



**HAL**  
open science

# Microlocalisation d'opérateurs différentiels arithmétiques sur un schéma formel lisse

Raoul Hallopeau

► **To cite this version:**

Raoul Hallopeau. Microlocalisation d'opérateurs différentiels arithmétiques sur un schéma formel lisse. 2024. hal-03975658v5

**HAL Id: hal-03975658**

**<https://hal.science/hal-03975658v5>**

Preprint submitted on 25 Jan 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Microlocalisation d'opérateurs différentiels arithmétiques sur un schéma formel lisse

Raoul Hallopeau

## Abstract

Let  $\mathfrak{X}$  be a formal smooth quasi-compact scheme over a complete discrete valuation ring  $\mathcal{V}$  of mixed characteristic  $(0, p)$ . We consider the sheaves of differential operators  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}$  with a congruence level  $k \in \mathbb{N}$  and their projective limit  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty} = \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}$ . In this article, we construct microlocalization sheaves of  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}$  for the different congruence levels  $k$  admitting transition morphisms. Then we pass to the projective limit over  $k$  in order to obtain some microlocalization sheaves of  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}$ . These sheaves will be useful later to define a characteristic variety for coadmissible  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}$ -modules when  $\mathfrak{X}$  is a formal curve.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Les faisceau <math>\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}</math> et <math>\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}</math></b>	<b>6</b>
2.1	Le faisceau $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}$ . . . . .	6
2.2	Le faisceau $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}$ . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Microlocalisations de <math>\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}</math></b>	<b>10</b>
3.1	Microlocalisation d'une algèbre de Banach quasi-abélienne . . . . .	11
3.2	Un premier microlocalisé $\mathcal{E}_k$ . . . . .	14
3.3	Des microlocalisés $\mathcal{F}_{k, r}$ avec des morphismes de transition . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Microlocalisation de <math>\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}</math></b>	<b>37</b>
4.1	Les microlocalisés $\mathcal{F}_{\infty, r}$ . . . . .	37
4.2	Le microlocalisé $\mathcal{F}_{\infty}$ . . . . .	45

# 1 Introduction

Un enjeu majeur dans la théorie des  $\mathcal{D}$ -modules arithmétiques réside dans la généralisation de la notion de  $\mathcal{D}$ -modules holonomes. Une catégorie constituée de tels modules permettra par exemple d'étudier les cohomologies cristalline et rigide. Des catégories de  $\mathcal{D}$ -modules arithmétiques holonomes avec Frobenius ont déjà été construites par Berthelot et Caro de deux manières différentes. Christine Huyghe, Tobias Schmidt et Matthias Strauch ont introduit dans [6] un faisceau  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty} = \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$  d'opérateurs différentiels obtenu en rajoutant des niveaux de congruence  $k \in \mathbb{N}$  aux faisceaux de Berthelot. Les modules à considérer sur le faisceau  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$  sont les  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles. Actuellement, il n'existe pas de notion satisfaisante d'holonomie pour les  $\mathcal{D}$ -modules coadmissibles. L'article [3] de Ardakov-Bode-Wadsley introduit une catégorie de modules faiblement holonomes de  $\mathcal{D}$ -modules coadmissibles sur un espace analytique rigide en utilisant la caractérisation cohomologique classique des modules holonomes. Cependant, cette catégorie demeure trop vaste, car les  $\mathcal{D}$ -modules faiblement holonomes ne sont pas tous de longueur finie. Une autre approche envisageable consiste à définir une variété caractéristique pour les  $\mathcal{D}$ -modules coadmissibles. Sur un schéma formel lisse, les opérateurs différentiels considérés ne sont pas d'ordre fini. Par conséquent, la méthode classique des variétés complexes pour définir la variété caractéristique ne s'applique plus. Une autre méthode consiste à construire un microlocalisé du faisceau des opérateurs différentiels. Une telle construction dans le cas arithmétique a déjà été faite par exemple par Adriano Marmora et Tomoyuki Abe dans [2], où la microlocalisation sert ensuite à démontrer une formule du produit.

Dans cet article, nous construisons un faisceau microlocalisé  $\mathcal{F}_\infty$  du faisceau  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$  des opérateurs différentiels afin d'introduire ultérieurement une variété caractéristique pour les  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles. Une telle construction a déjà été entreprise par Tomoyuki Abe dans l'article [1] pour les opérateurs différentiels arithmétiques de Berthelot. Il démontre que ses microlocalisés permettent de retrouver la variété caractéristique des  $\mathcal{D}$ -modules arithmétiques lorsque  $\mathfrak{X}$  est une courbe formelle lisse quasi-compacte. Par ailleurs, Tomoyuki Abe a rencontré les mêmes difficultés techniques que celles que nous rencontrons pour le faisceau  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$  : trouver des microlocalisés pour chaque rang  $m$  admettant des morphismes de transitions compatibles à ceux des faisceaux  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$ . Pour microlocaliser  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ , il nous faut trouver des microlocalisés admettant des morphismes de transition compatibles avec ceux de l'article [6] pour les différents niveaux de congruences  $k \in \mathbb{N}$ . De plus, la construction du microlocalisé  $\mathcal{F}_\infty$  est délicate pour une autre raison. En effet, les  $K$ -algèbres  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  de l'article [6], pour  $U$  un ouvert affine muni de coordonnées locales, ne sont pas commutatives et ne vérifient pas les conditions de Ore. Nous devons donc recourir à un autre critère de localisation. En pratique, le microlocalisé  $\mathcal{F}_\infty(U)$  est la plus petite algèbre contenant  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$  dans laquelle un opérateur différentiel est inversible si et seulement si cet opérateur est fini, s'il admet un unique coefficient de norme maximale et si ce coefficient est dominant et inversible.

Revenons maintenant, et plus précisément, dans le vif du sujet de cet article. Soit  $\mathcal{V}$  un anneau complet de valuation discrète de caractéristique mixte  $(0, p)$ . Notons  $K = \text{Frac}(\mathcal{V})$  son corps des fractions et  $\varpi$  une uniformisante. Considérons un  $\mathcal{V}$ -schéma formel lisse  $\mathfrak{X}$  de dimension  $d$ , connexe et quasi-compact. L'objet principal que nous considérons est le faisceau des opérateurs différentiels  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}$  introduit dans l'article [6] par Christine Huyghe, Tobias Schmidt et Matthias Strauch. Il s'agit d'un faisceau de sous-algèbres du faisceau  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(0)}$  des opérateurs différentiels cristallins auquel nous rajoutons un paramètre  $k \in \mathbb{N}$  appelé niveau de congruence. Soit  $U$  un ouvert affine de  $\mathfrak{X}$  sur lequel nous disposons d'un système de coordonnées étales  $(x_1, \dots, x_d)$ . Si  $\partial_1, \dots, \partial_d$  sont les dérivations associées, alors

$$\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U) = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_\alpha \cdot \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_d^{\alpha_d}, \quad a_\alpha \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U) \text{ tels que } a_\alpha \cdot \varpi^{-k|\alpha|} \xrightarrow{|\alpha| \rightarrow \infty} 0 \right\}$$

avec  $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_d \in \mathbb{N}$ . Pour  $k = 0$ , nous retrouvons le faisceau de Berthelot  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(0)}$  de niveau  $m = 0$ . Notons  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} := \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)} \otimes_{\mathcal{V}} K$ .

Introduisons ensuite le faisceau limite projective  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty} := \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ . Pour des entiers  $k' \geq k$ , nous disposons d'une inclusion d'algèbres  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k',\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \subset \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ . Ces inclusions locales induisent des morphismes de transition  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k',\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ . Localement, si  $U$  un ouvert affine de  $\mathfrak{X}$  sur lequel on dispose d'un système de coordonnées étales, alors  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$  est la  $K$ -algèbre de Fréchet-Stein donnée par

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U) = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_\alpha \cdot \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_d^{\alpha_d} : a_\alpha \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U) \text{ tq } \forall \eta > 0, \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} a_\alpha \cdot \eta^n = 0 \right\}.$$

Notre objectif final est d'introduire une catégorie de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles holonomes qui soient de longueur finie. Par la suite, nous souhaiterions adapter ces constructions au niveau de l'espace de Zariski Riemann  $\langle \mathfrak{X} \rangle$  afin d'obtenir une variété caractéristique dans le cas de l'espace analytique rigide  $\mathfrak{X}_K$  associé à  $\mathfrak{X}$ . Les  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules holonomes doivent satisfaire la condition suivante. Lorsque  $P$  est un opérateur différentiel de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ , le  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P = \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$  devra être holonome seulement si  $P$  est un opérateur différentiel fini. En effet, si  $P$  n'est pas un opérateur fini, alors  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$  est un module de longueur finie augmentant avec  $k$ . De plus,  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$  est localement un  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module libre de dimension de plus en plus grande. Nous ne pouvons donc pas espérer avoir de bonnes propriétés de finitude pour le module coadmissible  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$ . Détaillons maintenant ce qu'il advient lorsque  $\mathfrak{X}$  est une courbe formelle pour un opérateur fini  $P = \sum_{n=0}^q a_n \cdot \partial^n$  d'ordre  $q$  de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ . Soit  $(x, \xi)$  un système de coordonnées locales sur  $T^*U$  associée à la coordonnée étale de  $U$ . Nous vérifions alors pour  $k$  suffisamment grand que

$$\text{Car} \left( \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P \right) \cap T^*U = \{(x, \xi) \in T^*U : \bar{a}_q(x) \cdot \xi^q = 0\}.$$

Ces variétés caractéristiques ne dépendent plus de  $k$  à partir d'un certain niveau de congruence. Notons  $x_1, \dots, x_s$  les zéros du coefficient dominant  $a_q$  de  $P$  dans l'ouvert  $U$ . La figure suivante trace l'allure de la variété caractéristique des  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$ .

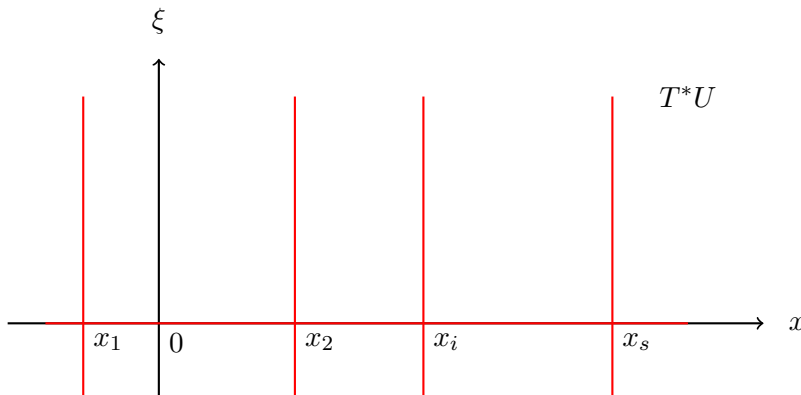


Figure 1 :  $\text{Car}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P) \cap T^*U$

Ce critère motive la construction du microlocalisé  $\mathcal{F}_\infty$  du faisceau  $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$  de cet article. En pratique,  $\mathcal{F}_\infty$  est un faisceau vérifiant la condition d'inversibilité suivante lorsque  $\mathfrak{X}$  est une courbe formelle. Un opérateur différentiel  $P$  de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}(U)$  est inversible dans le microlocalisé  $\mathcal{F}_\infty(U)$  si et seulement si

1.  $P = \sum_{n=0}^q a_n \cdot \partial^n$  est un opérateur fini d'ordre  $q$  de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}(U)$ ,
2. le coefficient dominant  $a_q$  de  $P$  est inversible dans  $\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U)$ .

Le support du module  $\mathcal{M} := \mathcal{F}_\infty/P$  permet alors de distinguer les opérateurs infinis des opérateurs finis  $P$ . Si  $P$  est un opérateur infini, alors  $(\text{Supp } \mathcal{M}) \cap U = U$  puisque  $P$  n'est pas inversible dans l'algèbre  $\mathcal{F}_\infty(V)$  quel que soit l'ouvert  $V \subset U$ . Dans ce cas,  $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}) = 1$ . Soit maintenant  $P$  un opérateur fini de coefficient dominant  $a_q \in \mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U)$ . D'après le critère d'inversibilité des opérateurs de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}(U)$  dans le microlocalisé  $\mathcal{F}_\infty(U)$ , le support  $(\text{Supp } \mathcal{M}) \cap U$  est l'union finie des zéros  $x_1, \dots, x_s$  de la fonction  $a_q$  dans l'ouvert  $U$ . Ainsi,  $\dim \text{Supp } \mathcal{M} = 0$ . Les points  $x_1, \dots, x_s$  du support  $(\text{Supp } \mathcal{M}) \cap U$  sont les abscisses des composantes irréductibles verticales des variétés caractéristiques des modules  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$  données dans la figure 1 pour  $k$  suffisamment grand. Un tel microlocalisé permettra de construire une variété caractéristique du module coadmissible  $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}/P$  coïncidant avec les variétés caractéristiques  $\text{Car}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P)$  pour  $k$  suffisamment grand. La condition d'inversibilité est analogue en dimension quelconque. Cependant, dès que  $d \geq 2$ , il ne s'agit pas encore du critère désiré d'inversibilité pour obtenir la catégorie souhaitée de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ -modules holonomes.

Nous commençons dans la section 2 par rappeler brièvement la définition et les principales propriétés du faisceau  $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ . Expliquons maintenant en quelques mots la construc-

tion du microlocalisé  $\mathcal{F}_\infty$ . Cette dernière fait intervenir des microlocalisés  $\mathcal{F}_{k,r}$  des faisceaux  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$  pour tous les entiers  $k \geq r \geq 1$ . Soit  $U$  un ouvert affine de  $\mathfrak{X}$  muni de coordonnées étales. La  $K$ -algèbre  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  est non commutative et ne vérifie pas les conditions de Ore. Pour inverser la dérivation, nous utilisons une localisation non commutative décrite dans l'annexe par Peter Schneider de l'article [9] de Gergely Zábrádi où les conditions de Ore sont remplacées par la condition d'être quasi-abélien. On vérifie dans notre cas que la  $K$ -algèbre  $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U), |\cdot|_k)$  est quasi-abélienne dès que  $k \geq 1$ , ie il existe une constante  $\gamma \in ]0, 1[$  telle que

$$\forall P, Q \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U), \quad |PQ - QP|_k \leq \gamma \cdot |P|_k \cdot |Q|_k.$$

Remarquons aussi que la localisation de l'article [9] ne s'applique pas directement à  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$  puisque ce n'est pas une algèbre de Banach. Cette localisation nous permet de construire dans la section 3 des microlocalisés  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ , pour tous entiers  $k \geq r \geq 1$ , de l'algèbre  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  en inversant les dérivations  $\partial_i$ . Puisque les ouverts affines  $U$  de  $\mathfrak{X}$  admettant un système de coordonnées locales forment une base de voisinages ouverts de  $\mathfrak{X}$ , ces algèbres définissent un faisceau  $\mathcal{F}_{k,r}$  sur le schéma formel  $\mathfrak{X}$ . Sur un tel ouvert affine, nous avons

$$\mathcal{F}_{k,r}(U) = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} a_\alpha \cdot \varpi^{[\alpha,k,r]} \partial^\alpha, \quad a_\alpha \xrightarrow{|\alpha| \rightarrow +\infty} 0 \right\}$$

avec  $|\alpha| := |\alpha_1| + \dots + |\alpha_d|$  et  $[\alpha, k, r] := \sum_{i=1}^d (k \cdot \alpha_i \cdot \mathbb{1}_{\alpha_i \geq 0} + r \cdot \alpha_i \cdot \mathbb{1}_{\alpha_i < 0})$ . Les microlocalisés  $\mathcal{F}_{k,r}$  admettent des morphismes de transition  $\mathcal{F}_{k+1,r} \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}$  commutant avec les morphismes de transition  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ . En passant à la limite projective sur  $k \geq r$  et pour  $r$  fixé, nous obtenons un microlocalisé  $\mathcal{F}_{\infty,r}$  du faisceau  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ , construit dans la partie 4.1, dans lequel la dérivation est localement inversible. Nous démontrons que  $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$  est une  $K$ -algèbre de Fréchet-Stein pour tout entier naturel  $r \in \mathbb{N}^*$  et qu'il existe des morphismes naturels injectifs de  $K$ -algèbres  $\mathcal{F}_{\infty,r+1}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ . L'algèbre  $\mathcal{F}_\infty(U)$  de la section 4.2 est simplement la limite inductive des algèbres  $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$  pour  $r \geq 1$ .

## Notations

- $\mathcal{V}$  est un anneau complet de valuation discrète de caractéristique mixte  $(0, p)$ , d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$  et de corps résiduel  $\kappa$  supposé parfait. On note  $|\cdot|$  la valeur absolue normalisée de  $\mathcal{V}$ ,  $\varpi$  une uniformisante et  $K = \text{Frac}(\mathcal{V})$  son corps des fractions.
- $X$  est un  $\kappa$ -schéma lisse connexe quasi-compact de dimension  $d$  et  $x \in X$  est un point fermé.
- $\mathfrak{X}$  est un  $\mathcal{V}$ -schéma formel lisse relevant  $X$ , d'idéal de définition engendré par l'uniformisante  $\varpi$  et  $\mathfrak{X}_K$  est l'espace analytique rigide associé à  $\mathfrak{X}$ .

- $U$  est un ouvert affine de  $\mathfrak{X}$  contenant  $x$  sur lequel on dispose d'un système de coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_d)$ . On note  $\partial_1, \dots, \partial_d$  les dérivations associées.
- Sauf mention contraire, les idéaux et les modules considérés sont tous à gauche.

## 2 Les faisceau $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ et $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$

On rappelle brièvement dans cette section les définitions et les principales propriétés des faisceaux  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$  et  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$  des opérateurs différentiels de Huyghe-Schmidt-Strauch. Le lecteur peut consulter la seconde partie de l'article [6] ou la seconde section du document [5] pour plus de détails. On désigne par  $U$  un ouvert affine de  $\mathfrak{X}$  contenant le point  $x$  sur lequel on dispose d'un système de coordonnées étales dont les dérivations sont  $\partial_1, \dots, \partial_d$ .

### 2.1 Le faisceau $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$

Le faisceau  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}$  est défini comme un sous-faisceau dépendant d'un paramètre  $k \in \mathbb{N}$  appelé niveau de congruence du faisceau usuel  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{(0)}$  des opérateurs différentiels sur le schéma formel lisse  $\mathfrak{X}$ . On retrouve  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{(0)}$  lorsque  $k = 0$ . Localement,  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U)$  est la  $\mathcal{V}$ -algèbre engendrée par  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$  et par les dérivations  $\varpi^k \partial_i$ . Plus précisément, si  $\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_d^{\alpha_d}$  et si  $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_d$  pour  $\alpha \in \mathbb{N}^d$ , alors

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U) = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_\alpha \cdot \varpi^{k|\alpha|} \partial^\alpha, \quad a_\alpha \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U), \quad a_\alpha = 0 \text{ pour } |\alpha| \gg 0 \right\}.$$

On peut aussi voir  $\mathcal{D}_{U,k}^{(0)}$  comme le  $\mathcal{O}_U$ -module libre de base les puissances des dérivations  $\varpi^k \partial_i$  :

$$\mathcal{D}_{U,k}^{(0)} = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \mathcal{O}_U \cdot \varpi^{k|\alpha|} \partial^\alpha.$$

Les dérivations  $\varpi^k \partial_i$  sont des endomorphismes  $\mathcal{V}$ -linéaires de l'algèbre  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$ . La loi multiplicative de la  $\mathcal{V}$ -algèbre des opérateurs différentiels  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U)$  est la composition d'applications linéaires. En pratique, on a  $\varpi^{k|\alpha|} \partial_i^\alpha \cdot \varpi^{k|\beta|} \partial_i^\beta = \varpi^{k|\alpha+\beta|} \partial_i^{\alpha+\beta}$  et les crochets

$$\forall a \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U), \quad [\varpi^k \partial_i, a] = \varpi^k \partial_i \cdot a - a \cdot \varpi^k \partial_i = \varpi^k \partial_i(a),$$

$$[\varpi^k \partial_i, \varpi^k \partial_j] = 0.$$

On note  $\mathcal{D}_{X,k}$  la réduction modulo  $\varpi$  de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}$ . C'est le faisceau de  $\kappa$ -algèbres sur la fibre spéciale  $X = \mathfrak{X} \times_{\mathcal{V}} \text{Spec } \kappa$  de  $\mathfrak{X}$  engendré localement sur  $U$  par  $\mathcal{O}_{X|U}$  et par les dérivations  $\partial_{i,k}$  images de  $\varpi^k \partial_i$  après réduction modulo  $\varpi$ . On rappelle que  $\mathfrak{X}$  et  $X$  ont même espace topologique. On identifie alors  $U$  à un ouvert affine de  $X$ .

L'ouvert affine  $U$  de  $\mathfrak{X}$  est le spectre formel d'une  $\mathcal{V}$ -algèbre affinoïde  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$ . Cette dernière est intègre car le schéma formel  $\mathfrak{X}$  est connexe et lisse. Il en découle que la norme spectrale de l'algèbre affinoïde  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$ , notée dans la suite  $|\cdot|$ , est une valuation complète non archimédienne. Soit  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)} := \varprojlim_i (\mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)} / \varpi^{i+1} \mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)})$  le complété  $\varpi$ -adique de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}$ . On dispose de la description locale suivante :

$$\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U) = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_{\alpha} \cdot \varpi^{k|\alpha|} \partial^{\alpha}, \quad a_{\alpha} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U), \quad |a_{\alpha}| \xrightarrow{|\alpha| \rightarrow \infty} 0 \right\}.$$

On pose  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} := \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{V}} K$  et  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} := \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)} \otimes_{\mathcal{V}} K$ . Les éléments de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  sont les opérateurs différentiels convergents à coefficients dans la  $K$ -algèbre affinoïde  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$ . Il est démontré dans l'article [6] que ces algèbres sont noetheriennes et que les faisceaux associés sont cohérents. Pour tous entiers  $k' > k$ , il est clair que  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k',\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \subset \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ . En particulier,  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  est une sous-algèbre de l'algèbre des opérateurs différentiels cristallins  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(0)}(U) = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},0}^{(0)}(U)$ . On considère les morphismes de transition  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k',\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$  induit par les inclusions locales  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k',\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  pour tout ouvert affine  $U$  muni d'un système de coordonnées locales.

**Définition 2.1.** Soit  $P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_{\alpha} \cdot \varpi^{k|\alpha|} \partial^{\alpha}$  un opérateur de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ . On note

1.  $|P|_k := \max_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \{|a_{\alpha}|\}$ ;
2.  $\overline{N}_k(P) := \max\{|\alpha| : \alpha \in \mathbb{N}^d, |a_{\alpha}| = |P|_k\}$ .

On appelle l'entier  $\overline{N}_k(P)$  l'ordre de l'opérateur différentiel  $P$ . L'entier  $\overline{N}_k(P)$  coïncide avec l'ordre de  $\bar{P} = (\alpha P \bmod \varpi)$  dans  $\mathcal{D}_{X,k}(U)$  pour tout scalaire  $\alpha \in K$  vérifiant  $|\alpha P|_k = 1$ . Par ailleurs, ces deux définitions sont indépendantes du choix des coordonnées locales sur  $U$ . En effet, il est montré dans [5] lorsque  $\mathfrak{X}$  est une courbe que la norme  $|\cdot|_k$  et la fonction  $\overline{N}_k$  ne dépendent pas du choix de la coordonnée locale de  $U$ . Les preuves fonctionnent toujours en dimension supérieure. Cependant, la norme  $|P|_k$  et l'entier  $\overline{N}_k(P)$  dépendent du point  $x$  initial : ce sont des notions locales en  $x$ . Les deux résultats suivants sont démontrés dans la seconde partie de [5] lorsque  $d = 1$ . La preuve du premier se généralise immédiatement à la dimension supérieure.

**Proposition 2.2.**

1. Les  $K$ -algèbres  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U)$  et  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  sont complètes pour la norme  $|\cdot|_k$ .
2. La norme induite sur tout  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent est complète.
3. Pour tous opérateurs différentiels  $P$  et  $Q$  de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ , on a

$$|PQ|_k = |P|_k \cdot |Q|_k \quad \text{et} \quad \overline{N}_k(PQ) = \overline{N}_k(P) + \overline{N}_k(Q).$$



On suppose dans la proposition suivante que  $\mathfrak{X}$  est une courbe formelle, autrement dit  $d = 1$ . Dans ce cas,  $\overline{N}_k(P) = \max\{n \in \mathbb{N} : |a_n| = |P|_k\}$ .

**Proposition 2.3.** *Lorsque  $\dim \mathfrak{X} = d = 1$ , un opérateur différentiel  $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\varpi^k \partial)^n$  de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  est inversible si et seulement si  $\overline{N}_k(P) = 0$  et si  $a_0 \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)^\times$ .*

## 2.2 Le faisceau $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$

On rappelle dans cette partie quelques propriétés du faisceau  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty} = \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$  des opérateurs différentiels surconvergeants et la définition des  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles. Pour plus de détails sur le faisceau  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$  et sur les propriétés des  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles, le lecteur peut toujours regarder l'article [6] de Christine Huyghe, Tobias Schmidt et Matthias Strauch.

Soit  $U$  un ouvert affine contenant le point  $x$  sur lequel on dispose d'un système de coordonnées locales. Pour tout entier naturel  $k$ , on rappelle que l'algèbre  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  est une sous-algèbre de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ . On considère les morphismes de transition  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$  induits par ces inclusions locales. On définit le faisceau  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$  comme la limite projective sur  $k$  des faisceaux  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ .

**Définition 2.4.** *On note  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty} := \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ .*

Le faisceau  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$  est un faisceau de  $K$ -algèbres sur le schéma formel  $\mathfrak{X}$  vérifiant les trois points suivants :

1.  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$  est une  $K$ -algèbre de Fréchet-Stein et sa topologie est induite par les normes  $|\cdot|_k$  des algèbres de Banach  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  ;
2.  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U) = \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) = \bigcap_{k \geq 0} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  ;
3.  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U) = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_\alpha \cdot \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_d^{\alpha_d} : a_\alpha \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U) \text{ tq } \forall \eta > 0, \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} a_\alpha \cdot \eta^{|\alpha|} = 0 \right\}$ .

Le lemme suivant, démontré dans [5] en dimension un, caractérise les opérateurs différentiels finis de l'algèbre  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$  à l'aide des fonctions  $\overline{N}_k$  pour tout niveau de congruence  $k$ . La preuve s'adapte immédiatement à la dimension supérieure. On en déduit les éléments inversibles de l'algèbre  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$  d'après la proposition 2.3 lorsque  $d = 1$  et d'après le corollaire 3.19 pour  $d$  quelconque.

**Lemme 2.5.** *Soit  $P$  un opérateur différentiel de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ . La suite  $(\overline{N}_k(P))_{k \geq 0}$  est croissante. De plus,  $P$  est un opérateur fini d'ordre  $q \in \mathbb{N}$  si et seulement si la suite  $(\overline{N}_k(P))_k$  est stationnaire de valeur limite  $q$ .*

**Corollaire 2.6.** *Les éléments inversibles de la  $K$ -algèbre  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$  sont exactement les fonctions inversibles :  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)^\times = \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)^\times$ .*

On termine cette partie en rappelant la définition des  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles et en détaillant un exemple concret intéressant de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible. Un tel exemple motive la construction du microlocalisé que l'on fait ensuite et la définition de variété caractéristique que l'on souhaite adopter pour les  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles.

**Définition 2.7.** *Un module coadmissible est un  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module  $\mathcal{M}$  isomorphe à une limite projective  $\varprojlim_k \mathcal{M}_k$  de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents  $\mathcal{M}_k$  tels que les applications de transitions  $\mathcal{M}_{k+1} \rightarrow \mathcal{M}_k$  soient  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -linéaires et tels que pour chaque niveau de congruence  $k$ , on dispose d'un  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -isomorphisme induit par l'application de transition :*

$$\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_{k+1} \simeq \mathcal{M}_k.$$

**Exemple 2.8.** On suppose que  $d = 1$ , autrement dit  $\mathfrak{X}$  est une courbe formelle. Soit  $P = \prod_{n \geq 1} (1 - \varpi^n \partial) \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ . Alors  $\overline{N}_k(P) = k$ . En effet, le coefficient de  $\partial^n$  est à un signe près

$$\varpi^{1+2+\dots+n} \cdot (1 + \varpi + \varpi^2 + \dots) + \varpi^{2+3+\dots+(n+1)} \cdot (1 + \varpi + \varpi^2 + \dots) + \dots = \varpi^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot a_n$$

avec  $a_n$  un élément de  $\mathcal{V}$  de valeur absolue un. Dans  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ , le coefficient d'ordre  $n$  de  $P$  est  $\pm \varpi^{n(\frac{n+1}{2}-k)} \cdot a_n$ . Par définition,  $\overline{N}_k(P)$  est le plus grand entier  $n$  maximisant la valeur absolue  $|\varpi|^{n(\frac{n+1}{2}-k)}$ . On cherche donc le plus grand entier  $n$  minimisant la puissance  $n(\frac{n+1}{2} - k)$ . La fonction  $x \mapsto x(\frac{x+1}{2} - k)$  est minimale en  $x = k - \frac{1}{2}$  de valeur  $-k^2 - k + \frac{3}{4}$ . La puissance  $n(\frac{n+1}{2} - k)$  est donc minimale pour  $n = k - 1$  et  $n = k$ . Ceci prouve que  $\overline{N}_k(P) = k$ . On a de plus

$$|P_k|_k = |\varpi|^{k(\frac{k+1}{2}-k)} = |\varpi|^{-k^2/2+k/2}.$$

Dans  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ ,  $P$  s'écrit  $P = P_k \cdot Q_k$  avec  $P_k = \prod_{1 \leq n \leq k} (1 - \varpi^n \partial)$  un opérateur fini d'ordre  $\overline{N}_k(P_k) = k$  et  $Q_k = \prod_{n > k} (1 - \varpi^n \partial)$  inversible dans  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  puisque  $\overline{N}_k(Q_k) = 0$  et puisque son coefficient constant est inversible. On en déduit que  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P_k$ . Par ailleurs,  $P_{k+1} = (1 - \varpi^{k+1} \partial) \cdot P_k$  avec  $1 - \varpi^{k+1} \partial$  inversible dans  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ . On a donc  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P_{k+1} \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P_k$ . Autrement dit,  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P \simeq \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P_k$  en tant que  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible.

On peut retrouver  $P$  à partir des opérateurs  $P_k$  : la suite  $(P_k)_k$  converge vers  $P$  dans la  $K$ -algèbre de Fréchet-Stein  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ . En effet, il suffit de le vérifier pour toutes les normes  $|\cdot|_m$ . On a  $P - P_k = (Q_k - 1) \cdot P_k$ . Pour  $k \geq m$ , on observe que  $\overline{N}_m(P_k) = m$  et que

$|P_k|_m = |\varpi|^{-\frac{1}{2}(m^2-m)}$ . Le coefficient constant de  $Q_k - 1$  est nul et le coefficient de  $\partial^n$  est de la forme  $\varpi^{k+(k+1)+\dots+(k+n-1)} \cdot a_n$ , où  $a_n \in \mathcal{V}$  est de valeur absolue 1. Dans  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},m,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ , le coefficient de  $(\varpi^m \partial)^n$  est  $\omega^{n(k+\frac{n-1}{2}-m)} \cdot a_n$ . Les coefficients de  $Q_k - 1$  sont presque ceux de  $P_k$  : il suffit de remplacer  $k$  par  $m+1-k$ . La fonction  $x(k+\frac{x-1}{2}-m)$  est minimale pour  $x = m+1-k-1/2$ . Pour  $k$  assez grand, par exemple  $k \geq m+1$ , ce terme est négatif. La norme de  $1 - Q_k$  est donc donnée par le coefficient d'indice un :  $\overline{N}_k(Q_k - 1) = 1$  et  $|Q_k - 1|_m = |\varpi|^{k-m}$ . Il vient

$$|P - P_k|_m = |1 - Q_k|_m \cdot |P_k|_m = |\varpi|^{k-\frac{m^2}{2}-\frac{m}{2}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

On peut vérifier que le  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P_k$  est de longueur  $k$ , et qu'il s'agit d'un  $\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}$ -module libre de rang  $k$ . Ainsi, le  $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ -module coadmissible  $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}/P$  n'aura pas de bonnes propriétés de finitudes. On souhaite définir une notion d'holonomie pour les  $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ -modules coadmissibles telle que le module  $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}/P$  soit holonome si et seulement  $P$  est un opérateur différentiel fini. C'est ce qui motive la construction du microlocalisé  $\mathcal{F}_{\infty}$  de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$  ; ce dernier ne rend inversibles que les opérateurs différentiels finis.

### 3 Microlocalisations de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$

On introduit dans cette section des microlocalisés du faisceau  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$  pour un niveau de congruence  $k$  supérieur ou égale à un. Pour cela, on utilise une localisation non commutative décrite dans l'annexe écrite par Peter Schneider de l'article [9] de Gergely Záradi. On commence par rappeler les principales propriétés de ce microlocalisé. La condition pour construire un tel microlocalisé est d'être une algèbre quasi-abélienne. Comme déjà dit en introduction, les  $K$ -algèbres de Banach  $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U), |\cdot|_k)$  sont quasi-abéliennes dès que  $k \geq 1$ . On inverse en pratique la partie multiplicative  $S = \{\partial^\alpha, \alpha \in \mathbb{N}^d\}$  des puissances des dérivations  $\partial_i$ . Une difficulté est de construire des microlocalisés des algèbres  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  pour la partie multiplicative  $S$  admettant des morphismes de transition commutant avec les morphismes injectifs  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ .

Soient  $k \geq r \geq 1$ . On peut définir un tel microlocalisé en inversant les éléments de  $S$  dans l'algèbres  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  pour toutes les normes quasi-abéliennes  $|\cdot|_r, \dots, |\cdot|_k$  de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ . On obtient ainsi une  $K$ -algèbre de Banach noétherienne  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  dont la norme est seulement sous-multiplicative. Les faisceaux  $\mathcal{F}_{k,r}$ , pour un niveau  $r$  fixé, vont admettre des morphismes de transition  $\mathcal{F}_{k+1,r} \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}$  commutant avec les morphismes  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ . En passant à la limite projective sur  $k \geq r$ , on construit un faisceau  $\mathcal{F}_{\infty,r} = \varprojlim_{k \geq r} \mathcal{F}_{k,r}$ . Localement,  $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$  est une  $K$ -algèbre de Fréchet-Stein. On introduit dans cette partie les faisceaux  $\mathcal{F}_{k,r}$ . On démontre ensuite plusieurs de leurs propriétés. On définit le faisceau  $\mathcal{F}_{\infty,r}$  plus tard dans la partie 4.1.

### 3.1 Microlocalisation d'une algèbre de Banach quasi-abélienne

On résume et rappelle dans cette partie quelques résultats vérifiés par le microlocalisé d'une algèbre de Banach quasi-abélienne construit dans l'annexe de l'article [9]. On démontre ensuite que l'algèbre  $(\widehat{\mathcal{D}}_{x,k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U), |\cdot|_k)$  est quasi-abélienne dès que  $U$  est un ouvert affine sur lequel on dispose d'un système de coordonnées locales et dès que  $k \geq 1$ .

Soit  $A$  une  $K$ -algèbre de Banach munie d'une norme multiplicative  $|\cdot|$  non archimédienne.

**Définition 3.1.** *On dit que l'algèbre  $A$  est quasi-abélienne pour la norme  $|\cdot|$  s'il existe un réel  $\gamma \in [0, 1[$  tel que pour tout couple  $(a, b) \in A^2$ ,*

$$|ab - ba| = |[a, b]| \leq \gamma \cdot |ab| = \gamma \cdot |a||b|.$$

On fixe maintenant  $m$  normes  $|\cdot|_1, \dots, |\cdot|_m$  quasi-abéliennes sur  $A$ . Une partie multiplicative de  $A$  est un sous ensemble  $S$  de  $A$  vérifiant

1.  $0 \notin S$  et  $1 \in S$ ;
2.  $S$  est stable par multiplication :  $\forall s, t \in S, s \cdot t \in S$ .

Soit  $S$  une partie multiplicative de  $A$ . Il existe alors une unique  $K$ -algèbre de Banach  $B = A(|\cdot|_1, \dots, |\cdot|_m, S)$  munie d'une norme sous-multiplicative  $\|\cdot\|$  non archimédienne et d'un morphisme isométrique de  $K$ -algèbres

$$\phi : (A, \max\{|\cdot|_1, \dots, |\cdot|_m\}) \rightarrow (B, \|\cdot\|)$$

tels que  $\phi(S) \subset B^\times$  et tels que les éléments de  $B$  de la forme  $s^{-1}a$  pour  $(s, a) \in S \times A$  soient denses dans  $B$ . On identifie  $A$  à une sous-algèbre de  $B$  via  $\phi$  : on note encore  $a$  l'image d'un élément  $a$  de  $A$  et  $s^{-1}$  l'inverse de  $s \in S$  dans  $B$ . Par ailleurs, le morphisme  $\phi : A \rightarrow B$  vérifie la propriété universelle suivante.

**Proposition 3.2.** *Soit  $(D, \|\cdot\|_D)$  une  $K$ -algèbre de Banach munie d'un morphisme de  $K$ -algèbres  $f : A \rightarrow D$  tel que  $f(S) \subset D^\times$ . On suppose qu'il existe une constante  $c > 0$  pour laquelle*

$$\forall (s, a) \in S \times A, \quad \|f(s)^{-1} \cdot f(a)\|_D \leq c \cdot \max_{1 \leq i \leq m} \{|s_i|^{-1} \cdot |a_i|\}.$$

*Il existe alors un unique morphisme continu de  $K$ -algèbres  $\tilde{f} : B \rightarrow D$  tel que le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ & \searrow f & \downarrow \tilde{f} \\ & & D \end{array}$$

*commute. De plus, si  $c = 1$  et si la norme  $\|\cdot\|_D$  de  $D$  est sous-multiplicative, alors l'application  $\tilde{f}$  est 1-lipschitzienne :  $\forall b \in B, \|\tilde{f}(b)\|_D \leq \|b\|$ .*

**Remarque 3.3.** La condition vérifiée par  $f$  permet de la prolonger naturellement par uniforme continuité sur  $B$ . En effet, puisque  $s(s^{-1}a) = a$  dans  $B$  et puisque  $\tilde{f}$  est multiplicative, on a nécessairement  $\tilde{f}(s^{-1}a) = f(s)^{-1}f(a)$ . La condition sur  $f$  (impliquant au passage la continuité de  $f$ ) signifie que l'application  $S \times A \rightarrow D$ ,  $(s, a) \mapsto f(s)^{-1}f(a)$  est uniformément continue. Ainsi, puisque les éléments de la forme  $s^{-1}a$  sont denses dans  $B$ , elle se prolonge uniquement en une application continue  $\tilde{f} : B \rightarrow D$ .

Pour la proposition suivante, on se fixe une constante  $\gamma \in [0, 1[$  telle que

$$\forall a, b \in A, \quad \forall 1 \leq i \leq m, \quad |ab - ba|_i \leq \gamma \cdot |ab|_i.$$

**Proposition 3.4.** Pour tout  $(e_1, \dots, e_n) \in B^n$  et pour toute permutation  $\sigma \in S_n$ , on a

$$\|e_1 \dots e_n - e_{\sigma(1)} \dots e_{\sigma(n)}\| \leq \gamma \|e_1 \dots e_n\|.$$

En particulier, l'algèbre  $B$  est quasi-abélienne de constante  $\gamma$  et  $\|ab\| = \|ba\|$ . Par ailleurs, dans le cas où  $B$  est le localisé de  $A$  pour une unique norme, la norme de  $B$  est multiplicative.

Le lemme suivant relie la norme des éléments de  $B$  de la forme  $s^{-1}a$  avec les normes  $|\cdot|_i$  initiales de  $s$  et de  $a$ .

**Lemme 3.5.** Pour  $a, b \in A$  et  $s, t \in S$ , on a

1.  $\|s^{-1}a - s^{-1}b\| = \max_{1 \leq i \leq m} \{|s|_i^{-1} \cdot |a - b|_i\}$ ;
2.  $\|s^{-1}a\| = \max_{1 \leq i \leq m} \{|s|_i^{-1} \cdot |a|_i\}$ ;
3.  $\|s^{-1}a - t^{-1}b\| = \max_{1 \leq i \leq m} \{|s|_i^{-1} \cdot |t|_i^{-1} \cdot |a - b|_i\}$ .

On démontre maintenant que la  $K$ -algèbre  $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U), |\cdot|_k)$  est quasi-abélienne dès que le niveau de congruence  $k$  est supérieur ou égale à un. On désigne toujours par  $U$  un ouvert affine contenant  $x$  sur lequel on dispose d'un système de coordonnées locales. On rappelle que les sections du faisceau  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}$  sur l'ouvert  $U$  sont données par

$$\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U) = \left\{ P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_\alpha \cdot \varpi^{k|\alpha|} \partial^\alpha, \quad a_\alpha \in \mathcal{O}_{\mathfrak{x}, \mathbb{Q}}(U) \quad \text{tq} \quad |a_\alpha| \xrightarrow{|\alpha| \rightarrow \infty} 0 \right\}.$$

On munit la  $K$ -algèbre  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  toujours de la norme multiplicative complète  $|\cdot|_k$  définie par  $|P|_k = \max_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \{|a_\alpha|\}$ . Par définition, les coefficients dominants de  $P$  sont les coefficients d'indice  $\overline{N}_k(P) = \max\{|\alpha| : \alpha \in \mathbb{N}^d, |a_\alpha| = |P|_k\}$ . On rappelle que la norme  $|\cdot|_k$  et la fonction  $\overline{N}_k$  ne dépendent pas du choix de la coordonnée locale. L'algèbre  $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U), |\cdot|_k)$  est une  $K$ -algèbre de Banach dont la topologie est équivalente à la topologie  $\varpi$ -adique.

**Proposition 3.6.** *Pour tout niveau de congruence  $k \geq 1$ , la norme complète  $|\cdot|_k$  de l'algèbre  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  est quasi-abélienne de constante optimale  $|\varpi|^k = p^{-k}$ .*

*Démonstration.* Soit  $P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_\alpha \cdot \varpi^{k|\alpha|} \partial^\alpha$  et  $Q = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^d} b_\beta \cdot \varpi^{k|\beta|} \partial^\beta$  deux opérateurs différentiels de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ . Pour deux multi-indices  $\alpha$  et  $\beta$  de  $\mathbb{N}^d$  tels que  $\alpha \leq \beta$  (ie  $\alpha_i \leq \beta_i$  pour tout entier  $i \in \{1, \dots, d\}$ ), on note

$$\binom{\alpha}{\beta} := \prod_{i=1}^d \binom{\alpha_i}{\beta_i}.$$

On a

$$\begin{aligned} PQ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_\alpha \cdot \varpi^{k|\alpha|} \partial^\alpha \cdot \left( \sum_{\beta \in \mathbb{N}^d} b_\beta \cdot \varpi^{k|\beta|} \partial^\beta \right) \\ &= \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d} a_\alpha \cdot \left( \sum_{0 \leq \ell \leq \alpha} \binom{\alpha}{\ell} \cdot \varpi^{k|\ell|} \cdot \partial^\ell(b_\beta) \cdot \varpi^{k(|\alpha+\beta-\ell|)} \cdot \partial^{\alpha+\beta-\ell} \right) \\ &= \sum_{u \in \mathbb{N}^d} \left( \sum_{\ell \in \mathbb{N}^d} \sum_{0 \leq j \leq u} \binom{u+\ell-j}{\ell} \cdot a_{u+\ell-j} \cdot \varpi^{k|\ell|} \cdot \partial^\ell(b_j) \right) \cdot \varpi^{k|u|} \partial^u. \end{aligned}$$

On en déduit que le coefficient d'indice  $u$  de  $PQ - QP$  est

$$\alpha_u = \sum_{\ell \in \mathbb{N}^d} \sum_{0 \leq j \leq u} \varpi^{k|\ell|} \binom{u+\ell-j}{\ell} \cdot (a_{u+\ell-j} \cdot \partial^\ell(b_j) - b_{u+\ell-j} \cdot \partial^\ell(a_j)).$$

Pour  $\ell = 0$ , la somme sur  $j$  est nulle. Il vient

$$\alpha_u = \varpi^k \sum_{\ell \neq 0} \sum_{0 \leq j \leq u} \varpi^{k(|\ell|-1)} \binom{u+\ell-j}{\ell} \cdot (a_{u+\ell-j} \cdot \partial^\ell(b_j) - b_{u+\ell-j} \cdot \partial^\ell(a_j)).$$

Quitte à normaliser  $P$  et  $Q$ , on peut supposer que  $|P|_k = |Q|_k = 1$ . Chaque terme de la somme a une norme inférieure à 1. La somme est donc aussi de norme inférieure à 1. Ainsi,  $|\alpha_u| \leq |\varpi|^k = p^{-k}$  et  $|PQ - QP|_k = \max_{u \in \mathbb{N}^d} \{|\alpha_u|\} \leq p^{-k}$ .  $\square$

**Remarque 3.7.**

1. L'algèbre  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(0)}(U) = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},0,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  n'est pas quasi-abélienne puisque par exemple  $[\partial_i, x_i] = 1$ . Pour  $k > 0$ , on a  $[\varpi^k \partial_i, x_i] = \varpi^k$  avec  $|\varpi^k \partial|_k = 1 = |x_i|$  et  $|\varpi^k| < 1$ .
2. On peut vérifier que pour tout niveau de congruence  $1 \leq k' \leq k$  et pour tout  $P \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ ,  $|P|_{k'} \leq |P|_k$ . En particulier,  $|\cdot|_{k'}$  est aussi une norme quasi-abélienne pour l'algèbre  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ .

### 3.2 Un premier microlocalisé $\mathcal{E}_k$

On suppose à partir de maintenant, et dans la suite de cette section, que le niveau de congruence  $k$  est toujours supérieur ou égale à un. Ainsi, la  $K$ -algèbre  $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U), |\cdot|_k)$  est quasi-abélienne. On peut donc la localiser pour n'importe quelle partie multiplicative. On choisit concrètement pour partie multiplicative de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  les puissance des dérivations  $\partial_i : S := \{\partial^\alpha, \alpha \in \mathbb{N}^d\}$ .

On localise dans cette partie l'algèbre  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  pour la seule norme  $|\cdot|_k$ . Le microlocalisé  $\mathcal{E}_k(U)$  obtenu possède de très bonnes et plaisantes propriétés en tant qu'algèbre de Banach. En particulier, on peut déterminer facilement ses éléments inversibles. Cependant, il n'existe pas de morphismes de transition pertinents  $\mathcal{E}_{k+1}(U) \rightarrow \mathcal{E}_k(U)$  commutant avec les morphismes de transition  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1}^{(0)}(U) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k}^{(0)}(U)$ . On ne peut donc pas obtenir à partir des localisés  $\mathcal{E}_k(U)$  un microlocalisé au niveau de l'algèbre limite projective  $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}(U) = \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) = \bigcap_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ . On introduit dans la partie suivante un autre microlocalisé  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  admettant quant à lui des morphismes de transition injectifs  $\mathcal{F}_{k+1,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$ . Néanmoins, ce microlocalisé est plus compliqué : sa norme n'est plus multiplicative, mais seulement sous-multiplicative. Cependant, on obtient facilement une injection naturelle  $\mathcal{F}_{k,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$  continue. Ainsi, bien connaître les algèbres  $\mathcal{E}_k(U)$  permet d'en déduire de nombreuses propriétés pour les microlocalisés  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ . On commence donc par étudier le localisé  $\mathcal{E}_k(U)$ .

#### Définition et premières propriétés

**Définition 3.8.** *On définit l'algèbre  $\mathcal{E}_k(U) := \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)\langle |\cdot|_k, S \rangle$  comme le microlocalisé de l'algèbre  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  donné par la partie multiplicative  $S$  et la norme  $|\cdot|_k$ . On note  $\phi_k : \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$  le morphisme de  $K$ -algèbres associé.*

Le microlocalisé  $\mathcal{E}_k(U)$  est une  $K$ -algèbre de Banach. Puisqu'on a localisé par rapport à la seule norme  $|\cdot|_k$  de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ , la norme de  $\mathcal{E}_k(U)$  est encore multiplicative. De plus, le morphisme  $\phi_k : \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$  est une isométrie. Autrement dit, la norme d'un opérateur différentiel de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  est la même aussi bien dans  $\mathcal{E}_k(U)$  que dans  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ . On identifie donc  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  à une sous-algèbre de  $\mathcal{E}_k(U)$  via le morphisme  $\phi_k$ . On peut noter encore  $|\cdot|_k$  la norme de  $\mathcal{E}_k(U)$  sans ambiguïté. Par ailleurs, le fait que les dérivations  $\partial_i$  commutent entre elles implique que les dérivations  $\partial^\alpha$  pour  $\alpha \in \mathbb{Z}$  commutent toutes entre elles.

**Remarque 3.9.** *Il revient au même de prendre comme partie multiplicative les puissances des dérivations  $\varpi^k \partial_i$  puisque l'uniformisante  $\varpi$  est inversible dans la  $K$ -algèbre  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ .*

On a  $|\partial_i|_k = |\varpi|^{-k} = p^{-k}$ . Le lemme 3.5 dit que  $|\partial_i^{-1}|_k = |\varpi|^k = p^k$ . De manière équivalente,  $|\varpi^k \partial_i|_k = |(\varpi^k \partial_i)^{-1}|_k = 1$ . Pour  $\alpha \in \mathbb{Z}^d$ , on note  $|\alpha| := |\alpha_1| + \dots + |\alpha_d| \in \mathbb{N}$  la longueur de  $\alpha$  et  $\lfloor \alpha \rfloor = \alpha_1 + \dots + \alpha_d \in \mathbb{Z}$  la somme de ses termes. Lorsque  $\alpha \in \mathbb{N}^d$ ,  $|\alpha| = \lfloor \alpha \rfloor$ . De plus,  $\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor \beta \rfloor = \lfloor \alpha + \beta \rfloor$  pour tous  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^d$ . Avec cette notation, on a  $|\varpi^{k \lfloor \alpha \rfloor} \partial^\alpha|_k = 1$  et  $\varpi^{k \lfloor \alpha \rfloor} \partial^\alpha \cdot \varpi^{k \lfloor \beta \rfloor} \partial^\beta = \varpi^{k \lfloor \alpha + \beta \rfloor} \partial^{\alpha + \beta}$  pour tous  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^d$ .

**Proposition 3.10.** *Tout élément  $S$  de  $\mathcal{E}_k(U)$  s'écrit uniquement sous la forme d'une série  $S = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} a_\alpha \cdot \varpi^{k \lfloor \alpha \rfloor} \partial^\alpha$  avec  $a_\alpha \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}(U)$  tels que  $a_\alpha \rightarrow 0$  lorsque  $|\alpha| \rightarrow +\infty$ . De plus,  $|S|_k = \max_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} \{|a_\alpha|\}$ .*

*Démonstration.* On commence par démontrer que l'algèbre  $\mathcal{E}_k(U)$  contient les séries de cette forme. Soit  $(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{Z}^d}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}(U)$  vérifiant  $a_\alpha \rightarrow 0$  lorsque  $|\alpha| \rightarrow +\infty$ . Pour tout entier naturel  $m$ , on note

$$P_m = \left\{ \alpha \in \mathbb{Z}^d : \alpha_i \geq -m \quad \forall i \in \{1, \dots, d\} \right\} \subset \mathbb{Z}^d.$$

Pour  $m \in \mathbb{N}$ , on pose  $S_m = \sum_{\alpha \in P_m} a_\alpha \cdot \varpi^{k \lfloor \alpha \rfloor} \partial^\alpha$ . Puisque l'algèbre  $\mathcal{E}_k(U)$  contient  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  et les puissances des dérivations  $\partial_i^{-1}$ , les séries  $S_m$  appartiennent au localisé  $\mathcal{E}_k(U)$ . Pour tout entier  $\ell \geq 0$ , on a  $S_{m+\ell} - S_m = \sum_{\alpha \in P_{m+\ell} \setminus P_m} a_\alpha \cdot \varpi^{k \lfloor \alpha \rfloor} \partial^\alpha$  et

$$|S_{m+\ell} - S_m|_k \leq \max_{\alpha \in P_{m+\ell} \setminus P_m} \left\{ |a_\alpha \cdot \varpi^{k \lfloor \alpha \rfloor} \partial^\alpha|_k \right\} = \max_{\alpha \in P_{m+\ell} \setminus P_m} \{|a_\alpha|\}.$$

Puisque la suite  $(a_\alpha)_\alpha$  converge vers 0 lorsque  $|\alpha| \rightarrow +\infty$ , la suite  $(S_m)_m$  est de Cauchy dans l'algèbre de Banach  $\mathcal{E}_k(U)$ . Elle converge donc vers un élément de  $\mathcal{E}_k(U)$  que l'on note  $S = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} a_\alpha \cdot \varpi^{k \lfloor \alpha \rfloor} \partial^\alpha$ . Par ailleurs, on a  $|S_m|_k = \max_{\alpha \in P_m} |a_\alpha|$ . En effet,

$$S_m \cdot \prod_{i=1}^d (\varpi^k \partial_i)^m = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_{\alpha - (m, \dots, m)} \varpi^{k \lfloor \alpha \rfloor} \partial^\alpha.$$

Puisque la norme  $|\cdot|_k$  est multiplicative et comme  $|\varpi^k \partial_i|_k = 1$ , on obtient

$$|S_m|_k = \left| S_m \cdot \prod_{i=1}^d (\varpi^k \partial_i)^m \right|_k = \max_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \{|a_{\alpha - (m, \dots, m)}|\} = \max_{\alpha \in P_m} \{|a_\alpha|\}.$$

On en déduit en passant à la limite  $m \rightarrow \infty$  que  $|S|_k = \max_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} \{|a_\alpha|\}$  puisque  $\cup_{m \in \mathbb{N}} P_m = \mathbb{Z}^d$ . En particulier,  $S = 0$  si et seulement si tous ses coefficients  $a_\alpha$  sont nuls. Ainsi, une telle écriture est unique.

On démontre maintenant que  $\mathcal{E}_k(U)$  coïncide avec l'ensemble de ces séries. On note  $F$  le sous-ensemble de  $\mathcal{E}_k(U)$  constitué des éléments de la forme  $S = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} a_\alpha \cdot \varpi^{k \lfloor \alpha \rfloor} \partial^\alpha$  avec  $a_\alpha \rightarrow 0$  pour  $|\alpha| \rightarrow +\infty$ . On va vérifier que  $F$  contient les éléments  $\varpi^{k \lfloor \alpha \rfloor} \partial^\alpha \cdot P$  pour  $\alpha \in \mathbb{Z}^d$



et  $P \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  et que  $F$  est fermé. Puisque l'ensemble des termes de la forme  $\varpi^{k[\alpha]} \partial^\alpha \cdot P$  est dense dans  $\mathcal{E}_k(U)$ , on aura bien  $\mathcal{E}_k(U) = F$ .

Pour le premier point, il suffit de prouver que si  $f$  est un élément de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U)$ , alors  $\partial_i^{-1} f \in F$ . On a  $[\partial_i, f] = \partial_i f - f \partial_i = \partial_i(f)$ , soit  $\partial_i f = \partial_i(f) + f \partial_i$ . Il vient

$$\partial_i^{-1} \partial_i f = f = \partial_i^{-1} \partial_i(f) + \partial_i^{-1} f \partial_i.$$

Ainsi,  $\partial_i^{-1} f = f \partial_i^{-1} - \partial_i^{-1} \partial_i(f) \partial_i^{-1}$ . En réitérant ce calcul pour  $\partial_i^{-1} \partial_i(f)$  et en modifiant ce terme dans l'expression de  $\partial_i^{-1} f$ , on obtient  $\partial_i^{-1} \partial_i^n(f) = \partial_i^n(f) \partial_i^{-1} - \partial_i^{-1} \partial_i^{n+1}(f) \partial_i^{-1}$ . Une récurrence montre alors que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\partial_i^{-1} f = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \partial_i^j(f) \partial_i^{-(j+1)} + (-1)^n \partial_i^{-1} \partial_i^n(f) \partial_i^{-n}.$$

On a

$$|\partial_i^j(f) \partial_i^{-(j+1)}|_k = |\partial_i^j(f)| \cdot |\partial_i^{-(j+1)}|_k \leq |f| \cdot p^{-k(j+1)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0,$$

$$|\partial_i^{-1} \partial_i^n(f) \partial_i^{-n}|_k = |\partial_i^{-1}|_k \cdot |\partial_i^n(f)| \cdot |\partial_i^{-n}|_k \leq |f| \cdot p^{-k(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

La somme partielle définissant  $\partial_i^{-1} f$  converge donc lorsque  $n \rightarrow \infty$ . On en déduit que

$$\partial_i^{-1} f = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \partial_i^n(f) \cdot \partial_i^{-(n+1)} \in F.$$

Enfin, puisque la norme d'un élément  $S = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} a_\alpha \cdot \varpi^{k[\alpha]} \partial^\alpha$  de  $F$  est donnée par  $|S|_k = \max_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} \{|a_\alpha|\}$ , toute suite de Cauchy d'éléments  $S_m = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} a_{\alpha,m} \cdot \varpi^{k[\alpha]} \partial^\alpha$  de  $F$  converge aussi vers un élément de  $F$ . En effet, le fait que la suite  $(S_m)$  soit de Cauchy implique que pour tout  $d$ -uplet d'entiers  $\alpha \in \mathbb{Z}^d$ , la suite  $(a_{\alpha,m})_m$  est de Cauchy. Elle converge donc vers un élément  $a_{\alpha,\infty} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U)$ . La suite  $(S_m)_m$  converge alors vers  $S = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} a_{\alpha,\infty} \cdot \varpi^{k[\alpha]} \partial^\alpha$ . Cela prouve que  $F$  est fermé. Il en résulte que  $\mathcal{E}_k(U) = F$ .  $\square$

Soit  $S = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} a_\alpha \cdot \varpi^{[\alpha]} \partial^\alpha$  un élément de  $\mathcal{E}_k(U)$ . On appelle ordre de  $S$  le plus grand entier  $[\alpha] \in \mathbb{Z}$  pour lequel  $|S|_k = |a_\alpha|$ . On le note encore  $\overline{N}_k(S)$ . Il généralise l'ordre des opérateurs différentiels de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ .

**Remarque 3.11.** On a démontré dans cette preuve que pour toute fonction  $f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U)$ ,

$$\partial_i^{-1} f = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \partial_i^n(f) \cdot \partial_i^{-(n+1)} \in \mathcal{E}_k(U).$$

En particulier,  $\partial_i^{-1}$  commute avec les scalaires : pour tout  $\lambda \in K$ ,  $\partial_i^{-1} \cdot \lambda = \lambda \cdot \partial_i^{-1}$ .

On démontre le résultat suivant en considérant la graduation de la  $K$ -algèbre  $\mathcal{E}_k(U)$  induite par la norme  $|\cdot|_k$ .

**Proposition 3.12.** *La  $K$ -algèbre  $\mathcal{E}_k(U)$  est noetherienne à gauche et à droite. De plus, le morphisme d'algèbres  $\phi_k : \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$  est plat à gauche et à droite.*

*Démonstration.* Soit  $x$  un point donné de  $\mathfrak{X}$ . C'est un point  $\kappa'$  rationnel pour une extension finie  $\kappa'$  de  $\kappa$  de degré  $s \in \mathbb{N}^*$ . On rappelle que la norme spectrale de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$  relative au point  $x$  est à valeur dans  $p^{\frac{1}{s}\mathbb{Z}}$  (corollaire 1.5.4 de l'article [4] de Laurent Garnier). Les valeurs prises par la norme spectrale étant indexées par  $\mathbb{Z}$ , on peut supposer que  $x$  est un point  $\kappa$ -rationnel et que  $|\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)| = p^{\mathbb{Z}}$ . On munit l'algèbre  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$  de la filtration indexée par  $\mathbb{Z}$  fournie par la norme spectrale :

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)(m) = \{f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U) : |f| \leq p^m\} \quad \text{pour } m \in \mathbb{Z}.$$

Cette dernière est croissante exhaustive. On note  $\text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))$  le gradué associé. Soit  $f$  une section de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$  telle que  $|f| = p^m$ . On définit  $\gamma(f)$  comme étant l'image de  $f$  dans le gradué  $\text{gr}_m(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)) := \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)(m)/\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)(m-1)$ . Soit  $\gamma : \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U) \rightarrow \text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))$  l'application induite, et  $\gamma : K \rightarrow \text{gr } K$  la restriction à  $K$ . Cette application permet de doter le gradué  $\text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))$  d'un produit et donc d'une structure de  $\text{gr } K$ -algèbre. Le gradué  $\text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))$  est noetherien puisque l'algèbre  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$  est noetherienne.

Soit  $P = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} a_\alpha \cdot \varpi^{k|\alpha|} \partial^\alpha$  un élément non nul de  $\mathcal{E}_k(U)$ . Par construction, sa norme  $|P|_k = \max_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} \{|a_\alpha|\}$  appartient à  $p^{\mathbb{Z}}$ . On munit l'algèbre  $\mathcal{E}_k(U)$  de la filtration donnée par la norme :

$$\mathcal{E}_k(U)(m) = \{P \in \mathcal{E}_k(U) : |P|_k \leq p^m\} \quad \text{pour } m \in \mathbb{Z}.$$

C'est une filtration croissante indexée par  $\mathbb{Z}$  vérifiant

$$\forall m, m' \in \mathbb{Z}, \quad \mathcal{E}_k(U)(m) \cdot \mathcal{E}_k(U)(m') \subset \mathcal{E}_k(U)(m+m').$$

On note  $\text{gr}_m \mathcal{E}_k(U) := \mathcal{E}_k(U)(m)/\mathcal{E}_k(U)(m-1)$  et  $\text{gr } \mathcal{E}_k(U) := \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \text{gr}_m \mathcal{E}_k(U)$  le gradué associé. Soit  $\zeta_{i,k}$  l'image de  $\varpi^k \partial_i$  dans  $\text{gr}_0 \mathcal{E}_k(U)$ . Pour tout  $\lambda \in \mathbb{Z}$ ,  $\mathcal{E}_k(U)(m)$  est isomorphe à  $\mathcal{E}_k(U)(m+\lambda)$  via la multiplication par  $\varpi^\lambda$ . On en déduit que  $\text{gr}_m \mathcal{E}_k(U) \simeq \text{gr}_{m+\lambda} \mathcal{E}_k(U)$  via la multiplication par  $\gamma(\varpi^\lambda)$ . On peut donc identifier  $\gamma(\varpi^\lambda) \cdot \zeta_{i,k}$  avec l'image de  $\varpi^\lambda \cdot (\varpi^k \partial_i)$  dans le gradué  $\text{gr}_\lambda \mathcal{E}_k(U)$ .

On suppose que  $|P|_k = p^m$  pour un certain entier  $m \in \mathbb{Z}$ . En notant  $\zeta_k^\alpha := \zeta_{1,k}^{\alpha_1} \cdots \zeta_{1,d}^{\alpha_d}$ , l'image de  $P$  dans le gradué  $\text{gr}_m \mathcal{E}_k(U)$  est donc l'élément

$$\gamma(P) = \sum_{\bar{n}_k(P) \leq |\alpha| \leq \bar{N}_k(P)} \gamma(a_\alpha) \cdot \zeta_k^\alpha$$

où  $\bar{n}_k(P)$  le plus petit entier relatif  $\ell$  pour lequel  $|P|_k = |a_\alpha|$  avec  $|\alpha| = \ell$ . On définit ainsi une application  $\gamma : \mathcal{E}_k(U) \rightarrow \text{gr } \mathcal{E}_k(U)$  dont l'image engendre le gradué en tant que

gr  $K$ -algèbre. Puisque l'algèbre  $\mathcal{E}_k(U)$  est quasi-abélienne, le gradué est commutatif. On en déduit que

$$\text{gr } \mathcal{E}_k(U) \simeq \text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_{1,k}, \dots, \zeta_{d,k}, \zeta_{1,k}^{-1}, \dots, \zeta_{d,k}^{-1}]$$

en tant que gr  $K$ -algèbre. En particulier,  $\text{gr } \mathcal{E}_k(U)$  est une gr  $K$ -algèbre noetherienne. La proposition 1.1 de l'article [7] implique alors que l'algèbre  $\mathcal{E}_k(U)$  est noetherienne à gauche et à droite.

De même, on munit l'algèbre  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  de la filtration donnée par la norme. L'inclusion  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$  induit une inclusion entre les gradués  $\text{gr } \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \text{gr } \mathcal{E}_k(U)$ . On a  $\text{gr } \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \simeq \text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_{1,k}, \dots, \zeta_{d,k}]$  en tant que gr  $K$ -algèbre. Le morphisme de gr  $K$ -algèbres  $\text{gr } \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \text{gr } \mathcal{E}_k(U)$  est donc plat. D'après la propositions 1.2 de l'article [7], on obtient que le morphisme  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$  est plat à gauche et à droite.  $\square$

### Elements inversibles de $\mathcal{E}_k(U)$

On rappelle que la  $K$ -algèbre  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U)$  est l'ensemble des opérateurs différentiels de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  de norme  $|\cdot|_k$  inférieure ou égale à un. On note  $\mathcal{D}_{X,k} = \kappa \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}$  la réduction modulo  $\varpi$  de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}$ . C'est le faisceau de  $\kappa$ -algèbres sur la fibre spéciale  $X = \mathfrak{X} \times_{\mathcal{V}} \text{Spec } \kappa$  de  $\mathfrak{X}$  engendré localement sur  $U$  par  $\mathcal{O}_X|_U$  et par les dérivations  $\partial_{i,k}$  images de  $\varpi^k \partial_i$  après réduction modulo  $\varpi$ . Les schémas  $\mathfrak{X}$  et  $X$  ont même espace topologique; on identifie  $U$  à un ouvert affine de  $X$ . En notant toujours  $\partial_k^\alpha := \partial_{1,k}^{\alpha_1} \dots \partial_{d,k}^{\alpha_d}$ , on a

$$\mathcal{D}_{X,k}(U) = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \mathcal{O}_X(U) \cdot \partial_k^\alpha.$$

Comme  $k \geq 1$ , c'est une  $\kappa$ -algèbre commutative puisque  $[\varpi^k \partial_i, t] = \varpi^k$  dans  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U)$ . Ainsi,  $\mathcal{D}_{X,k}(U) = \mathcal{O}_X(U)[\partial_{1,k}, \dots, \partial_{d,k}]$  est un anneau de polynôme en les variables  $\partial_{1,k}, \dots, \partial_{d,k}$ . On en déduit que  $\mathcal{D}_{X,k}(U)^\times = \mathcal{O}_X(U)^\times$ .

Soit  $\mathcal{E}_k^\circ(U)$  l'ensemble des éléments de  $\mathcal{E}_k(U)$  de norme  $|\cdot|_k$  inférieure ou égale à un. C'est une  $\mathcal{V}$ -algèbre de Banach contenant  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U)$ . On note  $E_k(U) = \mathcal{E}_k^\circ(U) \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$  la réduction modulo  $\varpi$  de  $\mathcal{E}_k^\circ(U)$ . C'est une  $\kappa$ -algèbre contenant  $\mathcal{D}_{X,k}(U)$  dans laquelle les dérivations  $\partial_{i,k}$  sont inversibles. Puisque l'algèbre  $(\mathcal{E}_k(U), |\cdot|_k)$  est quasi-abélienne,  $E_k(U)$  est une  $\kappa$ -algèbre commutative. Il en découle que  $E_k(U) = \mathcal{O}_X(U)[\partial_{1,k}, \dots, \partial_{d,k}, \partial_{1,k}^{-1}, \dots, \partial_{1,k}^{-1}]$ . Après réduction modulo  $\varpi$ ,  $E_k(U)$  est donc le localisé classique commutatif de l'algèbre de polynômes  $\mathcal{O}_X(U)[\partial_{1,k}, \dots, \partial_{d,k}]$  pour la partie multiplicative constituée des puissances des dérivations  $\partial_{i,k}$ . On en déduit l'égalité

$$E_k(U)^\times = \left\{ a \cdot \partial_k^\alpha, \quad a \in \mathcal{O}_X(U)^\times \text{ et } \alpha \in \mathbb{Z}^d \right\}.$$

En effet, ce résultat est clair pour  $d = 1$  puisque  $(A[X, X^{-1}])^\times = \{a \cdot X^n, a \in A^\times, n \in \mathbb{Z}\}$ . On le démontre ensuite en dimension supérieure par récurrence sur  $d$ .

**Définition 3.13.** *Pour tout élément  $P = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} a_\alpha \cdot \omega^{k[\alpha]} \partial^\alpha$  de  $\mathcal{E}_k(U)$ , on pose*

$$\overline{N}_k(P) := \max\{|\alpha| : \alpha \in \mathbb{Z}^d, |a_\alpha| = |P|_k\} \quad \text{et} \quad \overline{n}_k(P) := \min\{|\alpha| : \alpha \in \mathbb{Z}^d : |a_\alpha| = |P|_k\}.$$

La fonction  $\overline{N}_k$  généralise celle de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ . La proposition suivante caractérise l'inversibilité des éléments de l'algèbre  $\mathcal{E}_k(U)$  en fonctions de  $\overline{N}_k$  et de  $\overline{n}_k$ .

**Proposition 3.14.** *Un élément  $P$  du localisé  $\mathcal{E}_k(U)$  est inversible dans  $\mathcal{E}_k(U)$  si et seulement si  $P$  admet un unique coefficient de norme spectrale maximale et si ce coefficient est inversible dans  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}(U)$ .*

*Démonstration.* Quitte à normaliser  $P$ , on peut supposer que  $|P|_k = 1$ . Alors  $P \in \mathcal{E}_k^\circ(U)$ . On note  $\bar{P} = (P \bmod \varpi)$  l'image de  $P$  dans  $E_k(U) = \mathcal{E}_k^\circ(U) \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ . On commence par démontrer que  $P$  est inversible dans  $\mathcal{E}_k(U)$  si et seulement si  $\bar{P}$  est inversible dans  $E_k(U)$ . Le sens direct est évident. On suppose que  $\bar{P}$  est inversible dans  $E_k(U)$  : il existe  $\bar{Q} \in \mathcal{E}_k^\circ(U)$  tel que  $\bar{P}\bar{Q} = 1$ . Ainsi,  $P\bar{Q}$  est de la forme  $1 + \varpi R$  pour un certain élément  $R \in \mathcal{E}_k^\circ(U)$ . Puisque  $|\varpi R|_k \leq |\varpi| < 1$ , l'élément  $1 + \varpi R$  est inversible dans  $\mathcal{E}_k(U)$ . En effet, son inverse est donné par la série « classique »

$$(1 + \varpi R)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (-\varpi R)^i.$$

Cette somme est bien convergente dans l'algèbre de Banach  $\mathcal{E}_k(U)$  puisque  $|\varpi R|_k < 1$ . On en déduit que  $P \cdot \bar{Q}(1 + \varpi R)^{-1} = 1$  dans  $\mathcal{E}_k(U)$ . Autrement dit,  $P$  est inversible à droite dans  $\mathcal{E}_k(U)$ . De même,  $P$  est inversible à gauche puisque  $\bar{Q}\bar{P} = 1$ . Ainsi,  $P$  est inversible dans l'algèbre  $\mathcal{E}_k(U)$ .

On rappelle que  $E_k(U)^\times = \{a \cdot \partial_k^\alpha, a \in \mathcal{O}_X(U)^\times \text{ et } \alpha \in \mathbb{Z}^d\}$ . L'élément  $P$  est inversible dans  $\mathcal{E}_k(U)$  si et seulement si  $\bar{P}$  est de la forme  $\bar{a} \cdot \partial_k^\alpha$  avec  $\bar{a} \in \mathcal{O}_X(U)^\times$ . La réduction modulo  $\varpi$  de  $P$  est un monôme si et seulement si  $P$  admet un unique coefficient de norme spectrale maximale. Le terme  $\bar{a}$  est inversible dans  $\mathcal{O}_X(U)$  si et seulement si  $a$  est inversible dans  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$ . Il s'agit exactement des conditions données dans l'énoncé de la proposition.  $\square$

**Remarque 3.15.**

1. *En dimension un, lorsque  $d = 1$ , cet énoncé se traduit de la manière suivante : un élément  $P$  de  $\mathcal{E}_k(U)$  est inversible dans  $\mathcal{E}_k(U)$  si et seulement si  $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P)$  et si ce coefficient est inversible dans  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}(U)$ .*
2. *Ce critère est analogue à la condition d'inversibilité des séries de Laurent convergentes  $K\langle T \rangle$  à coefficients dans un corps ultramétrique complet  $K$ .*

3. On peut démontrer ce résultat sans réduire modulo  $\varpi$  les faisceaux  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U)$  et  $\mathcal{E}_k^\circ(U)$ . En effet, on peut raisonner de manière analogue en utilisant le gradué de  $\mathcal{E}_k(U)$  pour la filtration induite par la norme  $|\cdot|_k$ . On rappelle que

$$\mathrm{gr} \mathcal{E}_k(U) \simeq \mathrm{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_{1,k}, \dots, \zeta_{d,k}, \zeta_{1,k}^{-1}, \dots, \zeta_{d,k}^{-1}].$$

Les éléments inversibles de ce gradué sont aussi les éléments de la forme  $a \cdot \zeta_k^\alpha$  avec  $a$  inversible dans  $\mathrm{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))$  et  $\alpha \in \mathbb{Z}^d$ . Il est clair qu'un élément inversible de  $\mathcal{E}_k(U)$  est inversible dans le gradué  $\mathrm{gr} \mathcal{E}_k(U)$ . La preuve est alors similaire à celle de la proposition 3.14.

On commence pour simplifier par supposer que  $d = 1$ , autrement dit que  $\mathfrak{X}$  est une courbe formelle. Soit  $P = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \cdot (\varpi^k \partial)^n$  un élément inversible de  $\mathcal{E}_k(U)$ . Son inverse s'exprime explicitement en fonction des coefficients  $a_n$ . On note  $q = \overline{N}_k(P)$  l'ordre de  $P$ . Puisque  $P$  est inversible, on sait que  $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P)$  et que le coefficient  $a_q$  de  $P$  est inversible d'après la proposition 3.14. On a

$$P = a_q \cdot \underbrace{\left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{a_{n+q}}{a_q} \cdot (\varpi^k \partial)^n \right)}_Q \cdot (\varpi^k \partial)^q.$$

Le coefficient constant de  $Q$  est égale à 1. Ses autres coefficients sont de normes strictement inférieures à 1. Son inverse est comme précédemment donné par  $Q^{-1} = \sum_{i \geq 0} -(Q - 1)^i$ . On obtient

$$P^{-1} = (\varpi^k \partial)^{-q} \cdot \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \left( - \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{a_{n+q}}{a_q} \cdot (\varpi^k \partial)^n \right)^\ell \cdot a_q^{-1}.$$

On repasse au cas général. Soit  $P = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} a_\alpha \cdot \varpi^{k|\alpha|} \partial^\alpha$  un élément inversible de  $\mathcal{E}_k(U)$ . Autrement dit,  $P$  a un unique coefficient  $a_\beta$  de norme spectrale maximale et ce coefficient est inversible dans  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$ . L'inverse de  $P$  dans  $\mathcal{E}_k(U)$  est encore donné par

$$P^{-1} = \varpi^{-k|\beta|} \partial^{-\beta} \cdot \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \left( - \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \frac{a_{\alpha+\beta}}{a_\beta} \cdot \varpi^{k|\alpha|} \partial^\alpha \right)^\ell \cdot a_\beta^{-1}.$$

Le lemme suivant servira dans un autre article pour la démonstration de l'inégalité de Bernstein pour les  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles.

**Lemme 3.16.** *Soit  $\mathcal{J}$  un idéal cohérent de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ . On note  $\mathcal{E}_k(U) \cdot \mathcal{J}$  l'idéal à gauche de  $\mathcal{E}_k(U)$  engendré par  $\mathcal{J}$ . Si  $\mathcal{E}_k(U) \cdot \mathcal{J} = \mathcal{E}_k(U)$ , alors  $\mathcal{J} \cap \mathcal{E}_k(U)^\times \neq \emptyset$ .*

*Démonstration.* On reprend les notations de la proposition 3.12 vis à vis des gradués. Pour tout entier  $m \in \mathbb{Z}$ , on pose  $\mathcal{J}(m) = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)(m) \cap \mathcal{J}$ . On définit ainsi une filtration croissante exhaustive de l'idéal  $\mathcal{J}$ . Le gradué associé  $\text{gr } \mathcal{J}$  est un idéal cohérent de  $\text{gr } \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ . On note  $\gamma : \mathcal{J} \rightarrow \text{gr } \mathcal{J}$  la restriction à  $\mathcal{J}$  de l'application  $\gamma : \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \rightarrow \text{gr } \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ . On observe alors que  $\text{gr } \mathcal{J} = \text{gr}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)) \cdot \gamma(\mathcal{J})$ . De même,  $\text{gr}(\mathcal{E}_k(U)) \cdot \mathcal{J} = \text{gr}(\mathcal{E}_k(U)) \cdot \gamma(\mathcal{J})$  pour la filtration  $(\mathcal{E}_k(U)) \cdot \mathcal{J}(m) = \mathcal{E}_k(U)(m) \cap (\mathcal{E}_k(U) \cdot \mathcal{J})$ . On rappelle que  $\text{gr } \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \simeq \text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_{1,k}, \dots, \zeta_{d,k}]$  et que  $\text{gr } \mathcal{E}_k(U) \simeq \text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_{1,k}, \dots, \zeta_{d,k}, \zeta_{1,k}^{-1}, \dots, \zeta_{d,k}^{-1}]$ .

L'hypothèse  $\mathcal{E}_k(U) \cdot \mathcal{J} = \mathcal{E}_k(U)$  implique  $\text{gr}(\mathcal{E}_k(U) \cdot \mathcal{J}) = \text{gr}(\mathcal{E}_k(U)) \cdot \gamma(\mathcal{J}) = \text{gr } \mathcal{E}_k(U)$ . Autrement dit, il existe des opérateurs  $P_1, \dots, P_s \in \mathcal{J}$  et  $Q_1, \dots, Q_s \in \text{gr } \mathcal{E}_k(U)$  tels que

$$Q_1 \cdot \gamma(P_1) + \dots + Q_s \cdot \gamma(P_s) = 1.$$

Puisque  $\text{gr } \mathcal{E}_k(U) \simeq \text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_{1,k}, \dots, \zeta_{d,k}, \zeta_{1,k}^{-1}, \dots, \zeta_{d,k}^{-1}]$ , on peut trouver un élément  $\alpha \in \mathbb{N}^d$  pour lequel  $\zeta_k^\alpha \cdot Q_1, \dots, \zeta_k^\alpha \cdot Q_s \in \text{gr } \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \simeq \text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_{1,k}, \dots, \zeta_{d,k}]$ . On note  $R_j = \zeta_k^\alpha \cdot Q_j \in \text{gr } \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ . Alors

$$\zeta_k^\alpha = R_1 \cdot \gamma(P_1) + \dots + R_s \cdot \gamma(P_s) \in \text{gr } \mathcal{J} = \text{gr}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)) \cdot \gamma(\mathcal{J}).$$

Puisque  $\zeta_k^\alpha$  est un monôme de norme un,  $\zeta_k^\alpha \in \text{gr}_0 \mathcal{J} = \mathcal{J}(0)/\mathcal{J}(-1)$ . En particulier,  $\zeta_k^\alpha$  se relève en un élément  $P$  de  $\mathcal{J}$  vérifiant  $\gamma(P) = \zeta_k^\alpha$ . Puisque les gradués proviennent de la filtration induite par la norme de  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ , cela signifie que  $P$  a un unique coefficient de norme maximale et que ce coefficient est inversible. D'après la proposition 3.14,  $P$  est inversible dans  $\mathcal{E}_k(U)$ .  $\square$

### Pas de morphismes de transition $\mathcal{E}_{k+1}(U) \rightarrow \mathcal{E}_k(U)$

On ne dispose pas de morphismes intéressants de transition  $\mathcal{E}_{k+1}(U) \rightarrow \mathcal{E}_k(U)$  prolongeant les inclusions  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ . La propriété universelle du microlocalisé ne fournit pas de tel morphisme. En effet, le morphisme

$$f_k := \phi_k|_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)} : \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$$

ne vérifie pas la condition d'uniforme continuité de la propriété universelle 3.2 appliquée à l'algèbre  $\mathcal{E}_{k+1}(U)$ . Cette condition s'écrit

$$\exists c > 0 \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}, \forall P \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U), |\partial_i^{-n} \cdot P|_k \leq c \cdot |\partial_i|_{k+1}^{-n} \cdot |P|_{k+1}.$$

On a  $|\partial_i^{-1}|_k = |\varpi|_k = p^{-k}$  et  $|\partial_i^{-1}|_{k+1} = p^{-k+1}$ . Ainsi, pour  $P = 1$ , il est impossible de trouver une telle constante  $c$ . Le morphisme  $f_k$  ne se factorise donc pas naturellement en un morphisme de  $\mathcal{E}_{k+1}(U)$  dans  $\mathcal{E}_k(U)$  étendant l'inclusion de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  dans  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ .

Pour tout opérateur  $P$  de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ , on a  $|P|_k \leq |P|_{k+1}$  avec inégalité stricte en général dès que  $P$  est infini. En effet, si  $P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_\alpha \cdot \partial^\alpha$ , alors

$$|P|_k = \max_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \left\{ |a_\alpha| \cdot p^{k|\alpha|} \right\} \leq |P|_{k+1} = \max_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \left\{ |a_\alpha| \cdot p^{(k+1)|\alpha|} \right\}.$$

Puisque la norme de  $\mathcal{E}_k(U)$  est multiplicative, cette inégalité est inversée dès que l'on inverse les dérivations  $\partial_i$ . L'inclusion de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U)$  est inversée dès que l'on considère des opérateurs dont les puissances des dérivations  $\partial_i$  sont toutes négatives. Par exemple,  $P = \sum_{\alpha \in (\mathbb{Z}_{<0})^d} \varpi^{-|\alpha|} \cdot \varpi^{(k+1)|\alpha|} \partial^\alpha$  est un élément de  $\mathcal{E}_{k+1}(U) \setminus \mathcal{E}_k(U)$ . Il n'existe donc pas de morphisme injectif continu de  $\mathcal{E}_{k+1}(U)$  dans  $\mathcal{E}_k(U)$  prolongeant l'inclusion d'algèbres  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ .

### Le faisceau de $K$ -algèbres $\mathcal{E}_k$

Dans ce qui précède, on a défini le microlocalisé  $\mathcal{E}_k(U)$  sur un ouvert affine  $U$  de  $\mathfrak{X}$  sur lequel on dispose d'un système de coordonnées locales. On rappelle que la  $K$ -algèbre de Banach  $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U), |\cdot|_k)$  ne dépend pas du choix des coordonnées locales. Puisque l'algèbre  $\mathcal{E}_k(U)$  est définie par une propriété universelle au dessus de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ , le microlocalisé  $\mathcal{E}_k(U)$  est indépendant du choix des coordonnées locales. On note  $\mathcal{U}$  l'ensemble des ouverts affines de  $\mathfrak{X}$  sur lesquels on dispose d'un système de coordonnées locales. C'est une base de voisinages ouverts de  $\mathfrak{X}$ .

**Proposition 3.17.** *Il existe un unique faisceau  $\mathcal{E}_k$  de  $K$ -algèbres sur  $\mathfrak{X}$  tel que pour tout ouvert  $U$  de  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{E}_k(U) = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \langle |\cdot|_k, \{\partial^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \rangle$ .*

*Démonstration.* Soit  $V \subset U$  deux ouverts de  $\mathcal{U}$ . Puisque  $\mathcal{E}_k(V)$  ne dépend pas du choix de la coordonnée locale, le morphisme composé  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(V) \rightarrow \mathcal{E}_k(V)$  vérifie les hypothèses de la propriété universelle 3.2 appliquée à  $\mathcal{E}_k(V)$ . Il existe donc un unique morphisme  $\mathcal{E}_k(U) \rightarrow \mathcal{E}_k(V)$  induit par le morphisme  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(V)$ . On en déduit que  $\mathcal{E}_k$  est un préfaisceau sur l'ensemble des ouverts de  $\mathcal{U}$ . Puisque  $\mathcal{U}$  est une base de voisinages ouverts de  $\mathfrak{X}$ , il existe un unique préfaisceau  $\mathcal{E}_k$  sur  $\mathfrak{X}$  coïncidant avec les  $\mathcal{E}_k(U)$  sur les ouverts  $U$  de  $\mathcal{U}$ . L'unicité de l'écriture des éléments de  $\mathcal{E}_k(U)$  comme séries en les puissances des dérivations  $(\varpi^k \partial_i)$  implique que  $\mathcal{E}_k$  est un faisceau sur les ouverts  $U$  de  $\mathcal{U}$ . On en déduit que  $\mathcal{E}_k$  est un faisceau de  $K$ -algèbres sur  $\mathfrak{X}$ .  $\square$

On a donc construit un faisceau de  $K$ -algèbres  $\mathcal{E}_k$  sur  $\mathfrak{X}$  admettant  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$  comme sous-faisceau et pour lequel les dérivations  $\partial_i$  sont localement inversibles. Cependant, on ne dispose pas de morphismes de transition naturels  $\mathcal{E}_{k+1} \rightarrow \mathcal{E}_k$  induits par les morphismes de départ  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ .

Soit  $U$  un ouvert affine contenant le point  $x$  sur lequel on dispose d'un système coordonnées locales associé à  $x$ . La proposition 3.14 se traduit de la manière suivante.

**Proposition 3.18.** *Un élément  $P$  de  $\mathcal{E}_k(U)$  est inversible dans le localisé  $\mathcal{E}_k(V)$  sur un voisinage  $V \subset U$  de  $x$  si et seulement si  $P$  admet un unique coefficient de norme spectrale maximale et si ce coefficient est inversible dans  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(V)$ .*

Soit  $P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_\alpha \cdot \varpi^{k|\alpha|} \partial^\alpha$  un opérateur différentiel de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ . On rappelle que  $P$  est inversible dans  $\mathcal{E}_k(V)$  si et seulement si  $P$  admet un unique coefficient  $a_\beta$  de norme spectrale maximale et si  $a_\beta$  est inversible. L'inverse de  $P$  est alors donné par

$$P^{-1} = \varpi^{-k|\beta|} \partial^{-\beta} \cdot \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \left( - \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d \setminus \{\beta\}} \frac{a_\alpha}{a_\beta} \cdot \varpi^{k|\alpha-\beta|} \partial^{\alpha-\beta} \right)^\ell \cdot a_\beta^{-1}.$$

L'opérateur  $P^{-1}$  appartient à l'algèbre  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(V)$  si et seulement si  $\beta = 0$ , donc si et seulement si  $\overline{N}_k(P) = 0$ . On retrouve ainsi les éléments localement inversibles du faisceau  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ , déjà donnés plus tôt dans la proposition 2.3 lorsque  $d = 1$ .

**Corollaire 3.19.** *Un opérateur différentiel  $P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_\alpha \cdot \varpi^{k|\alpha|} \partial^\alpha$  de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  est inversible dans  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  si et seulement si  $\overline{N}_k(P) = 0$  et si  $a_0$  est inversible dans  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$ .*

### 3.3 Des microlocalisés $\mathcal{F}_{k,r}$ avec des morphismes de transition

On fixe tout d'abord l'ouvert affine  $U$  sur lequel on dispose d'un système de coordonnées locales. Soit  $r$  un entier naturel supérieur ou égale à un et  $k$  un niveau de congruence plus grand que  $r$ . En ne prenant plus la seule norme  $|\cdot|_k$  pour définir le microlocalisé de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ , mais un certain nombre des normes précédentes  $|\cdot|_r, \dots, |\cdot|_k$ , la condition d'uniforme continuité pour obtenir des morphismes de transition entre les différents niveaux de congruence devient évidente. Dans cette partie, l'entier  $r \geq 1$  est fixé. On ne le fera varier que dans la section suivante. Le niveau de congruence  $k$  sera toujours supposé supérieur ou égale à  $r$  lorsqu'on considère les algèbres  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ . La partie multiplicative  $S$  est toujours constituée des puissances positives des dérivations  $\partial_i$ .

#### Définition et propriétés

**Définition 3.20.** *Pour tout niveau de congruence  $k \geq r$ , on note  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  le microlocalisé  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \langle |\cdot|_r, \dots, |\cdot|_k; S \rangle$  de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  et  $\varphi_{k,r} : \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$  le morphisme de  $K$ -algèbres associé.*

Soit  $\|\cdot\|_{k,r}$  la norme de  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ ;  $(\mathcal{F}_{k,r}(U), \|\cdot\|_{k,r})$  est une  $K$ -algèbre de Banach. Par construction, le morphisme  $\varphi_{k,r}$  est une isométrie de  $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U), \max\{|\cdot|_r, \dots, |\cdot|_k\})$  dans  $(\mathcal{F}_{k,r}(U), \|\cdot\|_{k,r})$ . Pour tout opérateur différentiel  $P$  de l'algèbre  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ , on vérifie que  $|P|_r \leq \dots \leq |P|_k$ . On en déduit l'égalité  $\max\{|P|_r, \dots, |P|_k\} = |P|_k$ . Autrement dit,  $\varphi_{k,r}$



est une isométrie de  $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U), |\cdot|_k)$  dans  $(\mathcal{F}_{k,r}(U), \|\cdot\|_{k,r})$ . On identifie toujours  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  à une sous-algèbre de  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  via le morphisme  $\varphi_{k,r}$ . Cette identification est compatible avec les normes de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  et  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ .

La norme de  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  n'est cette fois ci plus multiplicative mais seulement sous-multiplicative dès que  $k > r$ . En effet, on sait d'après le lemme 3.5 que

$$\|\partial_i^{-1}\|_{k,r} = \max_{r \leq j \leq k} \{|\partial_i|_j^{-1}\} = \max_{r \leq j \leq k} \{|\varpi|^j\} = |\varpi|^r = p^{-r}.$$

Cependant, on a toujours  $\|\partial_i\|_{k,r} = |\partial_i|_k = |\varpi|^{-k} = p^k$ .

**Remarque 3.21.** Pour  $k = r$ , on a  $\mathcal{F}_{k,k}(U) = \mathcal{E}_k(U)$ . En effet, on localise l'algèbre  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  seulement pour la norme  $|\cdot|_k$ . En particulier, la norme de l'algèbre  $\mathcal{F}_{k,k}(U)$  est multiplicative.

Le morphisme  $f_k = \phi_k|_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)} : \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$  vérifie de manière évidente la condition d'uniforme continuité pour le microlocalisé  $\mathcal{F}_{k+1,r}(U)$ , avec pour constante  $c = 1$ . En effet, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout opérateur  $P$  de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ , on a

$$\max_{r \leq j \leq k} \{|\partial_i^{-n} \cdot P|_j\} \leq \max_{r \leq j \leq k+1} \{|\partial_i^{-n} \cdot P|_j\} \leq \max_{r \leq j \leq k+1} \{|\partial_i|_j^{-n} \cdot |P|_j\}.$$

Par propriété universelle du microlocalisé  $\mathcal{F}_{k+1,r}(U)$ , le morphisme  $f_k$  se factorise uniquement par un morphisme continu de  $K$ -algèbres  $\varepsilon_{k,r} : \mathcal{F}_{k+1,r}(U) \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$ . De plus, ce morphisme  $\varepsilon_{k,r}$  est 1-lipschitzien, tout comme l'est l'inclusion de l'algèbre  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  dans  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ . Ainsi,  $\|\varepsilon_{k,r}(S)\|_{k,r} \leq \|S\|_{k+1,r}$  pour tout élément  $S$  du microlocalisé  $\mathcal{F}_{k+1,r}(U)$ .

Pour tout  $\alpha \in \mathbb{Z}^d$ , on pose  $[\alpha, k, r] := \lfloor \alpha \rfloor (k \cdot \mathbf{1}_{\lfloor \alpha \rfloor \geq 0} + r \cdot \mathbf{1}_{\lfloor \alpha \rfloor < 0})$ . Autrement dit,  $[\alpha, k, r] = k \cdot \lfloor \alpha \rfloor$  lorsque  $\lfloor \alpha \rfloor \geq 0$  et  $[\alpha, k, r] = k \cdot \lfloor \alpha \rfloor$  lorsque  $\lfloor \alpha \rfloor \leq 0$ . On rappelle que  $\lfloor \alpha \rfloor = \alpha_1 + \dots + \alpha_d \in \mathbb{Z}$ . On démontre dans le lemme suivant que pour tout  $\alpha \in \mathbb{Z}^d$ ,  $\|\varpi^{[\alpha, k, r]} \partial^\alpha\|_{k,r} = 1$ . Par exemple, si  $d = 2$  et  $\alpha = (2, -3)$ , alors  $\lfloor \alpha \rfloor = 2 - 3 = -1$ ,  $[\alpha, k, r] = -r$  et  $\|\partial_1^2 \partial_2^{-3}\|_{k,r} = |\omega|^r = p^{-r}$ .

**Lemme 3.22.** Pour tout  $\alpha \in \mathbb{Z}^d$ , on a  $\|\partial^\alpha\|_{k,r} = |\omega|^{-[\alpha, k, r]}$ .

*Démonstration.* Soit  $\alpha \in \mathbb{Z}^d$ . On pose  $\alpha_+ = (\alpha_1 \cdot \mathbf{1}_{\alpha_1 \geq 0}, \dots, \alpha_d \cdot \mathbf{1}_{\alpha_d \geq 0}) \in \mathbb{N}^d$  la partie positive de  $\alpha$  et  $\alpha_- = (\alpha_1 \cdot \mathbf{1}_{\alpha_1 < 0}, \dots, \alpha_d \cdot \mathbf{1}_{\alpha_d < 0}) \in (-\mathbb{N})^d$  la partie négative de  $\alpha$ . Il est clair que  $\alpha = \alpha_+ + \alpha_-$ . Le lemme 3.5 implique que

$$\|\partial^\alpha\|_{k,r} = \|\partial^{-(-\alpha_-)} \cdot \partial^{\alpha_+}\|_{k,r} = \max_{r \leq \ell \leq k} \{|\partial^{-\alpha_-}|_\ell^{-1} \cdot |\partial^{\alpha_+}|_\ell\}.$$

Or,  $|\partial^{\alpha_+}|_\ell = |\omega|^{-\ell[\alpha_+]} = p^{\ell[\alpha_+]}$  et  $|\partial^{-\alpha_-}|_\ell = p^{-\ell[\alpha_-]}$ . On en déduit que

$$\|\partial^\alpha\|_{k,r} = \max_{r \leq \ell \leq k} \{p^{\ell([\alpha_+] + [\alpha_-])}\}.$$

Comme  $[\alpha_+] + [\alpha_-] = [\alpha]$ , le maximum sur  $\ell \in \{r, \dots, k\}$  est donné par  $\ell = k$  lorsque  $[\alpha] \geq 0$  et par  $\ell = r$  lorsque  $[\alpha] < 0$ . Autrement dit,  $\|\partial^\alpha\|_{k,r} = p^{[\alpha,k,r]}$ .  $\square$

On rappelle que la norme  $\|\cdot\|_{k,r}$  de  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  n'est pas multiplicative. En particulier, les normes puissances des dérivations  $\partial^\alpha$  pour  $\alpha \in \mathbb{Z}^d$  ne sont pas multiplicatives, comme on peut le voir dans la remarque ci-dessous.

**Remarque 3.23.** *La relation  $[\alpha, k, r] + [\beta, k, r] = [\alpha + \beta, k, r]$  est fautive en général dès que  $k > r$ . En particulier,*

$$\varpi^{[\alpha,k,r]} \partial^\alpha \cdot \varpi^{[\beta,k,r]} \partial^\beta \neq \varpi^{[\alpha+\beta,k,r]} \partial^{\alpha+\beta}.$$

Ces inégalités sont déjà vérifiées lorsque  $d = 1$ . On prend par exemple  $\alpha = 1$  et  $\beta = -1$  :

$$(\varpi^k \partial) \cdot (\varpi^r \partial)^{-1} = (\varpi^{[1,k,r]} \partial) \cdot (\varpi^{[-1,k,r]} \partial^{-1}) = \varpi^{k-r} \neq \varpi^{[0,k,r]} = \varpi^0 = 1.$$

On démontre dans la proposition suivante que la  $K$ -algèbre  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  est exactement l'ensemble des séries convergentes de terme général  $a_\alpha \cdot \varpi^{[\alpha,k,r]} \partial^\alpha$  pour  $a_\alpha \in \mathbb{Z}^d$  tel que  $a_\alpha \rightarrow 0$  lorsque  $|\alpha| \rightarrow +\infty$ .

**Proposition 3.24.** *Tout élément  $S$  de  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  s'écrit uniquement sous la forme*

$$S = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} a_\alpha \cdot \varpi^{[\alpha,k,r]} \partial^\alpha$$

avec  $a_\alpha \rightarrow 0$  lorsque  $|\alpha| \rightarrow +\infty$ . De plus,  $\|S\|_{k,r} = \max_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} \{|a_\alpha|\}$ .

*Démonstration.* On vérifie toujours comme dans la preuve de la proposition 3.10 que pour toute fonction  $f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$ ,

$$\partial_i^{-1} f = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \partial_i^n (f) \cdot \partial_i^{-(n+1)} \in \mathcal{F}_{k,r}(U).$$

Cette série converge bien dans le microlocalisé  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  puisque

$$\|\partial_i^{-(n+1)}\|_{k,r} \leq \|\partial_i^{-1}\|_{k,r}^{n+1} \leq \left(\frac{1}{p^r}\right)^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Pour  $m \in \mathbb{N}$ , on note  $P_m = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}^d : \forall i \in \{1, \dots, d\}, \alpha_i \geq -m\}$ . Comme  $\|\varpi^{[\alpha,k,r]} \partial^\alpha\|_{k,r} = 1$ , on montre comme dans la preuve de la proposition 3.10 que la suite

$$S_m = \sum_{\alpha \in P_m} a_\alpha \cdot \varpi^{[\alpha,k,r]} \partial^\alpha$$

est de Cauchy dans l'algèbre de Banach  $(\mathcal{F}_{k,r}(U), \|\cdot\|_{k,r})$ . La norme  $\|\cdot\|_{k,r}$  n'est maintenant plus que sous-multiplicative. Il n'est pas clair que  $\|S_m\|_{k,r} = \max_{\alpha \in P_m} \{|a_\alpha|\}$ . Puisque la

norme de l'algèbre  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  est ultramétrique, on dispose déjà de l'inégalité  $\|S_m\|_{k,r} \leq \max_{\alpha \in P_m} \{|a_\alpha|\}$ . Il en découle que la suite  $(S_m)_{m \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy. Elle converge donc dans la  $K$ -algèbre de Banach  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  vers un élément que l'on note

$$S = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} a_\alpha \cdot \varpi^{[\alpha, k, r]} \partial^\alpha.$$

Enfin, le passage à la limite  $m \rightarrow \infty$  donne  $\|S\|_{k,r} \leq \max_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} \{|a_\alpha|\}$ . Le reste de la preuve est analogue à celle de la proposition 3.10.

Obtenir l'égalité  $\|S_m\|_{k,r} = \max_{\alpha \in P_m} \{|a_\alpha|\}$  nécessite plus de travail que pour l'algèbre  $\mathcal{E}_k(U)$ . On suppose maintenant que  $d = 1$ , autrement dit  $\mathfrak{X}$  est une courbe formelle. La preuve de cette égalité est analogue en dimension supérieure en remplaçant simplement  $n \in \mathbb{Z}$  par  $[\alpha]$  pour  $\alpha \in \mathbb{Z}^d$ . En effet,  $[\alpha, k, r] = k \cdot [\alpha]$  lorsque  $[\alpha] \geq 0$  et  $[\alpha, k, r] = r \cdot [\alpha]$  lorsque  $[\alpha] \leq 0$ . En dimension un, on a

$$S_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\varpi^k \partial)^n + \sum_{n=1}^m a_{-n} \cdot (\varpi^r \partial)^{-n}.$$

L'élément

$$S'_m := S_m \cdot (\varpi^r \partial)^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \varpi^{rm} \varpi^{kn} \cdot \partial^{n+m} + \sum_{n=0}^{m-1} a_{n-m} \cdot (\varpi^r \partial)^n$$

appartient à l'algèbre  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ . D'après la proposition 3.4 et le lemme 3.5, on sait que

$$\|S_m\|_{k,r} = \|S'_m \cdot (\varpi^r \partial)^{-m}\|_{k,r} = \|(\varpi^r \partial)^{-m} \cdot S'_m\|_{k,r} = \max_{r \leq \ell \leq k} \{|\varpi^r \partial|_\ell^{-m} \cdot |S'_m|_\ell\}.$$

Pour  $r \leq \ell \leq k$ , on a

$$S'_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \varpi^{rm+kn-\ell(n+m)} \cdot (\varpi^\ell \partial)^{n+m} + \sum_{n=0}^{m-1} a_{n-m} \cdot \varpi^{(r-\ell)n} \cdot (\varpi^\ell \partial)^n.$$

Comme  $|\varpi^r \partial|_\ell^{-m} = |\omega|^{(\ell-r)m}$ , on obtient

$$\begin{aligned} |\varpi^r \partial|_\ell^{-m} \cdot |S'_m|_\ell &= \max \left\{ \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \cdot |\varpi|^{rm+kn-\ell(n+m)+(\ell-r)m}, \max_{0 \leq n \leq m-1} |a_{n-m}| \cdot |\varpi|^{(r-\ell)n+(l-r)m} \right\} \\ &= \max \left\{ \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \cdot |\varpi|^{(k-\ell)n}, \max_{0 \leq n \leq m-1} |a_{n-m}| \cdot |\varpi|^{((\ell-r)(m-n))} \right\}. \end{aligned}$$

Le terme  $\max_{n \in \mathbb{N}} \{|a_n| \cdot |\varpi|^{(k-\ell)n}\}$  est maximum pour  $\ell = k$ . En effet, lorsque  $\ell \in \{1, \dots, k\}$ , la puissance  $(k-\ell)n$  de  $\varpi$  est positive et  $|\varpi|^{(k-\ell)n} \leq 1$ . De manière analogue, le terme

$\max_{0 \leq n \leq m-1} \{|a_{n-m}| \cdot |\varpi|^{((\ell-r)(m-n))}\}$  est maximum pour  $\ell = r$ , auquel cas on obtient  $\max_{0 \leq n \leq m-1} |a_{n-m}| = \max_{-m \leq n < 0} |a_n|$ . On en déduit finalement que

$$\|S_m\|_{k,r} = \max \left\{ \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|, \max_{-m \leq n < 0} |a_n| \right\} = \max_{n \geq -m} \{|a_n|\}.$$

Le passage à la limite  $m \rightarrow \infty$  donne  $\|S\|_{k,r} = \max_{n \in \mathbb{Z}} \{|a_n|\}$ .  $\square$

On peut noter au passage que les actions des dérivations  $\partial_i^{-1}$  sur une fonction  $f$  de  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$  sont encore données par

$$\partial_i^{-1} f = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \partial_i^n (f) \cdot \partial_i^{-(n+1)} \in \mathcal{F}_{k,r}(U).$$

On suppose maintenant que  $d = 1$ . Soit  $S$  un élément du microlocalisé  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ . D'après cette proposition,  $S$  s'écrit uniquement sous la forme

$$S = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\varpi^k \partial)^n}_{P \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \cdot (\varpi^{-r} \partial)^n}_Q$$

avec  $a_n \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \pm\infty$ . L'opérateur  $P$  est dans  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ . On a

$$\|S\|_{k,r} = \max_{n \in \mathbb{Z}} \{|a_n|\} = \max\{|P|_k, \|Q\|_{k,r}\}.$$

Soient  $Q$  et  $Q'$  deux éléments du microlocalisé  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  formés seulement de puissances strictement négative des dérivations  $\varpi^r \partial_i$ . Un calcul permet d'observer que  $\|Q \cdot Q'\|_{k,r} = \|Q\|_{k,r} \cdot \|Q'\|_{k,r}$ . Autrement dit, la norme  $\|\cdot\|_{k,r}$  de  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  est multiplicative pour le produit de tels éléments, comme elle l'est pour le produit d'opérateurs différentiels de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ . On peut noter  $|Q|_r$  pour  $\|Q\|_{k,r}$  et  $\|S\|_{k,r} = \max\{|P|_k, |Q|_r\}$  dans le cas où  $\mathfrak{X}$  est une courbe formelle. Lorsque la dimension de  $\mathfrak{X}$  est quelconque, on vérifie aussi que la norme est multiplicative pour les séries de la forme  $S = \sum_{\alpha \in (\mathbb{N}^*)^d} a_{-\alpha} \cdot \varpi^{-r|\alpha|} \partial^{-\alpha}$  et que  $\|S\|_{k,r} = \max_{\alpha \in (\mathbb{N}^*)^d} \{|a_{-\alpha}|\}$ . Plus généralement, tout élément  $S$  de  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  s'écrit uniquement sous la forme

$$S = \underbrace{\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d, [\alpha] \geq 0} a_{\alpha} \cdot \varpi^{k[\alpha]} \partial^{\alpha}}_P + \underbrace{\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d, [\alpha] < 0} a_{\alpha} \cdot \varpi^{r[\alpha]} \partial^{\alpha}}_Q.$$

On rappelle que pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^d$ ,  $[\alpha] + [\beta] = [\alpha + \beta]$ . Ainsi, le produit d'éléments de la forme  $P$  reste un élément de cette forme, soit une somme sur  $[\alpha] \geq 0$ . De même, le produit

d'éléments de la forme  $Q$  reste une somme sur  $[\alpha] < 0$ . On en déduit que la norme  $\|\cdot\|_{k,r}$  est multiplicative pour le produit d'éléments ne contenant que des puissances  $\alpha \in \mathbb{Z}^d$  telles que  $[\alpha] \geq 0$  ou ne contenant que des puissances  $\alpha \in \mathbb{Z}^d$  telles que  $[\alpha] < 0$ . On note donc encore  $|P|_k$  pour  $\|P\|_{k,r}$ ,  $|Q|_r$  pour  $\|Q\|_{k,r}$  et  $\|S\|_{k,r} = \max\{|P|_k, |Q|_r\}$ .

On rappelle que le morphisme de transition  $\varepsilon_{k,r} : \mathcal{F}_{k+1,r}(U) \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$  est une factorisation de l'inclusion de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  dans  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ . Comme le morphisme  $\varepsilon_{k,r}$  envoie les dérivations  $\partial_i$  sur elles-mêmes,  $\varepsilon_{k,r}(\partial^\alpha) = \partial^\alpha$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{Z}^d$ . Puisque par construction ce morphisme est continu, on en déduit que  $\varepsilon_{k,r}(S) = S$  pour tout élément  $S$  de  $\mathcal{F}_{k+1,r}(U)$ . Ainsi,  $\varepsilon_{k,r}$  injecte l'algèbre  $\mathcal{F}_{k+1,r}(U)$  dans  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ . Pour récapituler, on dispose du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) & \xrightarrow{i_k} & \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \\ \varphi_{k+1,r} \downarrow & & \downarrow \varphi_{k,r} \\ \mathcal{F}_{k+1,r}(U) & \xrightarrow{\varepsilon_{k,r}} & \mathcal{F}_{k,r}(U) \end{array}$$

où  $i_k$  et  $\varepsilon_{k,r}$  sont des inclusions 1-lipschitziennes et  $\varphi_{k,r}$  et  $\varphi_{k+1,r}$  des isométries.

La proposition suivante relie les  $K$ -algèbres  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  et  $\mathcal{E}_k(U)$  : le microlocalisé  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  est une sous-algèbre du microlocalisé  $\mathcal{E}_k(U)$ .

**Proposition 3.25.** *Le morphisme  $\phi_k : \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$  se relève en un morphisme injectif de  $K$ -algèbres  $\gamma_{k,r} : \mathcal{F}_{k,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$ . De plus, l'application  $\gamma_{k,r}$  est 1-lipschitzienne.*

*Démonstration.* Le morphisme  $\phi_k : \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$  vérifie clairement la condition d'uniforme continuité dans la propriété universelle du localisé  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ . Il induit donc un unique morphisme de  $K$ -algèbres 1-lipschitzien  $\gamma_{k,r} : \mathcal{F}_{k,r}(U) \rightarrow \mathcal{E}_k(U)$ . Ce morphisme envoie les éléments de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  sur eux-mêmes et  $\partial_i^{-1}$  sur  $\partial_i^{-1}$ . Par continuité, il envoie tout élément  $S$  de  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  sur l'élément  $S$  de  $\mathcal{E}_k(U)$  (il s'agit bien d'une série convergente dans  $\mathcal{E}_k(U)$ ). Ainsi, le morphisme  $\gamma_{k,r}$  est injectif.  $\square$

Comme pour le localisé  $\mathcal{E}_k(U)$ , on peut munir l'algèbre  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  de la filtration croissante donnée par la norme sous-multiplicative  $\|\cdot\|_{k,r}$ . Pour  $k = r$ , on rappelle que  $\mathcal{F}_{k,k}(U) = \mathcal{E}_k(U)$ . On suppose que  $k > r$ . La norme du microlocalisé  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  étant sous-abélienne, le gradué  $\text{gr } \mathcal{F}_{k,r}(U)$  est une  $\text{gr } K$ -algèbre commutative. On note  $\zeta_{k,i}$  et  $\zeta_{r,i}$  les images respectives des dérivations  $\varpi^k \partial_i$  et de  $(\varpi^r \partial_i)^{-1}$  dans le gradué  $\text{gr}_0 \mathcal{F}_{k,r}(U)$ . Puisque  $(\varpi^k \partial_i) \cdot (\varpi^r \partial_i)^{-1} = \varpi^{k-r}$ , on a

$$\|(\varpi^k \partial_i) \cdot (\varpi^r \partial_i)^{-1}\|_{k,r} = p^{r-k} < \|\varpi^k \partial_i\|_{k,r} \cdot \|(\varpi^r \partial_i)^{-1}\|_{k,r} = 1.$$

On a donc  $\zeta_{k,i} \cdot \zeta_{r,i} = 0$  dans le gradué  $\text{gr } \mathcal{F}_{k,r}(U)$ . On en déduit un isomorphisme

$$\text{gr } \mathcal{F}_{k,r}(U) \simeq \text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_{k,1}, \dots, \zeta_{k,d}, \zeta_{r,1}, \dots, \zeta_{r,d}] / (\zeta_{k,1} \cdot \zeta_{r,1}, \dots, \zeta_{k,d} \cdot \zeta_{r,d})$$

de  $\text{gr } K$ -algèbres. La première partie de la proposition suivante en découle.

**Proposition 3.26.** *La  $K$ -algèbre  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  est noetherienne à gauche et à droite. De plus, le morphisme de faisceaux  $\varepsilon_{k,r} : \mathcal{F}_{k+1,r} \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}$  est plat à gauche et à droite.*

*Démonstration.* Puisque le gradué

$$\text{gr } \mathcal{F}_{k,r}(U) \simeq \text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_{k,1}, \dots, \zeta_{k,d}, \zeta_{r,1}, \dots, \zeta_{r,d}] / (\zeta_{k,1} \cdot \zeta_{r,1}, \dots, \zeta_{k,d} \cdot \zeta_{r,d})$$

est noetherien, l'algèbre  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  l'est aussi toujours d'après la proposition 1.1 de l'article [7]. Pour démontrer que le morphisme  $\varepsilon_{k,r} : \mathcal{F}_{k+1,r} \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}$  est plat à gauche et à droite, on adapte la preuve de la proposition 2.2.16 de l'article [6] aux cas des faisceaux  $\mathcal{F}_{k,r}$  pour  $r \geq 1$  fixé. On suppose maintenant  $d = 1$ , autrement dit  $\mathfrak{X}$  est une courbe formelle. La preuve en dimension quelconque est analogue. On fixe un ouvert affine  $U$  de  $\mathfrak{X}$  sur lequel on dispose d'une coordonnée locale. Il suffit de montrer que le morphisme de  $K$ -algèbres  $\mathcal{F}_{k+1,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$  est plat à gauche et à droite.

On note  $A = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$  et  $\mathcal{F}_{k,r}^\circ(U)$  l'ensemble des éléments de  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  de norme  $\|\cdot\|_{k,r}$  inférieure ou égale à un. Autrement dit,  $\mathcal{F}_{k,r}^\circ(U)$  est l'ensemble des éléments de  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  dont tous les coefficients sont dans l'algèbre affinoïde  $A$  :

$$\mathcal{F}_{k,r}^\circ(U) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\varpi^k \partial)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \cdot (\varpi^r \partial)^{-n} \in \mathcal{F}_{k,r}(U), \quad a_n \in A \right\}.$$

C'est une  $A$ -algèbre vérifiant  $\mathcal{F}_{k,r}(U) = \mathcal{F}_{k,r}^\circ(U) \otimes_{\mathcal{V}} K$ . On introduit le  $A$ -module

$$H := \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U) + \mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U).$$

La dérivation  $(\varpi^k \partial)$  n'appartient pas à la  $\mathcal{V}$ -algèbre  $\mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$ . Cependant, elle appartient à la  $K$ -algèbre  $\mathcal{F}_{k+1,r}(U) = \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U) \otimes_{\mathcal{V}} K$ . La démonstration de la platitude du morphisme  $\mathcal{F}_{k+1,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$  se décompose en trois étapes.

1. On vérifie tout d'abord que le module  $H$  est une  $A$ -algèbre. Soit  $Q \in \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$  et  $P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U)$ . Comme  $k \geq r$ , on observe facilement que  $P \cdot Q$  appartient au  $A$ -module  $H$ . En effet, on considère pour cela le  $A$ -module suivant :

$$F_{k,r}(U) := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\varpi^k \partial)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \cdot (\varpi^r \partial)^{-n}, \quad a_n \in A, \quad a_n = 0 \text{ pour } n \ll 0 \right\}.$$

Il est clair que l'on dispose d'inclusions  $F_{k+1,r}(U) \subset F_{k,r}(U) \subset H$ . On peut décomposer l'élément  $Q$  sous la forme  $Q = Q_1 + \varpi \cdot Q_2$  avec  $Q_1 \in F_{k+1,r}(U)$  et

$Q_2 \in \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$ . On a  $(\varpi^k \partial) \cdot Q_1 \in F_{k,r}(U) \subset H$ . Par ailleurs,  $(\varpi^k \partial) \cdot (\varpi Q_2) = (\varpi^{k+1} \partial) \cdot Q_2 \in \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$ . Autrement dit,  $(\varpi^k \partial) \cdot Q \in H$ . On en déduit que  $P \cdot Q \in H$ . Pour montrer que  $H$  est une  $A$ -algèbre, il suffit maintenant d'observer que  $Q \cdot P \in H$ . On rappelle que pour toute fonction  $a$  de  $A$ , on a

$$(\varpi^r \partial)^{-1} \cdot a = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \partial^n(a) \varpi^{rn} \cdot (\varpi^r \partial)^{-(n+1)} \in \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$$

avec  $(-1)^n \partial^n(a) \varpi^{rn} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . En particulier, comme  $k \geq r$ ,

$$(\varpi^r \partial)^{-1} \cdot a(\varpi^k \partial) = \varpi^{k-r} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \partial^n(a) \cdot \partial^{-n} \in \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U).$$

On en déduit que pour tout entier  $\ell \in \mathbb{N}$ ,

$$(\varpi^r \partial)^{-\ell} \cdot P \in H = \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U) + \mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U).$$

Ainsi, pour tout élément fini  $\tilde{Q}$  de  $\mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$ , il en découle que  $\tilde{Q} \cdot P \in H$ . Soit  $q$  le degré de l'opérateur différentiel fini  $P$ . L'élément  $Q$  s'écrit uniquement sous la forme

$$Q = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\varpi^{k+1} \partial)^n}_{Q_1} + \underbrace{\sum_{n=1}^q a_{-n} \cdot (\varpi^r \partial)^{-n}}_{Q_2} + \underbrace{\sum_{n=q+1}^{\infty} a_{-n} \cdot (\varpi^r \partial)^{-n}}_{Q_3}.$$

Puisque  $Q_1 \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1}^{(0)}(U)$ , il est clair que  $Q_1 \cdot P \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1}^{(0)}(U) + \mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U) \subset H$ . D'après ce que l'on vient d'établir ci-dessus,  $Q_2 \cdot P \in H$ . Soit  $m > q$  et  $Q_3^{(m)}$  la troncation à l'ordre  $-m$  de  $Q_3$  :

$$Q_3^{(m)} := \sum_{n=q}^m a_{-n} \cdot (\varpi^r \partial)^{-n}.$$

Comme  $(\varpi^r \partial)^{-1}$  diminue strictement l'ordre et comme  $q$  est l'ordre de l'opérateur  $P$ , on vérifie que  $Q_3^{(m)} \cdot P \in \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$ . De plus, on vérifie que la suite  $(Q_3^{(m)} \cdot P)_{m>q}$  est de Cauchy dans l'algèbre  $(\mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U), \|\cdot\|_{k,r})$ . Enfin, puisque la  $\mathcal{V}$ -algèbre  $\mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$  est complète, on en déduit que  $Q_3 \cdot P \in \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$ . Pour conclure, on a bien montré que  $Q \cdot P \in H$ . On a ainsi démontré que  $H$  est une  $A$ -algèbre.

2. On démontre ensuite que la  $A$ -algèbre  $H$  est noetherienne à gauche et à droite. L'algèbre  $\mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$  est noetherienne d'après la proposition 1.1 de l'article [7]. En effet, son gradué est isomorphe à l'algèbre noetherienne  $\text{gr}(A)[\zeta_k, \zeta_r]/(\zeta_k \cdot \zeta_r)$  et  $\mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$  est complet pour la topologie  $\varpi$ -adique. L'algèbre  $H$  est engendrée sur  $A$  par  $\mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$  et par la dérivation  $(\varpi^k \partial)$ . Pour toute fonction  $a$  de  $A$ , on a

$$[\varpi^k \partial, a] = \varpi^k \partial(a) \in A \subset \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U).$$

Comme  $[\varpi^k \partial, \varpi^{k+1} \partial] = [\varpi^k \partial, (\varpi^r \partial)^{-1}] = 0$ ,  $[\varpi^k \partial, P] \in \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$  pour tout opérateur différentiel fini  $P$  de  $\mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$ . Enfin, puisque la  $\mathcal{V}$ -algèbre  $\mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$  est complète pour la topologie  $\varpi$ -adique, on en déduit que

$$\forall P \in \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U), \quad [\varpi^k \partial, P] \in \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U).$$

Une récurrence sur  $\ell \in \mathbb{N}^*$  implique alors que

$$\forall P \in \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U), \quad [(\varpi^k \partial)^\ell, P] \in \sum_{i=0}^{\ell-1} \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U) \cdot (\varpi^k \partial)^i \quad (1)$$

Le même argument que celui de la fin de la preuve de la proposition 2.2.16 de l'article [6] montre ensuite que l'algèbre  $H$  est noetherienne. On le rappelle brièvement ci-dessous.

Soit  $I$  un idéal à gauche de  $H$ . On note  $J$  l'ensemble des éléments  $R$  de  $\mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$  pour lesquels il existe  $\ell \in \mathbb{N}$ ,  $P \in I$  et  $R_0, \dots, R_{\ell-1} \in \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$  tels que

$$P = R \cdot (\varpi^k \partial)^\ell + \sum_{i=0}^{\ell-1} R_i \cdot (\varpi^k \partial)^i.$$

Soit  $R'$  un autre élément de  $J$ , où  $P' = R' \cdot (\varpi^k \partial)^\ell + \sum_{i=0}^{\ell-1} R'_i \cdot (\varpi^k \partial)^i \in I$ . On suppose par exemple que  $\ell \geq \ell'$ . La relation 1 implique que

$$P + (\varpi^k \partial)^{\ell-\ell'} \cdot P' = (R + R') \cdot (\varpi^k \partial)^\ell + \sum_{i=0}^{\ell-1} R_i'' \cdot (\varpi^k \partial)^i$$

pour certains  $R_i'' \in \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$ . Autrement dit,  $R + R' \in J$  et  $J$  est un idéal à gauche de  $\mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$ . Ainsi,  $J$  est engendré sur  $\mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$  par des éléments  $R_1, \dots, R_s$ . Par ailleurs,  $I \cap \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$  est un idéal à gauche de  $\mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$ . Il est donc engendré par des éléments  $P_1, \dots, P_t$ . Enfin, on observe que  $I$  est engendré en tant qu'idéal à gauche de  $H$  par les éléments  $R_1, \dots, R_s, P_1, \dots, P_t$ . Ceci prouve que l'algèbre  $H$  est noetherienne à gauche. De même, on démontre la noetherianité à droite.

3. On montre enfin que le morphisme d'algèbres  $\mathcal{F}_{k+1,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$  est plat à gauche et à droite. Comme  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) = \mathcal{D}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ , on a  $H_{\mathbb{Q}} := H \otimes_{\mathcal{V}} K = \mathcal{F}_{k+1,r}(U)$ . Par ailleurs, il est clair que  $\widehat{H} = \mathcal{F}_{k,r}^\circ(U)$ . Puisque  $\mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U) \subset \mathcal{F}_{k,r}^\circ(U)$  et  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U) \subset \mathcal{F}_{k,r}^\circ(U)$ , on a  $H \subset \mathcal{F}_{k,r}^\circ(H)$ . De plus, l'algèbre  $H$  contient  $F_{k,r}(U)$  et l'algèbre  $\mathcal{F}_{k,r}^\circ(U)$  est le complété  $\varpi$ -adique de  $F_{k,r}(U)$ . Le complété  $\varpi$ -adique  $\widehat{H}$  de  $H$  est donc égale à la  $\mathcal{V}$ -algèbre  $\mathcal{F}_{k,r}^\circ(U)$ . Le résultat de platitude découle alors du fait que l'algèbre  $H$  est noetherienne. En effet, dans ce cas le complété  $\widehat{H}$  est plat sur  $H$  et donc l'algèbre  $\widehat{H}_{\mathbb{Q}} = \mathcal{F}_{k,r}(U)$  est plate sur  $H_{\mathbb{Q}} = \mathcal{F}_{k+1,r}(U)$ .



□

**Remarque 3.27.** *Le morphisme de faisceaux de  $K$ -algèbres  $\phi_k : \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}$  est probablement plat à gauche et à droite. Cependant, plusieurs difficultés techniques apparaissent pour démontrer ce résultat. On en liste deux ci-dessous.*

1. *Le morphisme gradué  $\text{gr } \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \text{gr } \mathcal{F}_{k,r}$  n'est pas plat puisque l'algèbre graduée  $\text{gr } \mathcal{F}_{k,r}(U) \simeq \text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_{k,1}, \dots, \zeta_{k,d}, \zeta_{r,1}, \dots, \zeta_{r,d}]/(\zeta_{k,1} \cdot \zeta_{r,1}, \dots, \zeta_{k,d} \cdot \zeta_{r,d})$  admet de la torsion. On ne peut donc pas déduire la platitude de la filtration induite par la norme.*
2. *Par ailleurs,  $\mathcal{F}_{k,r}^{\circ(i)} := \mathcal{F}_{k,r}/(\varpi^i \cdot \mathcal{F}_{k,r})$  est un faisceau sur le  $(\mathcal{V}/\varpi^i)$ -schéma classique  $X_i := \mathfrak{X}_i \times_{\mathcal{V}} \text{Spec } (\mathcal{V}/\varpi^i)$  et  $\mathcal{F}_{k,r}^{\circ}$  est la limite projective sur  $i$  des  $\mathcal{F}_{k,r}^{\circ(i)} : \mathcal{F}_{k,r}^{\circ} = \varprojlim_i \mathcal{F}_{k,r}^{\circ(i)}$ . Le morphisme de faisceaux  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}/\varpi^i \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}^{\circ(i)}$  n'est pas plat. En effet, les faisceaux d'algèbres  $\mathcal{F}_{k,r}^{\circ(i)}$  admettent de la  $\varpi$ -torsion. On ne peut donc pas démontrer ainsi, en passant à la limite projective sur  $i$ , que le morphisme initial  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)} \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}^{\circ}$  est plat. Néanmoins, la torsion des algèbres  $\mathcal{F}_{k,r}^{\circ(i)}$  est à priori indépendante de l'entier  $i$  pour  $i > k - r$ . En contrôlant bien cette  $\varpi$ -torsion, il devrait être possible de montrer que le morphisme de faisceaux  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)} \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}^{\circ}$  est plat après tensorisation par  $K = \text{Frac}(\mathcal{V})$ .*

On rappelle que  $\mathcal{U}$  est l'ensemble des ouverts affines de  $\mathfrak{X}$  sur lesquels on dispose d'un système de coordonnées locales. C'est une base de voisinages ouverts de  $\mathfrak{X}$ . On démontre comme pour le faisceau localisé  $\mathcal{E}_k$  le résultat suivant.

**Proposition 3.28.** *Il existe un unique faisceau  $\mathcal{F}_{k,r}$  de  $K$ -algèbres sur  $\mathfrak{X}$  tel que pour tout ouvert  $U$  de  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{F}_{k,r}(U) = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \langle |\cdot|_r, \dots, |\cdot|_k; \{\partial^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \rangle$ .*

Les inclusions locales  $\mathcal{F}_{k+1,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$  pour tout ouvert  $U$  de  $\mathcal{U}$  induisent des morphismes de faisceaux  $\mathcal{F}_{k+1,r} \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}$  commutant avec les morphismes de transition  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ . On dispose ainsi du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)} & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{F}_{k+1,r} & \longrightarrow & \mathcal{F}_{k,r}
 \end{array}$$

## Opérateurs de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ inversibles dans le microlocalisé $\mathcal{F}_{k,r}$

Soit  $U$  un ouvert affine contenant le point  $x$  sur lequel on dispose d'un système de coordonnées locales associé à  $x$ . Il est plus délicat de déterminer les éléments inversibles de l'algèbre  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  que de  $\mathcal{E}_k(U)$  lorsque  $k > r$ . En effet, soit  $S$  un élément de  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ . Pour simplifier, on suppose que  $\mathfrak{X}$  est une courbe formelle, ie  $d = 1$ . L'élément  $S$  s'écrit uniquement comme une série

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\varpi^k \partial)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \cdot (\varpi^r \partial)^{-n}.$$

On note  $\partial_k$  et  $(\partial_r)^{-1}$  les réductions modulo  $\varpi$  respectivement de  $\varpi^k \partial$  et  $(\varpi^r \partial)^{-1}$ . La réduction modulo  $\varpi$  de  $S$  est une somme finie de la forme

$$\bar{S} = \sum_{n < 0} \bar{a}_n \cdot \partial_r^n + \sum_{n \geq 0} \bar{a}_n \cdot \partial_k^n.$$

Pour  $k > r$ , on a  $\partial_k \cdot \partial_r^{-1} = \partial_r^{-1} \cdot \partial_k = 0$  puisque  $(\varpi^k \partial) \cdot (\varpi^r \partial)^{-1} = \varpi^{k-r}$ . Autrement dit, la dérivation  $\partial_k$  n'est plus inversible dans le quotient  $\mathcal{F}_{k,r}^{\circ}(U)/\varpi$ . On ne peut donc pas déterminer les éléments inversibles de l'algèbre  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  après réduction modulo  $\varpi$ . Le même phénomène apparaît en considérant le gradué  $\text{gr } \mathcal{F}_{k,r}(U)$ . Bien que les dérivations  $\partial_i$  soient inversibles dans  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ , les images des  $\partial_i$  dans le gradué ne sont plus inversibles. Cependant, on dispose d'un morphisme injectif d'algèbres  $\varepsilon_{k,r} : \mathcal{F}_{k,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$ . Puisque les éléments inversibles de l'algèbre  $\mathcal{E}_k(U)$  sont connus, on en déduit facilement les opérateurs différentiels de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  inversibles dans le microlocalisé  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ . Ce cas est suffisant pour définir la variété caractéristique à partir du microlocalisé.

On traite tout d'abord le cas de la dimension un, soit  $d = 1$ . Les raisonnements sont analogues pour  $d$  quelconque. Les énoncés et les démonstrations s'écrivent bien plus simplement lorsque  $d = 1$ . On évite la lourdeur des multi-indices et les idées demeurent les mêmes en dimension supérieure. Soit  $P = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot (\varpi^k \partial)^n$  un opérateur différentiel de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ . Les normes de  $P$  dans les algèbres  $\mathcal{E}_k(U)$  et dans  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  coïncident avec la norme usuelle  $|P|_k$  de  $P$  dans  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ . Si  $P$  est inversible dans l'algèbre  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ , alors  $P$  est inversible dans  $\mathcal{E}_k(U)$ . Cet opérateur doit donc vérifier l'égalité  $\bar{N}_k(P) = \bar{n}_k(P)$ . On rappelle que

$$\bar{N}_k(P) = \max\{n \in \mathbb{N} : |a_n| = |P|_k\} \quad \text{et} \quad \bar{n}_k(P) = \min\{n \in \mathbb{N} : |a_n| = |P|_k\}.$$

On note  $q = \bar{N}_k(P) = \bar{n}_k(P)$  cet entier. Pour que  $P$  soit inversible dans le localisé  $\mathcal{E}_k(U)$ , il faut de plus que son coefficient dominant  $a_q$  soit inversible dans la  $K$ -algèbre affinoïde

$\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$ . L'inverse de  $P$  dans  $\mathcal{E}_k(U)$  est alors

$$P^{-1} = (\varpi^k \partial)^{-q} \cdot \sum_{j \in \mathbb{N}} \left( - \sum_{n=0}^{q-1} \frac{a_n}{a_q} \cdot (\varpi^k \partial)^{n-q} - \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+q}}{a_q} \cdot (\varpi^k \partial)^n \right)^j \cdot a_q^{-1}.$$

L'opérateur  $P^{-1}$  appartient à l'algèbre  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  si et seulement si la somme sur  $j$  converge pour la norme  $\|\cdot\|_{k,r}$  de  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ . Une condition suffisante est d'avoir

$$\left\| \sum_{n=0}^{q-1} \frac{a_n}{a_q} \cdot (\varpi^k \partial)^{n-q} + \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+q}}{a_q} \cdot (\varpi^k \partial)^n \right\|_{k,r} < 1.$$

On rappelle l'égalité démontrée dans la proposition 3.24 :

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=0}^{q-1} \frac{a_n}{a_d} \cdot (\varpi^k \partial)^{n-q} + \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+q}}{a_q} \cdot (\varpi^k \partial)^n \right\|_{k,r} &= \\ \max \left\{ \left\| \sum_{n=0}^{q-1} \frac{a_n}{a_q} \cdot (\varpi^k \partial)^{n-q} \right\|_{k,r}, \left\| \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+q}}{a_q} \cdot (\varpi^k \partial)^n \right\|_k \right\}. \end{aligned}$$

On a toujours

$$\left\| \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+q}}{a_q} \cdot (\varpi^k \partial)^n \right\|_{k,r} = \left| \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+q}}{a_q} \cdot (\varpi^k \partial)^n \right|_k < 1.$$

En effet, l'opérateur  $\sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+q}}{a_q} \cdot (\varpi^k \partial)^n$  appartient à l'algèbre  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  et par définition de  $q$ ,  $|a_{n+q}| < |a_q|$  dès que  $n \geq 1$ . Par ailleurs,

$$\sum_{n=0}^{q-1} \frac{a_n}{a_q} \cdot (\varpi^k \partial)^{n-q} = \sum_{n=0}^{q-1} \frac{a_n}{a_q} \cdot \varpi^{(k-r)(n-q)} \cdot (\varpi^r \partial)^{n-q}.$$

On obtient

$$\left\| \sum_{n=0}^{q-1} \frac{a_n}{a_q} \cdot (\varpi^k \partial)^{n-q} \right\|_{k,r} = \max_{0 \leq n < q} \left( \frac{|a_n|}{|a_q|} \cdot |\varpi|^{(k-r)(n-q)} \right).$$

On en déduit que  $P$  est inversible dans le microlocalisé  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  dès que

$$\forall 0 \leq n \leq q-1, \quad |a_n| \cdot p^{(k-r)(q-n)} < |a_q|.$$

La réciproque est vraie. Cependant, elle n'est pas immédiate puisque la norme  $\|\cdot\|_{k,r}$  de la  $K$ -algèbre  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  est seulement sous-multiplicative. La proposition suivante résume tout ce qui vient d'être dit.

**Proposition 3.29.** *On suppose que  $d = 1$ . Soit  $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\varpi^k \partial)^n$  un opérateur différentiel de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ . Il existe un ouvert  $V \subset U$  contenant  $x$  tel que  $P$  soit inversible dans le microlocalisé  $\mathcal{F}_{k,r}(V)$  si et seulement si*

1.  $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P) = q$ ,
2.  $a_q$  est inversible dans  $\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(V)$ ,
3.  $\forall n \in \{0, \dots, q-1\}$ ,  $|a_n| \cdot p^{(k-r)(q-n)} < |a_q|$ .

*Démonstration.* Si  $P$  vérifie les trois conditions de la proposition, alors  $P$  est inversible dans le microlocalisé  $\mathcal{F}_{k,r}(V)$ . Réciproquement, si  $P$  est inversible dans  $\mathcal{F}_{k,r}(V)$ , alors  $P$  vérifie les deux premières conditions de la proposition. En effet,  $P$  est à fortiori inversible dans le localisé  $\mathcal{E}_k(V)$ . Il reste à établir que  $P$  vérifie le point 3. On rappelle que l'inverse  $P^{-1}$  de  $P$  s'écrit

$$P^{-1} = (\varpi^k \partial)^{-q} \cdot \sum_{i \in \mathbb{N}} \left( - \sum_{n=0}^{q-1} \frac{a_n}{a_q} \cdot (\varpi^k \partial)^{n-q} - \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+q}}{a_q} \cdot (\varpi^k \partial)^n \right)^i \cdot a_q^{-1}.$$

Il a été vu que

$$\left\| \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+q}}{a_q} \cdot (\varpi^k \partial)^n \right\|_{k,r} = \left| \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+q}}{a_q} \cdot (\varpi^k \partial)^n \right|_k < 1.$$

On pose  $R = \sum_{n=0}^{q-1} \frac{a_n}{a_q} \cdot (\varpi^k \partial)^{n-q}$ . On a

$$\left\| \sum_{n=0}^{q-1} \frac{a_n}{a_q} \cdot (\varpi^k \partial)^{n-q} + \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+q}}{a_q} \cdot (\varpi^k \partial)^n \right\|_{k,r} = \max \left\{ \|R\|_{k,r}, \left| \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+q}}{a_q} \cdot (\varpi^k \partial)^n \right|_k \right\}.$$

On doit donc démontrer que  $\|R\|_{k,r} < 1$ . Comme  $R$  ne contient que des puissances strictement négatives de  $\partial$ , la norme  $\|\cdot\|_{k,r}$  est multiplicative pour les puissances de  $R$  :

$$\|R^i\|_{k,r} = |R^i|_r = |R|_r^i.$$

On suppose tout d'abord que  $\|R\|_{k,r} = 1$ . On montre alors que la somme définissant  $P^{-1}$  ne converge pas dans  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ . Comme  $\|R\|_{k,r} = |R|_r = 1$ , on a  $\|R^i\|_{k,r} = |R^i|_r = 1$ . Puisque la norme  $\|\cdot\|_{k,r}$  de  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  est sous-multiplicative et puisque la norme de  $\sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+q}}{a_q} \cdot (\varpi^k \partial)^n$  est strictement inférieure à un, le produit d'une puissance de cette somme avec une puissance de  $R$  converge dans l'algèbre de Banach  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ . Il suffit donc de prouver que la somme des puissances de  $R$  diverge pour arriver à une contradiction. Or la suite  $\{\sum_{i=0}^n R^i\}_{n \in \mathbb{N}}$  n'est

pas de Cauchy dans l'algèbre  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  puisque  $\|R\|_{k,r} = 1$ . En effet, la différence de deux termes consécutifs est de norme égale à un :

$$\left\| \sum_{i=0}^{n+1} R^i - \sum_{i=0}^n R^i \right\|_{k,r} = \|R^{n+1}\|_{k,r} = 1.$$

Ainsi la somme des puissances de  $R$  diverge dans l'algèbre  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ . Lorsque  $\|R\|_{k,r} > 1$ , on vérifie aussi que la somme définissant  $P^{-1}$  diverge dans l'algèbre de Banach  $(\mathcal{F}_{k,r}(U), \|\cdot\|_{k,r})$  par des arguments similaires au cas  $\|R\|_{k,r} = 1$ .

On en déduit finalement que  $\|R\|_{k,r} < 1$ . L'implication directe de la proposition est donc démontrée.  $\square$

Pour tout opérateur différentiel  $P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_\alpha \cdot \omega^{k|\alpha|} \partial^\alpha$  de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ , on note encore  $\bar{N}_k(P) := \max\{|\alpha| : \alpha \in \mathbb{N}^d, |a_\alpha| = |P|_k\}$  et  $\bar{n}_k(P) := \min\{|\alpha| : \alpha \in \mathbb{N}^d : |a_\alpha| = |P|_k\}$ . Si  $P$  est inversible dans le microlocalisé  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ , alors  $P$  est inversible dans le localisé  $\mathcal{E}_k(U)$ . En particulier,  $P$  admet un unique coefficient  $a_\beta$  de norme spectrale maximal, et ce coefficient est inversible dans  $\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U)$ . On rappelle que pour  $\alpha \in \mathbb{Z}^d$ ,  $\lfloor \alpha \rfloor = \alpha_1 + \dots + \alpha_d \in \mathbb{Z}$ . L'inverse de  $P$  dans  $\mathcal{E}_k(U)$  est donné par

$$P^{-1} = \varpi^{-k|\beta|} \partial^{-\beta} \cdot \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \left( - \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d \setminus \{\beta\}} \frac{a_\alpha}{a_\beta} \cdot \varpi^{k|\alpha-\beta|} \partial^{\alpha-\beta} \right)^\ell \cdot a_\beta^{-1}.$$

Pour tout élément  $S = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} a_\alpha \cdot \varpi^{[\alpha, k, r]} \partial^\alpha$  de  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ , on a vu que  $\|S\|_{k,r} = \max_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} \{|a_\alpha|\}$ , que  $S$  s'écrit uniquement sous la forme

$$S = \underbrace{\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d, \lfloor \alpha \rfloor \geq 0} a_\alpha \cdot \varpi^{k|\alpha|} \partial^\alpha}_{Q_1} + \underbrace{\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d, \lfloor \alpha \rfloor < 0} a_\alpha \cdot \varpi^{r|\alpha|} \partial^\alpha}_{Q_2}$$

et que la norme  $\|\cdot\|_{k,r}$  est multiplicative pour le produit d'éléments du type de  $Q_1$  ou le produit d'éléments du type de  $Q_2$ . On obtient ainsi exactement comme ci-dessus que  $P$  est inversible dans le microlocalisé  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  dès que  $P$  vérifie les conditions de la proposition suivante.

**Proposition 3.30.** *Soit  $P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_\alpha \cdot \varpi^{k|\alpha|} \partial^\alpha$  un opérateur différentiel de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ . Alors  $P$  est inversible dans le microlocalisé  $\mathcal{F}_{k,r}(V)$ , où  $V$  est un ouvert de  $U$  contenant  $x$ , si et seulement si  $P$  vérifie les points suivants :*

1.  $P$  admet un unique coefficient  $a_\beta$  de norme spectrale maximale,
2.  $a_\beta$  est inversible dans  $\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(V)$ ,
3. pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^d$  vérifiant  $|\alpha| < |\beta|$ ,  $|a_\alpha| \cdot p^{(k-r)(\lfloor \beta - \alpha \rfloor)} < |a_\beta|$ .

La première condition de ce résultat implique que  $|\beta| = \overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P)$ . En particulier, on peut réécrire la proposition 3.30 de la manière suivante. Un opérateur  $P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_\alpha \cdot \varpi^{k|\alpha|} \partial^\alpha$  de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  est inversible dans le microlocalisé  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  si et seulement si

1.  $P$  admet un coefficient  $a_\beta$  tel que  $|\beta| = \overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P)$ ,
2.  $a_\beta$  est inversible dans  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$ ,
3. pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^d$  vérifiant  $|\alpha| \leq |\beta|$ ,  $\alpha \neq \beta \implies |a_\alpha| \cdot p^{(k-r)(\lfloor \beta - \alpha \rfloor)} < |a_\beta|$ .

## 4 Microlocalisation de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$

On construit dans cette dernière section le microlocalisé  $\mathcal{F}_\infty$  de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$  vérifiant la condition d'invisibilité souhaitée lorsque  $\mathfrak{X}$  est une courbe formelle : un opérateur différentiel  $P$  surconvergeant de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$  est inversible dans le microlocalisé  $\mathcal{F}_\infty(U)$  si et seulement si  $P$  est un opérateur fini dont le coefficient dominant est inversible. Ce microlocalisé permettra plus tard, dans un autre article, de construire une variété caractéristique pour les  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles lorsque  $\mathfrak{X}$  est une courbe formelle.

### 4.1 Les microlocalisés $\mathcal{F}_{\infty,r}$

On introduit dans cette partie le faisceau  $\mathcal{F}_{\infty,r}$  limite projective sur  $k \geq r$  des faisceaux  $\mathcal{F}_{k,r}$  pour  $r \geq 1$  fixé. On détermine ensuite les opérateurs différentiels de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$  inversibles dans le microlocalisé  $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ . Contrairement à ce qu'il se passe pour les  $K$ -algèbres  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ , les éléments de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U) \cap (\mathcal{F}_\infty(U))^\times$  seront des opérateurs finis. Leurs coefficients dominants devront toujours être inversibles. Il faudra de plus demander certaines inégalités entre les normes des coefficients des opérateurs inversibles.

#### Définition et structure

Pour l'instant  $r$  est un entier fixé supposé supérieur ou égale à un et  $k$  désigne toujours un entier plus grand que  $r$ . On rappelle que tout élément  $S$  de  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  s'écrit uniquement sous la forme

$$S = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d, |\alpha| \geq 0} a_\alpha \cdot \varpi^{k|\alpha|} \partial^\alpha + \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d, |\alpha| < 0} a_\alpha \cdot \varpi^{r|\alpha|} \partial^\alpha \quad \text{avec} \quad a_\alpha \xrightarrow{|\alpha| \rightarrow +\infty} 0.$$

Les morphismes d'algèbres  $\varepsilon_{k,r} : \mathcal{F}_{k+1,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$  sont injectifs et vérifient pour toute section  $S$  de  $\mathcal{F}_{k+1,r}(U)$  l'inégalité  $\|\varepsilon_{k,r}(S)\|_{k,r} \leq \|S\|_{k+1,r}$ . On considère les morphismes de faisceaux de  $K$ -algèbres  $\mathcal{F}_{k+1,r} \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}$  induis localement par ces inclusions locales. La limite projective des faisceaux  $\mathcal{F}_{k,r}$  définit un faisceau de  $K$ -algèbres sur l'espace topologique sous-jacent à  $\mathfrak{X}$ .

**Définition 4.1.** *On pose  $\mathcal{F}_{\infty,r} := \varprojlim_{k \geq r} \mathcal{F}_{k,r}$ .*

Soit  $U$  un ouvert affine de  $\mathfrak{X}$  muni de coordonnées locales. On a

$$\mathcal{F}_{\infty,r}(U) = \varprojlim_{k \geq r} \mathcal{F}_{k,r}(U) = \bigcap_{k \geq r} \mathcal{F}_{k,r}(U).$$

C'est une  $K$ -algèbre contenant l'algèbre de Fréchet-Stein  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ . Cette inclusion correspond au morphisme continu  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{\infty,r}(U)$  induit par passage à la limite projective sur  $k \geq r$  dans les diagrammes commutatifs de  $K$ -algèbres topologiques

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) & \hookrightarrow & \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_{k+1,r}(U) & \hookrightarrow & \mathcal{F}_{k,r}(U). \end{array}$$

La proposition 3.26 montre que  $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$  est aussi une algèbre de Fréchet-Stein. La proposition suivante résume les principales propriétés du faisceau  $\mathcal{F}_{\infty,r}$ .

**Proposition 4.2.** *Le faisceau  $\mathcal{F}_{\infty,r}$  est un faisceau de  $K$ -algèbres de Fréchet-Stein sur les ouverts  $U$  de  $\mathcal{U}$  dont la topologie est induite localement par les normes  $\|\cdot\|_{k,r}$  des algèbres  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  tel que*

$$\mathcal{F}_{\infty,r}(U) = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d, [\alpha] \geq 0} a_\alpha \cdot \partial^\alpha + \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d, [\alpha] < 0} a_\alpha \cdot \varpi^{r[\alpha]} \partial^\alpha : a_\alpha \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U) \text{ tq} \right. \\ \left. \forall \mu \in \mathbb{R}, \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty, [\alpha] \geq 0} a_\alpha \cdot \varpi^{-\mu[\alpha]} = 0 \text{ et } \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty, [\alpha] < 0} a_\alpha = 0 \right\}.$$

*Démonstration.* Soit  $S \in \mathcal{F}_{\infty,r}(U)$  et  $k \geq r$ . Alors  $S \in \mathcal{F}_{k,r}(U)$  et  $S$  s'écrit uniquement sous la forme

$$S = \underbrace{\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d, [\alpha] \geq 0} a_\alpha \cdot \partial^\alpha}_P + \underbrace{\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d, [\alpha] < 0} a_\alpha \cdot \varpi^{r[\alpha]} \partial^\alpha}_Q$$

avec  $a_\alpha \cdot \varpi^{-k[\alpha]} \rightarrow 0$  lorsque  $|\alpha| \rightarrow +\infty$  et  $[\alpha] \geq 0$ . Soit  $k' > k$ . Comme  $S \in \mathcal{F}_{k',r}(U)$  et par unicité de l'écriture dans les microlocalisés  $\mathcal{F}_{k',r}(U)$ ,  $S$  s'écrit sous la même forme  $S = P + Q$  dans  $\mathcal{F}_{k',r}(U)$ . On en déduit que  $a_\alpha \cdot \varpi^{-k'[\alpha]} \rightarrow 0$  lorsque  $|\alpha| \rightarrow +\infty$  avec  $[\alpha] \geq 0$ . Ainsi, on a démontré que  $S = P + Q$  dans  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  pour tout niveau de congruence  $k \geq r$  et que la limite de  $a_\alpha \cdot \varpi^{-k[\alpha]}$  lorsque  $|\alpha| \rightarrow +\infty$  avec  $[\alpha] \geq 0$  doit être nulle. Autrement dit,  $S = P + Q$  dans  $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$  avec la condition de convergence donnée. Réciproquement, un élément de cette forme appartient à tous les microlocalisés  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  et donc appartient à  $\mathcal{F}_{\infty,r}(U) = \bigcap_{k \geq r} \mathcal{F}_{k,r}(U)$ .  $\square$

## Opérateurs de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ inversibles dans le microlocalisé $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$

On suppose tout d'abord que  $\mathfrak{X}$  est une courbe formelle, autrement dit  $d = 1$ . On détermine les éléments de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$  inversibles dans  $\mathcal{F}_{\infty,r}$ . On explique ensuite comment généraliser ces résultats à la dimension supérieure. Soit  $P = \sum_{n=0}^q a_n \cdot \partial^n$  un opérateur différentiel fini d'ordre  $q$  de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ . Pour  $k$  suffisamment grand,  $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P) = q$  d'après la preuve du lemme 2.5. Ainsi,  $P$  est inversible dans le localisé  $\mathcal{E}_k(U)$  si et seulement si son coefficient dominant  $a_q$  est inversible dans la  $K$ -algèbre affinoïde  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$ . On déduit de la proposition 3.29 que  $P$  est inversible dans le microlocalisé  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  si de plus

$$\forall n \in \{0, \dots, q-1\}, \quad |a_n| < |a_q| \cdot p^{r(q-n)}.$$

Cette condition ne dépendant pas de  $k$ , on peut expliciter les opérateurs différentiels finis de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$  inversibles dans le microlocalisé  $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$  : un opérateur fini  $P = \sum_{n=0}^q a_n \cdot \partial^n$  d'ordre  $q$  de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$  appartient à  $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)^\times$  si et seulement si

1.  $a_q \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)^\times$ ,
2.  $\forall n \in \{0, \dots, q-1\}, \quad |a_n| < |a_q| \cdot p^{r(q-n)}$ .

Cette condition est vérifiée par exemple pour les opérateurs dominants :  $|a_n| \leq |a_q|$  pour tout entier  $n \in \{0, \dots, q\}$ . Réciproquement, on va démontrer que tout opérateur différentiel de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$  inversible dans le microlocalisé  $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$  est de cette forme.

Soit maintenant  $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \partial^n$  un opérateur différentiel infini de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ . Il n'est pas vrai en général qu'à partir d'un certain niveau de congruence  $k$ , l'égalité  $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P)$  soit vérifiée. Autrement dit,  $P$  n'est pas forcément inversible dans le localisé  $\mathcal{E}_k(U)$  pour  $k$  suffisamment grand dès que son coefficient d'ordre  $\overline{N}_k(P)$  est inversible.

### Exemple 4.3.

1. Soit  $P = \prod_{n \geq 1} (1 - \varpi^n \partial) \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ . Alors  $\overline{N}_k(P) = k$  et  $\overline{n}_k(P) = k-1$  pour tout entier naturel  $k$  non nul. Autrement dit,  $P$  n'est jamais inversible dans  $\mathcal{E}_k(U)$  dès que  $k \geq 1$ .
2. Soit  $P = \sum_{n \geq 0} \varpi^{n^2} \cdot \partial^n \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ . On a  $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P) = k/2$  si  $k$  est paire. Sinon,  $\overline{N}_k(P) = \frac{k+1}{2}$  et  $\overline{n}_k(P) = \frac{k-1}{2}$ . Ainsi,  $P$  est inversible dans l'algèbre  $\mathcal{E}_k(U)$  si et seulement si le niveau de congruence  $k$  est pair.

Cependant, on dispose de morphismes de transition injectifs  $\mathcal{F}_{k+1,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$ . Si  $P$  est inversible dans le microlocalisé  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ , alors  $P$  est inversible dans  $\mathcal{F}_{\ell,r}(U)$  pour tout entier  $\ell \in \{0, \dots, k\}$ . Ainsi, ou bien  $P$  est inversible dans tous les microlocalisés  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ , ou bien  $P$  n'est plus inversible dans les microlocalisés  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  à partir d'un certain niveau de congruence  $k$ . Puisque  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{E}_k(U)$ , les deux opérateurs différentiels de l'exemple 4.3 ne sont pas inversibles dans le microlocalisé  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  quelque soit le niveau de congruence  $k \geq r \geq 1$ .



Soit  $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cdot \partial^n$  un opérateur de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}(U)$  inversible dans le microlocalisé  $\mathcal{F}_{\infty, r}(U)$ . Alors  $P$  est inversible dans toutes les algèbres  $\mathcal{F}_{k, r}(U)$  et  $\mathcal{E}_k(U)$ . Une condition nécessaire est donc d'avoir  $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P)$  pour tout entier naturel  $k$ . Par exemple, les deux opérateurs différentiels de l'exemple 4.3 ne sont pas inversibles dans le microlocalisé  $\mathcal{F}_{\infty, r}(U)$ . De plus, on rappelle que l'opérateur  $P$  est inversible dans l'algèbre  $\mathcal{F}_{k, r}(U)$  si pour tout entier  $n \in \{0, \dots, \overline{N}_k(P) - 1\}$ ,  $|a_n| < |a_{\overline{N}_k(P)}| \cdot p^{r(\overline{N}_k(P) - n)}$ . On s'intéresse donc aux opérateurs différentiels  $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \partial^n$  de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}(U)$  vérifiant la condition

$$q_k = \overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P) \text{ et } \forall n \in \{0, \dots, q_k - 1\}, |a_n| < |a_{q_k}| \cdot p^{r(q_k - n)} \quad (2)$$

On démontre dans ce qui suit que si  $P$  vérifie cette condition pour une infinité d'entiers naturels  $k$ , alors  $P$  est un opérateur différentiel fini. Les éléments de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}(U)$  inversibles dans le microlocalisé  $\mathcal{F}_{\infty, r}(U)$  seront donc des opérateurs différentiels finis.

On note  $U = \text{Spf } A'$  et  $A = A' \otimes_{\mathcal{V}} K$ . Par définition,  $A$  une  $K$ -algèbre affinoïde. La norme spectrale  $|\cdot|$  sur  $A$  est multiplicative. En effet, la courbe formelle  $\mathfrak{X}$  est connexe et lisse, donc  $A$  est intègre. On fixe une clôture algébrique  $\overline{K}$  de  $K$ . Cette dernière est munie d'une valuation, extension de la valuation de  $K$ , que l'on note encore  $v$ . Soit  $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cdot \partial^n$  un opérateur différentiel de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}(U)$ . Les coefficients  $a_n$  de  $P$  sont des éléments de  $A$  vérifiant la condition de surconvergence :  $\forall \mu \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \varpi^{-\mu n} = 0$ . Pour  $\mu \in v(\overline{K}) \setminus \{\infty\}$ , on pose

- $|P|_{\mu} := \max_{\ell \in \mathbb{N}} |a_{\ell} \cdot \varpi^{-\mu \ell}|$ ,
- $\overline{N}_{\mu}(P) := \max \{n \in \mathbb{N} : |a_n \cdot \varpi^{-\mu n}| = |P|_{\mu}\}$ ,
- $\overline{n}_{\mu}(P) := \min \{n \in \mathbb{N} : |a_n \cdot \varpi^{-\mu n}| = |P|_{\mu}\}$ .

Par définition,  $\overline{N}_k(0) = +\infty$  et  $\overline{n}_k(0) = 0$ . Lorsque  $\mu = k \in \mathbb{N}$ , on retrouve les fonctions définies précédemment. La norme spectrale  $|\cdot|$  est à valeurs dans  $|\overline{K}|$ . Pour tout élément  $a$  de l'algèbre  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}(U)$ , on note  $v(a)$  l'élément  $\mu$  de  $v(\overline{K})$  pour lequel  $|a| = |\varpi|^{\mu}$ .

**Définition 4.4.** Soit  $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cdot \partial^n \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}(U) \setminus \{0\}$ . On définit son polygone de Newton comme étant l'enveloppe convexe des points  $A_n = (n, v(a_n))$  de  $\mathbb{R}^2$ . Les pentes des segments du polygone de Newton de  $P$  sont des éléments de  $v(\overline{K})$ .

La figure 1, page 42, représente graphiquement le polygone de Newton d'un opérateur différentiel  $P$  de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}(U)$ . Les pentes sont données en bleu. Si  $P$  est un opérateur différentiel fini, alors son polygone de Newton n'a qu'un nombre fini de pentes. Dans le cas contraire, la suite des pentes (rangée dans l'ordre des indices des coefficients) est strictement croissante et diverge vers  $+\infty$ . En effet, si  $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \partial^n$ , alors  $v(a_n) \rightarrow \infty$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$  puisque la suite  $(a_n)$  converge vers 0. La proposition suivante montre que les pentes du polygone de Newton sont étroitement liées aux fonctions  $\overline{N}$  et  $\overline{n}$  de  $P$ .

**Proposition 4.5.** Soit  $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cdot \partial^n \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}(U)$  et  $\mu \in v(\overline{K}) \setminus \{\infty\}$ .

1. Si  $\mu$  n'est pas une pente du polygone de Newton de  $P$ , alors  $\overline{N}_\mu(P) = \overline{n}_\mu(P)$ .
2. Si  $\mu$  est une pente du polygone de Newton de  $P$ , alors  $\overline{n}_\mu(P) < \overline{N}_\mu(P)$ .

*Démonstration.* On suppose tout d'abord que  $\mu$  n'est pas une pente du polygone de Newton de  $P$ . La suite  $(|a_n| \cdot p^{\mu n})_n$  converge vers zéro. La condition  $\overline{N}_\mu(P) = \overline{n}_\mu(P)$  signifie exactement qu'elle admet un unique élément maximal. On suppose qu'il existe deux indices  $j < i$  tels que

$$|P|_\mu = \max_{n \in \mathbb{N}} \{|a_n| \cdot p^{\mu n}\} = |a_i| \cdot p^{\mu i} = |a_j| \cdot p^{\mu j} \quad (3)$$

On note  $\alpha$  la valuation commune des éléments  $a_i \cdot \varpi^{-\mu i}$  et  $a_j \cdot \varpi^{-\mu j}$ . Les points  $A_i$  et  $A_j$  appartiennent à la même droite d'équation  $Y = \mu \cdot X + \alpha$ . L'égalité 3 signifie que  $\alpha$  minimalise la valuation des termes  $a_n \cdot \varpi^{-\mu n}$ . La minimalité de  $\alpha$  implique que  $[A_i, A_j]$  est un côté du polygone de Newton de  $P$ . Mais ce segment a pour pente  $\mu$  ! Cela contredit l'hypothèse de départ. La suite  $(|a_n| \cdot p^{\mu n})_n$  a donc un unique élément maximal. Autrement dit,  $\overline{N}_\mu(P) = \overline{n}_\mu(P)$ .

Soit maintenant  $\mu$  une pente du polygone de Newton de  $P$ . Alors le polygone de Newton admet un segment  $[A_i, A_j]$  de pente  $\mu$  pour deux indices  $i$  et  $j$  distincts. Les points  $A_i$  et  $A_j$  appartiennent à une même droite d'équation  $Y = \mu \cdot X + \beta$ . Cela se traduit par  $|a_i| \cdot p^{\mu i} = |a_j| \cdot p^{\mu j} = |P|_\mu$  au niveau des normes. En particulier,  $\overline{n}_\mu(P) < \overline{N}_\mu(P)$ .  $\square$

La condition 2 pour un niveau de congruence  $k \geq r$  fixé a d'importantes conséquences sur les valeurs possibles des pentes du polygone de Newton de l'opérateur différentiel  $P$ . La proposition suivante les résume.

**Proposition 4.6.** *Soit  $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cdot \partial^n \in \mathcal{D}_{\mathfrak{x}, \infty}(U)$ . Si  $P$  vérifie la condition 2 pour un certain niveau de congruence  $k \geq r$ , alors le polygone de Newton de  $P$  n'admet pas de pente appartenant au segment  $[r, k]$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mu$  une pente du polygone de Newton de  $P$  appartenant à l'intervalle  $[r, k]$ . On sait d'après la proposition 4.5 qu'il existe deux indices distincts  $n < m$  tels que  $|P|_\mu = |a_n| \cdot p^{\mu n} = |a_m| \cdot p^{\mu m}$ . On suppose  $m$  maximal. L'hypothèse 2 implique que  $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P)$ . On note  $q_k$  cet entier. Le lemme 2.5 nous assure que  $m \leq q_k$ . Par maximalité de  $m$ , on a  $|a_m| \cdot p^{\mu m} > |a_{q_k}| \cdot p^{\mu q_k}$ . On en déduit que

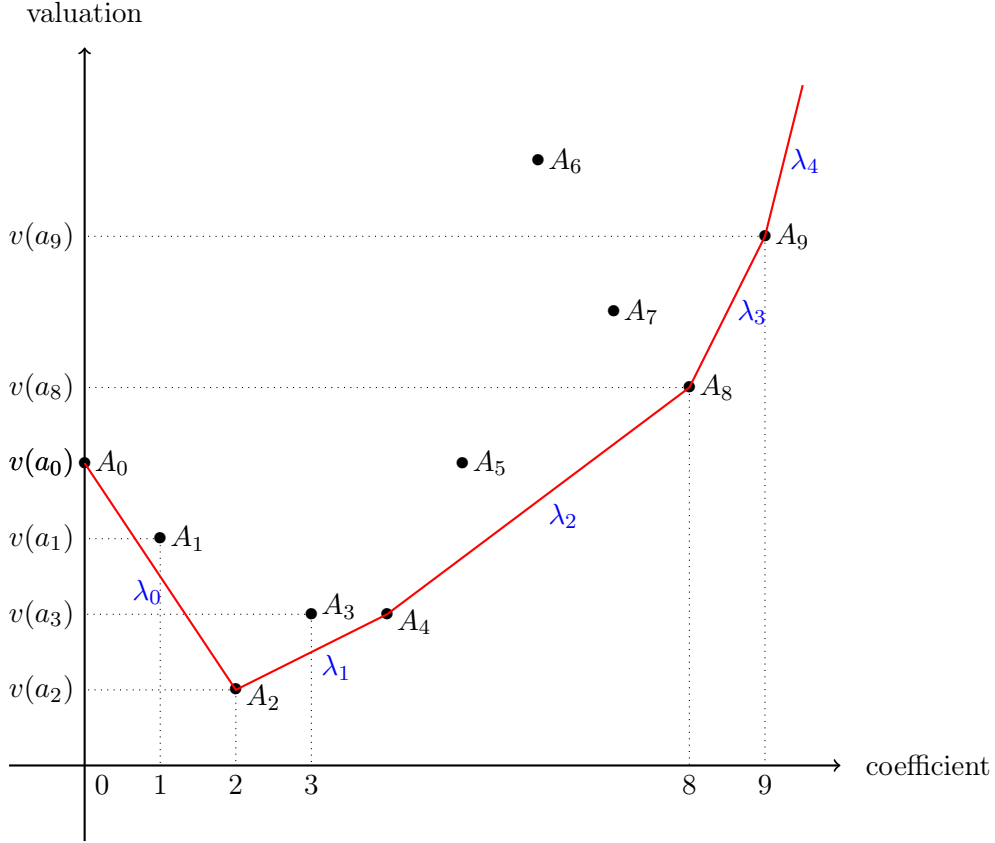
$$|a_n| = p^{\mu(m-n)} \cdot |a_m| > p^{\mu(m-n)} \cdot p^{\mu(q_k-m)} \cdot |a_{q_k}| = p^{\mu(q_k-n)} \cdot |a_{q_k}|.$$

On rappelle que  $n < m \leq q_k$ . Le fait que  $\mu$  soit supérieur ou égale à  $r$  contredit la seconde partie de l'hypothèse 2 :

$$\forall n \in \{0, \dots, q_k - 1\}, \quad |a_n| < |a_{q_k}| \cdot p^{r(q_k-n)}.$$

Ainsi, aucune pente du polygone de Newton de  $P$  n'appartient au segment  $[r, k]$ .  $\square$

FIGURE 1 – Polygone de Newton de  $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cdot \partial^n \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}(U)$



On en déduit que  $P$  est un opérateur différentiel fini dès que  $P$  vérifie l'hypothèse 2 pour tout entier naturel  $k \geq r$ .

**Corollaire 4.7.** *Soit  $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cdot \partial^n \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}(U)$ . Si  $P$  vérifie la condition 2 pour tout entier naturel  $k \geq r$ , alors  $P$  est un opérateur différentiel fini.*

*Démonstration.* On suppose que  $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \partial^n$  est un opérateur infini. Alors son polygone de Newton admet une infinité de pentes  $\lambda_\ell$  et la suite  $(\lambda_\ell)_\ell$  est strictement croissante de limite  $+\infty$ . Mais la proposition 4.6 implique que pour tout entier  $k \geq r$ , il n'y a aucune pente dans le segment  $[r, k]$ . Le polygone de Newton de  $P$  ne peut donc pas admettre de pente dans l'intervalle  $[r, +\infty[$ . La suite des pentes  $(\lambda_\ell)_\ell$  est donc finie et  $P$  est un opérateur fini.  $\square$

Soit  $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \partial^n$  un opérateur différentiel de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ . Si  $P$  est inversible dans le microlocalisé  $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ , alors  $P$  est inversible dans  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  pour tout entier  $k \geq r$ . En particulier,  $P$  vérifie la condition 2 pour tout entier naturel  $k$ . Le corollaire 4.7 permet donc de décrire les éléments de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$  inversibles au voisinage de  $x$  dans le microlocalisé  $\mathcal{F}_{\infty,r}$ .

**Théorème 4.8.** *On suppose que  $d = \dim \mathfrak{X} = 1$ . Soit  $P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ . Alors  $P$  est inversible dans le microlocalisé  $\mathcal{F}_{\infty,r}(V)$  pour un ouvert  $V \subset U$  contenant  $x$  si et seulement si*

1.  $P = \sum_{n=0}^q a_n \cdot \partial^n$  dans  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(V)$ ,
2.  $a_q$  est inversible dans  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(V)$ ,
3.  $\forall n \in \{0, \dots, q-1\}, |a_n| < |a_q| \cdot p^{r(q-n)}$ .

On repasse maintenant au cas général où la dimension  $d$  de  $\mathfrak{X}$  est quelconque. On démontre que les opérateurs différentiels de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$  inversibles dans le microlocalisé  $\mathcal{F}_{\infty,r}$  vérifient une condition analogue à celle du théorème 4.8.

**Définition 4.9.** *Pour tout opérateur  $P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_{\alpha} \cdot \omega^{k|\alpha|} \partial^{\alpha}$  de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  et pour tout  $\mu \in v(\overline{K}) \setminus \{\infty\}$ , on note encore*

1.  $|P|_{\mu} = \max_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \{|a_{\alpha} \cdot \varpi^{-\mu|\alpha|}\}$ ,
2.  $\overline{N}_{\mu}(P) := \max\{|\alpha| : \alpha \in \mathbb{N}^d, |a_{\alpha}| = |P|_{\mu}\}$ ,
3.  $\overline{n}_{\mu}(P) := \min\{|\alpha| : \alpha \in \mathbb{Z}^d : |a_{\alpha}| = |P|_{\mu}\}$ .

On rappelle l'énoncé de la proposition 3.30 écrite pour les éléments de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ . Un opérateur différentiel  $P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_{\alpha} \cdot \partial^{\alpha}$  de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$  est inversible dans le microlocalisé  $\mathcal{F}_{k,r}(V)$  pour un certain voisinage  $V$  de  $x$  si et seulement si

1. il existe  $a_{\beta}$  inversible dans  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(V)$  tel que  $|\beta| = \overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P)$ ,
2. pour tout  $\alpha$  vérifiant  $|\alpha| \leq |\beta|, \alpha \neq \beta \implies |a_{\alpha}| < p^{r(|\beta|-|\alpha|)} \cdot |a_{\beta}|$ .

La condition 2 s'écrit alors :

$$\exists a_{\beta} \text{ tq } |\beta| = \overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P) \text{ et } \forall 0 \leq |\alpha| \leq |\beta|, \alpha \neq \beta \implies |a_{\alpha}| < |a_{\beta}| \cdot p^{r(|\beta|-|\alpha|)} \quad (4)$$

On va démontrer que si  $P$  vérifie cette condition pour tout niveaux de congruence  $k \in \mathbb{N}^*$ , alors  $P$  est un opérateur différentiel fini. Autrement dit, les opérateurs différentiels inversibles dans le microlocalisé  $\mathcal{F}_{\infty,r}$  seront les opérateurs finis vérifiant la condition 4 sur les coefficients. Pour  $a \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$ , on rappelle que  $v(a)$  est l'élément de  $v(\overline{K})$  tel que  $|a| = |\varpi|^{v(a)}$ .

**Définition 4.10.** *Soit  $P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_{\alpha} \cdot \partial^{\alpha}$  un opérateur différentiel non nul de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ . On définit le polygone de Newton de  $P$  comme l'enveloppe convexe des points  $A_{\alpha} = (|\alpha|, v(a_{\alpha}))$  de  $\mathbb{R}^2$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^d$ . Les pentes des segments du polygone de Newton de  $P$  sont des éléments de  $v(\overline{K})$ .*

Lorsque  $P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_\alpha \cdot \partial^\alpha$  est un opérateur différentiel infini de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{x}, \infty}(U)$ , les pentes du polygone de Newton de  $P$  forment une suite croissante divergeant vers  $+\infty$  puisque  $v(a_\alpha) \rightarrow \infty$  lorsque  $|\alpha| \rightarrow \infty$ . Lorsque  $P$  est fini, il n'y a qu'un nombre fini de pentes finies (la dernière est infinie, il s'agit d'une demi-droite verticale). La différence avec le cas  $d = 1$  est que pour tout entier naturel  $n$ , il y a maintenant un nombre fini de points (augmentant avec  $n$ ) sur l'axe verticale d'abscisse  $n$ . Par exemple, pour  $|\alpha| = 1$ , il y a  $d$  points sur l'axe verticale d'abscisse 1 correspondant à  $\alpha = (1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$ . La proposition 4.5 est encore vraie pour le polygone de Newton de  $P$  en dimension quelconque.

**Proposition 4.11.** *Soit  $P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_\alpha \cdot \partial^\alpha \in \mathcal{D}_{\mathfrak{x}, \infty}(U)$  et  $\mu \in v(\overline{K}) \setminus \{\infty\}$ . Alors  $\mu$  est une pente du polygone de Newton de  $P$  si et seulement si  $\overline{n}_\mu(P) < \overline{N}_\mu(P)$ .*

*Démonstration.* La seule différence avec la preuve de la proposition 4.5 provient du fait que des points peuvent avoir la même abscisse. Il suffit de montrer que ce cas n'apparaît pas pour raisonner de manière analogue. Si  $\mu$  n'est pas une pente du polygone de Newton de l'opérateur  $P$ , on démontre comme dans la preuve de la proposition 4.5 qu'il existe deux multi-indices  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $|P|_\mu = |a_\alpha \cdot \varpi^{-\mu|\alpha|}| = |a_\beta \cdot \varpi^{-\mu|\beta|}|$  avec  $|\alpha| \neq |\beta|$ . Ainsi,  $\overline{N}_\mu(P) \neq \overline{n}_\mu(P)$ . Soit maintenant  $\mu$  une pente du polygone de Newton de  $P$ . Puisque  $\mu \neq +\infty$  par hypothèse, cette pente relie deux points  $a_\alpha$  et  $a_\beta$  du polygone de Newton d'abscisses différentes. Autrement dit,  $|\alpha| \neq |\beta|$  et le reste de la preuve est alors identique à celle de la proposition 4.5.  $\square$

Comme la condition 4 est analogue à la condition 2, on déduit de la proposition précédente le théorème suivant exactement de la même façon que le théorème 4.8.

**Théorème 4.12.** *Soit  $P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{x}, \infty}(U)$ . Alors  $P$  est inversible dans le microlocalisé  $\mathcal{F}_{\infty, r}(V)$  pour un ouvert  $V \subset U$  contenant  $x$  si et seulement si*

1.  $P = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_\alpha \cdot \partial^\alpha$  est un opérateur différentiel fini d'ordre  $q \in \mathbb{N}$  de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{x}, \infty}(V)$ ,
2. il existe  $a_\beta$  inversible dans  $\mathcal{O}_{\mathfrak{x}, \mathbb{Q}}(V)$  avec  $|\beta| = q$ ,
3.  $\forall 0 \leq |\alpha| \leq \beta|, \alpha \neq \beta \implies |a_\alpha| < |a_\beta| \cdot p^{r(|\alpha| - |\beta|)}$ .

Le critère du théorème 4.8 ne correspond pas exactement à la condition d'inversibilité souhaitée. En effet, on désire que tout opérateur différentiel fini de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{x}, \infty}(U)$  soit inversible dans le microlocalisé dès que son coefficient dominant est inversible. La condition 3 du théorème 4.8 contient cependant beaucoup d'opérateurs : les coefficients  $a_\alpha$  peuvent être bien plus grands que  $a_\beta$  pour la norme spectrale lorsque  $|\alpha| < |\beta|$ . On peut les autoriser à être de plus en plus grands en augmentant  $r$ . En considérant tous les entiers  $r \geq 1$ , la condition 3 donne exactement tous les opérateurs finis dont le coefficient dominant est inversible.

## 4.2 Le microlocalisé $\mathcal{F}_\infty$

On introduit dans cette partie le faisceau de  $K$ -algèbres  $\mathcal{F}_\infty$  sur le schéma formel  $\mathfrak{X}$ . Soit toujours  $U$  un ouvert affine contenant  $x$  sur lequel on dispose d'un système de coordonnées locales. On observe que  $\mathcal{F}_{\infty,r}(U) \subset \mathcal{F}_{\infty,r+1}(U)$ . Concrètement,  $\mathcal{F}_\infty(U)$  est l'union croissante dénombrable des  $K$ -algèbres de Fréchet-Stein  $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ . Lorsque  $\mathfrak{X}$  est une courbe formelle, les opérateurs de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$  inversibles dans le microlocalisé  $\mathcal{F}_\infty(U)$  sont exactement, d'après le théorème 4.8, les opérateurs différentiels finis dont le coefficient dominant est inversible, sans aucune autre condition sur les coefficients. Ce critère d'inversibilité est la propriété désirée du microlocalisé discutée en introduction. Lorsque la dimension  $d$  de  $\mathfrak{X}$  est quelconque, les opérateurs différentiels inversibles de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$  dans le microlocalisé  $\mathcal{F}_\infty(U)$  sont les opérateurs finis pour lequel un coefficient dominant est inversible et de norme spectrale maximale parmi les coefficients dominants.

On rappelle brièvement la construction des faisceaux  $\mathcal{F}_{k,r}$  et  $\mathcal{F}_{\infty,r}$  avant de définir le microlocalisé  $\mathcal{F}_\infty$ . Pour tous les entiers  $k \geq r \geq 1$ , l'algèbre  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  est le localisé de l'algèbre  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  pour la partie multiplicative des puissances des dérivations  $\partial_i$  et pour les normes complètes quasi-abéliennes  $|\cdot|_r, \dots, |\cdot|_k$  de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ . Le microlocalisé  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  est une  $K$ -algèbre de Banach munie d'une norme seulement sous-multiplicative  $\|\cdot\|_{k,r}$  admettant  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$  comme sous-algèbre. Tout élément  $S$  de  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  s'écrit uniquement sous la forme

$$S = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d, |\alpha| \geq 0} a_\alpha \cdot \varpi^{k|\alpha|} \partial^\alpha + \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d, |\alpha| < 0} a_\alpha \cdot \varpi^{r|\alpha|} \partial^\alpha \quad \text{tq} \quad a_\alpha \xrightarrow{|\alpha| \rightarrow \infty} 0.$$

De plus,  $\|S\|_{k,r} = \max_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} \{|a_\alpha|\}$ . Pour tout entier  $k \geq r$ , on dispose de morphismes de transition  $\mathcal{F}_{k+1,r} \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}$  commutant avec les morphismes  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ . Par définition,  $\mathcal{F}_{\infty,r} := \varprojlim_{k \geq r} \mathcal{F}_{k,r}$ . Les algèbres  $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$  sont des algèbres de Fréchet-Stein. Tout élément  $S$  de  $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$  s'écrit uniquement sous la forme d'une somme

$$S = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d, |\alpha| \geq 0} a_\alpha \cdot \partial^\alpha + \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d, |\alpha| < 0} a_\alpha \cdot \varpi^{r|\alpha|} \partial^\alpha$$

telle que pour tout  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty, |\alpha| \geq 0} a_\alpha \cdot \varpi^{-\mu|\alpha|} = 0$  et  $\lim_{|\alpha| \rightarrow +\infty, |\alpha| < 0} a_\alpha = 0$ . En particulier, l'algèbre de Fréchet-Stein  $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$  contient l'algèbre  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ . Les opérateurs différentiels de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$  inversibles dans le microlocalisé  $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$  sont donnés par le théorème 4.12.

On regarde maintenant les liens entre les algèbres  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  pour un niveau de congruence  $k$  fixé et pour  $r$  variable. Soit  $r < r'$  deux entiers strictement positifs et  $k \geq r'$ . On se donne

un élément  $S$  de  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ ,

$$S = \underbrace{\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d, |\alpha| \geq 0} a_\alpha \cdot \varpi^{k|\alpha|} \partial^\alpha}_P + \underbrace{\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d, |\alpha| < 0} a_\alpha \cdot \varpi^{r|\alpha|} \partial^\alpha}_Q.$$

Alors  $S$  appartient à  $\mathcal{F}_{k,r'}(U)$ . En effet, il est clair que  $P \in \mathcal{F}_{k,r'}(U)$  et que  $\|P\|_{k,r} = \|P\|_{k,r'} = \max_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \{|a_\alpha|\}$ . Il suffit alors de vérifier que  $Q$  est dans  $\mathcal{F}_{k,r'}(U)$ . On a

$$Q = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d, |\alpha| < 0} a_\alpha \cdot \varpi^{r|\alpha|} \partial^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d, |\alpha| < 0} a_\alpha \cdot \varpi^{(r-r')|\alpha|} \cdot \varpi^{r'|\alpha|} \partial^\alpha.$$

Comme  $|\varpi^{(r-r')|\alpha|}| \xrightarrow{|\alpha| \rightarrow +\infty} 0$ , on a bien  $Q \in \mathcal{F}_{k,r'}(U)$ . Par ailleurs,

$$\|Q\|_{k,r} = \max_{\alpha \in \mathbb{Z}^d, |\alpha| < 0} \{|a_\alpha|\} \text{ et } \|Q\|_{k,r'} = \max_{\alpha \in \mathbb{Z}^d, |\alpha| < 0} \{|a_\alpha| \cdot p^{(r'-r)|\alpha|}\}.$$

Ainsi, il en découle que  $\|Q\|_{k,r'} \leq \|Q\|_{k,r}$  et que  $\|S\|_{k,r'} \leq \|S\|_{k,r}$  puisque  $(r' - r)|\alpha| \leq 0$ . Autrement dit, l'inclusion d'algèbres  $\mathcal{F}_{k,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r'}(U)$  est 1-lipschtizienne. Elle est donc continue. Cependant, la topologie de  $\mathcal{F}_{k,r'}(U)$  induite sur  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  pour  $r' > r$  par l'inclusion d'algèbres  $\mathcal{F}_{k,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r'}(U)$  ne coïncide pas avec la topologie de  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ . En effet, les normes  $\|\cdot\|_{k,r}$  et  $\|\cdot\|_{k,r'}$  ne définissent pas les mêmes séries convergentes pour les éléments du microlocalisé de la forme  $\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d, |\alpha| < 0} a_\alpha \cdot \varpi^{r|\alpha|} \partial^\alpha$ . En conclusion,  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{F}_{k,r'}(U)$  dès que  $k \geq r' \geq r$  et la topologie de  $\mathcal{F}_{k,r}(U)$  est plus fine que celle de  $\mathcal{F}_{k,r'}(U)$ .

Ces inclusions  $\mathcal{F}_{k,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r'}(U)$  pour  $k \geq r' \geq r$  commutent avec les morphismes de transition  $\mathcal{F}_{k+1,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$ . Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{k+1,r}(U) & \hookrightarrow & \mathcal{F}_{k,r}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_{k+1,r'}(U) & \hookrightarrow & \mathcal{F}_{k,r'}(U). \end{array}$$

En passant à la limite projective sur  $k$  dans la catégorie des  $K$ -algèbres topologiques, on obtient un morphisme injectif continu de  $K$ -algèbres  $\mathcal{F}_{\infty,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{\infty,r'}(U)$ .

**Définition 4.13.** On pose  $\mathcal{F}_{\infty}(U) := \varinjlim_{r \geq 1} \mathcal{F}_{\infty,r}(U) = \bigcup_{r \geq 1} \mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ .

C'est une  $K$ -algèbre contenant toutes les algèbres de Fréchet-Stein  $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$  dès que  $r \geq 1$ . Si  $S \in \mathcal{F}_{\infty}(U)$ , alors  $S \in \mathcal{F}_{\infty,r}(U)$  pour un certain  $r \in \mathbb{N}^*$ . En particulier,  $S$  s'écrit uniquement sous la forme  $S = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} a_{\alpha} \cdot \partial^{\alpha}$  avec  $|a_{\alpha}| \cdot \mu^{|\alpha|} \xrightarrow{|\alpha| \rightarrow \infty} 0$  lorsque  $|\alpha| \geq 0$  pour tout réel  $\mu > 0$  et  $|a_{\alpha}| \cdot p^{r|\alpha|} \xrightarrow{|\alpha| \rightarrow \infty} 0$  lorsque  $|\alpha| < 0$ . La deuxième condition implique que pour tout  $R \geq p^r$  on a  $|a_{\alpha}| \cdot R^{|\alpha|} \xrightarrow{|\alpha| \rightarrow \infty} 0$  pour  $|\alpha| < 0$ . Ainsi,

$$\mathcal{F}_{\infty}(U) = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} a_{\alpha} \cdot \partial^{\alpha} : \forall \mu > 0, a_{\alpha} \cdot \mu^{|\alpha|} \xrightarrow{|\alpha| \rightarrow \infty, |\alpha| \geq 0} 0, \right. \\ \left. \exists R > 0, a_{\alpha} \cdot R^{|\alpha|} \xrightarrow{|\alpha| \rightarrow \infty, |\alpha| < 0} 0 \right\}$$

**Remarque 4.14.** Lorsque  $d = 1$ , On obtient la description suivante de l'algèbre  $\mathcal{F}_{\infty}(U)$  :

$$\mathcal{F}_{\infty}(U) = \left\{ P + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_{-n} \cdot \partial^{-n}, P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U), \exists R > 0 \text{ tq } |a_n| \cdot R^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \right\}.$$

On munit la  $K$ -algèbre  $\mathcal{F}_{\infty}(U)$  de la topologie la plus fine pour laquelle les inclusions  $\mathcal{F}_{\infty,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{\infty}(U)$  sont continues. Il s'agit de la topologie localement convexe. Puisque l'algèbre  $\mathcal{F}_{\infty}(U)$  est l'union croissante des algèbres  $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ , on a

$$\mathcal{F}_{\infty}(U)^{\times} = \bigcup_{r \geq 1} \mathcal{F}_{\infty,r}(U)^{\times}.$$

Le résultat suivant se déduit du théorème 4.8 lorsque  $\mathfrak{X}$  est une courbe formelle. En effet, l'union sur  $r \in \mathbb{N}^*$  des opérateurs finis de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$  vérifiant le point 3 de ce théorème est l'ensemble des opérateurs différentiels finis de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ .

**Théorème 4.15.** On suppose que  $d = \dim \mathfrak{X} = 1$ . Un opérateur différentiel  $P$  de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$  est inversible dans le microlocalisé  $\mathcal{F}_{\infty}(U)$  si et seulement si

1.  $P = \sum_{n=0}^q a_n \cdot \partial^n$  dans  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ ,
2.  $a_q$  est inversible dans  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$ .

Le théorème 4.12 implique quant à lui le théorème suivant.

**Théorème 4.16.** Un opérateur différentiel  $P$  de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$  est inversible dans le microlocalisé  $\mathcal{F}_{\infty}(U)$  si et seulement si

1.  $P = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq q} a_{\alpha} \cdot \partial^{\alpha}$  dans  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ ,
2.  $P$  admet un unique coefficient  $a_{\beta}$  de norme spectrale maximale parmi les coefficients d'ordre  $q$ , ie  $|\alpha| = |\beta| = q \implies |a_{\alpha}| < |a_{\beta}|$ ,



3.  $a_\beta$  est inversible dans  $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$ .

Le théorème 4.15 est la propriété souhaitée du microlocalisé de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$  lorsque  $\mathfrak{X}$  est une courbe formelle. En effet, un opérateur différentiel  $P$  sera inversible dans le microlocalisé  $\mathcal{F}_\infty$  de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$  si et seulement si  $P$  est fini de coefficient dominant inversible. Cependant, dès que  $d > 1$ , un tel opérateur sera inversible dans le microlocalisé si et seulement si  $P$  est fini et admet un unique coefficient dominant de norme spectrale maximale et si ce coefficient est inversible. On n'obtient donc pas tous les opérateurs différentiels finis de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$  dont les coefficients dominants sont inversibles. Pour obtenir un tel microlocalisé, il faut inverser plus d'éléments que les seules dérivations  $\partial_i$  dans la construction des microlocalisés de  $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ . Il faudra inverser en pratique les termes de la forme  $\sum_{|\alpha|=q} a_\alpha \cdot \partial^\alpha$  avec  $q \in \mathbb{N}$  et  $a_\alpha \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$  tel que ou bien  $a_\alpha = 0$ , ou bien  $a_\alpha$  est inversible de norme un.

Soit  $r' \geq r \geq 1$ . Les morphismes injectifs d'algèbres  $\mathcal{F}_{\infty,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{\infty,r'}(U)$  induisent des morphismes de transition  $\mathcal{F}_{\infty,r} \rightarrow \mathcal{F}_{\infty,r'}$  au niveau des faisceaux. On note  $\mathcal{F}_\infty$  la limite inductive de ces morphismes. C'est un préfaisceau de  $K$ -algèbres sur  $\mathfrak{X}$  dont les sections sur les ouverts affines  $U$  de  $\mathcal{U}$  sont les algèbres  $\mathcal{F}_\infty(U)$ . Puisque la courbe formelle  $\mathfrak{X}$  est quasi-compacte et puisque les morphismes de transition sont localement injectifs,  $\mathcal{F}_\infty$  est un faisceau sur  $\mathfrak{X}$  d'après [8, Tag 009F].

**Définition 4.17.** *On définit le faisceau microlocalisé  $\mathcal{F}_\infty$  de  $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$  dont les sections sur les ouverts  $U$  de  $\mathcal{U}$  sont exactement les unions croissantes  $\bigcup_{r \geq 1} \mathcal{F}_{\infty,r}(U)$  en posant  $\mathcal{F}_\infty := \varinjlim_{r \geq 1} \mathcal{F}_{\infty,r}$ .*

## Références

- [1] Tomoyuki Abe. Rings of microdifferential operators for arithmetic  $\mathcal{D}$ -modules. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 131(1) :89–149, 2014.
- [2] Tomoyuki Abe and A Marmora. On  $p$ -adic product formula for epsilon factors. *J. Inst. Math. Jussieu*, 14 :275–377, 2015.
- [3] Konstantin Ardakov, Andreas Bode, and Simon Wadsley.  $\widehat{\mathcal{D}}$ -modules on rigid analytic spaces III : Weak holonomicity and operations. *Compositio Mathematica*, 157(12) :2553–2584, 2021.
- [4] Laurent Garnier. Théorèmes de division sur  $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}$  et applications. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 123(4) :547–589, 1995.
- [5] Raoul Hallopeau.  $\widehat{\mathcal{D}}_k^{(0)}$ -modules holonomes sur une courbe formelle, 2023.
- [6] Christine Huyghe, Tobias Schmidt, and Matthias Strauch. Arithmetic structures for differential operators on formal schemes. *Nagoya Mathematical Journal*, 243 :157–204, 2021.

- [7] Peter Schneider and Jeremy Teitelbaum. Algebras of  $p$ -adic distributions and admissible representations. *Inventiones mathematicae*, 153(1) :145–196, 2003.
- [8] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. <https://stacks.math.columbia.edu>, 2018.
- [9] Gergely Zábrádi. Generalized Robba rings. *Israel J. Math.*, 191(2) :817–887, 2012. With an appendix by Peter Schneider.