d_i$  la dimension de  $X_i$ . Soit  $\rho : X \rightarrow \tilde{X}$  l'application de réduction.*

- (1) *Pour tout  $i$ , l'image  $\rho(X_i)$  est un fermé de  $\tilde{X}$ .*
- (2) *Désignons pour tout  $i$  par  $(X_{ij})_j$  la famille des composantes irréductibles de  $\rho(X_i)$ . On a alors  $\dim X_{ij} = d_i$  quel que soit  $j$ , et  $(X_{ij})_{i,j}$  est la famille des composantes irréductibles de  $\tilde{X}$ .*

*Démonstration.* — Fixons  $i$  et munissons  $X_i$  (par exemple) de sa structure réduite. L'immersion fermée  $X_i \hookrightarrow X$  étant en particulier un morphisme fini, le morphisme induit  $\widetilde{X}_i \rightarrow \widetilde{X}$  est fini ([**Tem04**], Prop. 3.1. (iii)), et par conséquent fermé; or par surjectivité de  $X_i \rightarrow \widetilde{X}_i$  l'image de  $\widetilde{X}_i \rightarrow \widetilde{X}$  coïncide avec  $\rho(X_i)$ , ce qui achève de démontrer (1).

Prouvons maintenant (2). Fixons  $i$ . Pour montrer que  $\rho(X_i)$  est purement de dimension  $d_i$ , il suffit de démontrer que c'est le cas de  $\widetilde{X}_i$ . Soit  $\alpha$  un élément non nul de  $\mathcal{O}_{X_i}(\widetilde{X}_i)$  et soit  $r$  son degré; soit  $a$  une fonction analytique sur  $X_i$  de rayon spectral  $r$  et telle que  $\tilde{a} = \alpha$ . L'image réciproque  $V$  de  $D(\alpha)$  sur  $X_i$  est le domaine affinoïde non vide de  $X_i$  défini par la condition  $|a| = r$  et l'on a  $\widetilde{V} = D(a)$  ([**Tem04**], Prop. 3.1 (ii)). Puisque  $V$  est un domaine affinoïde non vide de  $X_i$ , il est de dimension  $d_i$ . On sait alors que  $\widetilde{V} = D(a)$  est de dimension  $d_i$  (utiliser la proposition 3.1 (i) de [**Tem04**] pour se réduire au cas strict, et appliquer la remarque de [**BGR84**] suivant le corollaire 3 de §6.3.4). Ceci valant pour tout élément  $\alpha$  non nul de  $\mathcal{O}_{X_i}(\widetilde{X}_i)$ , le schémoïde  $X_i$  est purement de dimension  $d_i$ .

Vérifions enfin que les  $X_{ij}$  sont bien les composantes irréductibles de  $\widetilde{X}$ . Les points génériques des composantes irréductibles de  $\widetilde{X}$  sont exactement les images des points du bord de Shilov de  $X$ ; et pour tout  $i$ , les points génériques des composantes irréductibles de  $\widetilde{X}_i$  sont exactement les images des points du bord de Shilov de  $X_i$ . Puisque  $\rho(X_i)$  est pour tout  $i$  l'image du morphisme fini  $\widetilde{X}_i \rightarrow \widetilde{X}$ , il suffit pour conclure de montrer que le bord de Shilov de  $X$  est la réunion des bords de Shilov des  $X_i$ . On peut évidemment pour ce faire supposer  $X$  non vide.

Soit  $S$  le bord de Shilov de  $X$ . Pour tout  $i$ , notons  $S_i$  le bord de Shilov de  $X_i$ . Soit  $f$  une fonction analytique sur  $X$ . Puisque  $f|_{S_i}$  atteint pour tout  $i$  son maximum en valeur absolue sur  $S_i$ , la fonction  $f$  atteint son maximum en valeur absolue sur  $\bigcup S_i$  (on se sert ici du fait que  $X$  est non vide); par conséquent,  $S \subset \bigcup S_i$ . Réciproquement, soit  $i$  un indice et soit  $x$  un point de  $S_i$ . Par définition il existe une fonction  $g$  sur  $X_i$  telle que  $|g(x)| = r > 0$  et  $|g(y)| < r$  pour tout  $y \in S_i \setminus \{x\}$ . On peut relever  $g$  en une fonction sur  $X$ , que l'on note encore  $g$ . Soit  $h$  une fonction sur  $X$  dont la restriction à  $X_i$  est génériquement inversible, et qui s'annule en tous les points de toutes les autres composantes de  $X$ . Comme  $\widetilde{X}_i$  est purement de dimension  $d_i$  (on l'a vu plus haut), l'image de  $x$  sur  $\widetilde{X}_i$  est le point générique d'un fermé de dimension  $d_i$ , et le corpoïde  $\mathcal{H}(x)$  est donc de degré de transcendance  $d_i$  sur  $\tilde{k}$ , ce qui interdit à  $x$  de vivre sur un fermé de Zariski strict de l'espace irréductible  $X_i$ . Il s'ensuit que  $h(x) \neq 0$ , puis qu'il existe un entier  $N \geq 1$  tel que  $|g(x)^N h(x)| > |g(y)^N h(y)|$  pour tout  $y \in S_i \setminus \{x\}$ . Mais alors  $x$  est l'unique point de  $\bigcup_j S_j$  en lequel  $|g^N h|$  atteint son maximum (en effet,  $g^N h$  s'annule par construction en tout point de  $S_j$  si  $j \neq i$ ); par conséquent,  $x \in S$ .  $\square$

Le second de ces énoncés est la déclinaison analytique d'une version un peu affaiblie de [**EGA IV**]<sub>3</sub>, th. 12.1.1 (iv). Nous utiliserons librement les propriétés  $(S_n)$  de Serre (pour  $n = 1$  ou  $2$ ) et leurs variantes analytiques, leur invariance par extension des scalaires, et les principes GAGA à leur sujet (cf. [**Duc18**], Lemma-Definition 2.4.3,

Lemma 2.4.6 et Prop. 2.6.7); nous utiliserons également les propriétés de base des composantes irréductibles en géométrie analytique, rappelées à la section 1.5 de *op. cit.*

Si  $\varphi: Y \rightarrow X$  est un morphisme d'espaces analytiques nous dirons que  $\varphi$  est *de dimension  $d$*  (resp. *purement de dimension  $d$* ) en un point  $y$  de  $Y$  si la fibre  $Y_{\varphi(y)}$  est de dimension  $d$  (resp. purement de dimension  $d$ ) en  $y$ .

**A.2. Théorème.** — Soit  $\varphi: Y \rightarrow X$  un morphisme plat entre espaces  $k$ -analytiques dont les fibres satisfont la propriété  $(S_1)$  de Serre. Soit  $d$  un entier. L'ensemble des points  $y$  de  $Y$  en lesquels  $\varphi$  est purement de dimension  $d$  est un ouvert de Zariski de  $Y$ .

*Démonstration.* — Soit  $\Omega$  l'ensemble des points de  $Y$  en lesquels  $\varphi$  est purement de dimension  $d$ . Pour montrer que  $\Omega$  est un ouvert de Zariski on peut raisonner  $G$ -localement sur  $X$  et  $Y$ , et partant les supposer tous deux affinoïdes.

**A.2.1. Réduction au cas strict.** — Soit  $r$  un polyrayon  $k$ -libre tel que  $|k_r^\times| \neq \{1\}$  et tels que  $X_r$  et  $Y_r$  soient strictement  $r$ -affinoïdes (où le  $r$  en indice désigne l'extension des scalaires de  $k$  à  $k_r$ ); l'image réciproque  $\Omega_r$  de  $\Omega$  sur  $Y_r$  est exactement l'ensemble des points de  $Y_r$  en lesquels  $\varphi_r$  est purement de dimension  $d$ . Soit  $\mathfrak{s}: Y \rightarrow Y_r$  la section de Shilov de  $Y_r \rightarrow Y$  (cf. [Duc18], 1.2.16); on a  $\Omega = \mathfrak{s}^{-1}(\Omega_r)$  et il suffit par conséquent de montrer que  $\Omega_r$  est un ouvert de Zariski de  $Y_r$  (il résulte en effet de la description de  $\mathfrak{s}$  par des formules explicites qu'elle est continue pour les topologies de Zariski de ses source et but). On peut donc supposer que la valeur absolue de  $k$  n'est pas triviale et que  $X$  et  $Y$  sont strictement  $k$ -affinoïdes.

**A.2.2.** — On fixe  $y$  appartenant à  $\Omega$ . Nous allons montrer qu'il existe un ouvert de Zariski de  $Y$  contenu dans  $\Omega$  et contenant  $y$ , ce qui permettra de conclure.

**A.2.3.** — Soit  $\delta: Y \rightarrow Y \times_X Y$  l'immersion diagonale, et soit  $\Omega'$  l'ensemble des points de  $Y \times_X Y$  en lesquels la seconde projection est purement de dimension  $d$ . On a alors  $\Omega = \delta^{-1}(\Omega')$ , et il suffit donc pour conclure de montrer qu'il existe un ouvert de Zariski de  $Y \times_X Y$  contenu dans  $\Omega'$  et contenant  $\delta(y)$ . Quitte à remplacer  $Y \rightarrow X$  par  $Y \times_X Y \rightarrow Y$  et  $y$  par  $\delta(y)$ , on peut donc supposer que  $Y \rightarrow X$  possède une section  $\sigma$  et que  $y = \sigma(x)$  pour un certain  $x \in X$ .

**A.2.4.** — Soit  $(X_i)_{i \in I}$  la famille des composantes irréductibles de  $X$ , et soit  $J$  l'ensemble des  $i$  tel que  $x \in X_i$ ; munissons chacune des  $X_i$  de sa structure réduite et posons  $Y_i = Y \times_X X_i$ . Supposons avoir montré que pour tout  $i \in J$  il existe un fermé de Zariski  $F_i$  de  $Y_i$  ne contenant pas  $y$  tel que  $Y_i \rightarrow X_i$  soit purement de dimension  $d$  en tout point de  $Y_i \setminus F_i$ , et posons  $F = \bigcup_{i \in J} F_i \cup \bigcup_{i \in I \setminus J} Y_i$ . Alors  $F$  est un fermé de Zariski de  $Y$  et le morphisme  $\varphi$  est purement de dimension relative  $d$  en tout point de l'ouvert  $Y \setminus F$ , lequel contient  $y$ .

Il suffit donc de démontrer l'assertion pour chaque composante irréductible réduite de  $X$ . Cette remarque permet de se ramener au cas où  $X$  est intègre, c'est-à-dire irréductible et réduit; on note  $e$  sa dimension.

**A.2.5.** — Puisque le morphisme  $\varphi$  est plat, on a pour tout point  $z$  de  $Y$  l'égalité  $\dim_z Y = \dim_{\varphi(z)} X + \dim_z Y_{\varphi(z)}$  ([Duc18], Lemma 4.5.11). Il en résulte immédiatement que les assertions suivantes sont équivalentes (ici  $X$  est irréductible de dimension  $e$ , mais on peut remarquer que ces équivalences seraient encore avérées si l'on supposait simplement que  $X$  est purement de dimension  $e$ ) :

- (i) il existe un ouvert de Zariski de  $Y$  contenu dans  $\Omega$  et contenant  $y$  ;
- (ii) toute composante irréductible de  $Y$  contenant  $y$  est de dimension  $d + e$  ;
- (iii) toutes les composantes irréductibles de  $Y$  contenant  $y$  ont même dimension.

Nous avons pour objectif de démontrer (i) ; il revient donc au même d'établir (ii) ou (iii). Nous allons raisonner par récurrence sur  $e$ .

**A.2.6.** *Le cas où  $e = 0$ .* — On a alors  $X = \{x\}$  et  $\varphi^{-1}(x) = Y$  ; dire que  $y \in \Omega$  revient à dire que toute composante irréductible de  $Y$  passant par  $y$  est de dimension  $d$ , ce qui entraîne immédiatement le résultat voulu puisque la condition (iii) de A.2.5 est satisfaite ou, plus directement, puisque la dimension de  $\varphi$  en un point coïncide ici avec celle de  $Y$ .

**A.2.7.** *On suppose que  $e > 0$  et que le résultat vaut en dimension  $< e$ .* — On note  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  les spectres respectifs de  $\mathcal{O}_X(X)$  et  $\mathcal{O}_Y(Y)$  ; on désigne par  $\eta$  l'image de  $y$  sur  $\mathcal{Y}$  et par  $\xi$  celle de  $x$  sur  $\mathcal{X}$ .

**A.2.7.1.** *Supposons que  $\xi$  est le point générique de  $\mathcal{X}$ .* — Si  $y$  est situé sur une seule composante irréductible de  $Y$ , la condition (ii) de A.2.5 est satisfaite et le théorème est démontré. Supposons maintenant que  $y$  soit situé sur au moins deux composantes irréductibles de  $Y$ .

Soit  $Z$  une composante irréductible de  $Y$  contenant  $y$ , soit  $U$  l'ouvert de  $Z$  constitué des points qui n'appartiennent pas à d'autres composantes irréductibles de  $Y$ , et soit  $Z'$  le complémentaire de  $U$  dans  $Z$  ; remarquons que  $U$  est un ouvert dense de  $Z$ , et que  $y \in Z'$  par hypothèse.

Soit  $T$  (resp.  $T'$ ) l'intersection  $\sigma(X) \cap Z$  (resp.  $\sigma(X) \cap Z'$ ) ; on munit  $Z, Z', T$  et  $T'$  de leurs structures réduites, et l'on note  $\mathcal{Z}$  le spectre de  $\mathcal{O}_Z(Z)$ . Puisque  $\xi$  est le point générique du schéma intègre  $\mathcal{X}$ , la flèche  $\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$  est plate en  $\eta$ . Comme le point  $y$  est situé sur le sous-espace analytique fermé  $T$  de  $Z$  qui est fini sur  $X$ , la  $\mathcal{X}$ -platitude de  $\mathcal{Z}$  en  $\eta$  entraîne la  $X$ -platitude de  $Z$  en  $y$  en vertu du théorème 8.3.7 de [Duc18]. Le même argument appliqué à  $Z'$  et  $T'$  au lieu de  $Z$  et  $T$  montre que  $Z'$  est  $X$ -plat en  $y$ .

Comme  $y = \sigma(x)$ , le point  $y$  appartient à l'intérieur relatif de  $Y$  sur  $X$ , et *a fortiori* à celui de  $Z$  sur  $X$ . La  $X$ -platitude de  $Z$  et  $Z'$  en  $y$  implique alors que  $y$  appartient à l'adhérence de la fibre  $U_x$  ([Duc18], prop. 10.4.2). Or  $U$  est un ouvert de  $Y$  purement de dimension  $\dim Z$  ; par platitude, les fibres de  $U \rightarrow X$  sont donc purement de dimension  $\dim Z - e$ . Puisque  $y$  est adhérent à  $U_x$ , l'une au moins des composantes irréductibles de  $\varphi^{-1}(x)$  passant par  $y$  est de dimension  $\dim Z - e$  ; comme  $\varphi$  est par hypothèse purement de dimension  $d$  en  $y$ , il vient  $\dim Z = d + e$  ; comme ceci vaut pour toute composante irréductible  $Z$  de  $Y$  contenant  $y$ , l'assertion (ii) de A.2.5 est établie, et le théorème est démontré.



**A.2.7.2.** *On suppose que  $\xi$  n'est pas le point générique de  $\mathcal{X}$ . — Soit  $\tilde{X}$  le normalisé de  $X$  et soit  $U$  le lieu de normalité de  $X$ . Posons  $\tilde{Y} = Y \times_X \tilde{X}$ , et notons  $\tilde{\sigma}$  la section de  $\tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}$  déduite de  $\sigma$ .*

Soit  $V$  (resp.  $\tilde{V}$ ) l'image réciproque sur  $Y$  (resp.  $\tilde{Y}$ ) de  $U$ . Comme  $X$  est réduit,  $U$  est un ouvert dense de  $X$ ; il en résulte par platitude de  $Y \rightarrow X$  que  $V$  est un ouvert dense de  $Y$  ([Duc09], lemme 5.7).

Soit  $Z$  une composante irréductible de  $Y$  contenant  $y$ . L'intersection  $Z \cap V$  est un ouvert dense de  $Z$ , qui est irréductible (cf. [Duc18], Prop. 2.7.16); c'est une composante irréductible de  $V \simeq \tilde{V}$ , et son adhérence  $\tilde{Z}$  dans  $\tilde{Y}$  est donc une composante irréductible de  $\tilde{Y}$ , de même dimension que  $Z$  et se surjectant sur celle-ci; en particulier,  $\tilde{Z}$  contient un antécédent  $y'$  de  $y$ .

Par construction,  $\tilde{Y} \rightarrow \tilde{X}$  est purement de dimension  $d$  en  $y'$ , le point  $y'$  appartient à  $\tilde{\sigma}(\tilde{X})$ , et son image sur le schéma intègre  $\text{Spec } \mathcal{O}_{\tilde{X}}(\tilde{X})$  n'est pas le point générique. Il suffit pour conclure de montrer que toutes les composantes irréductibles de  $\tilde{Y}$  contenant  $y'$  ont même dimension; en effet si c'est le cas celle-ci est nécessairement égale à  $d + e$  (c'est l'équivalence (ii)  $\iff$  (iii) de A.2.5), ce qui entraîne que  $Z$  est de dimension  $d + e$ ; puisque cela vaut pour tout  $Z$ , l'assertion (ii) de A.2.5 est établie, ce qui termine la preuve du théorème.

On s'est donc ramené au cas où  $X$  est normal, et c'est désormais l'assertion (iii) de A.2.5 que l'on cherche à montrer.

Puisque  $\xi$  n'est pas le point générique de  $\mathcal{X}$ , il existe une fonction non nulle  $f$  sur  $\mathcal{X}$  s'annulant en  $\xi$ ; soit  $\mathcal{T}$  le sous-schéma fermé de  $\mathcal{X}$  défini par l'équation  $f = 0$ ; on déduit du *Hauptidealsatz* et du lemme 2.7.13 (1) de [Duc18] que  $T := \mathcal{T}^{\text{an}}$  est purement de dimension  $e - 1$ . Par notre hypothèse de récurrence,  $y$  possède pour toute composante irréductible  $S$  de  $T$  un voisinage ouvert de Zariski  $V_S$  dans  $Y \times_X S$  tel que  $V_S \rightarrow S$  soit purement de dimension  $d$  en chacun de ses points. Il en résulte d'après A.2.4 qu'il existe un voisinage ouvert de Zariski  $V$  de  $y$  dans  $Y \times_X T$  tel que  $V \rightarrow T$  soit purement de dimension  $d$  en chacun de ses points; en vertu de A.2.5, les composantes irréductibles de  $Y \times_X T$  contenant  $y$  sont alors toutes de même dimension (à savoir  $d + e - 1$ ).

Comme la valeur absolue de  $k$  n'est pas triviale et comme les espaces en jeu sont strictement affinoïdes, toute composante irréductible du schéma  $\mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{T}$  est de dimension  $d + e - 1$  ([Duc18], lemme 2.7.6). Soit  $\varepsilon$  la dimension de  $\overline{\{\eta\}}^{\text{an}}$ ; le schéma  $\text{Spec } \mathcal{O}_{\mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{T}, \eta}$  est alors purement de dimension  $d + e - 1 - \varepsilon$  (*op. cit.*, Lemme 2.7.13 (1)); notons qu'on n'a pas besoin ici que la valeur absolue de  $k$  soit non triviale ni que les espaces affinoïdes en jeu soient stricts).

En utilisant à nouveau les lemmes 2.7.3 (1) et 2.7.6 de [Duc18], on voit qu'il suffit pour prouver l'assertion (ii) de A.2.4 de démontrer que  $\text{Spec } \mathcal{O}_{\mathcal{Y}, \eta}$  est équidimensionnel. Or :

- ◇  $\text{Spec } \mathcal{O}_{\mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{T}, \eta}$  est équidimensionnel comme on vient de le voir;
- ◇  $\mathcal{O}_{\mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{T}, \eta}$  est le quotient de  $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}, \eta}$  par  $f$ , qui n'est pas diviseur de zéro (puisque il ne l'est pas dans l'anneau intègre  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}, x}$  sur lequel  $\mathcal{O}_{\mathcal{Y}, \eta}$  est plat);

- ◊ l'anneau  $\mathcal{O}_{\mathcal{Y},\eta}$  est caténaire puisque  $\mathcal{Y}$  est de type fini sur une algèbre de la forme  $k\{T_1/r_1, \dots, T_n/r_n\}$  qui est régulière (cf. [Duc09] pour une preuve élémentaire) et partant universellement caténaire.

Il suffit alors désormais pour conclure, grâce à la proposition 5.12.2 de [EGA IV<sub>2</sub>], de montrer que  $\mathcal{O}_{\mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{T}, \eta}$  satisfait  $(S_1)$ .

Le schéma  $\mathcal{X}$  est normal, et partant possède la propriété  $(S_2)$  de Serre. Son sous-schéma fermé  $\mathcal{T}$  étant défini localement par une équation régulière, il satisfait  $(S_1)$ ; par conséquent, l'espace analytique  $T$  satisfait  $(S_1)$ . On en déduit, compte-tenu du fait que  $Y \times_X T \rightarrow T$  est plat et que ses fibres satisfont la propriété  $(S_1)$  par hypothèse, que  $Y \times_X T$  satisfait  $(S_1)$  ([Duc18], Thm. 11.3.3); en conséquence, l'anneau local  $\mathcal{O}_{\mathcal{Y} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{T}, \eta}$  satisfait  $(S_1)$ .  $\square$

### Références

- [AS02] A. ABBES & T. SAITO – « Ramification of local fields with imperfect residue fields », *Amer. J. Math.* **124** (2002), no. 5, p. 879–920.
- [Ber90] V. BERKOVICH – *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, RI, 1990.
- [Ber93] ———, « Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **78** (1993), p. 5–161.
- [BGR84] S. BOSCH, U. GÜNTZER & R. REMMERT – *Non-Archimedean analysis. A systematic approach to rigid analytic geometry*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 261, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [BL93a] S. BOSCH & W. LÜTKEBOHMERT – « Formal and rigid geometry. I. Rigid spaces », *Math. Ann.* **295** (1993), no. 2, p. 291–317.
- [BL93b] ———, « Formal and rigid geometry. II. Flattening techniques », *Math. Ann.* **296** (1993), no. 3, p. 403–429.
- [BLR95] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT & M. RAYNAUD – « Formal and rigid geometry. IV. The reduced fiber theorem », *Invent. Math.* **119** (1995), no. 2, p. 361–398.
- [Cha17] M. CHAPUIS – « Formes modérément ramifiées de polydisques fermés et de dentelles », 2017, accepté pour publication aux *Annales de l'Institut Fourier*, arXiv 1703.10525.
- [CT] B. CONRAD & M. TEMKIN – « Descent for non-archimedean analytic spaces », in preparation, the current version is available on the authors's webpages.
- [Duca] A. DUCROS – « Dévisser, découper, éclater et aplatir les espaces de Berkovich », à paraître dans *Compositio Mathematica*, arXiv:1906.00301.
- [Ducb] ———, « La structure des courbes analytiques », en préparation, une version très loin d'être définitive est disponible à l'adresse <http://webusers.imj-prg.fr/~antoine.ducros/livre.html>.
- [Duc03] ———, « Parties semi-algébriques d'une variété algébrique  $p$ -adique », *Manuscripta Math.* **111** (2003), no. 4, p. 513–528.
- [Duc09] ———, « Les espaces de Berkovich sont excellents », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **59** (2009), no. 4, p. 1443–1552 (French).

- [Duc13] ———, « Toute forme modérément ramifiée d'un polydisque ouvert est triviale », *Math. Z.* **273** (2013), no. 1-2, p. 331–353 (French), arXiv:1106.0135.
- [Duc14] ———, « Stability of Abhyankar valuations », 2014, dans le volume des *Oberwolfach Reports* consacré à la conférence *Valuation Theory and Its Applications* de novembre 2014.
- [Duc18] ———, « Families of Berkovich spaces », *Astérisque* **400** (2018), vii+262 p.
- [EGA IV<sub>2</sub>] A. GROTHENDIECK – « Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas II. », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **24** (1965), p. 231 (French).
- [EGA IV<sub>3</sub>] ———, « Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas III. », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **28** (1966), p. 361 (French).
- [GR66] H. GRAUERT & R. REMMERT – « Über die Methode der diskret bewerteten Ringe in der nicht-archimedischen Analysis », *Inventiones Math.* **2** (1966), no. 2, p. 87–133.
- [Gru66] L. GRUSON – « Théorie de Fredholm  $p$ -adique », *Bulletin de la Société Mathématique de France* **94** (1966), p. 67–95 (French).
- [Gru68] ———, « Fibrés vectoriels sur un polydisque ultramétrique. », *Ann. Sci. École Norm. Sup* **1** (1968), no. 4, p. 45–89 (French).
- [Kuh10] F.-V. KUHLMANN – « Elimination of ramification  $i$  : the generalized stability theorem. », *Trans. Amer. Math. Soc.* **362** (2010), no. 11.
- [Nag66] M. NAGATA – « Finitely generated rings over a valuation ring », *J. Math. Kyoto Univ.* **5** (1966), p. 163–169.
- [Ohm89] J. OHM – « The henselian defect for valued function fields », *Proc. Amer. Math. Soc.* **107** (1989), no. 2, p. 299–308.
- [Poi] J. POINEAU.
- [Poi08] J. POINEAU – « Un résultat de connexité pour les variétés analytiques  $p$ -adiques : privilège et noethérianité. », *Compos. Math.* **144** (2008), p. 107–133.
- [RG71] M. RAYNAUD & L. GRUSON – « Critères de platitude et projectivité. techniques de «platification» d'un module. », *Invent. Math.* **13** (1971).
- [Tei14] B. TEISSIER – « Overweight deformations of affine toric varieties and local uniformization », (2014), p. 474–565.
- [Tem04] M. TEMKIN – « On local properties of non-Archimedean analytic spaces. II », *Israel J. Math.* **140** (2004), p. 1–27.
- [Tem10] ———, « Stable modification of relative curves », *J. Algebraic Geom.* **19** (2010), no. 4, p. 603–677.