



HAL
open science

Microlocalisation des modules coadmissibles sur une courbe formelle

Raoul Hallopeau

► **To cite this version:**

Raoul Hallopeau. Microlocalisation des modules coadmissibles sur une courbe formelle. 2023. hal-03975658v3

HAL Id: hal-03975658

<https://hal.science/hal-03975658v3>

Preprint submitted on 2 Aug 2023 (v3), last revised 25 Jan 2024 (v5)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Microlocalisation des modules coadmissibles sur une courbe formelle

Raoul Hallopeau

Abstract

Let \mathfrak{X} be a formal smooth quasi-compact curve over a complete discrete valuation ring \mathcal{V} of mixed characteristic $(0, p)$. We consider the sheaves of differential operators $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}$ with a congruence level $k \in \mathbb{N}$ and their projective limit $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty} = \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}$. In the first part, we introduce a microlocalisation of the sheaf $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}$. In fact, we construct microlocalisations for the sheaves $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}$ admitting transition morphisms. Then we pass to the projective limit. In the second part, we define a characteristic variety for coadmissible modules as a closed subset of the cotangent space $T^*\mathfrak{X}$. With such a characteristic variety, one can introduce a notion of holonomic modules : a coadmissible module is holonomic if its characteristic variety has dimension less than or equal to one. We prove that a coadmissible module is holonomic if and only if it a connection module on some open subset of \mathfrak{X} . At last, we bridge holonomic modules with weakly holonomic modules.

Table des matières

1	Introduction	2
2	Variété caractéristique des $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}$-modules cohérents	8
2.1	Variété caractéristique	8
2.2	Microlocalisation de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, k}$	12
3	$\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}$-modules coadmissibles	15
3.1	Définitions et propriétés	15
3.2	Modules faiblement holonomes	18
4	Microlocalisation de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}$	26
4.1	Microlocalisations de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}$	26
4.1.1	Microlocalisation d'une algèbre de Banach quasi-abélienne	27
4.1.2	Un premier microlocalisé \mathcal{E}_k	30

4.1.3	Des microlocalisés $\mathcal{F}_{k,r}$ avec des morphismes de transition	38
4.2	Les microlocalisés $\mathcal{F}_{\infty,r}$	48
4.3	Le microlocalisé \mathcal{F}_{∞}	54
5	Variété caractéristique des modules coadmissibles	57
5.1	$\mathcal{F}_{k,r}^*$ -module cohérent associé à un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent	58
5.2	$\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ -module coadmissible associé à un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible	64
5.3	\mathcal{F}_{∞}^* -module associé à un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible	70
5.4	Variété caractéristique	72
6	$\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules holonomes	73
6.1	Variété caractéristique	74
6.2	Propriétés	78

Notations

- \mathcal{V} est un anneau complet de valuation discrète de caractéristique mixte $(0, p)$, d'idéal maximal \mathfrak{m} et de corps résiduel κ supposé parfait. On note $|\cdot|$ la valeur absolue normalisée de \mathcal{V} , ω une uniformisante et $K = \text{Frac}(\mathcal{V})$ son corps des fractions.
- X est une courbe sur κ lisse connexe quasi-compacte et $x \in X$ est un point donné.
- \mathfrak{X} est un \mathcal{V} -schéma formel lisse localement de type fini relevant X d'idéal de définition engendré par l'uniformisante ω .
- t est un relèvement local sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ d'une uniformisante en x ($\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète puisque X est une courbe). Alors dt est une base de $\Omega_{\mathfrak{X},x}^1$. On note ∂ la dérivation associée.
- U est un ouvert affine de \mathfrak{X} contenant x sur lequel on dispose d'une coordonnée étale associée à x .
- Sauf mention contraire, les idéaux et les modules considérés sont tous à gauche.

1 Introduction

Un enjeu important dans la théorie des \mathcal{D} -modules arithmétiques consiste à généraliser la notion de modules holonomes. Une catégorie de tels modules permettra par exemple d'étudier les cohomologies cristalline et rigide. Des catégories de \mathcal{D} -modules arithmétiques holonomes ont été construites par Berthelot, Caro et Tsuzuki de deux manières différentes. D'une part en introduisant une variété caractéristique, sous-variété fermée du fibré cotangent de l'espace de base. D'autre part en utilisant une caractérisation cohomologique des modules holonomes.

Dans le monde arithmétique, les opérateurs différentiels considérés ne pas d'ordre fini. La méthode classique pour définir la variété caractéristique sur une variété complexe ne fonctionne donc plus. Berthelot introduit une variété caractéristique des \mathcal{D} -modules arithmétiques en se ramenant à des variétés sur des corps finis. Dans ce cadre, les opérateurs différentiels sont finis et la définition classique complexe des modules holonomes s'adapte en considérant de bonnes filtrations. Cependant, pour se ramener à ce cas simple, Berthelot suppose l'existence d'un morphisme de Frobenius sur le schéma formel \mathfrak{X} . Une autre approche possible consiste à construire un microlocalisé du faisceau \mathcal{D} des opérateurs différentiels, comme pour les variétés complexes.

Nous définissons dans cet article une variété caractéristique pour les \mathcal{D} -modules coadmissibles de Huyghe-Schmidt-Strauch dans le cas d'une courbe formelle \mathfrak{X} . Rappelons que les \mathcal{D} -modules coadmissibles sont des systèmes projectifs de modules sur des anneaux s'obtenant comme sous-anneaux des opérateurs différentiels arithmétiques de Berthelot. Nous disposons de deux constructions des \mathcal{D} -modules coadmissibles. La première est décrite dans l'article [6] de Christine Huyghe, Tobias Schmidt et Matthias Strauch. Cette construction repose sur l'ajout d'un niveau de congruence $k \in \mathbb{N}$ aux faisceaux des opérateurs différentiels de Berthelot, et définit une catégorie de \mathcal{D} -modules coadmissibles au niveau de l'espace de Zariski Riemann $\langle \mathfrak{X} \rangle$. La seconde construction, directement sur l'espace analytique rigide \mathfrak{X}_K , est due à Ardakov-Wadsley dans l'article [2], et utilise la caractérisation cohomologique des modules holonomes.

Il existe des versions G -équivariantes de ces constructions, voir par exemple [5, 6]. Elles permettent d'établir un théorème de localisation analogue au théorème obtenu dans le cas complexe. Nous considérons alors la catégorie des représentations localement analytiques admissibles du groupe de Lie p -adique $G(L)$, où L est une extension finie de \mathbb{Q}_p et G est un groupe réductif sur L . La variété caractéristique est aussi un invariant associé aux représentations localement analytiques. Ainsi, disposer en général d'une variété caractéristique nous permettrait de classifier les \mathcal{D} -modules irréductibles équivariants ou non et d'en déduire une classification de telles représentations.

Dans le but d'introduire une variété caractéristique pour les \mathcal{D} -modules coadmissibles, nous construisons un microlocalisé \mathcal{F}_∞ de l'algèbre $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ des opérateurs différentiels sur-convergeants de [6]. Cette construction est délicate et technique pour deux raisons. Premièrement, les K -algèbres $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$, pour U un ouvert affine muni d'une coordonnée étale, ne sont pas commutatives et ne vérifient pas les conditions de Ore. Deuxièmement, il nous faut trouver des microlocalisés admettant des morphismes de transition compatibles avec ceux de l'article [6] pour les différents niveaux de congruences $k \in \mathbb{N}$. Nous démontrons finalement que la variété caractéristique d'un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible \mathcal{M} vérifie l'inégalité de Bernstein : le module \mathcal{M} est non nul si et seulement si $\dim(\text{Car } \mathcal{M}) \geq \dim \mathfrak{X} = 1$. De plus, notre catégorie de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules holonomes définit une sous-catégorie abélienne des modules faiblement holonomes introduit par Ardakov-Bose-Wadsley dans l'article [1].

Rappelons brièvement et plus en détails la définition des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles sur un schéma formel \mathfrak{X} introduite dans l'article [6] de Christine Huyghe, Tobias Schmidt et Matthias Strauch. Cette définition fait intervenir des faisceaux cohérents de K -algèbres constituées d'opérateurs différentiels pour différents niveaux de congruence $k \in \mathbb{N}$. Plus précisément, nous considérons les faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ définis localement sur les ouverts affines U de \mathfrak{X} munis d'une coordonnée locale par

$$\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n, \quad a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U), \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right\}$$

Ces algèbres sont complètes pour la topologie ω -adique. Les faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ interviennent naturellement pour résoudre certaines questions données par exemple dans l'article [7] de Christine Huyghe, Tobias Schmidt et Matthias Strauch. Par exemple, les faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ apparaissent dans l'étude de représentations localement analytiques de groupes de Lie p -adique. Par ailleurs, ils s'avèrent aussi utiles pour regarder des isocristaux surconvergents dans le cas ramifié.

Nous considérons ensuite les morphismes de transition $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ induits localement par les inclusions d'algèbres $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. Nous nous intéressons alors au faisceau limite projective $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty} = \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$. Localement, $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ est la K -algèbre de Fréchet-Stein donnée par

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \partial^n : a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U) \text{ tq } \forall \eta > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \eta^n = 0 \right\}$$

Le faisceau $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ est intéressant d'un point de vue conceptuel. En effet, les opérateurs différentiels de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ induisent des fonctions analytiques entières sur le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ de \mathfrak{X} . Nous pouvons associer aux éléments de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ des fonctions analytiques sur le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ de \mathfrak{X} convergents sur une bande horizontale de hauteur augmentant avec k . Plus précisément, soit (x, ξ) un système de coordonnées locales sur T^*U associée à la coordonnée étale de U . Nous pouvons attribuer à tout opérateur $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) \cdot (\omega^k \partial)^n$ de l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ une fonction $P(x, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) \cdot \xi^n$ sur le fibré cotangent T^*U . La fonction $P(x, \xi)$ converge sur la bande horizontale $\{|\xi_1| \leq p^k, \dots, |\xi_d| \leq p^k\}$ de T^*U . Ainsi, les opérateurs différentiels de l'algèbre $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U) = \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) = \bigcap_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ induisent des fonctions analytiques entières sur le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$.

Un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible \mathcal{M} est par définition un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module isomorphe à une limite projective $\varprojlim_k \mathcal{M}_k$ de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents \mathcal{M}_k admettant de bonnes propriétés de transition entre les rangs k et $k+1$.

Dans le document [4], la variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{M}_k)$ d'un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent \mathcal{M}_k est introduite comme une sous-variété fermée du fibré cotangent T^*X de la fibre spé-

ciale X de \mathfrak{X} . Les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module holonomes sont définis comme étant les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents \mathcal{M}_k dont la variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{M}_k)$ est de dimension au plus la dimension de X . Ainsi, le module \mathcal{M}_k est holonome si $\dim(\text{Car}(\mathcal{M}_k)) \leq 1$. Lorsque X est une courbe, les modules holonomes ont de très bonnes caractérisations. Ce sont des modules à connexion sur un certain ouvert de \mathfrak{X} . De plus, les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules holonomes sont exactement les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents de longueur finie. L'étape suivante consiste à introduire une bonne catégorie de modules holonomes pour les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$. Cependant, nous ne pouvons pas le faire directement à partir des variétés caractéristiques $\text{Car}(\mathcal{M}_k)$ des $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents \mathcal{M}_k . En effet, les morphismes de transition $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1}^{(0)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}$ sont triviaux après réduction modulo ω . Ces morphismes n'induisent donc pas de morphismes intéressants entre les différentes variétés caractéristiques $\text{Car}(\mathcal{M}_k)$ pour k variable.

Nous cherchons alors à définir une variété caractéristique des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles directement au niveau du fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ de \mathfrak{X} , sans utiliser les variétés caractéristiques $\text{Car}(\mathcal{M}_k)$ et sans réduire les modules \mathcal{M}_k modulo ω . L'objectif est d'introduire une catégorie de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules holonomes vérifiant la condition suivante. Soit P un opérateur différentiel de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. Nous aimerions que le module $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$ soit holonome seulement si P est un opérateur différentiel fini. En effet, si P n'est pas un opérateur fini, alors $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$ est un module de longueur finie augmentant avec k . De plus, $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$ est localement un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module libre de dimension de plus en plus grande. On ne peut donc pas espérer avoir de bonnes propriétés de finitudes pour le module $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P = \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$. Cependant, lorsque $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \partial^n$ est un opérateur fini d'ordre d de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$, ces problèmes n'apparaissent pas. En effet, si (x, ξ) est un système de coordonnées locales sur T^*U associée à la coordonnée étale de U , il est possible de vérifier pour k suffisamment grand que

$$\text{Car} \left(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P \right) \cap T^*U = \{(x, \xi) \in T^*U : \sigma(\bar{P})(x, \xi) = a_d(x) \cdot \xi^d = 0\}$$

Ces variétés caractéristiques ne dépendent donc plus de k pour les niveaux de congruence suffisamment grands. Si x_1, \dots, x_s sont les zéros du coefficient dominant a_d de P dans U , alors la figure suivante trace l'allure de la variété caractéristique des modules \mathcal{M}_k . La section nulle est une composante irréductible de ces variétés caractéristiques $\text{Car}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P)$ si et seulement si le degré d de P est supérieur ou égal à un.

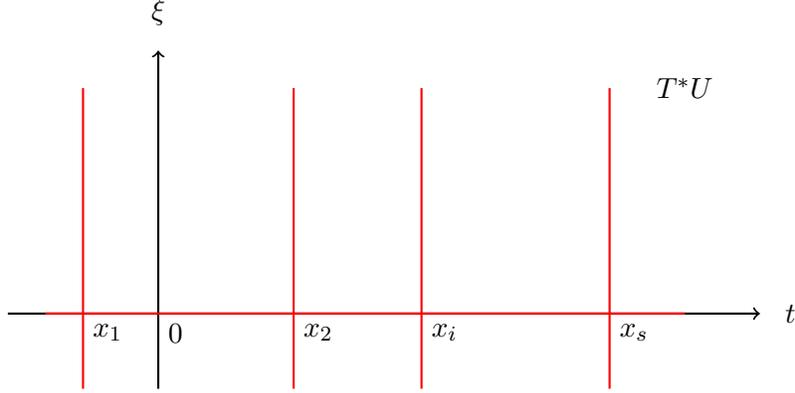


Figure 1 : $\text{Car}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P) \cap T^*U$

Afin de définir une variété caractéristique pour les $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ -modules coadmissibles, nous construisons un microlocalisé \mathcal{F}_∞ de $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ vérifiant la condition d'inversibilité suivante. Un opérateur différentiel P de $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}(U)$ est inversible dans le microlocalisé $\mathcal{F}_\infty(U)$ si et seulement si

1. $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \partial^n$ est un opérateur fini d'ordre d de $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}(U)$,
2. le coefficient dominant a_d de P est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U)$.

Ce critère d'inversibilité pour l'algèbre $\mathcal{F}_\infty(U)$ est l'analogie souhaité du lemme 2.8 énoncé pour le faisceau $\mathcal{D}_{X,k} = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k}^{(0)} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$. En effet, soit P un opérateur différentiel de $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}(U)$. Nous souhaitons que le module coadmissible $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}/P$ soit holonome si et seulement si P est un opérateur différentiel fini. Le support du module $\mathcal{M} = \mathcal{F}_\infty/P$ permet de distinguer les opérateurs infinis des opérateurs finis. Si P est un opérateur infini, alors $\text{Supp } \mathcal{M} \cap U = U$ puisque P n'est pas inversible dans $\mathcal{F}_\infty(U)$ quelque soit l'ouvert U (voir la preuve de la proposition 2.9). Dans ce cas, $\dim \text{Supp } \mathcal{M} = 1$. Soit maintenant P un opérateur fini de coefficient dominant $a_d \in \mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U)$. D'après la proposition 2.9 et le critère d'inversibilité des éléments de l'algèbre $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}(U)$ dans le microlocalisé $\mathcal{F}_\infty(U)$, le support $\text{Supp } \mathcal{M} \cap U$ est l'union finie des zéros x_1, \dots, x_s de la fonction a_d dans l'ouvert U . Ainsi, $\dim \text{Supp } \mathcal{M} = 0$. Les points x_1, \dots, x_s du support $\text{Supp } \mathcal{M} \cap U$ sont les abscisses des composantes irréductibles verticales des variétés caractéristiques des modules $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$ données dans la figure 1 pour k suffisamment grand.

Décrivons maintenant plus précisément la structure de cet article. Dans un premier temps, nous fixons dans la section 2 le niveau de congruence $k \in \mathbb{N}^*$. Nous commençons par rappeler dans la partie 2.1 les principales propriétés de la variété caractéristique des $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents et des $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules holonomes. Le faisceau d'opérateurs différentiels $\mathcal{D}_{X,k} = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k}^{(0)} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ est défini sur la fibre spéciale X de \mathfrak{X} . Pour tout niveau de congruence

$k \geq 1$, les algèbres $\mathcal{D}_{X,k}(U) \simeq \mathcal{O}_X(U)[X]$ sont commutatives isomorphes à un anneau de polynômes. Nous expliquons ensuite, dans la partie 2.2, comment retrouver la variété caractéristique d'un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent \mathcal{M}_k à partir d'un microlocalisé du faisceau $\mathcal{D}_{X,k}$. Ce cas est élémentaire puisque pour $k \geq 1$, les algèbres $\mathcal{D}_{X,k}(U)$ sont commutatives. Nous pouvons donc inverser la dérivation ∂_k de $\mathcal{D}_{X,k}(U)$ pour construire le microlocalisé. Cet exemple motive l'introduction du microlocalisé \mathcal{F}_∞ du faisceau $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$.

Dans la section 3, nous rappelons tout d'abord les définitions du faisceau d'algèbres $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty} = \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ et des $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ -modules coadmissibles. Enfin nous introduisons une catégorie de $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ -modules faiblement holonomes au sens de Ardakov-Bose-Wadsley dans l'article [1]. Nous démontrons qu'un module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k$ est faiblement holonome si et seulement si les modules \mathcal{M}_k sont holonomes pour les niveaux de congruences k suffisamment grands.

La construction du faisceau d'algèbres microlocalisées \mathcal{F}_∞ , décrite dans la section 4, fait intervenir des microlocalisés $\mathcal{F}_{k,r}$ des faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ pour tous les entiers $k \geq r \geq 1$. Plus précisément, $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ est le localisé de l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ obtenu en inversant la dérivation ∂ . La K -algèbre $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ est non commutative et ne vérifie pas les conditions de Ore. Pour inverser la dérivation, nous utilisons une localisation non commutative construite dans l'annexe de l'article [11] de Gergely Zábrádi, annexe écrite par Peter Schneider. Les conditions de Ore sont remplacées par la condition d'être quasi-abélien. L'algèbre $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U), |\cdot|_k)$ est quasi-abélienne dès que $k \geq 1$: il existe une constante $\gamma \in]0, 1[$ telle que

$$\forall P, Q \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U), \quad |PQ - QP|_k = |[P, Q]|_k \leq \gamma \cdot |P|_k \cdot |Q|_k$$

La localisation de [11] ne s'applique pas directement à $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}(U)$ puisque ce n'est pas une algèbre de Banach. La construction des microlocalisés $\mathcal{F}_{k,r}$ est faite dans la sous-partie 4.1.3. Nous démontrerons que les sections du faisceau $\mathcal{F}_{k,r}$ sur l'ouvert U sont

$$\mathcal{F}_{k,r}(U) = \left\{ \sum_{0 \leq n \leq \infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n + \sum_{-\infty \leq n < 0} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n, \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} 0 \right\}$$

Les microlocalisés $\mathcal{F}_{k,r}$ admettent des morphismes de transition $\mathcal{F}_{k+1,r} \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}$ commutant avec les morphismes de transition $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$. En passant à la limite projective sur $k \geq r$ et pour r fixé, nous obtenons un microlocalisé $\mathcal{F}_{\infty,r}$ de $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ dans lequel la dérivation est localement inversible. Ces microlocalisés sont introduits dans la partie 4.2. Nous montrons que $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ est une K -algèbre de Fréchet-Stein pour tout entier $r \in \mathbb{N}^*$. De plus, il existe des morphismes naturels injectifs de K -algèbres $\mathcal{F}_{\infty,r+1}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{\infty,r}(U)$. L'algèbre $\mathcal{F}_\infty(U)$ introduite dans la partie 4.3 est simplement la limite inductive des algèbres $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ pour $r \geq 1$.

Enfin à l'aide de ces microlocalisés, nous définissons une variété caractéristique des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles en section 5. Nous nous restreignons au cas d'une courbe formelle \mathfrak{X} afin de démontrer l'inégalité de Bernstein pour les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles. La preuve ne fonctionne qu'en dimension un. Cependant la construction des microlocalisés s'adapte à toute dimension supérieure. Le seul point plus délicat consistera à déterminer les éléments inversibles du microlocalisé. Un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible est appelé holonome si sa variété caractéristique est de dimension au plus un. Nous démontrons que tout module holonome est un module à connexion sur un certain ouvert de \mathfrak{X} . Enfin, nous terminons cet article en reliant les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules holonomes aux modules faiblement holonomes introduits par Ardakov-Bose-Wadsley dans l'article [1]. Un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module holonome est faiblement holonome et son dual va aussi être un module holonome.

Avec nos hypothèses sur le schéma formel \mathfrak{X} , les modules coadmissibles forment une catégorie abélienne équivalente à la catégorie des modules coadmissibles introduite dans l'article [2] de K. Ardakov et S. Wadsley d'après la proposition 3.2.5 de [6]. Ainsi, ce travail permettra de définir une notion d'holonomie dans le cas des courbes analytiques rigides. Pour cela, l'étape suivante consiste à faire passer notre construction au éclatements admissibles de \mathfrak{X} afin de définir une variété caractéristique au niveau de l'espace de Zariski Riemann $\langle \mathfrak{X} \rangle$. Enfin, nous espérons ensuite généraliser cette construction au cas G -équivariant.

2 Variété caractéristique des $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents

Cette section permet de comprendre l'intérêt du microlocalisé et de voir son lien avec la variété caractéristique. On commence par redéfinir brièvement dans la partie 2.1 la variété caractéristique des $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents. On y rappelle les principaux résultats démontrés dans le document [4] sur les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules holonomes. On construit ensuite, dans la partie 2.2, un microlocalisé du faisceau $\mathcal{D}_{X,k} = \mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ pour tout niveau de congruence $k \geq 1$ permettant de retrouver la variété caractéristique des $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents en dehors de la section nulle. Il s'agit du cas le plus simple dans lequel on peut construire un microlocalisé. En effet, pour tout niveau de congruence $k \geq 1$, l'algèbre $\mathcal{D}_{X,k}(U)$ est commutative. On peut donc appliquer les constructions classiques d'algèbre commutative pour localiser la κ -algèbre $\mathcal{D}_{X,k}(U)$. Cet exemple motive l'introduction du microlocalisé \mathcal{F}_{∞} du faisceau $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$; voilà pourquoi une partie entière lui est consacrée !

2.1 Variété caractéristique

On commence par quelques rappels sur le faisceau $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ des opérateurs différentiels sur lequel on travaille. On peut consulter la seconde partie de l'article [6] de Christine Huyghe, Tobias Schmidt et Matthias Strauch ou le document [4] pour plus de détails. On désigne par U un ouvert affine contenant x sur lequel on dispose d'une coordonnée locale.

Le faisceau $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}$ est défini comme un sous-faisceau de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{(0)}$ dépendant d'un paramètre $k \in \mathbb{N}$ appelé niveau de congruence. En pratique, il s'agit d'un sous-faisceau d'algèbres de $(\text{End}_{\mathcal{V}}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}), +, \circ)$. Le cas $k = 0$ donne $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{(0)}$. Localement, $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U)$ est la \mathcal{V} -algèbre engendrée par $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$ et par la dérivation $\omega^k \partial$. Plus précisément,

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U) = \left\{ \sum_{0 \leq n < \infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n, \quad a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U) \right\}$$

On peut aussi voir $\mathcal{D}_{U,k}^{(0)}$ comme le \mathcal{O}_U -module libre de base les puissances de $\omega^k \partial$:

$$\mathcal{D}_{U,k}^{(0)} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_U \cdot (\omega^k \partial)^n$$

Le produit de l'algèbre $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U)$ est caractérisé par les commutateurs suivants. Pour toutes fonctions $a, b \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$ et pour tous entiers $n, m \in \mathbb{N}^*$, on a

$$[(\omega^k \partial)^n, a] = \omega^{kn} \partial^n(a), \quad [(\omega^k \partial)^n, (\omega^k \partial)^m] = 0, \quad [a, b] = 0$$

Soit $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)} = \varprojlim_i (\mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)} / \omega^{i+1} \mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)})$ le complété ω -adique de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}$ et $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)} \otimes_{\mathcal{V}} K$. On dispose de la description locale suivante :

$$\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n, \quad a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U) \text{ tq } a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right\}$$

Il est démontré dans l'article [6] que toutes ces algèbres sont noetheriennes et que les faisceaux associés sont cohérents. Pour $k' > k$, il est clair que $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k'}^{(0)}(U) \subset \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U)$. L'ouvert affine U de \mathfrak{X} est le spectre formel d'une \mathcal{V} -algèbre affinoïde A . Cette dernière est intègre car \mathfrak{X} est connexe et lisse. Il en découle que la norme spectrale de A , notée dans la suite $|\cdot|$, est une valuation complète. On munit alors l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ de la norme multiplicative suivante. Si $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$ un élément de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$, alors $|P|_k = \max_{n \geq 0} \{|a_n|\}$. On démontre dans la section suivante que l'algèbre $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U), |\cdot|_k)$ est quasi-abélienne.

On note $\mathcal{D}_{X,k} = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ la réduction modulo ω du faisceau $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}$. On rappelle que \mathfrak{X} et X ont le même espace topologique ; on identifie U à un ouvert affine de X . Soit ∂_k est l'image de $\omega^k \partial$ dans $\mathcal{D}_{X,k}$, alors

$$\mathcal{D}_{X,k}(U) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_X(U) \cdot \partial_k^n$$

Lorsque $k \geq 1$, l'algèbre $\mathcal{D}_{X,k}(U)$ est commutative puisque l'algèbre $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U), |\cdot|_k)$ est quasi-abélienne. Ces propriétés ne sont pas vraies lorsque $k = 0$. Par exemple $[\partial, x] = 1$ dans $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{(0)}(U)$ et dans $\mathcal{D}_X(U) = \mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{(0)}(U) \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$.

On munit $\mathcal{D}_{X,k}$ de la filtration croissante donnée localement par l'ordre des opérateurs différentiels :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \text{Fil}^m(\mathcal{D}_{U,k}) = \bigoplus_{0 \leq n \leq m} \mathcal{O}_U \cdot \partial_k^n$$

On note $\text{gr } \mathcal{D}_{X,k} = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \text{gr}_m \mathcal{D}_{X,k}$ le gradué associé et ξ_k l'image de ∂_k dans $\text{gr}_1(\mathcal{D}_{U,k})$. Localement, $\text{gr}(\mathcal{D}_{U,k}) \simeq \mathcal{O}_U[\xi_k]$ est un anneau de polynômes en une variable sur \mathcal{O}_U . En particulier, le fibré cotangent T^*X de X est isomorphe à $\text{Spec } \text{gr}(\mathcal{D}_{X,k})$ en tant que κ -schéma. On identifie ces deux schémas dans la suite. On note $\pi : T^*X \rightarrow X$ la projection canonique.

Soit $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \partial_k^n$ un élément de $\mathcal{D}_{X,k}(U)$ d'ordre d . On lui associe un élément du gradué $\text{gr } \mathcal{D}_{X,k}(U)$ appelé *symbole principal* de P par

$$\sigma(P) = a_d \cdot \xi_k^d \in \text{gr}_d \mathcal{D}_{X,k}(U)$$

Une filtration $(\text{Fil}^\ell E)_{\ell \in \mathbb{N}}$ d'un $\mathcal{D}_{X,k}$ -module quasi-cohérent à gauche E est une suite croissante $(\text{Fil}^\ell E)_\ell$ de sous- \mathcal{O}_X -modules quasi-cohérents de E telle que

1. $E = \bigcup_{\ell \geq 0} \text{Fil}^\ell E$;
2. $\forall n, \ell \in \mathbb{N}, (\text{Fil}^n \mathcal{D}_{X,k}) \cdot (\text{Fil}^\ell E) \subset \text{Fil}^{\ell+n} E$.

Le gradué $\text{gr } E$ pour une telle filtration est un $\text{gr } \mathcal{D}_{X,k}$ -module. La filtration est appelée *bonne filtration* si le gradué $\text{gr } E$ est un $\text{gr } \mathcal{D}_{X,k}$ -module cohérent. Puisque la courbe X est quasi-compacte, tout $\mathcal{D}_{X,k}$ -module cohérent admet une bonne filtration globale.

On se donne maintenant un $\mathcal{D}_{X,k}$ -module cohérent E muni d'une bonne filtration globale. On associe à E le \mathcal{O}_{T^*X} -module cohérent suivant

$$\tilde{E} = \mathcal{O}_{T^*X} \otimes_{\pi^{-1}(\text{gr } \mathcal{D}_{X,k})} \pi^{-1}(\text{gr } E)$$

Définition 2.1. *La variété caractéristique de E est le support du \mathcal{O}_{T^*X} -module cohérent $\tilde{E} : \text{Car } E = \text{Supp } \tilde{E}$.*

C'est une sous-variété fermée de T^*X puisque \tilde{E} est cohérent. La variété caractéristique est indépendante du choix de la bonne filtration choisie.

Soit maintenant \mathcal{E} un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent à gauche. Un *modèle entier* de \mathcal{E} est un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k}^{(0)}$ -module cohérent \mathcal{E}° sans ω -torsion tel que $\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}^\circ \otimes_{\mathbb{V}} K$. Puisque \mathcal{E} est cohérent, il existe un modèle entier \mathcal{E}° . La réduction $\mathcal{E}^\circ \otimes_{\mathbb{V}} \kappa$ modulo ω de \mathcal{E}° est un $\mathcal{D}_{X,k}$ -module cohérent.

Définition 2.2. *La variété caractéristique de \mathcal{E} est la variété caractéristique du $\mathcal{D}_{X,k}$ -module cohérent $\mathcal{E}^\circ \otimes_{\mathbb{V}} \kappa : \text{Car } \mathcal{E} = \text{Car}(\mathcal{E}^\circ \otimes_{\mathbb{V}} \kappa)$.*

C'est un sous-schéma fermé du fibré cotangent T^*X de X indépendant du choix du modèle entier.

Exemple 2.3. On suppose que la courbe \mathfrak{X} est affine munie d'une coordonnée étale. On note toujours $\xi_k = \sigma(\partial_k)$ l'image de ∂_k dans le gradué $\text{gr}_1 \mathcal{D}_{X,k}$.

1. Puisque le support du faisceau $\mathcal{D}_{X,k}$ est X tout entier, on a $\text{Car} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} = T^*X$.
2. Si $\mathcal{E} = 0$, alors sa variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{E})$ est vide.
3. Soit $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$ avec $P \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\mathfrak{X})$ un opérateur différentiel non nul de norme un. Alors $\mathcal{E}^\circ = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}/P$ est un modèle entier de \mathcal{E} . On note $d = \overline{N}_k(P)$ et b le coefficient d'indice d de P . La réduction \bar{P} de P modulo ω est un opérateur de $\mathcal{D}_{X,k}(X)$ d'ordre d . Son coefficient dominant est $\bar{b} = (b \bmod \omega) \in \mathcal{O}_X(X)$.
On a $\text{gr}(\mathcal{E}^\circ \otimes_{\mathcal{V}} \kappa) = \text{gr} \mathcal{D}_{X,k}/(\sigma(\bar{P}))$, où $\sigma(\bar{P}) = \bar{b} \cdot \xi_k^d$ est le symbole principal de \bar{P} . La variété caractéristique de \mathcal{E} est donc donnée par l'équation

$$\text{Car}(\mathcal{E}) = \{(t, \xi) \in T^*X : \sigma(\bar{P})(t, \xi) = \bar{b}(t) \cdot \xi^d = 0\}$$

Tout $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent \mathcal{M}_k vérifie l'inégalité de Bernstein démontrée dans [4] : si le module \mathcal{M}_k est non nul, alors les composantes irréductibles de sa variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{M}_k)$ sont de dimension au moins un.

Définition 2.4. Un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent \mathcal{M}_k est dit holonome si $\dim(\text{Car}(\mathcal{M}_k)) \leq 1$.

La proposition suivante de [4] caractérise les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules holonomes.

Proposition 2.5. Soit \mathcal{M}_k un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent. Les points suivants sont équivalents :

1. \mathcal{M}_k est holonome.
2. $\mathcal{M}_k \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/\mathcal{I}$ pour un idéal non nul \mathcal{I} de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$.
3. \mathcal{M}_k est de longueur finie.
4. \mathcal{M}_k est un module de torsion.
5. $\text{Ext}_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) = 0$ pour tout $d \neq 1$.

On démontre de plus que \mathcal{M} est $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module holonome si et seulement si il existe un ouvert non vide U de \mathfrak{X} tel que $\mathcal{M}|_U$ soit un module à connexion intégrable. Un module à connexion est un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent qui est aussi un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module libre de rang fini. Ce résultat pour un niveau de congruence k fixé permettra de démontrer un énoncé analogue pour les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules holonomes.

2.2 Microlocalisation de $\mathcal{D}_{X,k}$

Soit $\pi : T^*X \rightarrow X$ la projection canonique. L'application π est ouverte : pour tout ouvert U de X , $V = \pi^{-1}(U)$ est un ouvert de T^*X . En effet, $T^*X = \text{Spec}(\text{Sym } \Theta_X) \rightarrow X$, où Θ_X est le faisceau cotangent de X . Puisque X est lisse, Θ_X est un module localement libre de rang fini. En particulier le morphisme $T^*X \rightarrow X$ est plat de présentation finie. Il est donc ouvert d'après [9, Tag 00I1]. On note $s : X \rightarrow T^*X$ la section nulle du fibré cotangent et $T_0^*X = T^*X \setminus s(X)$.

Pour un niveau de congruence $k \geq 1$ fixé, on construit un microlocalisé de $\mathcal{D}_{X,k}$ redonnant la variété caractéristique d'un $\mathcal{D}_{X,k}$ -module cohérent en dehors de la section nulle. Le microlocalisé est un \mathcal{O}_{T^*X} -module plat L_k défini sur $T_0^*(X)$ vérifiant pour tout $\mathcal{D}_{X,k}$ -module cohérent M l'égalité

$$\text{Car}(M) \cap T_0^*(X) = \text{Supp}(L_k \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{D}_{X,k})} \pi^{-1}(M))$$

Soit U un ouvert affine de X sur lequel on dispose d'une coordonnée locale. On rappelle que la κ -algèbre $\mathcal{D}_{U,k} = \mathcal{O}_U[\partial_k]$ est commutative. Si ∂'_k est une dérivation donnée par une autre coordonnée locale sur U , alors $\partial'_k = \alpha \cdot \partial_k$ pour un élément inversible α de $\mathcal{O}_U(U)$. Soit $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \partial_k^n = \sum_{n=0}^d a_n \cdot (\alpha \partial_k)^n \in \mathcal{O}_U[\partial'_k]$. Puisque l'algèbre $\mathcal{D}_{X,k}(U)$ est commutative, $P = \sum_{n=0}^d (a_n \alpha^n) \cdot \partial_k^n$. Ainsi, la description de l'algèbre $\mathcal{D}_{U,k}$ comme l'anneau de polynômes $\mathcal{O}_U[\partial_k]$ ne dépend pas du choix du système de coordonnée locale.

On considère le système de coordonnées locales (t, ξ) sur $V = \pi^{-1}(U) \subset T^*(X)$ associé à la coordonnée de départ sur U . Soit $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \partial_k^n$ un opérateur différentiel de $\mathcal{D}_{X,k}(U)$. On lui associe une fonction de l'algèbre $\mathcal{O}_{T^*X}(V)$ en envoyant P sur l'élément $P(t, \xi) = \sum_{n=0}^d a_n(t) \cdot \xi^n$. On note $D_k(V)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{O}_{T^*X}(V)$ provenant d'un opérateur différentiel de $\mathcal{D}_{X,k}(U)$. Puisque $\mathcal{D}_{X,k}(U)$ est commutatif, le produit de $\mathcal{D}_{X,k}(U)$ induit un produit sur $D_k(V)$ coïncidant avec le produit de $\mathcal{O}_{T^*X}(V)$. Autrement dit, $D_k(V)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{O}_{T^*X}(V)$. L'algèbre $D_k(V)$ ne dépend pas non plus du choix du système de coordonnées locales (t, ξ) . Les ouverts V de T^*X provenant d'ouverts affines U de X sur lequel on dispose d'une coordonnée locale forment une base d'ouverts de T^*X . Ainsi, les algèbres $D_k(V)$ se recollent en un faisceau D_k sur le fibré cotangent T^*X .

On a $D_{k|V} = \mathcal{O}_U[\xi]$. Autrement dit, $D_k \simeq \mathcal{O}_{T^*X}$ en tant que κ -faisceaux. On identifie par la suite ces deux faisceaux. Comme pour $\mathcal{D}_{X,k}$, on munit D_k de la filtration donnée localement par l'ordre des éléments en ξ . On a

$$\text{Fil}^\ell(D_{k|V}) = \bigoplus_{n=0}^{\ell} \mathcal{O}_U \cdot \xi^n$$

Cette filtration est compatible avec la filtration de $\mathcal{D}_{X,k}$ via l'isomorphisme défini précédemment $\mathcal{D}_{X,k}(U) \simeq D_k(V) = \mathcal{O}_{T^*X}(V)$. Le gradué est encore un anneau de polynôme

sur $\mathcal{O}_U : \text{gr } D_k|_V \simeq \mathcal{O}_U[\zeta]$, où ζ est l'image de ξ dans $\text{gr}_1 D_k(U)$. L'application de D_k dans son gradué $\text{gr } D_k$ est donnée par le symbole principal σ . Si $P(t, \xi) = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \xi^n$ est un opérateur d'ordre d de D_k , alors $\sigma(P) = a_d \cdot \zeta^d$.

On se restreint maintenant à $T_0^*X = T^*X \setminus s(X)$ où la variable ξ n'est jamais nulle. Soit donc V un ouvert affine contenu dans T_0^*X . On pose $U = \pi(V)$. On suppose que U est affine, quitte à réduire V .

Définition 2.6. On note $E_k(V)$ le localisé de $D_k(V) = \mathcal{O}_{T^*X}(V)$ pour la partie multiplicative $\{\xi^n\}_{n \in \mathbb{N}}$. On a $E_k(V) \simeq \mathcal{O}_X(U)[\xi, \xi^{-1}]$.

Les algèbres $E_k(V)$ ne dépendent pas non plus du choix des coordonnées locales. Elles se recollent pour former un faisceau E_k sur T_0^*X admettant \mathcal{O}_{T^*X} comme sous-faisceau. Localement, $E_k|_V \simeq \mathcal{O}_U[\xi, \xi^{-1}]$. On note encore degré d'un élément $P(t, \xi) = \sum_{-\infty < n < \infty} a_n(t) \cdot \xi^n$ de $E_k(V)$ le plus petit entier n tel que $a_n \neq 0$ et $a_m = 0$ pour tout $m > n$. On munit $E_k(V)$ de la filtration donnée par le degré. Dans ce cas, $\text{gr}(E_k|_V) \simeq \mathcal{O}_U[\zeta, \zeta^{-1}]$. On rappelle que $\text{gr}(D_k|_V) \simeq \mathcal{O}_U[\zeta]$.

On considère sur $E_k(V)$ la valuation v_ξ donnée par moins le degré en ξ :

$$v_\xi(P(t, \xi)) = -\deg_\xi P(t, \xi)$$

Définition 2.7. On note $L_k(V)$ le complété de $E_k(V)$ pour cette valuation. Autrement dit, $L_k(V) \simeq \mathcal{O}_X(U)[[\xi^{-1}]]$.

Un élément Q de $L_k(V)$ s'écrit uniquement sous la forme

$$Q(t, \xi) = \sum_{-\infty \leq n < +\infty} a_n(t) \cdot \xi^n, \quad a_n(t) \in \mathcal{O}_X(U)$$

On définit son degré comme l'opposé de sa valuation ξ -adique : $\deg Q = -v_\xi(Q)$. C'est le plus grand entier n pour lequel le coefficient a_n est non nul. On munit à nouveau $L_k(V)$ de la filtration donnée par le degré des éléments en ξ . On a

$$\text{gr}(L_k(V)) \simeq \mathcal{O}_X(U)[\zeta, \zeta^{-1}] \simeq \text{gr}(E_k(V))$$

L'application de $E_k(V)$ dans $\text{gr } L_k(V)$ est encore donnée par le symbole principal :

$$\sigma(Q) = a_{\deg Q}(t) \cdot \zeta^{\deg(Q)}$$

On note toujours σ le symbole principal sur $L_k(V)$ puisqu'il est compatible avec les inclusions $D_k(V) \subset E_k(V) \subset L_k(V)$.

Les algèbres $L_k(V)$ se recollent en un faisceau d'algèbres L_k sur T_0^*X . Puisque \mathcal{O}_X est localement noethérien, il est clair que L_k est plat sur D_k . Le faisceau L_k est le microlocalisé recherché.

Le lemme suivant est le résultat clé permettant de faire le lien entre L_k et la variété caractéristique. Le localisé est justement construit comme le plus petit faisceau d'algèbres sur T_0^*X contenant D_k et vérifiant cette propriété.

Lemme 2.8. *Soit V un ouvert affine de T_0^*X muni de coordonnées locales $(t, \xi) \in T_0^*X$ et $P(t, \xi) = \sum_{n=0}^d a_n(t) \cdot \xi^n$ un élément d'ordre d de l'algèbre $D_k(V)$. Il existe un voisinage ouvert W de (t, ξ) dans T_0^*X pour lequel P est inversible dans $L_k(W)$ si et seulement si $\sigma(P)(t, \xi) = a_d(t) \cdot \xi^d \neq 0$.*

Démonstration. Si P est inversible dans $L_k(W)$ pour un certain voisinage ouvert W de (t, ξ) , alors l'image de P dans le gradué est inversible au voisinage de (t, ξ) . Cette image est $\sigma(P) = a_d(t) \cdot \xi^d$ par définition. Il suffit qu'elle soit non nulle en (t, ξ) pour être inversible localement.

Réciproquement, on suppose que $\sigma(P)(t, \xi) = a_d(t) \cdot \xi^d \neq 0$. Puisque le terme $a_d(t) \cdot \xi^d$ est non nul évalué en (t, ξ) , il est inversible sur un voisinage $W \subset V$ de (t, ξ) (en retirant les zéros potentiels de a_n dans V). On se restreint maintenant à cet ouvert W . Alors $P \cdot (a_n \xi^n)^{-1}$ s'écrit sous la forme $1 + R$ avec R un élément de $E_k(W)$ de degré < 0 . On note $S_m = 1 + R + \dots + R^m$ pour $m \in \mathbb{N}^*$. C'est un élément de $E_k(W)$ de degré $\leq -m$. En particulier, la suite $(S_m)_m$ converge dans $L_k(W)$ vers un élément que l'on note S . Par ailleurs on observe que $\deg(S_m \cdot P \cdot (a_n \xi^n)^{-1} - 1) \leq -m + 1$. Ainsi, le passage à la limite $m \rightarrow +\infty$ donne $S \cdot P \cdot (a_n \xi^n)^{-1} = 1$ dans $L_k(W)$. Autrement dit, P est inversible dans le microlocalisé $L_k(W)$. \square

Soit maintenant M un $\mathcal{D}_{X,k}$ -module cohérent. Puisque L_k est plat sur $D_k = \mathcal{O}_{T^*X}$, on définit un L_k -module cohérent par

$$\tilde{M}^L = L_k \otimes_{\mathcal{O}_{T^*X}} \pi^{-1}(M)$$

Le support de ce module coïncide avec la variété caractéristique de M en dehors de la section nulle. Pour montrer ce résultat, on va se ramener au cas où $M = \mathcal{D}_{X,k}/I$ pour un idéal à gauche I de $\mathcal{D}_{X,k}$. On identifie I avec un idéal de $D_k = \mathcal{O}_{T^*X}$. On pose $\tilde{I} = L_k \cdot I$ l'idéal de L_k engendré par I . On munit I et \tilde{I} des filtrations obtenues par intersections de celles de D_k et L_k respectivement, ie $\text{gr}(I) = \sigma(I)$ et $\text{gr}(\tilde{I}) = \sigma(\tilde{I})$. On peut montrer alors que $\text{gr}(\tilde{I})$ est engendré par $\sigma(I) : \text{gr}(\tilde{I}) = \text{gr}(L_k) \cdot \sigma(I)$.

Proposition 2.9. *On a $\text{Car}(M) \cap T_0^*(X) = \text{Supp}(\tilde{M}^L)$.*

Démonstration. On note $\text{Car}^*(M) = \text{Car}(M) \cap T_0^*(X)$. On peut se ramener au cas où X est affine et $M = \mathcal{D}_{X,k}/I$ pour un idéal à gauche I de $\mathcal{D}_{X,k}$. En effet, puisque M est cohérent, M est engendré par des sections globales e_1, \dots, e_r . Si $I_i = \text{Ann}_{\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}}(e_i)$, alors $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k} \cdot e_i \simeq \mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}/I_i$. Comme la variété caractéristique est un support et puisque le support d'une somme est l'union des supports des termes de la somme, on a

$$\text{Car}(M) = \bigcup_{i=1}^r \text{Car}(\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}/I_i)$$

On suppose donc que $M = \mathcal{D}_{X,k}/I$. On note encore I l'image de I dans le faisceau D_k . Alors $\tilde{M}^L \simeq L_k/\tilde{I}$ en tant que D_k -module, où $\tilde{I} = L_k \cdot I$ est l'idéal de L_k engendré par I . Soit $(t, \xi) \notin \text{Supp } \tilde{M}^L$. Cela signifie que sur un voisinage affine V de (t, ξ) , $L_{k|V} = \tilde{I}|_V$. Dans ce cas, $\sigma(\tilde{I}_V) = \text{gr}(E_{k|V}) \cdot \sigma(I|_V) = \text{gr}(E_{k|V})$. En particulier, $I|_V$ contient un élément P tel que $\sigma(P)(t, \xi) \neq 0$. On rappelle que

$$\text{Car } M \cap T^*V = \{(t, \xi) \in T^*V : \sigma(P)(t, \xi) = 0 \quad \forall P \in I(V)\}$$

On en déduit que $(t, \xi) \notin \text{Car}^*(M)$.

Réciproquement, on suppose que $(t, \xi) \notin \text{Car}^*(M)$. Cela signifie que I contient un élément P défini sur un voisinage affine V de (t, ξ) tel que $\sigma(P)(t, \xi) \neq 0$. Alors d'après le lemme 2.8 et quitte à réduire l'ouvert V , l'élément $P \in \tilde{I}(V)$ est inversible dans le microlocalisé $L_k(V)$. Ainsi, $\tilde{I} = L_k$ au voisinage de (t, ξ) et $\tilde{M}^L \simeq L_k/\tilde{I}$ est nul en (t, ξ) . Autrement dit, $(t, \xi) \notin \text{Supp}(\tilde{M}^L)$. \square

On rappelle que si \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{X,k}$ -module cohérent, alors $\text{Car } \mathcal{M} = \text{Car}(\mathcal{M}^\circ \otimes_{\mathcal{V}} \kappa)$ où \mathcal{M}° est un modèle entier de \mathcal{M} et $\mathcal{M}^\circ \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ est un $\mathcal{D}_{X,k}$ -module cohérent. On a alors

$$\text{Car}(\mathcal{M}) \cap T_0^*(X) = \text{Supp}(L_k \otimes_{\mathcal{O}_{T^*X}} \pi^{-1}(\mathcal{M}^\circ \otimes_{\mathcal{V}} \kappa))$$

3 $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles

On rappelle dans cette section quelques propriétés du faisceau $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty} = \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ et la définition des modules coadmissibles. On introduit ensuite la notion de module faiblement holonome pour la courbe formelle \mathfrak{X} en reprenant la définition de Konstantin Ardakov, Andreas Bode, et Simon Wadsley donnée dans l'article [1].

3.1 Définitions et propriétés

Pour plus de détails sur le faisceau $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ et sur les propriétés des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles, le lecteur peut consulter l'article [6] de Christine Huyghe, Tobias Schmidt et Matthias Strauch.

Soit U un ouvert affine contenant le point x sur lequel on dispose d'un système de coordonnées locale associé à x . Pour tout entier naturel k , on rappelle que l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ est une sous-algèbre de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. On considère dans la suite les morphismes de transition $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ induits par ces inclusions locales. On définit le faisceau $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ comme la limite projective des faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$.

Définition 3.1. On note $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty} = \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$.

Le faisceau $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ est un faisceau de K -algèbres sur le schéma formel \mathfrak{X} . Il vérifie les trois points suivants :

1. $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ est une K -algèbre de Fréchet-Stein et sa topologie est induite par les normes $|\cdot|_k$ des algèbres de Banach $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$;
2. $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U) = \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) = \bigcap_{k \geq 0} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$;
3. $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \partial^n : a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U) \text{ tq } \forall \eta > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \eta^n = 0 \right\}$.

Le lemme suivant caractérise les opérateurs différentiels finis de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ à l'aide des fonctions \overline{N}_k pour tout niveau de congruence k . On en déduit les éléments inversibles de l'algèbre $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$.

Lemme 3.2. *Soit P un opérateur différentiel de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. La suite $(\overline{N}_k(P))_{k \geq 0}$ est croissante. De plus, P est un opérateur fini de degré $d \in \mathbb{N}$ si et seulement si la suite $(\overline{N}_k(P))_k$ est stationnaire de valeur limite d .*

Démonstration. On écrit $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \partial^n$, avec $a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$. On commence par montrer que la suite $(\overline{N}_k(P))_k$ est croissante. Les coefficients de P dans la base $(\omega^k \partial)^n$ de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ sont les fonctions $\omega^{-kn} \cdot a_n$. Donc

$$\overline{N}_k(P) = \max\{n \in \mathbb{N} : |\omega|^{-kn} \cdot |a_n| = |P|_k\}$$

Soit $n_0 = \overline{N}_{k+1}(P)$. Puisque $|P|_{k+1} = |\omega^{-(k+1)n_0} \cdot a_{n_0}| > |\omega^{-(k+1)n} \cdot a_n|$ par définition de n_0 , on a

$$\forall n > n_0, |\omega^{-kn} \cdot a_n| = |\omega|^n \cdot |\omega^{-(k+1)n} \cdot a_n| < |\omega|^{n_0} \cdot |\omega^{-(k+1)n_0} \cdot a_{n_0}| = |\omega^{-kn_0} \cdot a_{n_0}|$$

On en déduit que $\overline{N}_k(P) \leq n_0 = \overline{N}_{k+1}(P)$.

On suppose maintenant que $\overline{N}_k(P) = d$ à partir d'un certain niveau de congruence k_0 . Cela signifie que pour tout entier $k \geq k_0$ et pour tout entier $n > d$,

$$|a_n| \cdot |\omega|^{-kn} < |a_d| \cdot |\omega|^{-kd}$$

Autrement dit, $|a_n| < |a_d| \cdot |\omega|^{k(n-d)}$. Mais $|\omega|^{k(n-d)} \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Le passage à la limite $k \rightarrow \infty$ implique que $|a_n| = 0$. Ainsi P est un opérateur fini d'ordre d . \square

Corollaire 3.3. *Les éléments inversibles de la K -algèbre $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ sont exactement les fonctions inversibles :*

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)^\times = \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)^\times$$

Démonstration. Soit $P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}(U)$ un opérateur différentiel inversible. Alors P est inversible dans l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ pour tout niveau de congruence $k \in \mathbb{N}$. De manière équivalente, $\overline{N}_k(P) = 0$ pour tout entier k et le coefficient constant de P est inversible d'après le corollaire 4.19 déjà démontré dans [4]. Le lemme 3.2 implique que P est un opérateur fini d'ordre 0. Autrement dit, P est un élément inversible de $\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U)$. \square

On termine cette partie en rappelant la définition des $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ -modules coadmissibles et en détaillant un exemple de tel module.

Définition 3.4. *Un module coadmissible est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ -module \mathcal{M} isomorphe à une limite projective $\varprojlim_k \mathcal{M}_k$ de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents \mathcal{M}_k tels que les applications de transitions $\mathcal{M}_{k+1} \rightarrow \mathcal{M}_k$ soient $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -linéaires et tels que pour chaque niveau de congruence k , on dispose d'un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -isomorphisme induit par l'application de transition :*

$$\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_{k+1} \simeq \mathcal{M}_k$$

La catégorie des $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ -modules coadmissibles est abélienne. Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ -module coadmissible. Il est démontré dans [6] et [8] que $\mathcal{M}_k \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}} \mathcal{M}$ et que $\mathcal{M} \simeq \varprojlim_k \left(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}} \mathcal{M} \right)$ en tant que $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ -module coadmissible. On peut donc choisir pour \mathcal{M}_k le $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}} \mathcal{M}$.

On explicite dans l'exemple ci-dessous un opérateur infini P de $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}(U)$ vérifiant $\overline{N}_k(P) = k$ pour tout niveau de congruence k . Plus précisément, on montre que $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}/P$ est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ -module coadmissible isomorphe à une limite projective de la forme $\varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P_k$ avec P_k un opérateur différentiel fini d'ordre k de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$.

Exemple 3.5.

1. Tout $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ -module cohérent est coadmissible.
2. Soit $P = \prod_{n \geq 1} (1 - \omega^n \partial) \in \mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}(U)$. Alors $\overline{N}_k(P) = k$. En effet, le coefficient de ∂^n est à un signe près

$$\omega^{1+2+\dots+n} \cdot (1 + \omega + \omega^2 + \dots) = \omega^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot a_n$$

avec a_n un élément de \mathcal{V} de valeur absolue 1. Dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$, le coefficient d'ordre n de P est $\pm \omega^{n(\frac{n+1}{2}-k)} \cdot a_n$. Par définition, $\overline{N}_k(P)$ est le plus grand entier n maximisant la norme $|\omega|^{n(\frac{n+1}{2}-k)}$. On cherche donc l'entier n minimisant la puissance $n(\frac{n+1}{2} - k)$.

La fonction $x \mapsto x \left(\frac{x+1}{2} - k \right)$ est minimale en $x = k - \frac{1}{2}$, de valeur $-k^2 - k + \frac{3}{4}$. L'entier le plus proche est $-k^2 - k + 1$. Donc l'entier $n \left(\frac{n+1}{2} - k \right)$ est minimal pour $n = k$. Ceci prouve que $\overline{N}_k(P) = k$. On a de plus

$$|P_k|_k = |\omega|^{k \left(\frac{k+1}{2} - k \right)} = |\omega|^{-k^2/2+k/2}$$

Dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$, P s'écrit $P = P_k \cdot Q_k$ avec $P_k = \prod_{1 \leq n \leq k} (1 - \omega^n \partial)$ un opérateur fini d'ordre $\overline{N}_k(P_k) = k$ et $Q_k = \prod_{n > k} (1 - \omega^n \partial)$ inversible dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. En effet, $\overline{N}_k(Q_k) = 0$ et le coefficient constant de Q_k est inversible. On en déduit que $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P_k$. Par ailleurs, $P_{k+1} = (1 - \omega^{k+1} \partial) \cdot P_k$ avec $1 - \omega^{k+1} \partial$ inversible dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. On a donc $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P_{k+1} \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P_k$. Autrement dit, $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P \simeq \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P_k$ en tant que $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible.

On peut retrouver P à partir des opérateurs P_k puisque la suite $(P_k)_k$ converge vers P dans l'algèbre de Banach $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. En effet, il suffit de le montrer pour toutes les normes $|\cdot|_m$. On a $P - P_k = (Q_k - 1) \cdot P_k$. Pour $k \geq m$, on observe que $\overline{N}_m(P_k) = m$ et que $|P_k|_m = |\omega|^{-\frac{1}{2}(m^2-m)}$. Le coefficient constant de $Q_k - 1$ est nul et le coefficient de ∂^n est de la forme $\omega^{k+(k+1)+\dots+(k+n-1)} \cdot a_n$, où $a_n \in \mathcal{V}$ est de valeur absolue 1. Dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},m,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$, le coefficient de $(\omega^k \partial)^n$ est $\omega^{n(k+\frac{n-1}{2}-m)} \cdot a_n$. Les coefficients de $Q_k - 1$ sont presque ceux de P_k : il suffit de remplacer k par $m+1-k$. La fonction $x(k + \frac{x-1}{2} - m)$ est donc minimale pour $x = m+1-k-1/2$. Pour k suffisamment grand, par exemple $k \geq m+1$, ce terme est négatif. La norme de $1 - Q_k$ est donc donnée par le coefficient d'indice un : $\overline{N}_k(Q_k - 1) = 1$ et $|Q_k - 1|_m = |\omega|^{k-m}$. Il vient

$$|P - P_k|_m = |1 - Q_k|_m \cdot |P_k|_m = |\omega|^{k-\frac{m^2}{2}-\frac{m}{2}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

3.2 Modules faiblement holonomes

On définit dans cette partie les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles faiblement holonomes au sens de Konstantin Ardakov, Andreas Bode, et Simon Wadsley dans l'article [1]. Un module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ sur la courbe formelle \mathfrak{X} est appelé faiblement holonome si

$$\text{Ext}_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}}^0(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}) := \varprojlim_k \text{Ext}_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^0(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) = 0$$

De manière équivalente, \mathcal{M} est faiblement holonome si et seulement si les modules \mathcal{M}_k sont tous holonomes à partir d'un niveau de congruence k suffisamment grand.

Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible. Puisque \mathcal{M}_k est un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent à gauche, on peut munir le groupe abélien $\text{Hom}_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$ d'une structure

de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent à droite. En effet, la question étant locale, on peut supposer que \mathfrak{X} est un ouvert affine suffisamment petit pour que le module \mathcal{M}_k soit de présentation finie :

$$(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^m \rightarrow (\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^n \rightarrow \mathcal{M}_k \rightarrow 0$$

En appliquant le foncteur $\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\bullet, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$, on en déduit que $\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$ est un sous-module de type fini du $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent à droite

$$\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}((\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^n, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \simeq (\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^n$$

Il en découle que le $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module à droite $\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$ est cohérent.

Lemme 3.6. *Pour tout niveau de congruence $k \in \mathbb{N}$, on dispose d'un isomorphisme de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules à droites :*

$$\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \simeq \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})$. On lui associe une application $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\mathfrak{X})$ -linéaire

$$\tilde{\varphi} : \mathcal{M}_k \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_{k+1} \longrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}, \quad P \otimes m \mapsto P \cdot \varphi(m)$$

On en déduit une application entre les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\mathfrak{X})$ -modules à droite

$$\begin{aligned} \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\mathfrak{X}) &\rightarrow \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \\ \varphi \otimes Q &\mapsto \tilde{\varphi} \cdot Q \end{aligned}$$

On dispose d'une telle application sur chaque ouvert U de \mathfrak{X} . On obtient ainsi un morphisme entre $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents à droite

$$\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$$

On montre maintenant que ce morphisme est un isomorphisme. Il suffit de le vérifier localement. On suppose que \mathfrak{X} est affine tel que \mathcal{M}_{k+1} soit de présentation finie :

$$(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})^m \rightarrow (\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})^n \rightarrow \mathcal{M}_{k+1} \rightarrow 0$$

En tensorisant par $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$, on obtient une présentation $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^m \rightarrow (\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^n \rightarrow \mathcal{M}_k \rightarrow 0$ de \mathcal{M}_k . En appliquant les foncteurs $\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\bullet, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})$ et $\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\bullet, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$, on obtient le diagramme commutatif suivant entre $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules à droites.

$$\begin{array}{ccc}
0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)} & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}((\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})^n, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)} & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}((\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^n, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}((\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})^m, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)} & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}((\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^m, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)})
\end{array}$$

On déduit du fait que les deux dernières flèches horizontales soient des isomorphismes que la première flèche en est aussi un. \square

On définit un $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ -module coadmissible à droite $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty})$ par

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}) := \varprojlim_k \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$$

Plus généralement, le groupe abélien $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$ admet une structure de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module à droite. On démontre maintenant que pour tout entier naturel d , les modules $\left\{ \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \right\}_{k \in \mathbb{N}}$ forment un $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ -module coadmissible à droite.

Pour tout entier $d \geq 2$ et pour tout niveau de congruence k , il a été vu dans la preuve de la proposition 2.5.4 de [4] que $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) = 0$. Ainsi pour $d \geq 2$, on peut définir le module $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}}^d(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty})$ simplement par

$$\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}}^d(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}) := \varprojlim_k \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) = 0$$

pour les morphismes de transition triviaux. Le cas $d = 0$ correspond au lemme 3.6. Il reste donc à traiter le cas $d = 1$.

Proposition 3.7. *Pour tout niveau de congruence $k \in \mathbb{N}$, le morphisme de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules à droites*

$$\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$$

induit par le morphisme $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -linéaire

$$\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \rightarrow \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$$

du lemme 3.6 est un isomorphisme. De plus, le $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module à droite $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$ est cohérent.

Démonstration. On vérifie localement que le morphisme

$$\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$$

est un isomorphisme. Soit $x \in \mathfrak{X}$ et U un ouvert affine de \mathfrak{X} contenant x sur lequel \mathcal{M}_{k+1} est de présentation finie. On va montrer que le $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module \mathcal{M}_{k+1} admet localement, sur un certain voisinage ouvert V de x , une résolution projective de la forme

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow L^2 \longrightarrow L^1 \longrightarrow L^0 \longrightarrow (\mathcal{M}_{k+1})|_V \longrightarrow 0$$

avec P un $\widehat{\mathcal{D}}_{V,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module projectif et L^2, L^1, L^0 des $\widehat{\mathcal{D}}_{V,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules libres de rang fini. On sait d'après la proposition 3.25 de [4] que $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ est de longueur cohomologique inférieure ou égale à trois. Ainsi $\text{Ext}_{(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})_x}^d((\mathcal{M}_{k+1})_x, \mathcal{N}_x) = 0$ pour tout entier $d > 3$ et pour tout $\widehat{\mathcal{D}}_{W,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module \mathcal{N} défini sur un certain voisinage ouvert W de x . Comme \mathcal{M}_{k+1} est de présentation finie sur l'ouvert U , il existe un $\widehat{\mathcal{D}}_{U,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module libre de rang fini L^0 et un $\widehat{\mathcal{D}}_{U,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent K tels que l'on ait une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow L^0 \longrightarrow (\mathcal{M}_{k+1})|_U \longrightarrow 0$$

Comme L^0 est un module libre de rang fini, on a $\text{Ext}_{(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})_x}^d(L_x^0, \mathcal{N}_x) = 0$ pour tout entier $d \geq 1$ et pour tout $\widehat{\mathcal{D}}_{W,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module \mathcal{N} défini sur un voisinage ouvert W de x . En prenant la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte précédente, on obtient

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall \mathcal{N}, \quad \text{Ext}_{(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})_x}^d(K_x, \mathcal{N}_x) \simeq \text{Ext}_{(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})_x}^{d+1}((\mathcal{M}_{k+1})_x, \mathcal{N}_x)$$

En particulier, $\text{Ext}_{(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})_x}^d(K_x, \mathcal{N}_x) = 0$ pour tout $d > 2$ et pour tout $\widehat{\mathcal{D}}_{W,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module \mathcal{N} défini sur un voisinage ouvert W de x . Par une récurrence finie, et quitte à réduire l'ouvert U contenant x , on obtient une résolution locale de \mathcal{M}_{k+1} de la forme

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow L^2 \longrightarrow L^1 \longrightarrow L^0 \longrightarrow (\mathcal{M}_{k+1})|_U \longrightarrow 0$$

avec L^2, L^1, L^0 des $\widehat{\mathcal{D}}_{U,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules libres de rangs finis et $\text{Ext}_{(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})_x}^d(P_x, \mathcal{N}_x) = 0$ pour tout entier $d > 0$ et pour tout $\widehat{\mathcal{D}}_{W,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module \mathcal{N} défini sur un voisinage ouvert W de x . Autrement dit, P est un module projectif au voisinage de x .

On écrit $L^i \simeq (\widehat{\mathcal{D}}_{U,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_i}$ avec $n_i \in \mathbb{N}$. Comme $\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ est plat sur $\widehat{\mathcal{D}}_{U,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$, on obtient la suite exacte suivante en tensorisant par $\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)}$:

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{U,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} P \longrightarrow (\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_2} \longrightarrow (\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_1} \longrightarrow (\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_0} \longrightarrow (\mathcal{M}_k)|_U \longrightarrow 0$$

Soit $0 \longrightarrow P^3 \longrightarrow P^2 \longrightarrow P^1 \longrightarrow P^0 \longrightarrow 0$ une résolution projective finie du $\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent $\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{U,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} P$ sur ouvert contenant x que l'on note encore U . On en déduit la résolution projective suivante du module $(\mathcal{M}_k)|_U$:

$$\begin{array}{ccccccccc} (\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_2} & \longrightarrow & (\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_1} & \longrightarrow & (\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_0} & \longrightarrow & (\mathcal{M}_k)|_U & \longrightarrow & 0 \\ \uparrow & & & & & & & & \\ P^0 & \longleftarrow & P^1 & \longleftarrow & P^2 & \longleftarrow & P^3 & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

On suppose maintenant que $\mathfrak{X} = U$ pour simplifier la suite. On obtient finalement le dia-

gramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc}
0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)} & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}((\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_0}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)} & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}((\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_0}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \\
\downarrow \varphi & & \downarrow \\
\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}((\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)} & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}((\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \\
\downarrow \psi & & \downarrow \\
\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}((\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_2}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)} & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}((\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_2}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

Le groupe $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})$ est donné par les morphisme φ et ψ . Le groupe $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$ est quant à lui donné par les morphismes $\varphi \otimes \text{id}_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}$ et $\psi \otimes \text{id}_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}$. On en déduit que

$$\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \simeq \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$$

Enfin les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules à droite $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$ sont cohérents car ce sont localement des quotients du module $\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}((\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^n, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \simeq (\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^n$. \square

Pour tout $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ -module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ et pour tout entier naturel d , on note $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}}^d(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty})$ le $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ -module coadmissible à droite limite projective des modules $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$:

$$\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}}^d(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}) := \varprojlim_k \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$$

Pour tout entier $d \geq 2$, on rappelle que $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}}^d(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}) = 0$.

Définition 3.8. Un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ est appelé faiblement holonome si $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}}^0(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}) = 0$.

De manière équivalente, un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible \mathcal{M} est faiblement holonome si et seulement si $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}}^d(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}) = 0$ pour tout entier $d \neq 1$. Dans l'article [1], Konstantin Ardakov, Andreas Bode, et Simon Wadsley définissent les modules faiblement holonomes de la manière suivante. Soit X_K un espace analytique rigide lisse de dimension n . Un $\widehat{\mathcal{D}}$ -module coadmissible \mathcal{M} sur X_K est faiblement holonome si les groupes de cohomologie $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}}^d(\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{D}})$ sont nuls pour tout entier $d \neq n$. La définition 3.8 correspond aux modules faiblement holonomes en considérant une courbe formelle à la place d'un espace analytique rigide.

Proposition 3.9. Un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ est faiblement holonome si et seulement si il existe un niveau de congruence k_0 à partir duquel les modules \mathcal{M}_k sont tous holonomes.

Démonstration. Si les modules \mathcal{M}_k sont holonomes, alors $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}^0(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) = 0$ d'après la proposition 3.28 de [4]. Il en découle que $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}}^0(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}) = \varprojlim_k \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}^0(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) = 0$. Réciproquement, on suppose que $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}}^0(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}) = 0$. Comme ce module est coadmissible, on a $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}^0(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) = \mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}}^0(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}) \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} = 0$. On en déduit que \mathcal{M}_k est holonome toujours la proposition 3.28 de [4]. \square

On en déduit immédiatement que la catégorie des modules faiblement holonomes est abélienne. Elle est de plus non triviale. Elle contient par exemple les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules cohérents de la forme $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/\mathcal{J}$ avec \mathcal{J} un idéal cohérent non nul de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$.

Corollaire 3.10. La catégorie des modules faiblement holonomes est abélienne.

Démonstration. Soit $0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$ une suite exacte de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles. On écrit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$, $\mathcal{N} = \varprojlim_k \mathcal{N}_k$ et $\mathcal{L} = \varprojlim_k \mathcal{L}_k$. Alors pour tout niveau de congruence k , on dispose d'une suite exacte de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}_k \longrightarrow \mathcal{N}_k \longrightarrow \mathcal{L}_k \longrightarrow 0$$

D'après la proposition 3.16 de [4], \mathcal{N}_k est holonome si et seulement si \mathcal{M}_k et \mathcal{L}_k le sont. On en déduit que les modules \mathcal{N}_k sont holonomes à partir d'un certain niveau de congruence k si et seulement si les modules \mathcal{M}_k et \mathcal{L}_k le sont aussi. La proposition 3.9 implique enfin que \mathcal{N} est faiblement holonome si et seulement si \mathcal{M} et \mathcal{L} sont faiblement holonomes. \square

Remarque 3.11. Lorsque $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ est faiblement holonome, on dispose localement d'une résolution libre finie des modules \mathcal{M}_k donnée par la proposition 2.20 de [4]. En effet,

le module \mathcal{M}_k est holonome pour k suffisamment grand. Il existe donc un idéal cohérent non nul \mathcal{J}_k de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ tel que $\mathcal{M}_k \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/\mathcal{J}_k$. Soit $x \in \mathfrak{X}$. Une base de division relativement au point x fournit une présentation explicite de \mathcal{J}_k sur un voisinage U de x :

$$0 \longrightarrow (\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)})^{r-1} \xrightarrow{\cdot R} (\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)})^r \longrightarrow \mathcal{J}_k|_U \longrightarrow 0$$

La matrice R s'exprime entièrement en fonction de la base de division. Combinée avec la suite exacte courte $0 \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \mathcal{M}_k \rightarrow 0$, on obtient la présentation suivante du module \mathcal{M}_k sur l'ouvert U :

$$0 \longrightarrow (\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)})^{r-1} \xrightarrow{\cdot R} (\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)})^r \longrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)} \longrightarrow \mathcal{M}_k|_U \longrightarrow 0$$

On retrouve bien que $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) = 0$ pour tout entier $d \geq 2$. Par ailleurs, cette résolution permet de calculer explicitement le groupe $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$ au voisinage de x en fonction d'une base de division relativement au point x .

Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible et d un entier naturel. Les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents à gauche $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{-1}$ forment un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible à gauche. En effet, cela résulte du lemme 2.2 de l'article [10] de Anne Virrion :

$$\begin{aligned} & \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \otimes \left(\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{-1} \right) \\ & \simeq \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \left(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{-1} \right) \\ & \simeq \left(\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \right) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{-1} \\ & \simeq \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{-1} \end{aligned}$$

On note \mathcal{M}_k^d le dual du $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent \mathcal{M}_k :

$$\mathcal{M}_k^d := \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{-1}$$

Il a été vu dans la partie 3.5 de [4] que si le module \mathcal{M}_k est holonome, alors son dual \mathcal{M}_k^d est aussi holonome. Par ailleurs, on dispose d'un isomorphisme naturel de bidualité $(\mathcal{M}_k^d)^d \simeq \mathcal{M}_k$.

Définition 3.12. *Le dual d'un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ est le module coadmissible*

$$\mathcal{M}^d := \varprojlim_k \left(\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{-1} \right)$$

On démontre maintenant que si \mathcal{M} est faiblement holonome, alors son dual \mathcal{M}^d l'est aussi.

Proposition 3.13. *Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible faiblement holonome. Alors son dual \mathcal{M}^d est aussi un module faiblement holonome. De plus, on dispose d'un isomorphisme de bidualité : $(\mathcal{M}^d)^d \simeq \mathcal{M}$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible faiblement holonome. Par définition, il existe un niveau de congruence k_0 tel que \mathcal{M}_k soit un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module holonome pour tout entier $k \geq k_0$. Alors $\mathcal{M}_k^d = \text{Ext}_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{-1}$ est un module holonome d'après la proposition 3.28 de [4]. La proposition 3.9 implique ensuite que le $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible $\mathcal{M}^d = \varprojlim_k \mathcal{M}_k^d$ est faiblement holonome. Enfin les isomorphismes de bidualité $(\mathcal{M}_k^d)^d \simeq \mathcal{M}_k$ pour chaque niveau de congruence $k \geq k_0$ induisent un isomorphisme $(\mathcal{M}^d)^d \simeq \mathcal{M}$ en prenant la limite projective. \square

4 Microlocalisation de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$

Pour définir une variété caractéristique des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles par microlocalisation, il faut inverser les opérateurs différentiels qu'on désire être holonomes. On souhaite que les modules de la forme $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$ soient holonomes si et seulement si P est un opérateur fini. Comme on a pu le voir dans la section précédente, le faisceau $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ n'admet que très peu d'éléments inversibles : $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)^\times = \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)^\times$. On construit dans cette partie un microlocalisé \mathcal{F}_∞ de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ vérifiant la condition suivante : un élément P de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ est inversible dans $\mathcal{F}_\infty(U)$ si et seulement si P est un opérateur différentiel fini dont le coefficient dominant est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$.

Pour cela, on commence par microlocaliser les faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$. Afin d'avoir des morphismes de transition commutant avec les morphismes $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$, on introduit un nouveau paramètre $r \in \mathbb{N}^*$. On définit des faisceaux microlocalisés $\mathcal{F}_{k,r}$ de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ pour tout entier $k \geq r$ admettant des morphismes de transition $\mathcal{F}_{k+1,r} \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}$. Les faisceaux $\mathcal{F}_{\infty,r} := \varprojlim_{k \geq r} \mathcal{F}_{k,r}$ vont être des microlocalisés de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$. On montre qu'il existe des morphismes naturels de faisceaux $\mathcal{F}_{\infty,r+1} \rightarrow \mathcal{F}_{\infty,r}$. Alors $\mathcal{F}_\infty := \varinjlim_{r \geq 1} \mathcal{F}_{\infty,r}$.

4.1 Microlocalisations de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$

On introduit dans cette partie des microlocalisés du faisceau $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ pour un niveau de congruence k supérieur ou égale à un. Pour cela, on utilise une localisation non commutative décrite dans l'annexe écrite par Peter Schneider de l'article [11] de Gergely Zábrádi. On commence par rappeler les principales propriétés de ce microlocalisé. La condition pour construire un tel microlocalisé est d'être une algèbre quasi-abélienne. Comme déjà dit en

introduction, les K -algèbres de Banach $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U), |\cdot|_k)$ sont quasi-abéliennes dès que $k \geq 1$. On inverse en pratique la partie multiplicative $S = \{\partial^n, n \in \mathbb{N}\}$ des puissances de la dérivation ∂ . Une difficulté est de construire des microlocalisés des algèbres $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ pour la partie multiplicative S admettant des morphismes de transition commutant avec les morphismes injectifs $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$.

Soient $k \geq r \geq 1$. On peut définir un tel microlocalisé en inversant les éléments de S dans l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ pour toutes les normes quasi-abéliennes $|\cdot|_r, \dots, |\cdot|_k$ de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. On obtient ainsi une K -algèbre de Banach noétherienne $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ dont la norme est seulement sous-multiplicative. Les faisceaux $\mathcal{F}_{k,r}$, pour un niveau r fixé, vont admettre des morphismes de transition $\mathcal{F}_{k+1,r} \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}$ commutant avec les morphismes $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$. En passant à la limite projective sur $k \geq r$, on construit un faisceau $\mathcal{F}_{\infty,r} = \varprojlim_{k \geq r} \mathcal{F}_{k,r}$. Localement, $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ est une K -algèbre de Fréchet-Stein. On introduit dans cette section les faisceaux $\mathcal{F}_{k,r}$. On démontre ensuite plusieurs de leurs propriétés. On définit le faisceau $\mathcal{F}_{\infty,r}$ plus tard dans la partie 5.2.

4.1.1 Microlocalisation d'une algèbre de Banach quasi-abélienne

On résume et rappelle dans cette sous-partie quelques résultats vérifiés par le microlocalisé d'une algèbre de Banach quasi-abélienne construit dans l'annexe de l'article [11]. On démontre ensuite que l'algèbre $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U), |\cdot|_k)$ est quasi-abélienne dès que U est un ouvert affine sur lequel on dispose d'une coordonnée étale.

Soit K un corps valué complet non archimédien et A une K -algèbre de Banach munie d'une norme multiplicative $|\cdot|$ non archimédienne.

Définition 4.1. *On dit que A est quasi-abélienne pour la norme $|\cdot|$ s'il existe un réel $\gamma \in [0, 1[$ tel que pour tout couple $(a, b) \in A^2$,*

$$|ab - ba| = |[a, b]| \leq \gamma \cdot |ab| = \gamma \cdot |a||b|$$

On fixe maintenant m normes $|\cdot|_1, \dots, |\cdot|_m$ quasi-abéliennes sur A . Une partie multiplicative de A est un sous ensemble S de A vérifiant

1. $0 \notin S$ et $1 \in S$;
2. S est stable par multiplication : $\forall s, t \in S, s \cdot t \in S$.

Soit S une partie multiplicative de A . Il existe alors une unique K -algèbre de Banach $B = A(|\cdot|_1, \dots, |\cdot|_m, S)$ munie d'une norme sous-multiplicative $\|\cdot\|$ non archimédienne et d'un morphisme isométrique de K -algèbres

$$\phi : (A, \max\{|\cdot|_1, \dots, |\cdot|_m\}) \rightarrow (B, \|\cdot\|)$$

tels que $\phi(S) \subset B^\times$ et tels que les éléments de B de la forme $s^{-1}a$ pour $(s, a) \in S \times A$ soient denses dans B . On identifie A à une sous-algèbre de B via ϕ : on note encore a l'image d'un élément a de A et s^{-1} l'inverse de $s \in S$ dans B . Par ailleurs, le morphisme $\phi : A \rightarrow B$ vérifie la propriété universelle suivante.

Proposition 4.2. *Soit $(D, \|\cdot\|_D)$ une K -algèbre de Banach munie d'un morphisme de K -algèbres $f : A \rightarrow D$ tel que $f(S) \subset D^\times$. On suppose qu'il existe une constante $c > 0$ pour laquelle*

$$\forall (s, a) \in S \times A, \quad \|f(s)^{-1} \cdot f(a)\|_D \leq c \cdot \max_{1 \leq i \leq m} |s|_i^{-1} \cdot |a|_i.$$

Alors il existe un unique morphisme continu de K -algèbres $\tilde{f} : B \rightarrow D$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ & \searrow f & \downarrow \tilde{f} \\ & & D \end{array}$$

commute. De plus, si $c = 1$ et si la norme $\|\cdot\|_D$ de D est sous-multiplicative, alors \tilde{f} est 1-lipschitzienne :

$$\forall b \in B, \quad \|\tilde{f}(b)\|_D \leq \|b\|$$

Remarque 4.3. *La condition vérifiée par f permet de la prolonger naturellement par uniformité continue sur B . En effet, puisque $s(s^{-1}a) = a$ dans B et puisque \tilde{f} est multiplicative, on a nécessairement $\tilde{f}(s^{-1}a) = f(s)^{-1}f(a)$. La condition sur f (impliquant au passage la continuité de f) signifie que l'application $S \times A \rightarrow D$, $(s, a) \mapsto f(s)^{-1}f(a)$ est uniformément continue. Ainsi, puisque les éléments de la forme $s^{-1}a$ sont denses dans B , elle se prolonge uniquement en une application continue $\tilde{f} : B \rightarrow D$.*

On se donne une constante $\gamma \in [0, 1[$ telle que

$$\forall a, b \in A, \quad \forall 1 \leq i \leq m, \quad |ab - ba|_i \leq \gamma \cdot |ab|_i$$

Proposition 4.4. *Pour tout $(e_1, \dots, e_n) \in B^n$ et pour toute permutation $\sigma \in S_n$, on a*

$$\|e_1 \dots e_n - e_{\sigma(1)} \dots e_{\sigma(n)}\| \leq \gamma \|e_1 \dots e_n\|$$

En particulier, B est quasi-abélienne de constante γ et $\|ab\| = \|ba\|$. Par ailleurs, dans le cas où B est le localisé de A pour une unique norme, la norme de B est multiplicative.

Le lemme suivant relie la norme des éléments de B de la forme $s^{-1}a$ avec les normes $|\cdot|_i$ de s et de a .

Lemme 4.5. *Pour $a, b \in A$ et $s, t \in S$, on a*

$$1. \quad \|s^{-1}a - s^{-1}b\| = \max_{1 \leq i \leq m} \{|s|_i^{-1} \cdot |a - b|_i\};$$

2. $\|s^{-1}a\| = \max_{1 \leq i \leq m} \{|s|_i^{-1} \cdot |a|_i\};$
3. $\|s^{-1}a - t^{-1}b\| = \max_{1 \leq i \leq m} \{|s|_i^{-1} \cdot |t|_i^{-1} \cdot |a - b|_i\}.$

On démontre maintenant que la K -algèbre $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U), |\cdot|_k)$ est quasi-abélienne dès que le niveau de congruence k est supérieur ou égale à un. On désigne toujours par U un ouvert affine contenant x sur lequel on dispose d'un système d'une coordonnée locale. On rappelle que les sections du faisceau $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ sur l'ouvert U sont données par

$$\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) = \left\{ P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n, \quad a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U) \quad \text{tq} \quad |a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right\}$$

On munit la K -algèbre $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ toujours de la norme multiplicative complète $|\cdot|_k$ définie par $|P|_k = \max_{n \in \mathbb{N}} \{|a_n|\}$. On note encore $\overline{N}_k(P) = \max\{n \in \mathbb{N} : |a_n| = |P|_k\}$. Par définition, le coefficient dominant de P est son coefficient d'indice $\overline{N}_k(P)$.

On rappelle que la norme $|\cdot|_k$ et les fonctions \overline{N}_k ne dépendent pas du choix du système de coordonnées locales. L'algèbre $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U), |\cdot|_k)$ est une K -algèbre de Banach et sa topologie est équivalente à la topologie ω -adique.

Proposition 4.6. *Pour tout entier $k \geq 1$, l'algèbre de Banach $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U), |\cdot|_k)$ est quasi-abélienne de constante optimale $|\omega|^k = p^{-k}$.*

Démonstration. Soit $P = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$ et $Q = \sum_{n \geq 0} b_n \cdot (\omega^k \partial)^n$ deux éléments de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. On a

$$\begin{aligned} PQ &= \sum_{i \geq 0} a_i \cdot (\omega^k \partial)^i \cdot \left(\sum_{j \geq 0} b_j (\omega^k \partial)^j \right) \\ &= \sum_{i,j \geq 0} a_i \cdot \left(\sum_{\ell=0}^i \binom{i}{\ell} \cdot \omega^{k\ell} \cdot \partial^\ell(b_j) \cdot \omega^{k(i+j-\ell)} \cdot \partial^{i+j-\ell} \right) \\ &= \sum_{u \geq 0} \left(\sum_{\substack{\ell \geq 0 \\ 0 \leq j \leq u}} \binom{u+\ell-j}{\ell} \cdot a_{u+\ell-j} \cdot \omega^{k\ell} \cdot \partial^\ell(b_j) \right) \cdot (\omega^k \partial)^u \end{aligned}$$

On en déduit que le coefficient d'indice u de $PQ - QP$ est

$$\alpha_u = \sum_{\substack{\ell \geq 0 \\ 0 \leq j \leq u}} \omega^{k\ell} \binom{u+\ell-j}{\ell} (a_{u+\ell-j} \cdot \partial^\ell(b_j) - b_{u+\ell-j} \cdot \partial^\ell(a_j))$$

Pour $\ell = 0$, la somme sur j est nulle. Il vient

$$\alpha_u = \omega^k \sum_{\substack{\ell \geq 1 \\ 0 \leq j \leq u}} \omega^{k(\ell-1)} \binom{u + \ell - j}{\ell} (a_{u+\ell-j} \cdot \partial^\ell(b_j) - b_{u+\ell-j} \cdot \partial^\ell(a_j))$$

Quitte à normaliser P et Q , on peut supposer que $|P|_k = |Q|_k = 1$. Chaque terme de la somme a une norme inférieure à 1. La somme est donc aussi de norme inférieure à 1. Ainsi, $|\alpha_u| \leq |\omega^k| = p^{-k}$ et $|PQ - QP|_k = \max_{u \in \mathbb{N}} \{|\alpha_u|\} \leq p^{-k}$. \square

Remarque 4.7. L'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(0)}(U) = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, 0, \mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ n'est pas quasi-abélienne puisque par exemple $[\partial, x] = 1$. Pour $k > 0$, on a $[\omega^k \partial, x] = \omega^k$ avec $|\omega^k \partial|_k = 1 = |x|$ et $|\omega^k| < 1$.

4.1.2 Un premier microlocalisé \mathcal{E}_k

On suppose à partir de maintenant, et dans la suite de cet article, que le niveau de congruence k est supérieur ou égale à un. Ainsi la K -algèbre $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U), |\cdot|_k)$ est quasi-abélienne. On peut donc la localiser pour n'importe quelle partie multiplicative. On choisit concrètement pour partie multiplicative de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ les puissance de $\partial : S = \{\partial^n, n \in \mathbb{N}\}$.

Définition et premières propriétés

On localise dans cette partie l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ pour la seule norme $|\cdot|_k$. Le microlocalisé $\mathcal{E}_k(U)$ obtenu possède de très bonnes et plaisantes propriétés en tant qu'algèbre de Banach. En particulier, on peut déterminer facilement ses éléments inversibles. Cependant, il n'existe pas de morphismes de transition naturels $\mathcal{E}_{k+1}(U) \rightarrow \mathcal{E}_k(U)$ commutant avec les morphismes de transition $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k+1}^{(0)}(U) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k}^{(0)}(U)$. On ne peut donc pas obtenir à partir des algèbres $\mathcal{E}_k(U)$ un microlocalisé au niveau de l'algèbre limite projective $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}(U) = \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U) = \bigcap_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U)$.

On introduit dans la partie suivante un autre microlocalisé $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ admettant quant à lui des morphismes de transition injectifs $\mathcal{F}_{k+1,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$. Néanmoins, ce microlocalisé est plus compliqué : sa norme n'est plus multiplicative, mais seulement sous-multiplicative. Cependant, on obtient facilement une injection naturelle $\mathcal{F}_{k,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$ continue. Ainsi, bien connaître l'algèbre $\mathcal{E}_k(U)$ permet d'en déduire de nombreuses propriétés pour l'algèbre $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. On commence donc par étudier dans la bonne humeur le microlocalisé $\mathcal{E}_k(U)$.

Définition 4.8. On définit l'algèbre $\mathcal{E}_k(U) = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U) \langle |\cdot|_k, S \rangle$ comme le microlocalisé de l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ donné par la partie multiplicative S et la norme $|\cdot|_k$. On note $\phi_k : \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$ le morphisme de K -algèbres associé.

Le microlocalisé $\mathcal{E}_k(U)$ est une K -algèbre de Banach. Puisqu'on a localisé par rapport à la seule norme $|\cdot|_k$ de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$, la norme de $\mathcal{E}_k(U)$ est encore multiplicative. De plus le morphisme $\phi_k : \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$ est une isométrie. Autrement dit, la norme d'un opérateur différentiel de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ est la même aussi bien dans $\mathcal{E}_k(U)$ que dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. On identifie $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ à une sous-algèbre de $\mathcal{E}_k(U)$ via le morphisme ϕ_k . On peut noter encore $|\cdot|_k$ la norme de $\mathcal{E}_k(U)$ sans ambiguïté.

Remarque 4.9. *Il revient au même de prendre comme partie multiplicative les puissances de $\omega^k \partial$ puisque l'uniformisante ω est inversible dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$.*

On a $|\partial|_k = |\omega|^{-k} = p^{-k}$. Le lemme 4.5 nous dit que $|\partial^{-1}|_k = |\omega|^k = p^k$. De manière équivalente, $|\omega^k \partial|_k = |(\omega^k \partial)^{-1}|_k = 1$.

Proposition 4.10. *Tout élément S de $\mathcal{E}_k(U)$ s'écrit uniquement sous la forme d'une série $S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$ avec $a_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \pm\infty$. De plus, $|S|_k = \max_{n \in \mathbb{Z}} \{|a_n|\}$.*

Démonstration. On commence par démontrer que $\mathcal{E}_k(U)$ contient les sommes de cette forme. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U)$ vérifiant $a_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \pm\infty$. On pose $S_m = \sum_{n \geq -m} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$ pour tout entier $m \in \mathbb{N}$. Puisque $\mathcal{E}_k(U)$ contient $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ et les puissances de ∂^{-1} , les séries S_m appartiennent à $\mathcal{E}_k(U)$. Pour tout $\ell \geq 0$, on a $S_{m+\ell} - S_m = \sum_{-(m+\ell) \leq n < -m} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$ et

$$|S_{m+\ell} - S_m|_k \leq \max_{-(m+\ell) \leq n < -m} |a_n \cdot (\omega^k \partial)^n|_k = \max_{-(m+\ell) \leq n < -m} |a_n|$$

Puisque la suite a_n converge vers 0 pour $n \rightarrow -\infty$, la suite $(S_m)_m$ est de Cauchy dans l'algèbre complète $\mathcal{E}_k(U)$. Elle converge donc vers un élément de $\mathcal{E}_k(U)$ que l'on note $S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$. Par ailleurs, on a $|S_m|_k = \max_{n \geq -m} |a_n|$. En effet $S_m \cdot (\omega^k \partial)^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (\omega^k \partial)^n$. Puisque la norme $|\cdot|_k$ est multiplicative et comme $|\omega^k \partial|_k = 1$, on obtient

$$|S_m|_k = |S_m \cdot (\omega^k \partial)^m|_k = \max_{n \in \mathbb{N}} |a_{n-m}| = \max_{n \geq -m} |a_n|$$

On en déduit en passant à la limite $m \rightarrow \infty$ que $|S|_k = \max_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|$. En particulier, $S = 0$ si et seulement si tous ses coefficients a_n sont nuls. Ainsi une telle écriture est unique.

On démontre maintenant que $\mathcal{E}_k(U)$ coïncide avec l'ensemble de ces séries. On note F le sous-ensemble de $\mathcal{E}_k(U)$ constitué des éléments de la forme $S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$ avec $a_n \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow \pm\infty$. On va vérifier que F contient les éléments $(\omega^k \partial)^n \cdot P$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et $P \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ et que F est fermé. Puisque l'ensemble des $(\omega^k \partial)^n \cdot P$ est dense dans $\mathcal{E}_k(U)$, on aura bien $\mathcal{E}_k(U) = F$.

Pour le premier point, il suffit de prouver que si f est un élément de $\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U)$, alors $\partial^{-1} f \in F$. On a $[\partial, f] = \partial f - f \partial = \partial(f)$, soit $\partial f = \partial(f) + f \partial$. Il vient

$$\partial^{-1} \partial f = f = \partial^{-1} \partial(f) + \partial^{-1} f \partial$$

Ainsi $\partial^{-1}f = f\partial^{-1} - \partial^{-1}\partial(f)\partial^{-1}$. En réitérant ce calcul pour $\partial^{-1}\partial(f)$ et en modifiant ce terme dans l'expression de $\partial^{-1}f$, on obtient $\partial^{-1}\partial^n(f) = \partial^n(f)\partial^{-1} - \partial^{-1}\partial^{n+1}(f)\partial^{-1}$. Une récurrence montre alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\partial^{-1}f = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \partial^j(f) \partial^{-(j+1)} + (-1)^n \partial^{-1} \partial^n(f) \partial^{-n}$$

On a

$$|\partial^j(f)\partial^{-(j+1)}|_k = |\partial^j(f)| \cdot |\partial^{-(j+1)}|_k \leq |f| \cdot p^{-k(j+1)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

$$|\partial^{-1}\partial^n(f)\partial^{-n}|_k = |\partial^{-1}|_k \cdot |\partial^n(f)| \cdot |\partial^{-n}|_k \leq |f| \cdot p^{-k(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

La somme partielle de $\partial^{-1}f$ converge donc lorsque $n \rightarrow \infty$. On en déduit que

$$\partial^{-1}f = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \partial^n(f) \cdot \partial^{-(n+1)} \in F$$

Enfin puisque la norme d'un élément $S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$ de F est $|S|_k = \max_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|$, toute suite de Cauchy d'éléments $S_m = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{n,m} \cdot (\omega^k \partial)^n$ de F converge aussi vers un élément de F . En effet, le fait que la suite (S_m) soit de Cauchy implique que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, la suite $(a_{n,m})_m$ est de Cauchy. Elle converge donc vers un élément $\alpha_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{x}, \mathbb{Q}}(U)$. La suite $(S_m)_m$ converge alors vers $S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n \cdot (\omega^k \partial)^n$. Cela prouve que F est fermé. Il en résulte que $\mathcal{E}_k(U) = F$. \square

Remarque 4.11. On a démontré dans cette preuve que pour toute fonction $f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{x}, \mathbb{Q}}(U)$,

$$\partial^{-1}f = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \partial^n(f) \cdot \partial^{-(n+1)} \in \mathcal{E}_k(U)$$

En particulier, ∂^{-1} commute avec les scalaires : pour tout $\lambda \in K$, $\partial^{-1} \cdot \lambda = \lambda \cdot \partial^{-1}$.

On démontre le résultat suivant en considérant la graduation de $\mathcal{E}_k(U)$ induite par la norme $|\cdot|_k$.

Proposition 4.12. La K -algèbre $\mathcal{E}_k(U)$ est noethérienne à gauche et à droite. De plus, le morphisme $\phi_k : \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$ est plat à gauche et à droite.

Démonstration. Quitte à étendre K par une extension finie, on peut supposer que x est κ -rationnel. On rappelle que la norme spectrale de $\mathcal{O}_{\mathfrak{x}, \mathbb{Q}}(U)$ est à valeur dans $p^{\mathbb{Z}}$ (corollaire 1.5.4 de l'article [3] de Laurent Garnier) lorsque x est un point κ -rationnel. On munit $\mathcal{O}_{\mathfrak{x}, \mathbb{Q}}(U)$ de la filtration indexée par \mathbb{Z} fournie par la norme spectrale :

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{x}, \mathbb{Q}}(U)(m) = \{f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{x}, \mathbb{Q}}(U) : |f| \leq p^m\} \quad \text{pour } m \in \mathbb{Z}$$

Elle est croissante exhaustive. Soit $\text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))$ le gradué associé. Si $|f| = p^m$, on définit $\gamma(f)$ comme étant l'image de f dans le gradué $\text{gr}_m \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U) = \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)(m)/\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)(m-1)$. On note $\gamma : \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U) \rightarrow \text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))$ l'application associée, et $\gamma : K \rightarrow \text{gr } K$ la restriction à K . Cette application permet de doter $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$ d'un produit et donc d'une structure de $\text{gr } K$ -algèbre. Le gradué $\text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))$ est noetherien puisque l'algèbre $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$ est noetherienne.

Soit $P = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$ un élément non nul de $\mathcal{E}_k(U)$. Par construction, sa norme $|P|_k = \max_{n \in \mathbb{Z}} \{|a_n|\}$ appartient à $p^{\mathbb{Z}}$. On munit aussi $\mathcal{E}_k(U)$ de la filtration donnée par la norme :

$$\mathcal{E}_k(U)(m) = \{P \in \mathcal{E}_k(U) : |P|_k \leq p^m\} \quad \text{pour } m \in \mathbb{Z}$$

C'est une filtration croissante indexée par \mathbb{Z} vérifiant

$$\forall m, m' \in \mathbb{Z}, \quad \mathcal{E}_k(U)(m) \cdot \mathcal{E}_k(U)(m') \subset \mathcal{E}_k(U)(m + m')$$

On note $\text{gr}_m \mathcal{E}_k(U) = \mathcal{E}_k(U)(m)/\mathcal{E}_k(U)(m-1)$ et $\text{gr } \mathcal{E}_k(U) = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \text{gr}_m \mathcal{E}_k(U)$ la gradué associé. Soit ζ_k l'image de $\omega^k \partial$ dans $\text{gr}_0 \mathcal{E}_k(U)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{E}_k(U)(m)$ est isomorphe à $\mathcal{E}_k(U)(m + \lambda)$ via la multiplication par ω^λ . On en déduit que $\text{gr}_m \mathcal{E}_k(U) \simeq \text{gr}_{m+\lambda} \mathcal{E}_k(U)$ via la multiplication par $\gamma(\omega^\lambda)$. On peut donc identifier $\gamma(\omega^\lambda) \cdot \zeta_k$ avec l'image de $\omega^\lambda \cdot (\omega^k \partial)$ dans le gradué $\text{gr}_\lambda \mathcal{E}_k(U)$.

On suppose que $|P|_k = p^m$ pour un certain entier $m \in \mathbb{Z}$. L'image de P dans le gradué $\text{gr}_m \mathcal{E}_k(U)$ est l'élément

$$\gamma(P) = \sum_{\bar{n}_k(P) \leq n \leq \bar{N}_k(P)} \gamma(a_n) \cdot \zeta_k^n$$

où $\bar{n}_k(P)$ le plus petit entier naturel ℓ pour lequel $|P|_k = |a_\ell|$. On définit ainsi une application $\gamma : \mathcal{E}_k(U) \rightarrow \text{gr } \mathcal{E}_k(U)$ dont l'image engendre le gradué en tant que $\text{gr } K$ -algèbre. Puisque $\mathcal{E}_k(U)$ est une algèbre quasi-abélienne, le gradué est commutatif. On en déduit que

$$\text{gr } \mathcal{E}_k(U) \simeq \text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_k, \zeta_k^{-1}]$$

en tant que $\text{gr } K$ -algèbre. En particulier, $\text{gr } \mathcal{E}_k(U)$ est une $\text{gr } K$ -algèbre noetherienne. La proposition 1.1 de l'article [8] implique alors que l'algèbre $\mathcal{E}_k(U)$ est noetherienne à gauche et à droite.

De même, on munit l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ de la filtration donnée par la norme. L'inclusion $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$ induit une inclusion entre les gradués $\text{gr } \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \text{gr } \mathcal{E}_k(U)$. On a $\text{gr } \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \simeq \text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_k]$ en tant que $\text{gr } K$ -algèbre. Le morphisme de $\text{gr } K$ -algèbres $\text{gr } \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \text{gr } \mathcal{E}_k(U)$ est donc plat. D'après la propositions 1.2 de l'article [8], on en déduit que le morphisme $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$ est plat à gauche et à droite. \square

Elements inversibles de $\mathcal{E}_k(U)$

On rappelle que $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U)$ est l'ensemble des éléments de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ de norme $|\cdot|_k$ inférieure ou égale à un. On note $\mathcal{D}_{X,k} = \kappa \otimes_{\mathbb{V}} \mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}$ la réduction modulo ω de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}$. C'est le

faisceau de κ -algèbres sur la fibre spéciale $X = \mathfrak{X} \times_{\mathcal{V}} \text{Spec } \kappa$ de \mathfrak{X} engendré localement sur U par $\mathcal{O}_X|_U$ et par la dérivation ∂_k image de $\omega^k \partial$ après réduction modulo ω . Les schémas \mathfrak{X} et X ont même espace topologique ; on identifie U à un ouvert affine de X . On a

$$\mathcal{D}_{X,k}(U) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_X(U) \cdot \partial_k^n$$

C'est une κ -algèbre commutative puisque $[\omega^k \partial, t] = \omega^k$ dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U)$ et puisque $k \geq 1$. Ainsi, $\mathcal{D}_{X,k}(U) = \mathcal{O}_X(U)[\partial_k]$ est un anneau de polynôme en la variable ∂_k . On en déduit que $\mathcal{D}_{X,k}(U)^\times = \mathcal{O}_X(U)^\times$.

Soit $\mathcal{E}_k^\circ(U)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}_k(U)$ de norme $|\cdot|_k$ inférieure ou égale à un. C'est une \mathcal{V} -algèbre de Banach contenant $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U)$. On note $E_k(U) = \mathcal{E}_k^\circ(U) \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ la réduction modulo ω de $\mathcal{E}_k^\circ(U)$. C'est une κ -algèbre contenant $\mathcal{D}_{X,k}(U)$ dans laquelle la dérivation ∂_k est inversible. Puisque l'algèbre $(\mathcal{E}_k(U), |\cdot|_k)$ est quasi-abélienne, $E_k(U)$ est une κ -algèbre commutative. Il en découle que $E_k(U) = \mathcal{O}_X(U)[\partial_k, \partial_k^{-1}]$. Après réduction modulo ω , $E_k(U)$ est donc le localisé classique commutatif de l'algèbre de polynômes $\mathcal{O}_X(U)[\partial_k]$ pour la partie multiplicative constituée des puissances de la dérivation ∂_k . On en déduit l'égalité

$$E_k(U)^\times = \{a \cdot \partial_k^n, \quad a \in \mathcal{O}_X(U)^\times \text{ et } n \in \mathbb{Z}\}$$

Définition 4.13. *Pour tout élément $P = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n \in \mathcal{E}_k(U)$, on pose*

$$\overline{N}_k(P) = \max\{n \in \mathbb{Z} : |a_n| = |P|_k\}$$

$$\overline{n}_k(P) = \min\{n \in \mathbb{Z} : |a_n| = |P|_k\}$$

La fonction \overline{N}_k généralise celle de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. La proposition suivante caractérise l'inversibilité des éléments de $\mathcal{E}_k(U)$ en fonctions de \overline{N}_k et de \overline{n}_k .

Proposition 4.14. *Un élément P de $\mathcal{E}_k(U)$ est inversible dans $\mathcal{E}_k(U)$ si et seulement si $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P)$ et si son coefficient d'indice $\overline{N}_k(P)$ est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$.*

Démonstration. Quitte à normaliser P , on peut supposer que $|P|_k = 1$. Alors $P \in \mathcal{E}_k^\circ(U)$. On note $\bar{P} = (P \bmod \omega)$ l'image de P dans $E_k(U) = \mathcal{E}_k^\circ(U) \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$. On commence par démontrer que P est inversible dans $\mathcal{E}_k(U)$ si et seulement si \bar{P} est inversible dans $E_k(U)$. Le sens direct est évident. On suppose que \bar{P} est inversible dans $E_k(U)$: il existe $Q \in \mathcal{E}_k^\circ(U)$ tel que $\bar{P}\bar{Q} = 1$. Ainsi PQ est de la forme $1 + \omega R$ pour un certain élément $R \in \mathcal{E}_k^\circ(U)$. Puisque $|\omega R|_k \leq |\omega| < 1$, l'élément $1 + \omega R$ est inversible dans $\mathcal{E}_k(U)$. En effet son inverse est donné par la série « classique »

$$(1 + \omega R)^{-1} = \sum_{i \geq 0} (-\omega R)^i$$

Cette somme est bien convergente dans l'algèbre de Banach $\mathcal{E}_k(U)$ puisque $|\omega R|_k < 1$. On en déduit que $P \cdot Q(1 + \omega R)^{-1} = 1$ dans $\mathcal{E}_k(U)$. Autrement dit, P est inversible à droite dans $\mathcal{E}_k(U)$. De même, P est inversible à gauche puisque $\bar{Q}\bar{P} = 1$. Ainsi P est inversible dans $\mathcal{E}_k(U)$.

On rappelle que $E_k(U)^\times = \{a \cdot \partial_k^n, a \in \mathcal{O}_X(U)^\times \text{ et } n \in \mathbb{Z}\}$. L'élément P est inversible dans $\mathcal{E}_k(U)$ si et seulement si \bar{P} est de la forme $\bar{a} \cdot \partial_k^n$ avec $\bar{a} \in \mathcal{O}_X(U)^\times$. La réduction modulo ω de P est un monôme si et seulement si $\bar{N}_k(P) = \bar{n}_k(P)$. Le terme \bar{a} est inversible dans $\mathcal{O}_X(U)$ si et seulement si a est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$. Il s'agit exactement des conditions données dans l'énoncé de la proposition. \square

Remarque 4.15.

1. Ce critère est analogue à la condition d'inversibilité des séries de Laurent convergentes $K\langle T \rangle$ à coefficients dans un corps ultramétrique complet K .
2. On peut démontrer ce résultat sans réduire modulo ω les faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U)$ et $\mathcal{E}_k^\circ(U)$. En effet, on peut raisonner d'une manière analogue en utilisant le gradué de $\mathcal{E}_k(U)$ pour la filtration induite par la norme $|\cdot|_k$. On rappelle que

$$\text{gr } \mathcal{E}_k(U) \simeq \text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_k, \zeta_k^{-1}]$$

Les éléments inversibles de ce gradué sont aussi les éléments de la forme $\alpha \cdot \zeta_k$ avec α inversible dans $\text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))$. Il est clair qu'un élément inversible de $\mathcal{E}_k(U)$ est inversible dans le gradué $\text{gr } \mathcal{E}_k(U)$. La preuve est alors similaire à celle de la proposition 4.14.

Soit $P = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$ un élément inversible de $\mathcal{E}_k(U)$. Son inverse s'exprime explicitement en fonction des coefficients a_n . On note $d = \bar{N}_k(P)$ l'ordre de P . Puisque P est inversible, on sait que $\bar{N}_k(P) = \bar{n}_k(P)$ et que le coefficient a_d de P est inversible d'après la proposition 4.14. On a

$$P = a_d \cdot \underbrace{\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{a_{n+d}}{a_d} (\omega^k \partial)^n \right)}_Q \cdot (\omega^k \partial)^d$$

Le coefficient constant de Q est égale à 1. Ses autres coefficients sont de normes strictement inférieures à 1. Son inverse est comme précédemment donné par $Q^{-1} = \sum_{i \geq 0} (-(Q - 1))^i$. On obtient

$$P^{-1} = (\omega^k \partial)^{-d} \cdot \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(- \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{a_{n+d}}{a_d} (\omega^k \partial)^n \right)^i \cdot a_d^{-1}$$

Le lemme suivant servira dans la démonstration de l'inégalité de Bernstein pour les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles.

Lemme 4.16. *Soit \mathcal{J} un idéal cohérent de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. On note $\mathcal{E}_k(U) \cdot \mathcal{J}$ l'idéal à gauche de $\mathcal{E}_k(U)$ engendré par \mathcal{J} . Si $\mathcal{E}_k(U) \cdot \mathcal{J} = \mathcal{E}_k(U)$, alors $\mathcal{J} \cap \mathcal{E}_k(U)^\times \neq \emptyset$.*

Démonstration. On reprend les notations de la proposition 4.12 vis à vis des gradués. Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on pose $\mathcal{J}(m) = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)(m) \cap \mathcal{J}$. On définit ainsi une filtration croissante exhaustive sur \mathcal{J} . Le gradué associé $\text{gr } \mathcal{J}$ est un idéal de $\text{gr } \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. On note $\gamma : \mathcal{J} \rightarrow \text{gr } \mathcal{J}$ la restriction à \mathcal{J} de l'application $\gamma : \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \rightarrow \text{gr } \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. On observe alors que $\text{gr } \mathcal{J} = \text{gr}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)) \cdot \gamma(\mathcal{J})$. De même, $\text{gr}(\mathcal{E}_k(U) \cdot \mathcal{J}) = \text{gr}(\mathcal{E}_k(U)) \cdot \gamma(\mathcal{J})$ pour la filtration $(\mathcal{E}_k(U) \cdot \mathcal{J})(m) = \mathcal{E}_k(U)(m) \cap (\mathcal{E}_k(U) \cdot \mathcal{J})$. On rappelle que $\text{gr } \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \simeq \text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_k]$ et que $\text{gr } \mathcal{E}_k(U) \simeq \text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_k, \zeta_k^{-1}]$.

L'hypothèse $\mathcal{E}_k(U) \cdot \mathcal{J} = \mathcal{E}_k(U)$ implique $\text{gr}(\mathcal{E}_k(U) \cdot \mathcal{J}) = \text{gr}(\mathcal{E}_k(U)) \cdot \gamma(\mathcal{J}) = \text{gr } \mathcal{E}_k(U)$. Autrement dit, il existe des opérateurs $P_1, \dots, P_s \in \mathcal{J}$ et $Q_1, \dots, Q_s \in \text{gr } \mathcal{E}_k(U)$ tels que

$$Q_1 \cdot \gamma(P_1) + \dots + Q_s \cdot \gamma(P_s) = 1$$

Puisque $\text{gr } \mathcal{E}_k(U) \simeq \text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_k, \zeta_k^{-1}]$, on peut trouver un entier naturel n pour lequel $\zeta_k^n \cdot Q_1, \dots, \zeta_k^n \cdot Q_s \in \text{gr } \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \simeq \text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_k]$. On note $R_i = \zeta_k^n \cdot Q_i \in \text{gr } \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. Alors

$$\zeta_k^n = R_1 \cdot \gamma(P_1) + \dots + R_s \cdot \gamma(P_s) \in \text{gr } \mathcal{J} = \text{gr}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)) \cdot \gamma(\mathcal{J})$$

Puisque ζ_k^n est un monôme de norme un, $\zeta_k^n \in \text{gr}_0 \mathcal{J} = \mathcal{J}(0)/\mathcal{J}(-1)$. En particulier, ζ_k^n se relève en un élément P de \mathcal{J} vérifiant $\gamma(P) = \zeta_k^n$. Cela signifie que $\overline{N}_k(P) = n_k(P) = n$ et que le coefficient d'indice n de P est inversible. D'après la proposition 4.14, P est inversible dans $\mathcal{E}_k(U)$. \square

Pas de morphismes de transition $\mathcal{E}_{k+1}(U) \rightarrow \mathcal{E}_k(U)$

On ne dispose pas de morphismes naturels de transition $\mathcal{E}_{k+1}(U) \rightarrow \mathcal{E}_k(U)$ prolongeant les inclusions $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. La propriété universelle du microlocalisé ne fournit pas de tel morphisme. En effet, le morphisme

$$f_k := \phi_k|_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)} : \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$$

ne vérifie pas la condition d'uniforme continuité de la propriété universelle 4.2 appliquée à l'algèbre $\mathcal{E}_{k+1}(U)$. Cette condition s'écrit

$$\exists c > 0 \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}, \forall P \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U), |\partial^{-n} \cdot P|_k \leq c \cdot |\partial|_{k+1}^{-n} \cdot |P|_{k+1}$$

On a $|\partial^{-1}|_k = |\omega|^k = p^{-k}$ et $|\partial^{-1}|_{k+1} = p^{-k+1}$. Ainsi pour $P = 1$, il n'est pas possible de trouver une telle constante c . Le morphisme f_k ne se factorise donc pas naturellement en un morphisme de $\mathcal{E}_{k+1}(U)$ dans $\mathcal{E}_k(U)$ étendant l'inclusion de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$.

Pour tout $P \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$, on a $|P|_k \leq |P|_{k+1}$ avec égalité stricte dès que $\overline{N}_k(P) > 0$. En effet, si $P = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot \partial^n$, alors

$$|P|_k = \max_{n \in \mathbb{N}} \{|a_n| \cdot p^{kn}\} \leq |P|_{k+1} = \max_{n \in \mathbb{N}} \{|a_n| \cdot p^{(k+1)n}\}$$

Puisque la norme de $\mathcal{E}_k(U)$ est multiplicative, cette inégalité est inversée dès que l'on inverse ∂ . L'inclusion de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U)$ est inversée dès que l'on considère des opérateurs dont les puissances de ∂ sont toutes négatives. Par exemple, $P = \sum_{n \in \mathbb{Z}, n < 0} \omega^{-n} \cdot (\omega^{k+1} \partial)^n$ est un élément de $\mathcal{E}_{k+1}(U) \setminus \mathcal{E}_k(U)$. Il n'existe donc pas de morphisme injectif continu de $\mathcal{E}_{k+1}(U)$ dans $\mathcal{E}_k(U)$ prolongeant $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$.

Le faisceau de K -algèbres \mathcal{E}_k

Dans ce qui précède, on a défini le microlocalisé $\mathcal{E}_k(U)$ sur un ouvert affine U de \mathfrak{X} sur lequel on dispose d'un système de coordonnées locale. On rappelle que la K -algèbre $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U), |\cdot|_k)$ ne dépend pas du système de coordonnées locale. Puisque l'algèbre $\mathcal{E}_k(U)$ est définie par une propriété universelle au dessus de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$, le microlocalisé $\mathcal{E}_k(U)$ est indépendant du système de coordonnées locale.

On note \mathcal{U} l'ensemble des ouverts affines de \mathfrak{X} sur lesquels on dispose de coordonnées locale. C'est une base de voisinages ouverts de \mathfrak{X} .

Proposition 4.17. *Il existe un unique faisceau \mathcal{E}_k de K -algèbres sur \mathfrak{X} tel que pour tout ouvert U de \mathcal{U} , $\mathcal{E}_k(U) = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \langle |\cdot|_k, \{\partial^n\}_{n \in \mathbb{N}} \rangle$.*

Démonstration. Soit $V \subset U$ deux ouverts de \mathcal{U} . Puisque $\mathcal{E}_k(V)$ ne dépend pas du choix du système de coordonnées locale, le morphisme composé $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(V) \rightarrow \mathcal{E}_k(V)$ vérifie les hypothèses de la propriété universelle 4.2 appliquée à $\mathcal{E}_k(V)$. Il existe donc un unique morphisme $\mathcal{E}_k(U) \rightarrow \mathcal{E}_k(V)$ induit par le morphisme $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(V)$. On en déduit que \mathcal{E}_k est un préfaisceau sur l'ensemble des ouverts de \mathcal{U} .

Puisque \mathcal{U} est une base de voisinages ouverts de \mathfrak{X} , il existe un unique préfaisceau \mathcal{E}_k sur \mathfrak{X} coïncidant avec les $\mathcal{E}_k(U)$ sur les ouverts U de \mathcal{U} .

L'unicité de l'écriture des éléments de $\mathcal{E}_k(U)$ comme séries en les puissances de $(\omega^k \partial)$ implique que \mathcal{E}_k est un faisceau sur les ouverts U de \mathcal{U} . On en déduit que \mathcal{E}_k est un faisceau de K -algèbres sur \mathfrak{X} . \square

On a donc construit un faisceau de K -algèbres \mathcal{E}_k sur \mathfrak{X} admettant $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ comme sous-faisceau et pour lequel la dérivation ∂ est localement inversible. Cependant, on ne dispose pas de morphismes de transition naturels $\mathcal{E}_{k+1} \rightarrow \mathcal{E}_k$ induits par les morphismes de départ $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$.

Soit U un ouvert affine contenant le point x sur lequel on dispose d'un système de coordonnées locale associé à x . La proposition 4.14 se traduit de la manière suivante :

Proposition 4.18. *Un élément $P \in \mathcal{E}_k(U)$ est inversible dans $\mathcal{E}_k(V)$ pour un voisinage $V \subset U$ de x si et seulement si $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P)$ et si le coefficient d'indice $\overline{N}_k(P)$ de P est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(V)$.*

Soit $P = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$ un opérateur de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. On note $d = \overline{N}_k(P)$. On rappelle que si P est inversible dans $\mathcal{E}_k(V)$, alors son inverse est donné par

$$P^{-1} = (\omega^k \partial)^{-d} \cdot \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(- \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+d}}{a_d} (\omega^k \partial)^n \right)^i \cdot a_d^{-1}$$

L'opérateur P^{-1} appartient à $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(V)$ si et seulement si $d = 0$. On retrouve ainsi les éléments inversibles de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$, déjà donnés dans [4].

Corollaire 4.19. *Soit $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$ un opérateur différentiel de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. Il existe un ouvert V de U contenant x tel que $P \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(V)^\times$ si et seulement si $\overline{N}_k(P) = 0$ et si $a_0 \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(V)^\times$. Si de plus $|P|_k = 1$, alors $P^{-1} \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(V)$.*

4.1.3 Des microlocalisés $\mathcal{F}_{k,r}$ avec des morphismes de transition

On fixe tout d'abord l'ouvert affine U sur lequel on dispose d'une coordonnée locale. Soit r un entier naturel supérieur ou égale à un. On ne considère plus que les niveaux de congruences k plus grands que r . En ne prenant plus la seule norme $|\cdot|_k$ pour définir le microlocalisé de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$, mais un certain nombre des normes précédentes $|\cdot|_r, \dots, |\cdot|_k$, la condition d'uniforme continuité pour obtenir des morphismes de transition devient évidente.

Dans cette partie, l'entier $r \geq 1$ est fixé. On ne le fera varier que dans la partie 5.3. Le niveau de congruence k sera toujours supposé supérieur ou égale à r lorsqu'on considère l'algèbre $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. La partie multiplicative S est toujours constituée des puissances de la dérivation ∂ .

Définition et propriétés

Définition 4.20. *Pour tout entier $k \geq r$, on pose $\mathcal{F}_{k,r}(U) = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \langle |\cdot|_r, \dots, |\cdot|_k; S \rangle$. On note $\varphi_{k,r} : \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$ le morphisme de K -algèbres associé.*

Soit $\|\cdot\|_{k,r}$ la norme de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$; $(\mathcal{F}_{k,r}(U), \|\cdot\|_{k,r})$ est une K -algèbre de Banach. Par construction, $\varphi_{k,r}$ est une isométrie de $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U), \max\{|\cdot|_r, \dots, |\cdot|_k\})$ dans $(\mathcal{F}_{k,r}(U), \|\cdot\|_{k,r})$.

Pour tout opérateur $P \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$, on vérifie que $|P|_r \leq \dots \leq |P|_k$. On en déduit l'égalité $\max\{|P|_r, \dots, |P|_k\} = |P|_k$. Autrement dit, $\varphi_{k,r}$ est une isométrie de $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U), |\cdot|_k)$ dans $(\mathcal{F}_{k,r}(U), \|\cdot\|_{k,r})$. On identifie toujours $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ à une sous-algèbre de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ via le morphisme $\varphi_{k,r}$. Cette identification est encore compatible avec les normes.

La norme de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ n'est cette fois ci plus multiplicative mais seulement sous-multiplicative dès que $k > r$. En effet, on sait d'après le lemme 4.5 que

$$\|\partial^{-1}\|_{k,r} = \max_{r \leq i \leq k} \{|\partial|_i^{-1}\} = \max_{r \leq i \leq k} \{|\omega|^i\} = |\omega|^r = p^{-r}$$

Cependant, on a toujours $\|\partial\|_{k,r} = |\partial|_k = |\omega|^{-k} = p^k$.

Remarque 4.21. Pour $k = r$, on a $\mathcal{F}_{k,k}(U) = \mathcal{E}_k(U)$. En effet, on localise $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ seulement pour la norme $|\cdot|_k$. En particulier, la norme de $\mathcal{F}_{k,k}(U)$ est multiplicative.

Le morphisme $f_k = \phi_{k|\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)} : \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$ vérifie de manière évidente la condition d'uniforme continuité pour $\mathcal{F}_{k+1,r}$ avec pour constante $c = 1$. En effet, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et pour tout opérateur $P \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$, on a

$$\max_{r \leq i \leq k} \{|\partial^{-n} \cdot P|_i\} \leq \max_{r \leq i \leq k+1} \{|\partial^{-n} \cdot P|_i\} \leq \max_{r \leq i \leq k+1} \{|\partial|_i^{-n} \cdot |P|_i\}$$

Par propriété universelle du localisé $\mathcal{F}_{k+1,r}(U)$, le morphisme f_k se factorise uniquement par un morphisme continu de K -algèbres

$$\varepsilon_{k,r} : \mathcal{F}_{k+1,r}(U) \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$$

De plus, ce morphisme $\varepsilon_{k,r}$ est 1-lipschitzien, tout comme l'est l'inclusion de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. Ainsi $\|\varepsilon_{k,r}(S)\|_{k,r} \leq \|S\|_{k+1,r}$ pour tout élément S de $\mathcal{F}_{k+1,r}(U)$.

Proposition 4.22. Tout élément S de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ s'écrit uniquement sous la forme

$$S = \sum_{0 \leq n \leq \infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n + \sum_{-\infty \leq n < 0} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n$$

avec $a_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \pm\infty$. De plus, $\|S\|_{k,r} = \max_{n \in \mathbb{Z}} \{|a_n|\}$.

Démonstration. On vérifie toujours que pour toute fonction $f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U)$,

$$\partial^{-1} f = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \partial^n(f) \cdot \partial^{-(n+1)} \in \mathcal{F}_{k,r}(U)$$

Cette série converge bien dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ puisque

$$\|\partial^{-(n+1)}\|_{k,r} \leq \|\partial^{-1}\|_{k,r}^{n+1} \leq \left(\frac{1}{p^r}\right)^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

On montre comme dans la preuve de la proposition 4.10 que la suite

$$S_m = \sum_{0 \leq n \leq \infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n + \sum_{-m \leq n < 0} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n$$

est de Cauchy dans $(\mathcal{F}_{k,r}(U), \|\cdot\|_{k,r})$. La norme $\|\cdot\|_{k,r}$ n'est maintenant plus que sous-multiplicative. Il n'est pas clair que $\|S_m\|_{k,r} = \max_{-m \leq n \leq +\infty} \{|a_n|\}$. Cette égalité nécessite plus de travail que pour $\mathcal{E}_k(U)$. L'élément

$$S'_m := S_m \cdot (\omega^r \partial)^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \omega^{rm} \omega^{kn} \cdot \partial^{n+m} + \sum_{n=0}^{m-1} a_{n-m} \cdot (\omega^r \partial)^n$$

appartient à $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. D'après la proposition 4.4 et le lemme 4.5, on sait que

$$\|S_m\|_{k,r} = \|S'_m \cdot (\omega^r \partial)^{-m}\|_{k,r} = \|(\omega^r \partial)^{-m} \cdot S'_m\|_{k,r} = \max_{r \leq \ell \leq k} \{|\omega^r \partial|_{\ell}^{-m} \cdot |S'_m|_{\ell}\}$$

Pour $r \leq \ell \leq k$, on a

$$S'_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \omega^{rm+kn-\ell(n+m)} \cdot (\omega^{\ell} \partial)^{n+m} + \sum_{n=0}^{m-1} a_{n-m} \cdot \omega^{(r-\ell)n} \cdot (\omega^{\ell} \partial)^n$$

Comme $|\omega^r \partial|_{\ell}^{-m} = |\omega|^{(\ell-r)m}$, on obtient

$$\begin{aligned} |\omega^r \partial|_{\ell}^{-m} \cdot |S'_m|_{\ell} &= \max \left\{ \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \cdot |\omega|^{rm+kn-\ell(n+m)+(\ell-r)m}, \max_{0 \leq n \leq m-1} |a_{n-m}| \cdot |\omega|^{(r-\ell)n+(l-r)m} \right\} \\ &= \max \left\{ \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \cdot |\omega|^{(k-\ell)n}, \max_{0 \leq n \leq m-1} |a_{n-m}| \cdot |\omega|^{((\ell-r)(m-n))} \right\} \end{aligned}$$

Le terme $\max_{n \in \mathbb{N}} \{|a_n| \cdot |\omega|^{(k-\ell)n}\}$ est maximum pour $\ell = k$. En effet, lorsque $\ell \in \{1, \dots, k\}$, la puissance $(k-\ell)n$ de ω est positive et $|\omega|^{(k-\ell)n} \leq 1$. De manière analogue, le terme $\max_{0 \leq n \leq m-1} \{|a_{n-m}| \cdot |\omega|^{((\ell-r)(m-n))}\}$ est maximum pour $\ell = r$, auquel cas on obtient $\max_{0 \leq n \leq m-1} |a_{n-m}| = \max_{-m \leq n < 0} |a_n|$. On en déduit finalement que

$$\|S_m\|_{k,r} = \max \left\{ \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|, \max_{-m \leq n < 0} |a_n| \right\} = \max \left\{ \max_{n \in \mathbb{Z}} |a_n| \right\}$$

Il en découle immédiatement que la suite $(S_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Elle converge donc dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ vers un élément que l'on note S . Enfin, le passage à la limite $m \rightarrow \infty$ donne $\|S\|_{k,r} = \max_{n \in \mathbb{Z}} \{|a_n|\}$. Le reste de la preuve est analogue à celle de la proposition 4.10. \square

Soit S un élément de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. D'après cette proposition, il s'écrit uniquement sous la forme

$$S = \underbrace{\sum_{0 \leq n \leq \infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n}_{P \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)} + \underbrace{\sum_{-\infty \leq n < 0} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n}_Q$$

avec $a_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \pm\infty$. L'opérateur P est dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. On a

$$\|S\|_{k,r} = \max_{n \in \mathbb{Z}} \{|a_n|\} = \max\{\|P\|_k, \|Q\|_{k,r}\}$$

Soient Q et Q' deux éléments de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ formés seulement de puissances strictement négatives de $\omega^r \partial$. On observe sans difficulté que $\|Q \cdot Q'\|_{k,r} = \|Q\|_{k,r} \cdot \|Q'\|_{k,r}$. Autrement dit, la norme $\|\cdot\|_{k,r}$ de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ est multiplicative pour le produit de ces éléments, comme elle l'est pour le produit d'éléments de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. On peut noter $|Q|_r$ pour $\|Q\|_{k,r}$ et $\|S\|_{k,r} = \max\{\|P\|_k, |Q|_r\}$. Par ailleurs, l'action de la dérivation ∂^{-1} sur une fonction f de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$ est encore donnée par

$$\partial^{-1} f = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \partial^n(f) \cdot \partial^{-(n+1)} \in \mathcal{F}_{k,r}(U)$$

On rappelle que le morphisme de transition $\varepsilon_{k,r} : \mathcal{F}_{k+1,r}(U) \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$ est une factorisation de l'inclusion de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. Comme le morphisme $\varepsilon_{k,r}$ envoie la dérivation ∂ sur elle-même, $\varepsilon_{k,r}(\partial^n) = \partial^n$ pour tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$. Puisque par construction ce morphisme est continu, on en déduit que $\varepsilon_{k,r}(S) = S$ pour tout élément S de $\mathcal{F}_{k+1,r}(U)$. Ainsi, $\varepsilon_{k,r}$ injecte l'algèbre $\mathcal{F}_{k+1,r}(U)$ dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. Pour récapituler, on dispose du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) & \xrightarrow{i_k} & \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \\ \varphi_{k+1,r} \downarrow & & \downarrow \varphi_{k,r} \\ \mathcal{F}_{k+1,r}(U) & \xrightarrow{\varepsilon_{k,r}} & \mathcal{F}_{k,r}(U) \end{array}$$

où i_k et $\varepsilon_{k,r}$ sont des inclusions 1-lipschitziennes et $\varphi_{k,r}$ et $\varphi_{k+1,r}$ des isométries.

La proposition suivante relie les K -algèbres $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ et $\mathcal{E}_k(U) : \mathcal{F}_{k,r}(U)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{E}_k(U)$.

Proposition 4.23. *Le morphisme $\phi_k : \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$ se relève en un morphisme injectif de K -algèbres $\gamma_{k,r} : \mathcal{F}_{k,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$. De plus, l'application $\gamma_{k,r}$ est 1-lipschitzienne.*

Démonstration. Le morphisme $\phi_k : \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$ vérifie clairement la condition d'uniforme continuité dans la propriété universelle de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. Il induit donc un unique morphisme de K -algèbres 1-lipschitzien $\gamma_{k,r} : \mathcal{F}_{k,r}(U) \rightarrow \mathcal{E}_k(U)$. Ce morphisme envoie les éléments de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ sur eux mêmes et ∂^{-1} sur ∂^{-1} . Par continuité, il envoie tout élément S de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ sur l'élément S de $\mathcal{E}_k(U)$ (il s'agit bien d'une série convergente dans $\mathcal{E}_k(U)$). Ainsi, le morphisme $\gamma_{k,r}$ est injectif. \square

Comme pour $\mathcal{E}_k(U)$, on peut munir l'algèbre $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ de la filtration croissante donnée par la norme sous-multiplicative $\|\cdot\|_{k,r}$. Pour $k = r$, on rappelle que $\mathcal{F}_{k,k}(U) = \mathcal{E}_k(U)$. On suppose que $k > r$. La norme de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ étant sous-abélienne, le gradué $\text{gr } \mathcal{F}_{k,r}(U)$ est une $\text{gr } K$ -algèbre commutative. On note ζ_k et ζ_r les images respectives des dérivations $\omega^k \partial$ et de $(\omega^r \partial)^{-1}$ dans le gradué $\text{gr}_0 \mathcal{F}_{k,r}(U)$. Puisque $(\omega^k \partial) \cdot (\omega^r \partial)^{-1} = \omega^{k-r}$,

$$\|(\omega^k \partial) \cdot (\omega^r \partial)^{-1}\|_{k,r} = p^{r-k} < \|\omega^k \partial\|_{k,r} \cdot \|(\omega \partial)^{-1}\|_{k,r} = 1$$

On a donc $\zeta_k \cdot \zeta_r = 0$ dans le gradué $\text{gr } \mathcal{F}_{k,r}(U)$. On en déduit un isomorphisme

$$\text{gr } \mathcal{F}_{k,r}(U) \simeq \text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_k, \zeta_r]/(\zeta_k \cdot \zeta_r)$$

de $\text{gr } K$ -algèbres. La première partie de la proposition suivante en découle.

Proposition 4.24. *La K -algèbre $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ est noetherienne à gauche et à droite. De plus, le morphisme de faisceaux $\varepsilon_{k,r} : \mathcal{F}_{k+1,r} \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}$ est plat à gauche et à droite.*

Démonstration. Puisque le gradué $\text{gr } \mathcal{F}_{k,r}(U) \simeq \text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_k, \zeta_r]/(\zeta_k \cdot \zeta_r)$ est noetherien, l'algèbre $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ l'est aussi toujours d'après la proposition 1.1 de l'article [8].

Pour démontrer que le morphisme $\varepsilon_{k,r} : \mathcal{F}_{k+1,r} \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}$ est plat à gauche et à droite, on adapte la preuve de la proposition 2.2.16 de l'article [6] aux cas des faisceaux $\mathcal{F}_{k,r}$ pour r donné. On fixe un ouvert affine U de \mathfrak{X} sur lequel on dispose d'une coordonnée locale. Il suffit de montrer que le morphisme de K -algèbres $\mathcal{F}_{k+1,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$ est plat à gauche et à droite.

On note $A = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$ et $\mathcal{F}_{k,r}^\circ(U)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ de norme $\|\cdot\|_{k,r}$ inférieure ou égale à un. Autrement dit, $\mathcal{F}_{k,r}^\circ(U)$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ dont tous les coefficients a_n sont dans A :

$$\mathcal{F}_{k,r}^\circ(U) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n + \sum_{-\infty \leq n < 0} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n \in \mathcal{F}_{k,r}(U), \quad a_n \in A \right\}$$

C'est une A -algèbre vérifiant $\mathcal{F}_{k,r}(U) = \mathcal{F}_{k,r}^\circ(U) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)} K$. On définit un A -module H par

$$H = \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U) + \mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U)$$

Le terme $(\omega^k \partial)$ n'appartient pas à l'algèbre $\mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$. Cependant, $(\omega^k \partial) \in \mathcal{F}_{k+1,r}(U) = \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U) \otimes_{\mathcal{V}} K$. On vérifie tout d'abord que H est une A -algèbre. Soit $Q \in \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$ et $P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U)$. Comme $k \geq r$, on observe facilement que $P \cdot Q$ appartient au A -module H . En effet, on introduit pour cela le A -module suivant :

$$F_{k,r}(U) = \left\{ \sum_{0 \leq n < \infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n + \sum_{-\infty < n < 0} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n, \quad a_n \in A \right\}$$

Il est clair qu'on dispose d'inclusions $F_{k+1,r}(U) \subset F_{k,r}(U) \subset H$. On peut décomposer Q sous la forme $Q = Q_1 + \omega \cdot Q_2$ avec $Q_1 \in F_{k+1,r}(U)$ et $Q_2 \in \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$. On a $(\omega^k \partial) \cdot Q_1 \in F_{k,r}(U) \subset H$. Par ailleurs, $(\omega^k \partial) \cdot (\omega Q_2) = (\omega^{k+1} \partial) \cdot Q_2 \in \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$. Autrement dit, $(\omega^k \partial) \cdot Q \in H$. On en déduit que $P \cdot Q \in H$.

Pour montrer que H est une algèbre, il suffit d'observer que $Q \cdot P \in H$. On rappelle que pour toute fonction a de A , on a

$$(\omega^r \partial)^{-1} \cdot a = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \partial^n(a) \omega^{rn} \cdot (\omega^r \partial)^{-(n+1)} \in \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$$

avec $(-1)^n \partial^n(a) \omega^{rn} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. En particulier, comme $k \geq r$,

$$(\omega^r \partial)^{-1} \cdot a (\omega^k \partial) = \omega^{k-r} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \partial^n(a) \cdot \partial^{-n} \in \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$$

On en déduit que pour tout entier $\ell \in \mathbb{N}$,

$$(\omega^r \partial)^{-\ell} \cdot P \in H = \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U) + \mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U)$$

Ainsi, pour tout élément fini \tilde{Q} de $\mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$, il en découle que $\tilde{Q} \cdot P \in H$. Soit d le degré de l'opérateur différentiel fini P . L'élément Q s'écrit uniquement sous la forme

$$Q = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\omega^{k+1} \partial)^n}_{Q_1} + \underbrace{\sum_{-d \leq n \leq -1} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n}_{Q_2} + \underbrace{\sum_{-\infty \leq n < -d} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n}_{Q_3}$$

Puisque $Q_1 \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1}^{(0)}(U)$, il est clair que $Q_1 \cdot P \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1}^{(0)}(U) + \mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U) \subset H$. D'après ce que l'on vient d'établir ci-dessus, $Q_2 \cdot P \in H$. Soit $m > d$ et $Q_3^{(m)}$ la troncation à l'ordre $-m$ de Q_3 :

$$Q_3 := \sum_{-m \leq n < -d} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n$$

Comme $(\omega^r \partial)^{-1}$ diminue strictement le degré et comme d est le degré de l'opérateur P , on vérifie que $Q_3^{(m)} \cdot P \in \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$. De plus, on vérifie aussi que la suite $(Q_3^{(m)} \cdot P)_{m>d}$ est de Cauchy dans l'algèbre $(\mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U), \|\cdot\|_{k,r})$. Enfin, puisque la \mathcal{V} -algèbre $\mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$ est complète, on en déduit que $Q_3 \cdot P \in \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$. Pour conclure, on a bien montré que $Q \cdot P \in H$. On a ainsi démontré que H est une A -algèbre.

Comme $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) = \mathcal{D}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$, on a $H_{\mathbb{Q}} := H \otimes_{\mathcal{V}} K = \mathcal{F}_{k+1,r}(U)$. Par ailleurs, il est clair que $\widehat{H} = \mathcal{F}_{k,r}^\circ(U)$. Puisque $\mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U) \subset \mathcal{F}_{k,r}^\circ(U)$ et $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U) \subset \mathcal{F}_{k,r}^\circ(U)$, on a $H \subset \mathcal{F}_{k,r}^\circ(H)$. De plus, H contient $F_{k,r}(U)$ et $\mathcal{F}_{k,r}^\circ(U)$ est le complété ω -adique de $F_{k,r}(U)$. Le complété ω -adique \widehat{H} de H est donc égale à $\mathcal{F}_{k,r}^\circ(U)$. Pour montrer le résultat de platitude, il suffit donc de prouver que l'algèbre H est noetherienne. En effet, dans ce cas \widehat{H} est plat sur H et donc $\widehat{H}_{\mathbb{Q}} = \mathcal{F}_{k,r}(U)$ est plat sur $H_{\mathbb{Q}} = \mathcal{F}_{k+1,r}(U)$.

L'algèbre $\mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$ est noetherienne d'après la proposition 1.1 de l'article [8]. En effet, son gradué est isomorphe à l'algèbre noetherienne $\text{gr}(A)[\zeta_k, \zeta_r]/(\zeta_k \cdot \zeta_r)$ et $\mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$ est complet pour la topologie ω -adique.

L'algèbre H est engendrée sur A par $\mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$ et par la dérivation $(\omega^k \partial)$. Pour toute fonction a de A , on a

$$[\omega^k \partial, a] = \omega^k \partial(a) \in A \subset \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$$

Comme $[\omega^k \partial, \omega^{k+1} \partial] = [\omega^k \partial, (\omega^r \partial)^{-1}] = 0$, $[\omega^k \partial, P] \in \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$ pour tout opérateur différentiel fini P de $\mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$. Enfin, puisque la \mathcal{V} -algèbre $\mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$ est complète pour la topologie ω -adique, on en déduit que

$$\forall P \in \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U), \quad [\omega^k \partial, P] \in \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$$

Une récurrence sur $\ell \in \mathbb{N}^*$ implique alors que

$$\forall P \in \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U), \quad [(\omega^k \partial)^\ell, P] \in \sum_{i=0}^{\ell-1} \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U) \cdot (\omega^k \partial)^i \quad (1)$$

Le même argument que celui de la fin de la preuve de la proposition 2.2.16 de l'article [6] montre ensuite que H est noetherien. On le rappelle brièvement ci-dessous.

Soit I un idéal à gauche de H . On note J l'ensemble des éléments R de $\mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$ pour lesquels il existe $\ell \in \mathbb{N}$, $P \in I$ et $R_0, \dots, R_{\ell-1} \in \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$ tels que

$$P = R \cdot (\omega^k \partial)^\ell + \sum_{i=0}^{\ell-1} R_i \cdot (\omega^k \partial)^i$$

Soit R' un autre élément de J , où $P' = R' \cdot (\omega^k \partial)^\ell + \sum_{i=0}^{\ell-1} R'_i \cdot (\omega^k \partial)^i \in I$. On suppose par exemple que $\ell \geq \ell'$. La relation 1 implique que

$$P + (\omega^k \partial)^{\ell-\ell'} \cdot P' = (R + R') \cdot (\omega^k \partial)^\ell + \sum_{i=0}^{\ell-1} R_i'' \cdot (\omega^k \partial)^i$$

pour certains $R_i \in \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$. Autrement dit, $R + R' \in J$ et J est un idéal à gauche de $\mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$. Ainsi, J est engendré sur $\mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$ par des éléments R_1, \dots, R_s . Par ailleurs, $I \cap \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$ est un idéal à gauche de $\mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$. Il est donc engendré par des éléments P_1, \dots, P_t . Enfin, on observe que I est engendré en tant qu'idéal à gauche de H par les éléments $R_1, \dots, R_s, P_1, \dots, P_t$. Ceci prouve que H est noetherien à gauche. De même, on démontre que H est noetherien à droite. \square

On rappelle que \mathcal{U} est l'ensemble des ouverts affines de \mathfrak{X} sur lesquels on dispose d'une coordonnée locale. C'est une base de voisinages ouverts de \mathfrak{X} . On démontre comme pour le faisceau \mathcal{E}_k le résultat suivant.

Proposition 4.25. *Il existe un unique faisceau $\mathcal{F}_{k,r}$ de K -algèbres sur \mathfrak{X} tel que pour tout ouvert U de \mathcal{U} , $\mathcal{F}_{k,r}(U) = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \langle |\cdot|_r, \dots, |\cdot|_k, \{\partial^n\}_{n \in \mathbb{N}} \rangle$.*

Les inclusions locales $\mathcal{F}_{k+1,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$ pour tout ouvert U de \mathcal{U} induisent des morphismes de faisceaux $\mathcal{F}_{k+1,r} \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}$ commutant avec les morphismes de transition $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$. On dispose ainsi du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)} & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_{k+1,r} & \longrightarrow & \mathcal{F}_{k,r} \end{array}$$

Eléments de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ inversibles dans $\mathcal{F}_{k,r}$

Soit U un ouvert affine contenant le point x sur lequel on dispose d'un système de coordonnée locale associé à x .

Il est plus délicat de déterminer les éléments inversibles de l'algèbre $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ que de $\mathcal{E}_k(U)$ lorsque $k > r$. En effet, soit S un élément de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. Il s'écrit uniquement comme une série

$$S = \sum_{-\infty < n < 0} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n + \sum_{0 \leq n < \infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$$

On note ∂_k et $(\partial_r)^{-1}$ les réductions modulo ω respectivement de $\omega^k \partial$ et $(\omega^r \partial)^{-1}$. La réduction modulo ω de S est de la forme

$$\bar{S} = \sum_{-\infty < n < 0} \bar{a}_n \cdot \partial_r^n + \sum_{0 \leq n < \infty} \bar{a}_n \cdot \partial_k^n$$

Pour $k > r$, on a $\partial_k \cdot \partial_r^{-1} = \partial_r^{-1} \cdot \partial_k = 0$ puisque $(\omega^k \partial) \cdot (\omega^r \partial)^{-1} = \omega^{k-r}$. On ne peut donc pas déterminer les éléments inversibles de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ après réduction modulo ω . Le même

phénomène apparait en considérant le gradué $\text{gr } \mathcal{F}_{k,r}(U)$. Bien que la dérivation ∂ soit inversible dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$, l'image de ∂ dans le gradué n'est plus inversible.

Cependant, on dispose d'un morphisme injectif d'algèbres $\varepsilon_{k,r} : \mathcal{F}_{k,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$. Puisque les éléments inversibles de l'algèbre $\mathcal{E}_k(U)$ sont connus, on en déduit facilement les opérateurs différentiels de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ inversibles dans le microlocalisé $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. Ce cas est suffisant pour définir la variété caractéristique à partir du microlocalisé. En effet, comme il a été vu dans la partie 2.2, savoir déterminer les éléments de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ inversibles dans le microlocalisé $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ permet de retrouver la variété caractéristique.

Soit $P = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$ un élément de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. Les normes de P dans $\mathcal{E}_k(U)$ et dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ coïncident avec la norme usuelle $|P|_k$ de P dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. Si P est inversible dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$, alors P est inversible dans $\mathcal{E}_k(U)$. Il doit donc vérifier $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P)$. On rappelle que

$$\overline{N}_k(P) = \max\{n \in \mathbb{N} : |a_n| = |P|_k\} \quad \text{et} \quad \overline{n}_k(P) = \min\{n \in \mathbb{N} : |a_n| = |P|_k\}$$

On note $d = \overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P)$ cet entier. Pour que P soit inversible dans $\mathcal{E}_k(U)$, il faut de plus que son coefficient dominant a_d soit inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$. L'inverse de P dans $\mathcal{E}_k(U)$ est alors

$$P^{-1} = (\omega^k \partial)^{-d} \cdot \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(- \sum_{n=0}^{d-1} \frac{a_n}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^{n-d} - \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+d}}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^n \right)^i \cdot a_d^{-1}$$

L'opérateur P^{-1} appartient à l'algèbre $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ si et seulement si la somme sur i converge pour la norme $\|\cdot\|_{k,r}$ de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. Une condition suffisante est d'avoir

$$\left\| \sum_{n=0}^{d-1} \frac{a_n}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^{n-d} + \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+d}}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^n \right\|_{k,r} < 1$$

On rappelle l'égalité démontrée dans la proposition 4.22 :

$$\left\| \sum_{n=0}^{d-1} \frac{a_n}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^{n-d} + \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+d}}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^n \right\|_{k,r} = \max \left\{ \left\| \sum_{n=0}^{d-1} \frac{a_n}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^{n-d} \right\|_{k,r}, \left| \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+d}}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^n \right|_k \right\}$$

On a toujours

$$\left\| \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+d}}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^n \right\|_{k,r} = \left| \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+d}}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^n \right|_k < 1$$

En effet, l'opérateur $\sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+d}}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^n$ appartient à l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ et par définition de d , $|a_{n+d}| < |a_d|$ dès que $n \geq 1$. Par ailleurs,

$$\sum_{n=0}^{d-1} \frac{a_n}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^{n-d} = \sum_{n=0}^{d-1} \frac{a_n}{a_d} \cdot \omega^{(k-r)(n-d)} \cdot (\omega^r \partial)^{n-d}$$

On obtient

$$\left\| \sum_{n=0}^{d-1} \frac{a_n}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^{n-d} \right\|_{k,r} = \max_{0 \leq n < d} \left(\frac{|a_n|}{|a_d|} \cdot |\omega|^{(k-r)(n-d)} \right)$$

On en déduit que P est inversible dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ dès que

$$\forall 0 \leq n \leq d-1, \quad |a_n| \cdot p^{(k-r)(d-n)} < |a_d|$$

La réciproque est vraie. Cependant, elle n'est pas immédiate puisque la norme $\|\cdot\|_{k,r}$ de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ est seulement sous-multiplicative. La proposition suivante résume tout ce qui vient d'être dit.

Proposition 4.26. *Soit $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$ un opérateur différentiel de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. Il existe un ouvert $V \subset U$ contenant x tel que P soit inversible dans $\mathcal{F}_{k,r}(V)$ si et seulement si*

1. $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P) = d$,
2. a_d est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(V)$,
3. $\forall n \in \{0, \dots, d-1\}, |a_n| \cdot p^{(k-r)(d-n)} < |a_d|$.

Démonstration. Si P vérifie les trois conditions de la proposition, alors P est inversible dans $\mathcal{F}_{k,r}(V)$. Réciproquement, si P est inversible dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$, alors P vérifie les deux premières conditions. Il reste à établir que P vérifie le point 3. On rappelle que l'inverse P^{-1} de P s'écrit

$$P^{-1} = (\omega^k \partial)^{-d} \cdot \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(- \sum_{n=0}^{d-1} \frac{a_n}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^{n-d} - \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+d}}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^n \right)^i \cdot a_d^{-1}$$

Il a été vu que

$$\left\| \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+d}}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^n \right\|_{k,r} = \left| \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+d}}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^n \right|_k < 1$$

On pose $R = \sum_{n=0}^{d-1} \frac{a_n}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^{n-d}$. On a

$$\left\| \sum_{n=0}^{d-1} \frac{a_n}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^{n-d} + \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+d}}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^n \right\|_{k,r} = \max \left\{ \|R\|_{k,r}, \left| \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+d}}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^n \right|_k \right\}$$

On doit donc démontrer que $\|R\|_{k,r} < 1$. Comme R ne contient que des puissances strictement négatives de ∂ , la norme $\|\cdot\|_{k,r}$ est multiplicative pour les puissances de R :

$$\|R^i\|_{k,r} = |R^i|_r = |R|_r^i$$

On suppose tout d'abord que $\|R\|_{k,r} = 1$. On montre alors que la somme définissant P^{-1} ne converge pas dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. Comme $\|R\|_{k,r} = 1$, on a $\|R^i\|_{k,r} = 1$. Puisque la norme $\|\cdot\|_{k,r}$ de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ est sous-multiplicative et puisque la norme de $\sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+d}}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^n$ est strictement inférieure à un, le produit d'une puissance de cette somme avec une puissance de R converge dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. Il suffit donc de prouver que la somme des puissances de R diverge pour arriver à une contradiction.

Or la suite $\{\sum_{i=0}^n R^i\}_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy dans l'algèbre $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ lorsque $\|R\|_{k,r} = 1$. En effet, la différence de deux termes consécutifs est de norme égale à un :

$$\left\| \sum_{i=0}^{n+1} R^i - \sum_{i=0}^n R^i \right\|_{k,r} = \|R^{n+1}\|_{k,r} = 1$$

Ainsi la somme des puissances de R diverge dans l'algèbre $\mathcal{F}_{k,r}(U)$.

Lorsque $\|R\|_{k,r} > 1$, on vérifie facilement que la somme définissant P^{-1} diverge dans l'algèbre de Banach $(\mathcal{F}_{k,r}(U), \|\cdot\|_{k,r})$ par des arguments similaires au cas $\|R\|_{k,r} = 1$.

On en déduit finalement que $\|R\|_{k,r} < 1$. L'implication directe de la proposition est donc démontrée. \square

4.2 Les microlocalisés $\mathcal{F}_{\infty,r}$

On introduit dans cette partie le faisceau $\mathcal{F}_{\infty,r}$ limite projective sur $k \geq r$ des faisceaux $\mathcal{F}_{k,r}$ pour $r \geq 1$ fixé. On détermine ensuite les opérateurs différentiels de $\mathcal{D}_{\mathbb{X},\infty}(U)$ inversibles dans le microlocalisé $\mathcal{F}_{\infty}(U)$. Contrairement à ce qu'il se passe pour les K -algèbres $\mathcal{F}_{k,r}(U)$, les éléments de $\mathcal{D}_{\mathbb{X},\infty}(U) \cap (\mathcal{F}_{\infty}(U))^\times$ seront des opérateurs finis. Leurs coefficients dominants devront toujours être inversibles. Il faudra de plus demander certaines inégalités entre les normes des coefficients.

Définition et structure

Pour l'instant r est un entier fixé supposé supérieur ou égale à un et k désigne toujours un entier plus grand que r . On rappelle que tout élément S de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ s'écrit uniquement sous la forme

$$S = \sum_{0 \leq n \leq \infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n + \sum_{-\infty \leq n < 0} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n \quad \text{avec} \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} 0$$

Les morphismes de transition $\varepsilon_{k,r} : \mathcal{F}_{k+1,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$ sont injectifs et vérifient $\|\varepsilon_{k,r}(S)\|_{k,r} \leq \|S\|_{k+1,r}$. On note $\mathcal{F}_{k+1,r} \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}$ le morphisme de faisceaux de K -algèbres

induit localement par les inclusions $\varepsilon_{k,r} : \mathcal{F}_{k+1,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$. La limite projective des faisceaux $\mathcal{F}_{k,r}$ définit un faisceau de K -algèbres sur l'espace topologique sous-jacent à \mathfrak{X} .

Définition 4.27. On pose $\mathcal{F}_{\infty,r} = \varprojlim_{k \geq r} \mathcal{F}_{k,r}$.

On a

$$\mathcal{F}_{\infty,r}(U) = \varprojlim_{k \geq r} \mathcal{F}_{k,r}(U) = \bigcap_{k \geq r} \mathcal{F}_{k,r}(U)$$

C'est une K -algèbre contenant l'algèbre de Fréchet-Stein $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. La proposition 4.24 montre que $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ est elle aussi une algèbre de Fréchet-Stein. La proposition suivante résume les principales propriétés du faisceau $\mathcal{F}_{\infty,r}$.

Proposition 4.28.

1. $\mathcal{F}_{\infty,r}$ est une algèbre de Fréchet-Stein dont la topologie est induite localement par les normes $\|\cdot\|_{k,r}$ des algèbres $\mathcal{F}_{k,r}(U)$;
2. $\mathcal{F}_{\infty,r}(U) = \varprojlim_{k \geq r} \mathcal{F}_{k,r}(U) = \bigcap_{k \geq r} \mathcal{F}_{k,r}(U)$;
3. $\mathcal{F}_{\infty,r}(U) = \left\{ P + \sum_{-\infty \leq n < 0} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n : P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U), a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U) \text{ tq } \lim_{n \rightarrow -\infty} a_n = 0 \right\}$.

L'algèbre $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ contient l'algèbre des opérateurs différentiels $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. Cette inclusion correspond au morphisme continu $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ induit par passage à la limite projective sur k dans les diagrammes commutatifs de K -algèbres topologiques

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) & \hookrightarrow & \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_{k+1,r}(U) & \hookrightarrow & \mathcal{F}_{k,r}(U) \end{array}$$

Eléments de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ inversibles dans $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$

Soit $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \partial^n$ un opérateur différentiel fini d'ordre d de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. Pour k assez grand, $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P) = d$ d'après la preuve du lemme 3.2. Ainsi, P est inversible dans $\mathcal{E}_k(U)$ si et seulement si son coefficient dominant a_d est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$. On déduit de la proposition 4.26 que P est inversible dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ si de plus

$$\forall n \in \{0, \dots, d-1\}, \quad |a_n| < |a_d| \cdot p^{r(d-n)}$$

Cette condition ne dépendant pas de k , on peut expliciter les opérateurs différentiels finis de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ inversibles dans le microlocalisé $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$: un opérateur $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \partial^n$ de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ fini d'ordre d appartient à $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)^\times$ si et seulement si

1. $a_d \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}(U)^\times$,
2. $\forall n \in \{0, \dots, d-1\}$, $|a_n| < |a_d| \cdot p^{r(d-n)}$.

Cette condition est vérifiée par exemple pour les opérateurs dominants : $|a_n| \leq |a_d|$ pour tout entier $n \in \{0, \dots, d\}$. Réciproquement, on va démontrer que tout opérateur différentiel de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}(U)$ inversible dans le microlocalisé $\mathcal{F}_{\infty, r}(U)$ est de cette forme.

Soit maintenant $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \partial^n$ un opérateur infini de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}(U)$. Il n'est pas vrai en général qu'à partir d'un certain niveau de congruence k , $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P)$. Autrement dit, P n'est pas forcément inversible dans $\mathcal{E}_k(U)$ pour k suffisamment grand dès que son coefficient d'ordre $\overline{N}_k(P)$ est inversible.

Exemple 4.29.

1. Soit $P = \prod_{n \geq 1} (1 - \omega^n \partial) \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}(U)$. Alors $\overline{N}_k(P) = k$ et $\overline{n}_k(P) = k - 1$ pour tout entier naturel k .
2. Soit $P = \sum_{n \geq 0} \omega^{n^2} \cdot \partial^n \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}(U)$. On a $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P) = k/2$ si k est paire. Sinon, $\overline{N}_k(P) = \frac{k+1}{2}$ et $\overline{n}_k(P) = \frac{k-1}{2}$.

Cependant, on dispose de morphismes de transition injectifs $\mathcal{F}_{k+1, r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k, r}(U)$. Si P est inversible dans $\mathcal{F}_{k, r}(U)$, alors P est inversible dans $\mathcal{F}_{\ell, r}(U)$ pour tout entier $\ell \in \{0, \dots, k\}$. Ainsi, ou bien P est inversible dans tous les $\mathcal{F}_{k, r}(U)$, ou bien P n'est plus inversible dans les $\mathcal{F}_{k, r}(U)$ à partir d'un certain niveau de congruence k . Puisque $\mathcal{F}_{k, r}(U)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{E}_k(U)$, les deux opérateurs de l'exemple 4.29 ne sont pas inversibles dans $\mathcal{F}_{k, r}(U)$ quelque soit le niveau de congruence $k \geq r$.

Soit $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cdot \partial^n$ un élément de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}(U)$ inversible dans $\mathcal{F}_{\infty, r}(U)$. Alors P est inversible dans tous les $\mathcal{F}_{k, r}(U)$ et tous les $\mathcal{E}_k(U)$. Une condition nécessaire est donc d'avoir $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P)$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$. Par exemple, les deux opérateurs de l'exemple 4.29 ne sont pas inversibles dans $\mathcal{F}_{\infty, r}(U)$. De plus, on rappelle que P est inversible dans l'algèbre $\mathcal{F}_{k, r}(U)$ si pour tout $n \in \{0, \dots, \overline{N}_k(P) - 1\}$, $|a_n| < |a_{\overline{N}_k(P)}| \cdot p^{r(\overline{N}_k(P) - n)}$. On s'intéresse donc aux opérateurs $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \partial^n$ de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}(U)$ vérifiant la condition

$$d_k = \overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P) \quad \text{et} \quad \forall n \in \{0, \dots, d_k - 1\}, \quad |a_n| < |a_{d_k}| \cdot p^{r(d_k - n)} \quad (2)$$

On démontre dans ce qui suit que si P vérifie cette condition pour tout entier naturel k , alors P est un opérateur différentiel fini. Les éléments de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}(U)$ inversibles dans le microlocalisé $\mathcal{F}_{\infty, r}(U)$ seront donc des opérateurs finis.

On pose $U = \text{Spf } A'$ et $A = A' \otimes_{\mathbb{V}} K$. C'est une K -algèbre affinoïde. La norme spectrale $|\cdot|$ sur A est multiplicative puisque \mathfrak{X} est connexe et lisse, donc intègre. On fixe une clôture algébrique \overline{K} de K . Elle est munie d'une valuation, extension de la valuation de K , que

l'on note encore v . Soit $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cdot \partial^n \in \mathcal{D}_{\mathfrak{x}, \infty}(U)$. Les coefficients a_n sont des éléments de A vérifiant la condition de convergence :

$$\forall \mu \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \omega^{-\mu n} = 0$$

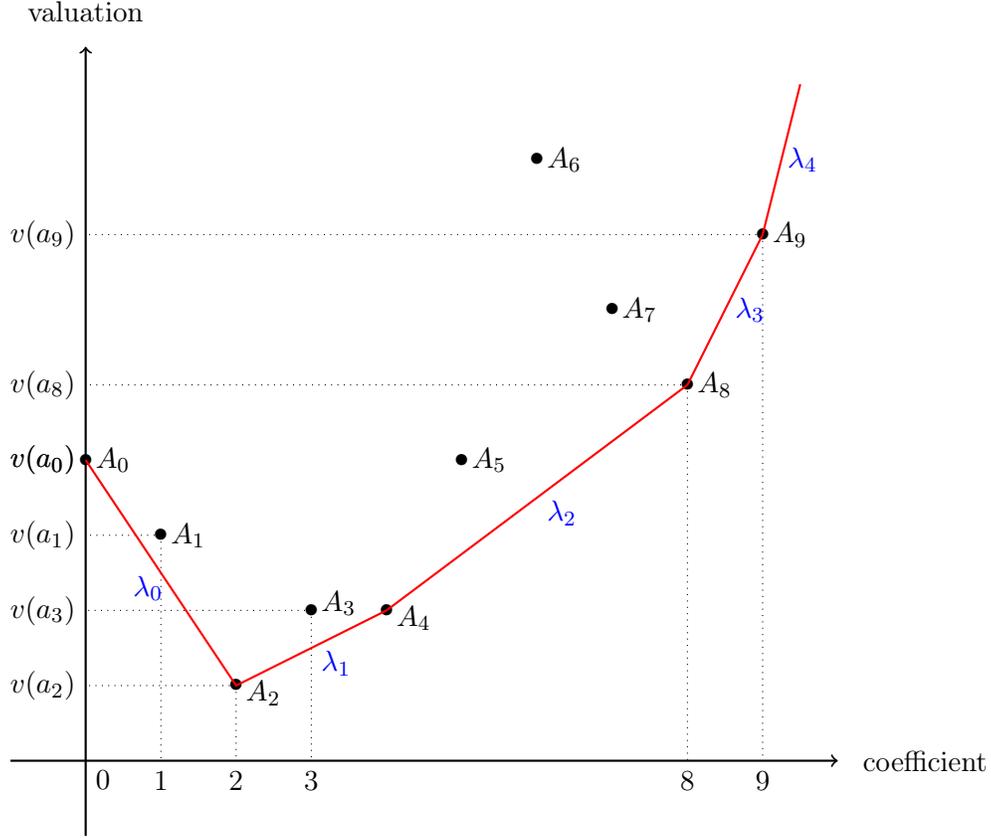
Pour tout $\mu \in v(\overline{K})$, on pose

$$\begin{aligned} |P|_\mu &= \max_{\ell \in \mathbb{N}} |a_\ell \cdot \omega^{-\mu \ell}| \\ \overline{N}_\mu(P) &= \max \{n \in \mathbb{N} : |a_n \cdot \omega^{-\mu n}| = |P|_\mu\} \\ \overline{n}_\mu(P) &= \min \{n \in \mathbb{N} : |a_n \cdot \omega^{-\mu n}| = |P|_\mu\} \end{aligned}$$

Lorsque $\mu = k \in \mathbb{N}$, on retrouve les fonctions définies précédemment. La norme spectrale $|\cdot|$ est à valeurs dans $|\overline{K}|$. Pour toute fonction a de $\mathcal{O}_{\mathfrak{x}, \mathbb{Q}}(U)$, on note $v(a)$ l'élément μ de $v(\overline{K})$ pour lequel $|a| = |\omega|^{-\mu}$.

Définition 4.30. Soit $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cdot \partial^n \in \mathcal{D}_{\mathfrak{x}, \infty}(U)$. On définit son polygone de Newton comme étant l'enveloppe convexe des points $A_n = (n, v(a_n))$ de \mathbb{R}^2 . Les pentes des segments du polygone de Newton de P sont des éléments de $v(\overline{K})$.

La figure suivante représente graphiquement le polygone de Newton d'un opérateur P . Les pentes sont écrites en bleu.



Polygone de Newton de $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cdot \partial^n \in \mathcal{D}_{\bar{x}, \infty}(U)$

Si P est un opérateur différentiel fini, alors son polygone de Newton n'a qu'un nombre fini de pentes. Dans le cas contraire, la suite des pentes (rangée dans l'ordre des indices des coefficients) est strictement croissante et diverge vers $+\infty$. La proposition suivante montre que les pentes du polygone de Newton sont étroitement liées aux fonctions \bar{N} et \bar{n} de P .

Proposition 4.31. *Soit $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cdot \partial^n \in \mathcal{D}_{\bar{x}, \infty}(U)$ et $\mu \in v(\bar{K})$.*

1. *Si μ n'est pas une pente du polygone de Newton de P , alors $\bar{N}_\mu(P) = \bar{n}_\mu(P)$.*
2. *Si μ est une pente du polygone de Newton de P , alors $\bar{n}_\mu(P) < \bar{N}_\mu(P)$.*

Démonstration. On suppose tout d'abord que μ n'est pas une pente du polygone de Newton de P . La suite $(|a_n| \cdot p^{\mu n})_n$ converge vers zéro. La condition $\bar{N}_\mu(P) = \bar{n}_\mu(P)$ signifie exactement qu'elle admet un unique élément maximal. On suppose qu'il existe deux indices $j < j'$ tels que

$$|P|_\mu = \max_{n \in \mathbb{N}} \{|a_n| \cdot p^{\mu n}\} = |a_{j'}| \cdot p^{\mu j'} = |a_j| \cdot p^{\mu j} \quad (3)$$

On note α la valuation commune des éléments $a_i \cdot \omega^{-\mu i}$ et $a_j \cdot \omega^{-\mu j}$. Les points A_i et A_j appartiennent à la même droite d'équation $Y = \mu \cdot X + \alpha$. L'égalité 3 signifie que α minimalise la valuation des termes $a_n \cdot \omega^{-\mu n}$. La minimalité de α implique que $[A_i, A_j]$ est un côté du polygone de Newton de P . Mais ce segment a pour pente μ ! Cela contredit l'hypothèse de départ. La suite $(|a_n| \cdot p^{\mu n})_n$ a donc un unique élément maximal. Autrement dit, $\overline{N}_\mu(P) = \overline{n}_\mu(P)$.

Soit maintenant μ une pente du polygone de Newton de P . Alors le polygone de Newton admet un segment $[A_i, A_j]$ de pente μ pour deux indices i et j distincts. Les points A_i et A_j appartiennent à une même droite d'équation $Y = \mu \cdot X + \beta$. Cela se traduit par $|a_i| \cdot p^{\mu i} = |a_j| \cdot p^{\mu j} = |P|_\mu$ au niveau des normes. En particulier, $\overline{n}_\mu(P) < \overline{N}_\mu(P)$. \square

La condition 2 pour un niveau de congruence $k \geq r$ fixé a d'importantes conséquences sur les valeurs possibles des pentes du polygone de Newton de P . La proposition suivante les résume.

Proposition 4.32. *Soit $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cdot \partial^n \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}(U)$. Si P vérifie la condition 2 pour un certain niveau de congruence $k \geq r$, alors le polygone de Newton de P n'admet pas de pente appartenant au segment $[r, k]$.*

Démonstration. Soit μ une pente du polygone de Newton de P appartenant à l'intervalle $[r, k]$. On sait d'après la proposition 4.31 qu'il existe deux indices distincts $n < m$ tels que $|P|_\mu = |a_n| \cdot p^{\mu n} = |a_m| \cdot p^{\mu m}$. On suppose m maximal. L'hypothèse 2 implique que $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P)$. On note d_k cet entier. Le lemme 3.2 nous assure que $m \leq d_k$. Par maximalité de m , on a $|a_m| \cdot p^{\mu m} > |a_{d_k}| \cdot p^{\mu d_k}$. On en déduit que

$$|a_n| = p^{\mu(m-n)} \cdot |a_m| > p^{\mu(m-n)} \cdot p^{\mu(d_k-m)} \cdot |a_{d_k}| = p^{\mu(d_k-n)} \cdot |a_{d_k}|$$

On rappelle que $n < m \leq d_k$. Le fait que μ soit supérieur ou égale à r contredit la seconde partie de l'hypothèse 3 :

$$\forall n \in \{0, \dots, d_k - 1\}, \quad |a_n| < |a_{d_k}| \cdot p^{r(d_k-n)}$$

Ainsi, aucune pente du polygone de Newton de P n'appartient au segment $[r, k]$. \square

Lorsque P vérifie l'hypothèse 2 pour tout entier naturel $k \geq r$, on en déduit que P est un opérateur différentiel fini.

Corollaire 4.33. *Soit $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cdot \partial^n \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}(U)$. Si P vérifie la condition 2 pour tout entier $k \geq r$, alors P est un opérateur fini.*

Démonstration. On suppose que $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \partial^n$ est un opérateur infini. Alors son polygone de Newton admet une infinité de pentes λ_ℓ et la suite $(\lambda_\ell)_\ell$ est strictement croissante de limite $+\infty$. Mais la proposition 4.32 implique que pour tout entier $k \geq r$, il n'y a aucune pente dans le segment $[r, k]$. Le polygone de Newton de P ne peut donc pas admettre de pente dans l'intervalle $[r, +\infty[$. La suite des pentes $(\lambda_\ell)_\ell$ est donc finie et P est un opérateur fini. \square

Soit $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \partial^n$ un élément de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. Si P est inversible dans le microlocalisé $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$, alors P est inversible dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ pour tout entier $k \geq r$. En particulier, P vérifie la condition 2 pour tout entier naturel k . Le corollaire 4.33 permet donc de décrire les éléments de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ inversibles au voisinage de x dans $\mathcal{F}_{\infty,r}$.

Proposition 4.34. *Soit $P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. Alors P est inversible dans $\mathcal{F}_{\infty,r}(V)$ pour un ouvert $V \subset U$ contenant x si et seulement si*

1. $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \partial^n$ dans $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$,
2. a_d est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(V)$,
3. $\forall n \in \{0, \dots, d-1\}, |a_n| < |a_d| \cdot p^{r(d-n)}$.

Il ne s'agit pas exactement de la condition d'inversibilité souhaitée. On désire que tout opérateur fini de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ soit inversible dans le microlocalisé dès que son coefficient dominant est inversible. La condition 3 de la proposition 4.34 contient cependant beaucoup d'opérateurs : les coefficients a_i peuvent être bien plus grands que a_d pour la norme spectrale. On peut les autoriser à être de plus en plus grands en augmentant r . En considérant tous les entiers $r \geq 1$, la condition 3 donne exactement tous les opérateurs finis dont le coefficient dominant est inversible.

On montre facilement que $\mathcal{F}_{\infty,r}(U) \subset \mathcal{F}_{\infty,r+1}(U)$. On peut alors considérer l'algèbre $\mathcal{F}_{\infty}(U)$ limite inductive des algèbres $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$. Les morphismes de transition sont simplement les inclusions. Les éléments de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ inversibles dans $\mathcal{F}_{\infty}(U)$ sont exactement les opérateurs finis dont le coefficient dominant est inversible, sans aucune autre condition sur les coefficients. Ce critère d'inversibilité est la propriété désirée du microlocalisé discutée en introduction.

4.3 Le microlocalisé \mathcal{F}_{∞}

Soit toujours U un ouvert affine contenant x sur lequel on dispose d'une coordonnée locale. On introduit dans cette partie le faisceau de K -algèbres \mathcal{F}_{∞} sur le schéma formel \mathfrak{X} . Concrètement, $\mathcal{F}_{\infty}(U)$ est l'union croissante dénombrable des K -algèbres de Fréchet-Stein $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$. Il est clair d'après la proposition 4.34 qu'un opérateur $P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ est inversible dans le microlocalisé $\mathcal{F}_{\infty}(U)$ si et seulement si P est un opérateur différentiel fini dont le coefficient dominant est inversible.

On rappelle brièvement la construction des faisceaux $\mathcal{F}_{\infty,r}$ avant de définir le microlocalisé \mathcal{F}_{∞} . Pour tous les entiers $k \geq r \geq 1$, l'algèbre $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ est le localisé de l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ pour la partie multiplicative des puissances de la dérivation ∂ et pour les normes complètes quasi-abéliennes $|\cdot|_r, \dots, |\cdot|_k$ de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. Le microlocalisé $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ est une K -algèbre de Banach munie d'une norme seulement sous-multiplicative $\|\cdot\|_{k,r}$ admettant $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ comme sous-algèbre. Tout élément S de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ s'écrit uniquement sous la forme

$S = P + Q$ avec

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \text{ et } Q = \sum_{-\infty \leq n < 0} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n \text{ tq } a_n \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0$$

De plus, $\|S\|_{k,r} = \max_{n \in \mathbb{Z}} \{|a_n|\}$.

Pour tout entier $k \geq r$, on dispose de morphismes de transition $\mathcal{F}_{k+1,r} \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}$ commutant avec les morphismes $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$. Par définition, $\mathcal{F}_{\infty,r} = \varprojlim_{k \geq r} \mathcal{F}_{k,r}$. Les algèbres $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ sont des algèbres de Frechet-Stein. Tout élément de $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ s'écrit uniquement sous la forme $S = P + Q$ avec $P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ et $Q = \sum_{-\infty \leq n < 0} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n$ vérifiant $a_n \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0$. En particulier, l'algèbre $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ contient $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. Les éléments de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ inversibles dans $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ sont donnés par la proposition 4.34.

On regarde maintenant les liens entre les algèbres $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ pour un niveau de congruence k fixé et r variable. Soit $r < r'$ deux entiers strictement positifs et $k \geq r'$. On se donne un élément S de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$,

$$S = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n}_P + \underbrace{\sum_{-\infty \leq n < 0} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n}_Q$$

Alors S appartient à $\mathcal{F}_{k,r'}(U)$. En effet, puisque $P \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \subset \mathcal{F}_{k,r'}(U)$, il suffit de vérifier que Q est dans $\mathcal{F}_{k,r'}(U)$. On a

$$Q = \sum_{-\infty \leq n < 0} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n = \sum_{-\infty \leq n < 0} a_n \omega^{-(r'-r)n} \cdot (\omega^{r'} \partial)^n$$

Comme $|\omega|^{-(r'-r)n} \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0$, on a bien $Q \in \mathcal{F}_{k,r'}(U)$. Il est clair que

$$\|P\|_{k,r} = \|P\|_{k,r'} = \max_{n \in \mathbb{N}} \{|a_n|\}$$

Par ailleurs $\|Q\|_{k,r} = \max_{n < 0} \{|a_n|\}$ et $\|Q\|_{k,r'} = \max_{n < 0} \{|a_n| \cdot p^{-(r'-r)n}\}$. Ainsi, $\|Q\|_{k,r'} \leq \|Q\|_{k,r}$ et $\|S\|_{k,r'} \leq \|S\|_{k,r}$. Autrement dit, l'inclusion $\mathcal{F}_{k,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r'}(U)$ est 1-lipschtizienne. Elle est donc continue.

Cependant, la topologie de $\mathcal{F}_{k,r'}(U)$ induite sur $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ par l'inclusion $\mathcal{F}_{k,r}(U) \subset \mathcal{F}_{k,r'}(U)$ ne coïncide pas avec la topologie de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. En effet, les normes $\|\cdot\|_{k,r}$ et $\|\cdot\|_{k,r'}$ ne définissent pas les mêmes séries convergentes pour les éléments de la forme $\sum_{-\infty \leq n < 0} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n$.

En conclusion, $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}_{k,r'}(U)$ dès que $k \geq r' \geq r$ et la topologie de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ est plus fine que celle de $\mathcal{F}_{k,r'}(U)$.

Ces inclusions $\mathcal{F}_{k,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r'}(U)$ pour $k \geq r' \geq r$ commutent avec les morphismes de transition $\mathcal{F}_{k+1,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$. Le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{k+1,r}(U) & \hookrightarrow & \mathcal{F}_{k,r}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_{k+1,r'}(U) & \hookrightarrow & \mathcal{F}_{k,r'}(U) \end{array}$$

En passant à la limite projective sur k dans la catégorie des K -algèbres topologiques, on obtient un morphisme injectif continu de K -algèbres $\mathcal{F}_{\infty,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{\infty,r'}(U)$.

Définition 4.35. On pose $\mathcal{F}_{\infty}(U) = \varprojlim_{r \geq 1} \mathcal{F}_{\infty,r}(U) = \bigcup_{r \geq 1} \mathcal{F}_{\infty,r}(U)$.

C'est une K -algèbre contenant toutes les algèbres de Fréchet-Stein $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ dès que $r \geq 1$. Si $P \in \mathcal{F}_{\infty}(U)$, alors $P \in \mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ pour un certain $r \in \mathbb{N}^*$. En particulier, P s'écrit uniquement sous la forme $P = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \cdot \partial^n$ avec $|a_n| \cdot R^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ pour tout réel $R > 0$ et $|a_n| \cdot p^{nr} \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0$. La première condition correspond à $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cdot \partial^n \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. Si $|a_n| \cdot p^{nr} \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0$, alors pour tout $R \geq p^r$ on a $|a_n| \cdot R^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0$. On obtient la description suivante de $\mathcal{F}_{\infty}(U)$:

$$\mathcal{F}_{\infty}(U) = \left\{ P + \sum_{-\infty \leq n < 0} a_n \cdot \partial^n, \quad P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U), \quad \exists R > 0 \text{ tq } |a_n| \cdot R^n \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0 \right\}$$

On munit la K -algèbre $\mathcal{F}_{\infty}(U)$ de la topologie la plus fine pour laquelle les inclusions $\mathcal{F}_{\infty,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{\infty}(U)$ sont continues. Il s'agit de la topologie localement convexe.

Puisque l'algèbre $\mathcal{F}_{\infty}(U)$ est l'union croissante des algèbres $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$, on a

$$\mathcal{F}_{\infty}(U)^\times = \bigcup_{r \geq 1} \mathcal{F}_{\infty,r}(U)^\times$$

Le résultat suivant se déduit de la proposition 4.34. En effet, l'union sur r des opérateurs finis de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ vérifiant le point 3 de cette proposition est l'ensemble des opérateurs finis de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$.

Proposition 4.36. Un opérateur différentiel P de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ est inversible dans le micro-localisé $\mathcal{F}_{\infty}(U)$ si et seulement si

1. $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \partial^n$ dans $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$,
2. a_d est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$.

Soit $r' \geq r \geq 1$. Les morphismes injectifs d'algèbres $\mathcal{F}_{\infty,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{\infty,r'}(U)$ induisent des morphismes de transition $\mathcal{F}_{\infty,r} \rightarrow \mathcal{F}_{\infty,r'}$ au niveau des faisceaux. On note \mathcal{F}_{∞} la limite inductive de ces morphismes. C'est un préfaisceau de K -algèbres sur \mathfrak{X} dont les sections sur les ouverts affines U de \mathcal{U} sont les algèbres $\mathcal{F}_{\infty}(U)$. Puisque \mathfrak{X} est quasi-compacte et puisque les morphismes de transition sont localement injectifs, \mathcal{F}_{∞} est un faisceau sur \mathfrak{X} d'après [9, Tag 009F]

Définition 4.37. *On définit un faisceau \mathcal{F}_{∞} sur \mathfrak{X} dont les sections sont exactement les unions croissantes $\bigcup_{r \geq 1} \mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ en posant*

$$\mathcal{F}_{\infty} = \varinjlim_{r \geq 1} \mathcal{F}_{\infty,r}$$

5 Variété caractéristique des modules coadmissibles

On note $\pi : T^*\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ le fibré cotangent de \mathfrak{X} et $s : \mathfrak{X} \rightarrow T^*\mathfrak{X}$ la section nulle. Le morphisme π est ouvert. En effet la propriété d'être ouvert étant topologique, il suffit de le vérifier sur la fibre spéciale et de voir que le morphisme $T^*X = \text{Spec}(\text{Sym } \Theta_X) \rightarrow X$ est ouvert. Ici Θ_X est le faisceau cotangent de X . Puisque X est lisse, Θ_X est un \mathcal{O}_X -module localement libre de rang fini. En particulier, le morphisme $T^*X \rightarrow X$ est plat de présentation finie. Il est donc ouvert d'après [9, Tag 00I1].

On associe au faisceau $\mathcal{F}_{k,r}$ défini sur \mathfrak{X} un faisceau $\mathcal{F}_{k,r}^*$ sur le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ de \mathfrak{X} de la manière suivante. Pour tout ouvert V de $T^*\mathfrak{X}$, on pose

$$\mathcal{F}_{k,r}^*(V) = \begin{cases} \mathcal{F}_{k,r}(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset \\ \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset \end{cases}$$

L'image $\pi(V)$ de V est bien un ouvert de \mathfrak{X} puisque le morphisme $\pi : T^*\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ est ouvert. D'une manière analogue, on construit un $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -module cohérent à partir de tout $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent. En effet, soit \mathcal{M}_k un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent et $r \in \{1, \dots, k\}$. On associe à \mathcal{M}_k le $\mathcal{F}_{k,r}$ -module cohérent

$$\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_k$$

Si V est un ouvert de $T^*\mathfrak{X}$, on définit un $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -module cohérent en posant

$$\mathcal{M}_{k,r}^*(V) = \begin{cases} \tilde{\mathcal{M}}_{k,r}(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset \\ \mathcal{M}_k(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset \end{cases}$$

On note $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ le support de $\mathcal{M}_{k,r}^*$ en tant que faisceau sur le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$. On démontre l'inégalité de Bernstein pour le support de $\mathcal{M}_{k,r}^*$: un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module \mathcal{M}_k est non nul si et seulement si $\dim \text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*) \geq 1$.

On considère maintenant un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$. Pour r fixé, les modules $\mathcal{M}_{k,r}^*$ admettent des morphismes de transition $\mathcal{M}_{k+1,r}^* \rightarrow \mathcal{M}_{k,r}^*$ $\mathcal{F}_{k+1,r}^*$ -linéaires induits par les morphismes $\mathcal{M}_{k+1} \rightarrow \mathcal{M}_k$. Le faisceau limite projective \mathcal{M}_r^* des modules $\mathcal{M}_{k,r}^*$ est un $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ -module coadmissible. Le support du module \mathcal{M}_r^* coïncide avec la fermeture de l'union croissante des supports des faisceaux $\mathcal{M}_{k,r}^*$:

$$\text{Supp } \mathcal{M}_r^* = \overline{\bigcup_{k \geq r} \text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*} \subset T^*\mathfrak{X}$$

Le $\mathcal{F}_{\infty,r}$ -module \mathcal{M}_r^* vérifie lui aussi l'inégalité de Bernstein. La variété caractéristique de \mathcal{M} est alors définie comme l'intersection pour $r \geq 1$ des supports des modules coadmissibles \mathcal{M}_r^* .

5.1 $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -module cohérent associé à un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent

On fixe dans cette partie les entiers $k \geq r \geq 1$. On définit le faisceau $\mathcal{F}_{k,r}^*$ sur le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ de \mathfrak{X} de la manière suivante.

Définition 5.1. *Soit V un ouvert de $T^*\mathfrak{X}$. On pose*

$$\mathcal{F}_{k,r}^*(V) = \begin{cases} \mathcal{F}_{k,r}(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset \\ \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset \end{cases}$$

C'est une K -algèbre de Banach munie d'une norme seulement sous-multiplicative lorsque $V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset$ et multiplicative dans le cas où $V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset$. On note la norme de $\mathcal{F}_{k,r}^*(V)$ toujours par $\|\cdot\|_{k,r}$. Si $V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset$, il s'agit de la norme de $\mathcal{F}_{k,r}(\pi(V))$. Sinon pour $V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset$, $\|\cdot\|_k$ est la norme multiplicative $|\cdot|_k$ de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\pi(V))$.

On vérifie que $\mathcal{F}_{k,r}^*$ est un préfaisceau sur $T^*\mathfrak{X}$. En effet, soient $W \subset V$ deux ouverts de $T^*\mathfrak{X}$. Si V et W n'interceptent pas la section nulle $s(\mathfrak{X})$, ou s'ils l'interceptent tous les deux, alors les morphismes de restrictions sont respectivement ceux du faisceau $\mathcal{F}_{k,r}$ ou ceux de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$. On suppose maintenant que $W \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset$ mais que $V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset$. Par définition,

$$\mathcal{F}_{k,r}^*(W) = \mathcal{F}_{k,r}(\pi(W)) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{k,r}^*(V) = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\pi(V))$$

L'inclusion $W \subset V$ implique que $\pi(W) \subset \pi(V)$. Le morphisme de restriction $\mathcal{F}_{k,r}^*(V) \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}^*(W)$ est simplement le morphisme composé

$$\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\pi(V)) \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\pi(W)) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(\pi(W))$$

La condition de recollement est claire puisque $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ est un sous-faisceau de $\mathcal{F}_{k,r}$. Ainsi, $\mathcal{F}_{k,r}^*$ définit bien un faisceau sur le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ de \mathfrak{X} .

On considère maintenant un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent \mathcal{M}_k . On rappelle que $\widetilde{\mathcal{M}}_{k,r}$ est le $\mathcal{F}_{k,r}$ -module cohérent $\widetilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_k$.

Définition 5.2. On associe à \mathcal{M}_k le $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -module cohérent $\mathcal{M}_{k,r}^*$ défini localement par

$$\mathcal{M}_{k,r}^*(V) = \begin{cases} \widetilde{\mathcal{M}}_{k,r}(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset \\ \mathcal{M}_k(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset \end{cases}$$

Pour vérifier que $\mathcal{M}_{k,r}^*$ est un faisceau sur $T^*\mathfrak{X}$, il suffit de regarder ce qu'il se passe sur les ouverts dont un seul exactement intercepte la section nulle. Soient $W \subset V$ deux ouverts de $T^*\mathfrak{X}$ tels que $W \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset$ et $V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset$. Le morphisme de restriction $\mathcal{M}_{k,r}^*(W) \rightarrow \mathcal{M}_{k,r}^*(V)$ est donné par

$$\mathcal{M}_k(\pi(V)) \rightarrow \mathcal{M}_k(\pi(W)) \xrightarrow{1 \otimes \text{id}} \widetilde{\mathcal{M}}_{k,r}(\pi(W)) = \mathcal{F}_{k,r}(\pi(W)) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\pi(W))} \mathcal{M}_k(\pi(W))$$

Ainsi $\mathcal{M}_{k,r}^*$ est un préfaisceau sur $T^*\mathfrak{X}$. La condition de recollement pour ces morphismes de transition est immédiate. En effet, soient V et W deux ouverts de $T^*\mathfrak{X}$ tels que $W \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset$ et $V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset$. Alors $V \cap W$ n'intercepte pas la section nulle. On se donne deux éléments $a \in \mathcal{M}_k(\pi(V))$ et $b \in \widetilde{\mathcal{M}}_{k,r}(\pi(W))$ vérifiant $a|_{\pi(V \cap W)} = 1 \otimes a = b|_{\pi(V \cap W)} = b$. La condition de recollement est simplement celle de $\widetilde{\mathcal{M}}_{k,r}$.

Pour $V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset$, $\mathcal{M}_{k,r}^*(V) = \widetilde{\mathcal{M}}_{k,r}(\pi(V))$ est un $\mathcal{F}_{k,r}^*(V) = \mathcal{F}_{k,r}(\pi(V))$ -module cohérent. Lorsque $V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset$, $\mathcal{M}_{k,r}^*(V) = \mathcal{M}_k(\pi(V))$ est un $\mathcal{F}_{k,r}^*(V) = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\pi(V))$ -module par hypothèse. On en déduit que $\mathcal{M}_{k,r}^*$ définit bien un $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -module cohérent.

Soit \mathcal{M}_k un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent. On note $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ le support de $\mathcal{M}_{k,r}^*$ en tant que faisceau sur $T^*\mathfrak{X}$. C'est un fermé de $|T^*\mathfrak{X}|$ d'après le lemme suivant puisque $\mathcal{M}_{k,r}^*$ est un $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -module cohérent.

Lemme 5.3. Le support $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ de $\mathcal{M}_{k,r}^*$ est un fermé de $|T^*\mathfrak{X}|$.

Démonstration. On rappelle que $T^*\mathfrak{X}$ est quasi-compact et que $\mathcal{M}_{k,r}^*$ est un $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -module cohérent. Soit V_1, \dots, V_n un recouvrement ouvert affine fini de $T^*\mathfrak{X}$ tel que $\mathcal{M}_{k,r}^*|_{V_i}$ soit un $\mathcal{F}_{k,r}^*|_{V_i}$ -module de type fini pour tout entier i . Il existe des sections $e_1, \dots, e_s \in \mathcal{M}_{k,r}^*(V_i)$ telles que $\mathcal{M}_{k,r}^*|_{V_i} = \mathcal{F}_{k,r}^*|_{V_i} \cdot e_1 + \dots + \mathcal{F}_{k,r}^*|_{V_i} \cdot e_s$. Comme $\text{Supp } \mathcal{F}_{k,r} = \text{Supp } \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} = \mathfrak{X}$, le faisceau $\mathcal{F}_{k,r}^*$ est supporté par $T^*\mathfrak{X}$ tout entier. On en déduit que

$$\text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*) \cap V_i = \bigcup_{j=1}^s \text{Supp}(e_j)$$

Le support $\text{Supp}(e_j)$ d'une section e_j de $\mathcal{M}_{k,r}^*$ est fermé dans $|T^*\mathfrak{X}|$ d'après [9, Tag 01AU]. On en déduit que $\text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*) \cap V_i$ est fermé car union finie de fermée. Puisque les V_i recouvrent $T^*\mathfrak{X}$, le support $\text{Supp}\mathcal{M}_{k,r}^*$ est une partie fermée de $|T^*\mathfrak{X}|$. \square

Inégalité de Bernstein

Soit $\mathcal{M}_k = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/\mathcal{J}_k$ un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent, où \mathcal{J}_k est un idéal à gauche cohérent de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$. On commence par redéfinir brièvement la variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{M}_k) \subset T^*X$ du module \mathcal{M}_k . On note \mathcal{J}_k° l'ensemble des éléments de \mathcal{J}_k de norme $|\cdot|_k$ inférieure ou égale à un :

$$\mathcal{J}_k^\circ(U) = \{P \in \mathcal{J}_k(U) : |P|_k \leq 1\}$$

C'est un idéal cohérent de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}$. On identifie U à un ouvert affine de la fibre spéciale X de \mathfrak{X} . On munit $T^*U \subset T^*X$ du système de coordonnées locales (t, ξ) associé à la coordonnée étale de U . Soit $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$ un élément de $\mathcal{J}_k^\circ(U)$. On associe à P l'élément de T^*U donné par

$$\sigma(P) = \sigma_k(P) = \bar{a}_{\bar{N}_k(P)} \cdot \xi^{\bar{N}_k(P)}$$

où $\bar{a}_{\bar{N}_k(P)} \in \mathcal{O}_X(U)$ est la réduction modulo ω de $a_{\bar{N}_k(P)}$. On a $\sigma(P) = \sigma(\bar{P})$, où $\sigma(\bar{P})$ est le symbole principal de $\bar{P} \in (\mathcal{J}_k^\circ \otimes_{\mathcal{V}} \kappa)(U)$. On appelle encore $\sigma(P)$ le symbole principal de P ; il dépend du niveau de congruence k . Avec cette notation, on a

$$\text{Car}(\mathcal{M}_k) \cap T^*U = \{(t, \xi) \in T^*U : \sigma(P)(t, \xi) = 0 \quad \forall P \in \mathcal{J}_k^\circ(U)\}$$

On peut relier la variété caractéristique de \mathcal{M}_k au support de $\mathcal{M}_{k,r}^*$ en les considérant comme des parties fermées de $|T^*\mathfrak{X}| = |T^*X|$.

Proposition 5.4. *Pour tout $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent \mathcal{M}_k et pour tout entier $r \in \{1, \dots, k\}$, $\text{Car}\mathcal{M}_k \subset \text{Supp}\mathcal{M}_{k,r}^*$ en tant qu'espaces topologiques.*

Démonstration. On peut supposer \mathfrak{X} affine et se ramener au cas où $\mathcal{M}_k = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/\mathcal{J}$ pour un idéal cohérent \mathcal{J} de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ comme dans la preuve de la proposition 2.9. Dans ce cas, $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r}/\mathcal{F}_{k,r} \cdot \mathcal{J}$, où $\mathcal{F}_{k,r} \cdot \mathcal{J}$ est l'idéal à gauche de $\mathcal{F}_{k,r}$ engendré par \mathcal{J} .

On commence par montrer que $\text{Car}\mathcal{M}_k$ et $\text{Supp}\mathcal{M}_{k,r}^*$ coïncident au niveau de la section nulle. Soit U un ouvert affine de \mathfrak{X} . Alors $V = \pi^{-1}(U)$ intercepte la section nulle. On a $\mathcal{M}_{k,r}^*(V) = \mathcal{M}_k(U)$ et $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,\xi)} = (\mathcal{M}_k)_x$ pour tout point (x, ξ) de V . On se restreint à l'ouvert V quitte à supposer que $\mathfrak{X} = U$. On rappelle que \mathcal{J}° est l'idéal de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}$ constitué des éléments de \mathcal{J} norme $|\cdot|_k$ inférieure ou égale à un. Soit $I = \mathcal{J}^\circ \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ la réduction modulo ω de \mathcal{J}° . C'est un idéal cohérent de $\mathcal{D}_{X,k} = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$. On se donne des éléments P_1, \dots, P_s

de $\mathcal{J}^\circ(U)$ tels que $\sigma(P_1), \dots, \sigma(P_s)$ engendrent le gradué $\text{gr } I$. Alors P_1, \dots, P_s engendrent l'idéal \mathcal{J} . De plus,

$$\begin{aligned} \text{Car}(\mathcal{M}_k) &= \text{Car}(\mathcal{D}_{X,k}/I) = \{(t, \xi) \in T^*X : \sigma(P)(t, \xi) = 0 \ \forall P \in I\} \\ &= \{(t, \xi) \in T^*X : \sigma(P_1)(t, \xi) = \dots = \sigma(P_s)(t, \xi) = 0\} \end{aligned}$$

On écrit $\sigma(P_i) = \sigma(\bar{P}_i) = a_i \cdot \xi^{d_i} \in \text{gr } I(X)$. La section nulle est une composante irréductible de la variété caractéristique $\text{Car } \mathcal{M}_k$ si et seulement si les ordres d_1, \dots, d_s des opérateurs P_1, \dots, P_s sont supérieurs ou égaux à un. Puisque l'idéal $\text{gr } I$ est engendré par les monômes $\sigma(P_1), \dots, \sigma(P_s)$, l'idéal $\text{gr } I$ ne contient pas de terme d'ordre zéro en ξ . On en déduit que \mathcal{J} ne contient pas d'opérateur P vérifiant $\bar{N}_k(P) = 0$. Sinon $\sigma(P)$ serait un élément d'ordre $\bar{N}_k(P) = 0$ en ξ de $\text{gr } I$. Les points du support $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ sur la section nulle sont donnés par le support du module $\mathcal{M}_k = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/\mathcal{J}$ vu en tant faisceau sur le schéma formel \mathfrak{X} . Puisque tout élément P de l'idéal $\mathcal{J}(U)$ vérifie $\bar{N}_k(P) \geq 1$, aucun élément de \mathcal{J} n'est inversible dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ d'après le corollaire 4.19. Ainsi, $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,0)} = (\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/\mathcal{J})_x \neq 0$ en tout point x de $\mathfrak{X} = U$. Autrement dit, $\text{Supp } \mathcal{M}_k = \mathfrak{X}$ et le support $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ contient la section nulle.

Réciproquement, le support du module $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/\mathcal{J}$ n'est pas $\mathfrak{X} = U$ tout entier si et seulement si l'idéal $\mathcal{J}(U)$ contient un opérateur P vérifiant $\bar{N}_k(P) = 0$. Dans ce cas, le support du module $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/\mathcal{J}$ consiste en un nombre fini de points contenus dans l'ensemble des zéros du coefficient constant a_0 de P . Par ailleurs, $\sigma(P) = \bar{a}_0$ est un élément du gradué $\text{gr } I(U)$. Donc la variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{D}_{X,k}/I)$ ne contient pas la section nulle. On vérifie, en raisonnant de manière analogue à ce que l'on a fait dans le paragraphe précédent, que la variété caractéristique $\text{Car } \mathcal{M}_k$ intercepte la section nulle exactement en les points du support du module $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/\mathcal{J}$, autrement dit parmi les zéros du coefficient constant a_0 de P .

On regarde maintenant ce qu'il se passe en dehors de la section nulle. Soit V un ouvert affine de $T^*\mathfrak{X}$ n'interceptant pas la section nulle. On pose $U = \pi(V) \subset \mathfrak{X}$. C'est un ouvert de \mathfrak{X} . Quitte à restreindre V , on peut supposer que U est affine et que $\mathfrak{X} = U$. Avec ces notations, $\mathcal{M}_{k,r}^*(V) = \mathcal{F}_{k,r}(U)/(\mathcal{F}_{k,r} \cdot \mathcal{J})(U)$. On reprend les notations de la partie 2.2 du microlocalisé L_k du faisceau $\mathcal{D}_{X,k}$ sur le fibré cotangent T^*X de X .

Soit $P \in \mathcal{J}(U)$ un opérateur de norme un. On rappelle que $\bar{P} = (P \bmod \omega)$ est inversible dans le microlocalisé L_k au voisinage d'un point $(x, \xi) \in T_0^*X = T^*X \setminus s(X)$ si et seulement si $\sigma(P)(x, \xi) \neq 0$. Cette condition est nécessaire, mais non suffisante, pour que P soit inversible dans \mathcal{E}_k au voisinage du point x . En effet cette condition implique seulement que le coefficient d'indice $\bar{N}_k(P)$ de P est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ au voisinage de x . D'après la proposition 4.18, il faut de plus avoir $\bar{N}_k(P) = \bar{n}_k(P)$ pour que P soit inversible dans \mathcal{E}_k au voisinage de x . Ainsi, si \bar{P} est non inversible dans $L_k(W)$ pour tout voisinage ouvert W du point (x, ξ) dans T_0^*X , alors P est non inversible au voisinage de x dans \mathcal{E}_k et donc à fortiori dans $\mathcal{F}_{k,r}$.

On se donne un point (x, ξ) dans $\text{Car}(\mathcal{M}_k) \cap T_0^*X$. On rappelle qu'un point (x, ξ) ap-

partient à la variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{M}_k) \cap T_0^*X$ si et seulement pour tout opérateur P de $\mathcal{J}(U)$ de norme un, $\sigma(P)(x, \xi) = 0$. On en déduit qu'aucun élément P de $\mathcal{J}(U)$ n'est inversible dans \mathcal{E}_k au voisinage du point x . En effet, le coefficient dominant a de tout opérateur P de $\mathcal{J}(U)$ s'annule en x puisque le point (x, ξ) n'appartient pas à la section nulle du fibré cotangent : $\xi \neq 0$ et $\sigma(P) = \bar{a}(x) \cdot \xi^{\overline{N}_k(P)} = 0$ implique $a(x) = 0$. D'après le lemme 4.16, l'idéal $\mathcal{E}_k \cdot \mathcal{J}$ de \mathcal{E}_k engendré par l'idéal \mathcal{J} ne contient pas d'élément inversible au voisinage de x . Autrement dit, $\mathcal{E}_k(W) \cdot \mathcal{J}(W) \subsetneq \mathcal{E}_k(W)$ pour tout ouvert affine W de $\mathfrak{X} = U$. Il en découle que l'idéal $\mathcal{F}_{k,r} \cdot \mathcal{J}$ de $\mathcal{F}_{k,r}$ ne contient aucun élément inversible au voisinage de x dans $\mathcal{F}_{k,r}$. Dans le cas contraire, il existerait un voisinage ouvert W de x pour lequel $\mathcal{F}_{k,r}(W) \cdot \mathcal{J} = \mathcal{F}_{k,r}(W)$. Alors

$$\mathcal{E}_k(W) \cdot \mathcal{F}_{k,r}(W) \cdot \mathcal{J}(W) = \mathcal{E}_k(W) \cdot \mathcal{J}(W) = \mathcal{E}_k(W) \cdot \mathcal{F}_{k,r}(W) = \mathcal{E}_k(W)$$

Ainsi $\mathcal{E}_k(W) \cdot \mathcal{J}(W) = \mathcal{E}_k(W)$ et $\mathcal{J}(W)$ contiendrait un élément inversible au voisinage de x d'après le lemme 4.16. Ainsi, aucun élément de l'idéal $\mathcal{F}_{k,r} \cdot \mathcal{J}$ n'est inversible au voisinage de x dans $\mathcal{F}_{k,r}$. On en déduit que $(\mathcal{F}_{k,r}/\mathcal{F}_{k,r} \cdot \mathcal{J})_x \neq 0$ et que $(x, \xi) \in \text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$. On a donc montré que $\text{Car } \mathcal{M}_k \subset \text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ en dehors de la section nulle. \square

Remarque 5.5. Soit \mathcal{M}_k un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent et $r \in \{1, \dots, k\}$. On a démontré que la variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{M}_k)$ et que le support $\text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*)$ coïncident au niveau de la section nulle. Cependant, l'inclusion $\text{Car}(\mathcal{M}_k) \subset \text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*)$ peut être stricte en dehors de la section nulle. Cela provient du fait qu'il est plus « difficile » d'être inversible dans le localisé $\mathcal{F}_{k,r}$ que dans le localisé L_k de $\mathcal{D}_{X,k}$. Soit par exemple P un opérateur différentiel infini de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. Alors les variétés caractéristiques $\text{Car}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P)$ sont toutes de dimension un mais $\text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*) = T^*\mathfrak{X}$ pour r et k suffisamment grands (voir l'exemple 5.15).

Puisque \mathfrak{X} est une courbe, on dispose de l'inégalité de Bernstein pour les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents \mathcal{M}_k : \mathcal{M}_k est un module non nul si et seulement si $\dim \text{Car } \mathcal{M}_k \geq 1$. On fixe dans la suite un entier $r \in \{1, \dots, k\}$. On déduit de la proposition 5.4 que $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*) = 1$ implique $\dim(\text{Car } \mathcal{M}_k) = 1$. En effet, il suffit de vérifier que $\mathcal{M}_k \neq 0$. Si $\mathcal{M}_k = 0$, alors $\mathcal{M}_{k,r}^* = 0$ et $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^* = \emptyset$. Autrement dit, si $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*) = 1$, alors \mathcal{M}_k est un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module holonome non nul.

Réciproquement, soit \mathcal{M}_k un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent non nul. Alors $\dim(\text{Car } \mathcal{M}_k) \geq 1$ et la proposition 5.4 montre que $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*) \geq 1$. On en déduit l'inégalité de Bernstein pour les $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -modules cohérents énoncée dans le corollaire suivant.

Corollaire 5.6. Un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent \mathcal{M}_k est non nul si et seulement si

$$\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*) \geq 1$$

Puisque \mathfrak{X} est connexe et lisse, \mathfrak{X} est intègre. En particulier, \mathfrak{X} est irréductible. Dans ce cas $T^*\mathfrak{X}$ est aussi irréductible. Comme $\dim(T^*\mathfrak{X}) = 2$, si le support de $\mathcal{M}_{k,r}^*$ est de dimension deux, alors $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^* = T^*\mathfrak{X}$.

Lorsque $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*) = 1$, la proposition suivante montre que le support de $\mathcal{M}_{k,r}^*$ est une partie conique de $T^*\mathfrak{X}$ constituée de composantes irréductibles verticales et potentiellement d'une composante irréductible horizontale d'équation $\xi = 0$.

Proposition 5.7 (inégalité de Bernstein). *Soit \mathcal{M}_k un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent non nul. Si $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*) = 2$, alors $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^* = T^*\mathfrak{X}$. Sinon $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*) = 1$ et les composantes irréductibles du support $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ sont toutes de dimension un.*

Démonstration. On suppose que $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*) = 1$. Comme pour la preuve de la proposition 2.9, on peut se ramener au cas où $\mathcal{M}_k = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/\mathcal{J}_k$ avec \mathcal{J}_k un idéal cohérent de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$. On a $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r}/\mathcal{F}_{k,r} \cdot \mathcal{J}_k$, où $\mathcal{F}_{k,r} \cdot \mathcal{J}_k$ est l'idéal de $\mathcal{F}_{k,r}$ engendré par \mathcal{J}_k . On peut supposer que $\mathfrak{X} = U$ est affine.

Il a été vu dans la proposition 5.4 que le support $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ et la variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{M}_k)$ coïncident au niveau de la section nulle et que $\text{Car}(\mathcal{M}_k) \subset \text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$. Puisque les composantes irréductibles de $\text{Car}(\mathcal{M}_k)$ sont toutes de dimension un, $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ n'a pas de point isolé sur la section nulle. Il reste à regarder ce qu'il se passe en dehors de la section nulle.

Soit $(x, \xi) \in T^*\mathfrak{X} \setminus s(\mathfrak{X})$. On rappelle que $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,\xi)} = (\tilde{\mathcal{M}}_{k,r})_x$. En effet, pour tout voisinage ouvert V suffisamment petit de (x, ξ) dans $T^*\mathfrak{X}$, on a $\mathcal{M}_{k,r}^*|_V = \mathcal{F}_{k,r}|_V/\mathcal{J}_k|_V$. On en déduit que si $(\tilde{\mathcal{M}}_{k,r})_x \neq 0$, alors le support du module $\mathcal{M}_{k,r}^*$ contient la droite verticale passant par x sauf potentiellement le point sur la section nulle. Il faut donc élucider ce qu'il se passe au niveau de la section nulle. Si le support de $\mathcal{M}_{k,r}^*$ contient la section nulle, il n'y a rien à montrer. Dans ce cas le support $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ consiste en une composante horizontale d'équation $\xi = 0$ et en un nombre fini de composantes verticales.

On suppose maintenant que la section nulle n'est pas une composante irréductible du support $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$. Il faut montrer que si $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,\xi)} = (\tilde{\mathcal{M}}_{k,r})_x \neq 0$ pour tout $\xi \neq 0$, alors $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,0)} = (\mathcal{M}_k)_x \neq 0$. Autrement dit, il faut prouver qu'aucun élément P de $\mathcal{J}_k(U)$, pour U un voisinage ouvert affine de x dans \mathfrak{X} , n'est inversible au voisinage de x dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$. Si $\overline{N}_k(P) \geq 1$, alors le corollaire 4.19 montre que P n'est jamais inversible au voisinage de x dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$. Néanmoins, on a vu dans la preuve de la proposition 5.4 que $\mathcal{J}_k(U)$ contient des éléments P vérifiant $\overline{N}_k(P) = 0$ lorsque la section nulle n'est pas une composante irréductible. Soit P un tel élément. L'hypothèse $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,\xi)} = (\tilde{\mathcal{M}}_{k,r})_x \neq 0$ implique que le coefficient constant a_0 de P s'annule en x . Autrement P serait inversible au voisinage de tout point $(x, \xi) \neq (t, 0)$ dans $\mathcal{F}_{k,r}$ d'après la proposition 4.26 puisque $\overline{N}_k(P) = 0$ implique $\overline{n}_k(P) = 0$ et puisque a_0 serait inversible au voisinage de x . Ceci impliquerait que $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,\xi)} = (\tilde{\mathcal{M}}_{k,r})_x = 0$. Ainsi, aucun élément P de $\mathcal{J}_k(U)$ vérifiant $\overline{N}_k(P) = 0$ n'est

inversible au voisinage de x . On en déduit que $(\mathcal{M}_k)_x \neq 0$. Le support du module $\mathcal{M}_{k,r}^*$ contient donc la droite verticale d'abscisse x . \square

5.2 $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ -module coadmissible associé à un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible

On va maintenant associer à tout $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible \mathcal{M} un $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ -module coadmissible \mathcal{M}_r^* , où $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ est la limite projective sur k des faisceaux d'algèbres $\mathcal{F}_{k,r}^*$. Le module \mathcal{M}_r^* est simplement la limite projective sur k des $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -modules cohérents $\mathcal{M}_{k,r}^*$. L'inégalité de Bernstein pour le support $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ découle directement des inégalités de Bernstein pour les $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -modules cohérents $\mathcal{M}_{k,r}^*$.

Le faisceau $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$

On considère les morphismes de transition $\mathcal{F}_{k+1,r}^* \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}^*$ induits localement sur les ouverts par l'inclusion $\mathcal{F}_{k+1,r}(\pi(V)) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(\pi(V))$ lorsque $V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset$ et par l'inclusion $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(\pi(V)) \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\pi(V))$ dans le cas où $V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset$. Comme pour $\mathcal{F}_{\infty,r}$, on définit le faisceau $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ comme la limite projective sur $k \geq r$ des faisceaux $\mathcal{F}_{k,r}^*$. On déduit de la proposition 4.24 et du corollaire 2.2.20 de [6] que les morphismes de transition $\mathcal{F}_{k+1,r}^* \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}^*$ sont plats à gauche et à droite.

Définition 5.8. On pose $\mathcal{F}_{\infty,r}^* = \varprojlim_{k \geq r} \mathcal{F}_{k,r}^*$.

On vérifie que $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ est un faisceau sur le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ défini localement par les algèbres de Fréchet-Stein $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ et $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$:

$$\mathcal{F}_{\infty,r}^*(V) = \begin{cases} \mathcal{F}_{\infty,r}(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset \\ \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset \end{cases}$$

Les $\mathcal{F}_{\infty,r}$ -modules $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$

On se donne maintenant un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$. Pour tout $k \geq r$, on rappelle que

$$\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_k$$

C'est un $\mathcal{F}_{k,r}$ -module cohérent. On note g_k le morphisme de transition $\mathcal{M}_{k+1} \rightarrow \mathcal{M}_k$ et $i_{k,r} : \mathcal{F}_{k+1,r} \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}$ le morphisme donné localement par l'inclusion de $\mathcal{F}_{k+1,r}(U)$ dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. On considère le morphisme de transition $g_{k,r} = i_{k,r} \otimes g_k : \tilde{\mathcal{M}}_{k+1,r} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{k,r}$. Il est $\mathcal{F}_{k+1,r}$ -linéaire. Pour ces morphismes de transition, on pose

$$\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = \varprojlim_{k \geq r} \tilde{\mathcal{M}}_{k,r}$$

Proposition 5.9. *On a $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} \simeq \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\mathcal{F}_{k+1,r}} \tilde{\mathcal{M}}_{k+1,r}$. Autrement dit, $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$ est un $\mathcal{F}_{\infty,r}$ -module coadmissible.*

Démonstration. L'algèbres $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ est naturellement un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ -module via la composition des morphismes d'algèbres $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$. Ainsi, $\mathcal{F}_{k,r}$ est un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module. On dispose de l'isomorphisme suivant de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\mathcal{F}_{k+1,r}} \tilde{\mathcal{M}}_{k+1,r} &= \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\mathcal{F}_{k+1,r}} \mathcal{F}_{k+1,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_{k+1} \\ &\simeq \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_{k+1} \end{aligned}$$

La structure de $\mathcal{F}_{k,r}$ -modules prolonge celle de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules. Cet isomorphisme est donc un isomorphisme de $\mathcal{F}_{k,r}$ -modules. Comme $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_{k+1} \simeq \mathcal{M}_k$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_{k+1} &\simeq \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_{k+1} \\ &\simeq \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_k = \tilde{\mathcal{M}}_{k,r} \end{aligned}$$

en tant que $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules. Puisque la structure de $\mathcal{F}_{k,r}$ -modules étend celle de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules, c'est aussi un isomorphisme de $\mathcal{F}_{k,r}$ -modules. On obtient donc l'isomorphisme souhaité de $\mathcal{F}_{k,r}$ -modules :

$$\mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\mathcal{F}_{k+1,r}} \tilde{\mathcal{M}}_{k+1,r} \simeq \tilde{\mathcal{M}}_{k,r}$$

□

On note $\text{Supp } \tilde{\mathcal{M}}_{k,r}$ le support de $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r}$ comme faisceau sur le schéma formel \mathfrak{X} . Puisque $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r}$ est un $\mathcal{F}_{k,r}$ -module cohérent, il s'agit d'un fermé de \mathfrak{X} . Soit $y \in \mathfrak{X}$, l'isomorphisme $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} \simeq \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\mathcal{F}_{k+1,r}} \tilde{\mathcal{M}}_{k+1,r}$ induit un isomorphisme

$$(\tilde{\mathcal{M}}_{k,r})_y \simeq (\mathcal{F}_{k,r})_y \otimes_{(\mathcal{F}_{k+1,r})_y} (\tilde{\mathcal{M}}_{k+1,r})_y$$

En particulier, $\text{Supp } \tilde{\mathcal{M}}_{k,r} \subset \text{Supp } \tilde{\mathcal{M}}_{k+1,r}$. On note $\text{Supp } \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$ le support de $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$ en tant que faisceau sur le schéma \mathfrak{X} .

Lemme 5.10. *Le support de $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$ coïncide avec la fermeture de l'union croissante des supports des $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r}$:*

$$\text{Supp } \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = \overline{\bigcup_{k \geq r} \text{Supp } \tilde{\mathcal{M}}_{k,r}}$$

Démonstration. Soit $x \in \mathfrak{X}$. On montre que $(\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r})_x \neq 0$ si et seulement si $(\tilde{\mathcal{M}}_{k,r})_x \neq 0$ pour k suffisamment grand. L'égalité des supports s'obtient ensuite en prenant la fermeture.

Il est clair que $(\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r})_x \neq 0$ implique $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_x \neq 0$ pour k suffisamment grand. Comme $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$ est un module coadmissible, on a $\mathcal{M}_{k,r}^* \simeq \mathcal{F}_{k+1,r} \otimes_{\mathcal{F}_{\infty,r}} \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$. Il en découle que

$$(\mathcal{M}_{k,r}^*)_x \simeq (\mathcal{F}_{k+1,r})_x \otimes_{(\mathcal{F}_{\infty,r})_x} (\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r})_x$$

On en déduit que $(\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r})_x = 0$ implique $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_x = 0$. On a donc démontré l'équivalence souhaitée. \square

Exemple 5.11. On suppose que la courbe formelle \mathfrak{X} est affine munie d'une coordonnée locale. Soit P un opérateur de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(\mathfrak{X})$ et $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$. C'est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible. On a $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r}/P$ et $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = \mathcal{F}_{\infty,r}/P$.

1. Si P est un opérateur infini, alors P n'est jamais inversible dans $\mathcal{F}_{\infty,r}(\mathfrak{X})$ d'après la proposition 4.34. Ceci implique que P n'est pas inversible dans $\mathcal{F}_{k,r}(\mathfrak{X})$ pour k suffisamment grand. Ainsi, $\text{Supp } \mathcal{F}_{k,r}/P = \mathfrak{X}$ pour k assez grand. On en déduit que $\text{Supp } \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = \mathfrak{X}$.

Prenons par exemple $P = \prod_{n \geq 1} (1 - a_n \cdot \omega^n \cdot \partial) \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(\mathfrak{X})$ avec $a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X})$ de norme un. Alors P s'écrit

$$P = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cdot \omega^{n(n+1)/2} \cdot \partial^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cdot \omega^{n((n+1)/2-k)} \cdot (\omega^k \partial)^n$$

avec $\beta_n = \varepsilon_n \cdot a_1 \dots a_n + \alpha_n$ où $\varepsilon_n \in \mathcal{V}^\times$ et $|\alpha_n| < 1$. On a donc $|\beta_n| = 1$. On observe que $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P) = k$. De plus, pour que P soit inversible dans $\mathcal{F}_{k,r}(\mathfrak{X})$, on doit avoir (proposition 4.26) :

$$\forall n \in \{0, \dots, k-1\}, \quad |\omega|^{n((n+1)/2-k)} \cdot p^{(k-r)(k-n)} < |\omega|^{k((k+1)/2-k)}$$

Cette condition se réécrit

$$\forall n \in \{0, \dots, k-1\}, \quad \frac{k(k+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} + r(n-k) < 0$$

Pour $n = 0$, on obtient $\frac{k(k+1)}{2} - rk < 0$. Ce n'est possible que pour $\frac{k+1}{2} < r$. Ainsi dès que k est supérieur ou égale à $2r - 1$, P n'est jamais inversible dans $\mathcal{F}_{k,r}(\mathfrak{X})$ et $\text{Supp } \mathcal{F}_{k,r}/P = \mathfrak{X}$.

2. On suppose maintenant que $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \partial^n$ est un opérateur fini d'ordre d . Pour k suffisamment grand, disons $k \geq k_0$, $\overline{N}_k(P) = d$. Pour r assez grand, disons $r \geq r_0$, et pour $k \geq k'_0 = \max\{k_0, r_0\}$, P vérifie la condition 3 de la proposition 4.26 :

$$\forall n \in \{0, \dots, d-1\}, \quad |a_n| \cdot p^{r(d-n)} < |a_d|$$

Ainsi pour tout $k \geq k'_0$ et pour tout $r \geq r_0$, P est inversible dans $\mathcal{F}_{k,r}$ au voisinage de x si et seulement si son coefficient dominant a_d est inversible au voisinage de x

(proposition 4.26). Dans ce cas, $\text{Supp } \tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = V(a_d)$. On en déduit que $\text{Supp } \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = V(a_d)$ pour tout entier $r \geq r_0$.

Pour les autres valeurs de r , P n'est jamais inversible. Donc $\text{Supp } \tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathfrak{X}$ pour tout k dès que $r < r_0$ en prenant r_0 minimal. Ainsi, $\text{Supp } \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = \mathfrak{X}$ pour $r < r_0$.

Le $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ -module \mathcal{M}_r^*

On considère toujours un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$. Pour $k \geq r \geq 1$, les morphismes de transition $\tilde{\mathcal{M}}_{k+1,r} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{k,r}$ et $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ induisent des morphismes de transition $\mathcal{M}_{k+1,r}^* \rightarrow \mathcal{M}_{k,r}^*$. On définit maintenant un $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ -module \mathcal{M}_r^* à partir de \mathcal{M} en prenant la limite projective sur k des $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -modules cohérents $\mathcal{M}_{k,r}^*$. Ce module va être coadmissible.

Définition 5.12. On pose $\mathcal{M}_r^* = \varprojlim_{k \geq r} \mathcal{M}_{k,r}^*$.

Le $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ -module $\mathcal{M}_{k,r}^*$ est caractérisé localement sur les ouverts V de $T^*\mathfrak{X}$ par

$$\mathcal{M}_r^*(V) = \begin{cases} \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset \\ \mathcal{M}(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset \end{cases}$$

Comme $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$ est un $\mathcal{F}_{\infty,r}$ -module coadmissible et comme \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible, \mathcal{M}_r^* est un $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ -module coadmissible.

Remarque 5.13. Soient \mathcal{M} et \mathcal{N} deux $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles. S'il existe un entier $r \geq 1$ tel que $\mathcal{M}_r^* = \mathcal{N}_r^*$, alors $\mathcal{M} = \mathcal{N}$. En effet, pour tout ouvert V de $T^*\mathfrak{X}$ interceptant la section nulle, on a par hypothèse $\mathcal{M}_r^*(\pi(V)) = \mathcal{M}(\pi(V)) = \mathcal{N}_r^*(\pi(V)) = \mathcal{N}(\pi(V))$. Puisque les ouverts $\pi(V)$ recouvrent \mathfrak{X} , on en déduit bien l'égalité $\mathcal{M} = \mathcal{N}$. Ainsi $\mathcal{M} = \mathcal{N}$ si et seulement $\mathcal{M}_r^* = \mathcal{N}_r^*$.

On a vu que la suite des supports $(\text{Supp } \tilde{\mathcal{M}}_{k,r})_{k \geq r}$ est croissante. On montre de manière analogue que la suite des supports $(\text{Supp } \mathcal{M}_k)_{k \geq 1}$ est elle aussi croissante. On en déduit que la suite des supports des modules $\mathcal{M}_{k,r}^*$ est croissante. Soit $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ le support de \mathcal{M}_r^* en tant que faisceau sur le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$. On démontre exactement comme dans le lemme 5.10 le résultat suivant.

Lemme 5.14. Le support de \mathcal{M}_r^* est égal à la fermeture de l'union croissante des supports des modules $\mathcal{M}_{k,r}^*$:

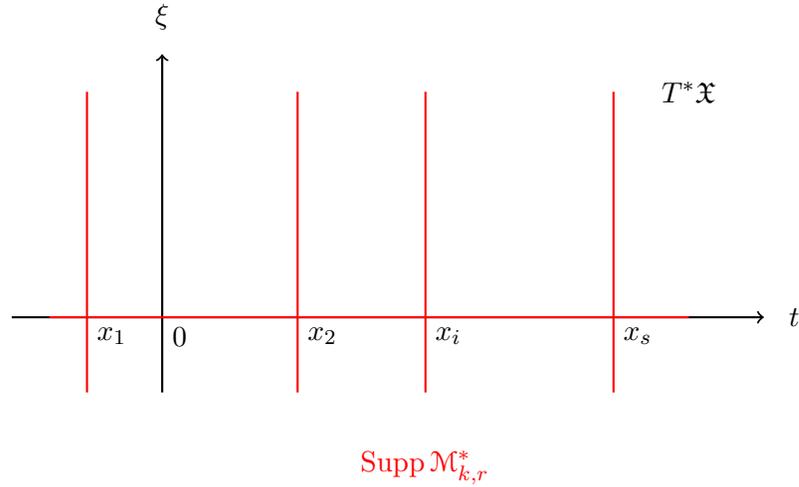
$$\text{Supp } \mathcal{M}_r^* = \overline{\bigcup_{k \geq r} \text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*} \subset T^*\mathfrak{X}$$

Lorsque \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible non nul, les supports $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ sont des parties fermées coniques de $T^*\mathfrak{X}$. On en déduit que $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ est une aussi une partie fermée conique de $T^*\mathfrak{X}$.

Exemple 5.15. On suppose que $\mathfrak{X} = U$ est affine. On rappelle que T^*X et $T^*\mathfrak{X}$ ont le même espace topologique. On note (t, ξ) les coordonnées locales de $T^*\mathfrak{X}$ associées à la coordonnée étale de $\mathfrak{X} = U$. Soit $P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}(U)$. On considère le $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}$ -module coadmissible $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}/P = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ avec $\mathcal{M}_k = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}/P$.

On a $\widetilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r}/P$. Soit V un ouvert de $T^*\mathfrak{X}$. Si $V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset$, alors $\mathcal{M}_{k,r}^*(V) = \mathcal{F}_{k,r}(\pi(V))/P$. Sinon lorsque $V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset$, $\mathcal{M}_{k,r}^*(V) = \mathcal{M}_k(\pi(V)) = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(\pi(V))/P$.

1. On suppose tout d'abord que $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \partial^n$ est un opérateur fini d'ordre d . Pour k assez grand, $\overline{N}_k(P) = d$. A partir de ce rang là et pour r suffisamment grand, le support $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ de $\mathcal{M}_{k,r}^*$ coïncide avec la variété caractéristique de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}/P$. En effet, pour r et k assez grand, le support de $\mathcal{M}_{k,r}^*$ est donné par



Ici x_1, \dots, x_s sont les zéros du coefficient dominant a_d de P . Ce support admet la section nulle comme composante irréductible si et seulement si $d > 0$.

Soit $(x, \xi) \in T^*\mathfrak{X}$. Si $(x, \xi) \in s(\mathfrak{X})$, alors $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,\xi)} = (\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}/P)_x$. Si $d > 0$, alors P n'est jamais inversible dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}$ au voisinage de x . En effet, pour que P soit inversible dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}$, une condition nécessaire est d'avoir $\overline{N}_k(P) = 0$ d'après le corollaire 4.19. Mais pour k suffisamment grand, $\overline{N}_k(P) = d > 0$. On en déduit que $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,\xi)} = (\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}/P)_x \neq 0$. Autrement dit, le support du module $\mathcal{M}_{k,r}^*$ contient la section nulle. Les variétés caractéristiques $\text{Car}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}/P)$ la contiennent aussi. Si $d = 0$, alors $P = a$ est une fonction de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}(\mathfrak{X})$. Le support du module $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}/a$ est l'ensemble des zéros de a (en dehors de ces zéros, a est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}(\mathfrak{X})$). Dans ce cas, le support de $\mathcal{M}_{k,r}^*$ coupe la section nulle seulement en les zéros x_1, \dots, x_s de a . La section nulle n'est donc pas dans le support du module $\mathcal{M}_{k,r}^*$. Lorsque

$d = 0$, la section nulle n'est pas non plus une composante irréductible des variétés caractéristiques $\text{Car}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P)$ pour k suffisamment grand.

On suppose maintenant que $(x, \xi) \in T^*\mathfrak{X} \setminus s(\mathfrak{X})$. Alors $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,\xi)} = (\mathcal{F}_{k,r}/P)_x$. On a déjà vu dans l'exemple 5.11 que pour r et k assez grands, $(\mathcal{F}_{k,r}/P)_x \neq 0$ si et seulement si x est un zéro du coefficient dominant a_d de P . Le support du module $\mathcal{M}_{k,r}^*$ contient ainsi les droites verticales d'équations $x = x_i$, où x_1, \dots, x_s sont les zéros de a_d , auxquelles on a retiré les points de la section nulle. Mais ces points de la section nulle sont compris dans le cas traité précédemment.

Les supports $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ ne dépendent donc plus de k pour k suffisamment grand et $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^* = \text{Car}(\mathcal{M}_k)$ en tant qu'espace topologique. On en déduit que pour r suffisamment grand, le support du module \mathcal{M}_r^* est donné par l'ensemble des points $(x, \xi) \in T^*\mathfrak{X}$ vérifiant $a_d(x) \cdot \xi^d = 0$.

2. On traite maintenant le cas d'un opérateur différentiel infini P . Pour $(x, \xi) \in s(\mathfrak{X})$, on a $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,\xi)} = (\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P)_x$. La suite $(\overline{N}_k(P))_k$ est croissante et diverge vers $+\infty$. Pour k suffisamment grand, P n'est donc pas inversible au voisinage de x dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$. Autrement dit, $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P)_x \neq 0$. Ainsi le support du module $\mathcal{M}_{k,r}^*$ contient la section nulle pour k assez grand. Enfin, pour tout point $(x, \xi) \in T^*\mathfrak{X} \setminus s(\mathfrak{X})$ et pour k suffisamment grand, $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,\xi)} = (\mathcal{F}_{k,r}/P)_x \neq 0$ d'après l'exemple 5.11. On en déduit que $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^* = T^*\mathfrak{X}$ pour k suffisamment grand. Donc si P est infini, alors $\text{Supp } \mathcal{M}_r^* = T^*\mathfrak{X}$ quelque soit $r \in \mathbb{N}^*$.

Inégalité de Bernstein

Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible et r un entier supérieur ou égale à un. Si $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_r^*) = 1$, alors $\mathcal{M} \neq 0$. Dans ce cas $\mathcal{M}_k \neq 0$ pour k assez grand. On a donc $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*) = 1$ pour k suffisamment grand d'après le corollaire 5.6 car $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*) \leq \dim(\text{Supp } \mathcal{M}_r^*) = 1$. On en déduit que les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules \mathcal{M}_k sont holonomes pour k assez grand. En effet, d'après la proposition 5.4, $\text{Car } \mathcal{M}_k \subset \text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ et donc $\dim(\text{Car } \mathcal{M}_k) \leq 1$.

La réciproque est néanmoins fautive. Les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules \mathcal{M}_k peuvent être holonomes pour tout niveau de congruence k , ie $\dim(\text{Car } \mathcal{M}_k) \leq 1$, tout en ayant $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_r^*) = 2$. C'est le cas par exemple pour $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$ dès que P est un opérateur infini de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. En effet, on a vu dans l'exemple 5.15 que $\text{Supp } \mathcal{M}_r^* = T^*\mathfrak{X}$. Cependant, d'après la proposition 2.5, le $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$ est holonome pour tout niveau de congruence k .

On déduit du corollaire 5.6 l'inégalité de Bernstein pour le support du $\mathcal{F}_{\infty,r}$ -module coadmissible \mathcal{M}_r^* . On rappelle que son support vérifie l'égalité suivante

$$\text{Supp } \mathcal{M}_r^* = \overline{\bigcup_{k \geq r} \text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*}$$

Proposition 5.16 (inégalité de Bernstein). *Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible. Alors \mathcal{M} est non nul si et seulement si $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_r^*) \geq 1$.*

Le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ de \mathfrak{X} est noethérien. Ainsi, les supports des $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -modules cohérents $\mathcal{M}_{k,r}^*$ n'ont qu'un nombre fini de composantes irréductibles. On déduit le résultat suivant de la proposition 5.7.

Proposition 5.17. *Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible non nul. Si $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_r^*) = 2$, alors $\text{Supp } \mathcal{M}_r^* = T^*\mathfrak{X}$. Sinon $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_r^*) = 1$ et $\text{Supp } \mathcal{M}_r^* = \text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ pour k suffisamment grand. En particulier, les composantes irréductibles du support $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ sont toutes de dimension un.*

Démonstration. Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible non nul. Si la dimension du support $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ est deux, alors $\text{Supp } \mathcal{M}_r^* = T^*\mathfrak{X}$ puisque le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ est irréductible. On suppose maintenant que $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_r^*) = 1$. On a alors vu que $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*) = 1$ pour k suffisamment grand. On ne considère maintenant que ces niveaux de congruences k . Le support $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles. Elles sont toutes de dimension un. En effet, si une composante irréductible de $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ est réduite à un point, alors ce point appartient à l'un des supports $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ pour k suffisamment grand. Mais les composantes irréductibles des supports $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ sont toutes de dimension un d'après la proposition 5.7. Comme $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^* \subset \text{Supp } \mathcal{M}_r^*$, le support $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ contient cette composante de dimension un. Ainsi ce point ne peut être une composante irréductible de $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$.

Les composantes irréductibles des supports $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ et du support $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ sont donc toutes de dimension un. Pour une raison de dimension, les composantes irréductibles des $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ sont des composantes irréductibles de $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$. On en déduit que $\text{Supp } \mathcal{M}_r^* = \text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ à partir d'un certain niveau de congruence $k \geq r$. En effet, puisque le support $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles, les supports sont nécessairement égaux à partir d'un niveau de congruence k suffisamment grand. \square

5.3 \mathcal{F}_∞^* -module associé à un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible

Les morphismes de transition $\mathcal{F}_{\infty,r} \rightarrow \mathcal{F}_{\infty,r+1}$ et $\text{id} : \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ induisent des morphismes de transition $\mathcal{F}_{\infty,r}^* \rightarrow \mathcal{F}_{\infty,r+1}^*$. Comme $T^*\mathfrak{X}$ est quasi-compacte et comme les morphismes de transition $\mathcal{F}_{\infty,r}^* \rightarrow \mathcal{F}_{\infty,r+1}^*$ sont localement injectifs, la limite inductive des $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ définit un faisceau \mathcal{F}_∞^* sur le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$. Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible. Les $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ -modules coadmissibles \mathcal{M}_r^* admettent des morphismes de transition $\mathcal{M}_r^* \rightarrow \mathcal{M}_{r+1}^*$ induit par des morphismes de transition $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r+1}$ et le morphisme identité $\text{id} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$. On associe alors à \mathcal{M} le \mathcal{F}_∞^* -module $\mathcal{M}_\infty^* = \varinjlim_{r \geq 1} \mathcal{M}_r^*$.

Définition 5.18. *On définit un faisceau sur $T^*\mathfrak{X}$ par $\mathcal{F}_\infty^* = \varinjlim_{r \geq 1} \mathcal{F}_\infty^*$.*

Pour tout ouvert V de $T^*\mathfrak{X}$, on vérifie que

$$\mathcal{F}_\infty^*(V) = \begin{cases} \mathcal{F}_\infty(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset \\ \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset \end{cases}$$

Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible. Pour tout entier $k \geq r$, on rappelle que $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_k$ et que $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = \varprojlim_{k \geq r} \tilde{\mathcal{M}}_{k,r}$ est un $\mathcal{F}_{\infty,r}$ -module coadmissible. Pour $k \geq r+1$, on note $j_{k,r} : \mathcal{F}_{k,r} \rightarrow \mathcal{F}_{k,r+1}$ le morphisme induit localement par les inclusions $\mathcal{F}_{k,r}(U) \subset \mathcal{F}_{k,r+1}(U)$. Les morphismes

$$j_{k,r} \otimes \text{id} : \tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_k \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{k,r+1} = \mathcal{F}_{k,r+1} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_k$$

sont $\mathcal{F}_{k,r}$ -linéaires. Ils commutent avec les morphismes de transition. En effet, le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{M}}_{k,r} & \xrightarrow{j_{k,r} \otimes \text{id}} & \tilde{\mathcal{M}}_{k,r+1} \\ \downarrow g_{k,r} & & \downarrow g_{k,r+1} \\ \tilde{\mathcal{M}}_{k+1,r} & \xrightarrow{j_{k+1,r} \otimes \text{id}} & \tilde{\mathcal{M}}_{k+1,r+1} \end{array}$$

En passant à la limite projective sur $k \geq r+1$, on obtient un morphisme continu $\mathcal{F}_{\infty,r}$ -linéaire $j_r : \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r+1}$. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{k,r+1} \otimes_{\mathcal{F}_{k,r}} \tilde{\mathcal{M}}_{k,r} &= \mathcal{F}_{k,r+1} \otimes_{\mathcal{F}_{k,r}} \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_k \\ &\simeq \mathcal{F}_{k,r+1} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_k \\ &\simeq \tilde{\mathcal{M}}_{k,r+1} \end{aligned}$$

en tant que $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules. Puisque la structure de $\mathcal{F}_{k,r+1}$ -modules étend celle de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules, on obtient un isomorphisme de $\mathcal{F}_{k,r+1}$ -modules

$$\mathcal{F}_{k,r+1} \otimes_{\mathcal{F}_{k,r}} \tilde{\mathcal{M}}_{k,r} \simeq \tilde{\mathcal{M}}_{k,r+1}$$

On en déduit que $\text{Supp } \tilde{\mathcal{M}}_{k,r+1} \subset \text{Supp } \tilde{\mathcal{M}}_{k,r}$. Donc

$$\text{Supp } \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r+1} \subset \text{Supp } \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$$

On rappelle que $\mathcal{F}_\infty = \varinjlim_{r \geq 1} \mathcal{F}_{\infty,r}$. La limite inductive sur r des modules $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$ pour les morphismes $j_r : \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r+1}$ est un préfaisceau de \mathcal{F}_∞ -modules.

On considère les morphismes de transition $\mathcal{M}_r^* \rightarrow \mathcal{M}_{r+1}^*$ induis par les morphismes $j_r : \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r+1}$ et $\text{id} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$. Les inclusions $\text{Supp} \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r+1} \subset \text{Supp} \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$ permettent d'obtenir des inclusions $\text{Supp} \mathcal{M}_r^* \subset \text{Supp} \mathcal{M}_{r+1}^*$.

Définition 5.19.

1. On associe un \mathcal{F}_{∞}^* -module \mathcal{M}_{∞}^* à \mathcal{M} en prenant le faisceautisé du préfaisceau de \mathcal{F}_{∞}^* -modules $\varinjlim_{r \geq 1} \mathcal{M}_r^*$.
2. On définit le support de \mathcal{M}_{∞}^* comme l'intersection décroissante des supports des $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ -modules coadmissibles \mathcal{M}_r^* :

$$\text{Supp} \mathcal{M}_{\infty}^* = \bigcap_{r \geq 1} \text{Supp} \mathcal{M}_r^*$$

Exemple 5.20. On reprend l'exemple 5.15 : $\mathfrak{X} = U$ est affine et $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$ pour un opérateur $P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. On rappelle que $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r}/P$ et que $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = \mathcal{F}_{\infty,r}/P$.

1. Si P est un opérateur infini, alors $\text{Supp} \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = \mathfrak{X}$ pour tout $r \geq 1$ d'après l'exemple 5.15. Ainsi, $\text{Supp} \mathcal{M}_{\infty}^* = T^*\mathfrak{X}$.
2. Si $P = \sum_{v=0}^d a_v \cdot \partial^v$ est un opérateur fini d'ordre d , alors il existe un rang r_0 tel que $\text{Supp} \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = V(a_d)$ pour tout $r \geq r_0$ et $\text{Supp} \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = \mathfrak{X}$ pour tout $r < r_0$. Pour $r \geq r_0$, ces supports sont l'ensemble des abscisses des composantes irréductibles des variétés caractéristiques $\text{Car}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P)$ pour k assez grand. L'exemple 5.15 montre que pour r suffisamment grand, le support de \mathcal{M}_r^* coïncide avec la variété caractéristique de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$ pour k suffisamment grand. Ainsi, le support $\text{Supp} \mathcal{M}_{\infty}^* = \bigcap_{r \geq 1} \text{Supp} \mathcal{M}_r^*$ redonne les variétés caractéristiques $\text{Car}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P)$ pour k suffisamment grand.

5.4 Variété caractéristique

Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible. On rappelle que la suite des supports $(\text{Supp} \mathcal{M}_r^*)_r$ est décroissante. L'objet qui nous intéresse est l'intersection de ces supports. C'est une partie fermée du fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ de \mathfrak{X} . On définit la variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{M})$ de \mathcal{M} comme cette intersection. L'inégalité de Bernstein est vérifiée par cette variété caractéristique : $\mathcal{M} \neq 0$ si et seulement si $\dim \text{Car}(\mathcal{M}) \geq 1$.

Définition 5.21. Pour tout $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible \mathcal{M} , on définit la variété caractéristique de \mathcal{M} par

$$\text{Car}(\mathcal{M}) = \text{Supp} \mathcal{M}_{\infty}^* = \bigcap_{r \geq 1} \text{Supp} \mathcal{M}_r^* \subset T^*\mathfrak{X}$$

Exemple 5.22. On continue l'exemple 5.20. On suppose que $\mathfrak{X} = U$ est affine, que $P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ et que $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ avec $\mathcal{M}_k = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$.

1. Si $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \partial^n$ est un opérateur fini d'ordre d , alors pour k assez grand

$$\text{Car } \mathcal{M} = \left\{ (t, \xi) \in T^*\mathfrak{X} : a_d(x) \cdot \xi^d = 0 \right\} = \text{Car}(\mathcal{M}_k)$$

2. Si P est infini, alors $\text{Car } \mathcal{M} = T^*\mathfrak{X}$.

Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible non nul. Si $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_r^*) = 2$ pour tout $r \geq 1$, alors $\text{Supp } \mathcal{M}_r^* = T^*\mathfrak{X}$ et donc $\text{Car}(\mathcal{M}) = T^*\mathfrak{X}$. Sinon, $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_r^*) = 1$ à partir d'un rang r_0 et $\dim \text{Car}(\mathcal{M}) \leq 1$. On montre dans la proposition suivante que $\dim \text{Car}(\mathcal{M}) \geq 1$. Il s'agit de l'inégalité de Bernstein pour les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules codamissibles : un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible \mathcal{M} est non nul si et seulement si $\dim \text{Car}(\mathcal{M}) \geq 1$.

Proposition 5.23. *Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible non nul. Il existe un rang $r \in \mathbb{N}^*$ à partir duquel $\text{Car}(\mathcal{M}) = \text{Supp } \mathcal{M}_r^*$. Si $\dim(\text{Car}(\mathcal{M})) = 2$, alors $\text{Car}(\mathcal{M}) = T^*\mathfrak{X}$. Sinon, $\dim(\text{Car}(\mathcal{M})) = 1$. On rappelle que pour les niveaux de congruence $k \geq r$ suffisamment grands (dépendant de r), $\text{Supp } \mathcal{M}_r^* = \text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$.*

Démonstration. On suppose que $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_r^*) = 1$ à partir d'un certain rang r_0 . On ne considère maintenant que les rangs r plus grands que r_0 . Puisque $\text{Supp } \mathcal{M}_{r+1}^* \subset \text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ et comme les composantes irréductibles des supports $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ sont toutes de dimension un, les composantes irréductibles de $\text{Supp } \mathcal{M}_{r+1}^*$ sont des composantes irréductibles de $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$.

On suppose que $\dim\left(\bigcap_{r \geq 1} \text{Supp } \mathcal{M}_r^*\right) = 0$. Soit L une composante irréductible de $\text{Supp } \mathcal{M}_{r_0}^*$. Elle est de dimension un. Si L est une composante irréductible de tous les $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$, alors L est aussi une composante irréductible de $\text{Car}(\mathcal{M}) = \bigcap_{r \geq 1} \text{Supp } \mathcal{M}_r^*$. Cela contredit l'hypothèse $\dim \text{Car}(\mathcal{M}) = 0$. On en déduit que L n'est plus une composante irréductible des $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ pour r assez grand. Enfin comme le support $\text{Supp } \mathcal{M}_{r_0}^*$ n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles, aucune composante irréductible de $\text{Supp } \mathcal{M}_{r_0}^*$ n'est une composante irréductible des supports $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ pour un rang r suffisamment grand. Il en découle que $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_r^*) = 0$. Alors $\mathcal{M} = 0$ d'après la proposition 5.17. Puisque $\mathcal{M} \neq 0$, on en déduit que $\dim(\text{Car } \mathcal{M}) = 1$ et que les composantes irréductibles de $\text{Car } \mathcal{M}$ sont les composantes irréductibles communes à tous les supports $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$.

Les supports des modules \mathcal{M}_r^* et la variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{M})$ n'ont qu'un nombre fini de composantes irréductibles. On en déduit que $\text{Car}(\mathcal{M}) = \text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ à partir d'un certain rang r . Enfin, on sait toujours d'après la proposition 5.17 que $\text{Supp } \mathcal{M}_r^* = \text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ pour un niveau de congruence k suffisamment grand. \square

6 $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules holonomes

On regroupe dans cette section finale les propriétés vérifiées par les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles holonomes. Un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible \mathcal{M} est appelé holonome si sa variété caractéristique est de dimension inférieure ou égale à un. De manière équivalente, \mathcal{M} est holonome si et seulement si il existe un ouvert non vide U de \mathfrak{X} tel que $\mathcal{M}|_U$ soit un module

à connexion intégrable. Cette caractérisation n'est vraie qu'en dimension un. Un tel module va être faiblement holonome. On démontre enfin que le dual d'un module holonome reste holonome.

6.1 Variété caractéristique

On introduit maintenant la catégorie des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules holonomes. On démontre que cette catégorie est abélienne. Elle contient les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles de la forme $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$ pour P un opérateur différentiel fini.

Définition 6.1. *Un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible \mathcal{M} est dit holonome si $\dim(\text{Car}(\mathcal{M})) \leq 1$.*

Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible holonome. D'après l'inégalité de Bernstein (proposition 5.23), ou bien $\mathcal{M} = 0$ et $\text{Car}(\mathcal{M}) = \emptyset$, ou bien $\mathcal{M} \neq 0$ et $\dim \text{Car}(\mathcal{M}) = 1$. Par ailleurs, si $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$, alors les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents \mathcal{M}_k sont tous holonomes à partir d'un certain niveau de congruence k . En effet, $\text{Car } \mathcal{M}_k \subset \text{Supp } \mathcal{M}_{k,k}^* \subset \text{Supp } \mathcal{M}_k^* = \text{Car}(\mathcal{M})$ pour k suffisamment grand. Il en découle que $\dim(\text{Car } \mathcal{M}_k) \leq 1$.

Exemple 6.2. D'après l'exemple 5.22, le $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$ est holonome si et seulement si P est un opérateur différentiel fini.

On établit dans la suite de cette section que la catégorie des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules holonomes est abélienne. Soit $0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$ une suite exacte de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles. La proposition 6.5 assure que $\text{Car}(\mathcal{N}) = \text{Car}(\mathcal{M}) \cup \text{Car}(\mathcal{L})$. Il en résulte que le module \mathcal{N} est holonome si et seulement les modules \mathcal{M} et \mathcal{L} le sont.

Cette égalité des supports n'est pas immédiate. En effet, bien que le morphisme de faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}$ soit probablement plat à gauche et à droite, il faut se passer du fait qu'une suite exacte de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents reste exacte après tensorisation par $\mathcal{F}_{k,r}$.

On note $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$, $\mathcal{N} = \varprojlim_k \mathcal{N}_k$ et $\mathcal{L} = \varprojlim_k \mathcal{L}_k$. Par définition, \mathcal{M}_k , \mathcal{N}_k et \mathcal{L}_k sont des $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents. La suite exacte précédente induit une suite exacte de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules pour tout niveau de congruence k :

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}_k \longrightarrow \mathcal{N}_k \longrightarrow \mathcal{L}_k \longrightarrow 0$$

On rappelle que $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_k$, $\tilde{\mathcal{N}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{N}_k$ et $\tilde{\mathcal{L}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{L}_k$. On dispose alors de la suite exacte suivante de $\mathcal{F}_{k,r}$ -modules cohérents

$$\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} \longrightarrow \tilde{\mathcal{N}}_{k,r} \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_{k,r} \longrightarrow 0$$

Ainsi, on ne sait pas si la première flèche de la suite exacte de $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -modules cohérents

$$\mathcal{M}_{k,r}^* \longrightarrow \mathcal{N}_{k,r}^* \longrightarrow \mathcal{L}_{k,r}^* \longrightarrow 0$$

est injective. On en déduit seulement que

$$\text{Supp}(\mathcal{N}_{k,r}^*) \subset \text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*) \cup \text{Supp}(\mathcal{L}_{k,r}^*)$$

Ainsi \mathcal{N} est holonome dès que \mathcal{M} et \mathcal{L} le sont. Il reste à démontrer la réciproque. Pour cela, on utilise le fait qu'un module coadmissible \mathcal{M} est holonome si et seulement si il existe un ouvert non vide U de \mathfrak{X} tel que $\mathcal{M}|_U$ soit un module à connexion intégrable, ie $\text{Car}(\mathcal{M}|_U) \subset \mathfrak{X}$. Cette caractérisation des modules holonomes n'est vraie que lorsque \mathfrak{X} est de dimension un.

On identifie dans la suite le schéma \mathfrak{X} avec la section nulle $s : \mathfrak{X} \rightarrow T^*\mathfrak{X}$ du fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ de \mathfrak{X} .

Définition 6.3. Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible. On dit que \mathcal{M} est un module à connexion intégrable si $\text{Car}(\mathcal{M}) \subset \mathfrak{X}$.

On démontrera dans la section suivante que tout $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module à connexion est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module libre de rang fini. La proposition suivante fait le lien entre les modules à connexion intégrable et les modules holonomes.

Proposition 6.4. Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible. Alors \mathcal{M} est holonome si et seulement si il existe un ouvert non vide U de \mathfrak{X} tel que $\mathcal{M}|_U$ soit un module à connexion intégrable.

Démonstration. On suppose dans un premier temps que \mathcal{M} est holonome. La variété caractéristique de \mathcal{M} a un nombre fini de composantes irréductibles verticales. On note U l'ouvert de \mathfrak{X} obtenu en ôtant à \mathfrak{X} les abscisses des composantes verticales de $\text{Car}(\mathcal{M})$. Par construction de U , on a $\text{Car}(\mathcal{M}|_U) \subset U$. Autrement dit, $\mathcal{M}|_U$ est un module à connexion par définition.

Réciproquement, soit U un ouvert non vide de \mathfrak{X} tel que $\mathcal{M}|_U$ soit un module à connexion. Par définition, $\text{Car}(\mathcal{M}|_U) \subset U$. Si \mathcal{M} n'est pas holonome, alors $\text{Car}(\mathcal{M}) = T^*\mathfrak{X}$ d'après la proposition 5.23. On aurait alors $\text{Car}(\mathcal{M}|_U) = T^*U$. Cela contredit l'hypothèse $\text{Car}(\mathcal{M}|_U) \subset U$. On en déduit que \mathcal{M} est holonome. \square

Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un module à connexion intégrable : $\text{Car}(\mathcal{M}) \subset |\mathfrak{X}| = |X|$. D'après l'inégalité de Bernstein, ou bien $\text{Car}(\mathcal{M}) = \emptyset$ et $\mathcal{M} = 0$, ou bien $\text{Car}(\mathcal{M}) = |X|$. On suppose que \mathcal{M} est non nul. Il existe un rang $r \geq 1$ à partir duquel $\text{Supp} \mathcal{M}_r^* = \text{Car}(\mathcal{M}) = |X|$. Ainsi pour tout entier $k \geq r$, $\text{Car}(\mathcal{M}_k) \subset \text{Car}(\mathcal{M}) = |X|$. Puisque \mathcal{M} est non nul, les modules \mathcal{M}_k sont non nuls pour k assez grand. L'hypothèse $\text{Car}(\mathcal{M}) = \mathfrak{X}$ implique donc que

$\text{Car}(\mathcal{M}_k) = X$ à partir d'un niveau de congruence k suffisamment grand. Autrement dit, il existe un niveau de congruence à partir duquel les modules \mathcal{M}_k sont tous des modules à connexion intégrable. On sait alors d'après le lemme 3.23 de [4] que \mathcal{M}_k est localement de la forme $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$, pour P un opérateur différentiel fini unitaire. Cette propriété sert dans la preuve de la proposition 6.5.

Proposition 6.5. *Soit $0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$ une suite exacte de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles. Alors $\text{Car}(\mathcal{N}) = \text{Car}(\mathcal{M}) \cup \text{Car}(\mathcal{L})$. En particulier, \mathcal{N} est holonome si et seulement si \mathcal{M} et \mathcal{L} le sont aussi.*

Démonstration. On note $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$, $\mathcal{N} = \varprojlim_k \mathcal{N}_k$ et $\mathcal{L} = \varprojlim_k \mathcal{L}_k$. Pour $k \geq r$, on rappelle que le lecteur dispose d'une suite exacte de $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -modules cohérents

$$\mathcal{M}_{k,r}^* \longrightarrow \mathcal{N}_{k,r}^* \longrightarrow \mathcal{L}_{k,r}^* \longrightarrow 0 \quad (4)$$

En prenant les supports de ces modules, on obtient l'inclusion

$$\text{Supp}(\mathcal{N}_{k,r}^*) \subset \text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*) \cup \text{Supp}(\mathcal{L}_{k,r}^*) \quad (5)$$

On suppose dans un premier temps que les modules \mathcal{M} et \mathcal{L} sont tous deux holonomes. D'après la proposition 5.23, il existe un rang $r \geq 1$ pour lequel $\text{Car}(\mathcal{M}) = \text{Supp} \mathcal{M}_r^*$, $\text{Car}(\mathcal{N}) = \text{Supp} \mathcal{N}_r^*$ et $\text{Car}(\mathcal{L}) = \text{Supp} \mathcal{L}_r^*$. De plus, il existe un niveau de congruence $k_r \geq r$ tel que $\text{Car}(\mathcal{M}) = \text{Supp} \mathcal{M}_r^* = \text{Supp} \mathcal{M}_{k,r}^*$ et $\text{Car}(\mathcal{L}) = \text{Supp} \mathcal{L}_r^* = \text{Supp} \mathcal{L}_{k,r}^*$ pour tout entier $k \geq k_r$. La relation 5 montre que pour tout $k \geq k_r$,

$$\text{Supp} \mathcal{N}_{k,r}^* \subset \text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*) \cup \text{Supp}(\mathcal{L}_{k,r}^*) = \text{Car}(\mathcal{M}) \cup \text{Car}(\mathcal{L})$$

On en déduit que

$$\text{Supp} \mathcal{N}_r^* = \overline{\bigcup_{k \geq r} \text{Supp} \mathcal{N}_{k,r}^*} \subset \text{Car}(\mathcal{M}) \cup \text{Car}(\mathcal{L})$$

Il en découle que

$$\text{Car}(\mathcal{N}) = \bigcap_{r \geq 1} \text{Supp} \mathcal{N}_r^* \subset \text{Supp} \mathcal{N}_r^* \subset \text{Car}(\mathcal{M}) \cup \text{Car}(\mathcal{L})$$

On obtient donc l'inclusion $\text{Car}(\mathcal{N}) \subset \text{Car}(\mathcal{M}) \cup \text{Car}(\mathcal{L})$. Autrement dit, \mathcal{N} est holonome dès que \mathcal{M} et \mathcal{L} le sont.

On suppose maintenant que le $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible \mathcal{N} est holonome. Si $\mathcal{N} = 0$, alors $\mathcal{M} = \mathcal{L} = 0$ et il n'y a rien à faire. On considère que $\mathcal{N} \neq 0$. On sait d'après la proposition 5.23 que $\dim \text{Car}(\mathcal{N}) = 1$ et que $\text{Car}(\mathcal{N}) = \text{Supp} \mathcal{N}_{k,r}^*$ pour k et r suffisamment grands.

Le support $\text{Supp} \mathcal{L}_{k,r}^*$ est contenu dans la variété caractéristique $\text{Supp} \mathcal{N}_{k,r}^* = \text{Car}(\mathcal{N})$ toujours d'après la suite exacte 4. Puisque ces inclusions sont vérifiées pour tous les niveaux

de congruence k suffisamment grands, on a $\text{Supp}(\mathcal{L}_r^*) \subset \text{Car}(\mathcal{N})$. Il en découle que $\text{Car}(\mathcal{L}) \subset \text{Supp}(\mathcal{L}_r^*) \subset \text{Car}(\mathcal{N})$. Ainsi, la dimension de la variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{L})$ est inférieure ou égale à la dimension de $\text{Car}(\mathcal{N})$. Autrement dit, \mathcal{L} est holonome car $\dim \text{Car}(\mathcal{N}) = 1$.

On note U l'ouvert de \mathfrak{X} obtenu en retirant les abscisses des composantes verticales de la variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{N})$. On sait d'après la proposition 6.4 que

$$\text{Car}(\mathcal{N}|_U) \subset U$$

On note $\pi : T^*\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ la projection canonique. Soient toujours $r \geq 1$ et $k_r \geq r$ tels que $\text{Car}(\mathcal{M}) = \text{Supp} \mathcal{M}_r^* = \text{Supp} \mathcal{M}_{k,r}^*$, $\text{Car}(\mathcal{L}) = \text{Supp} \mathcal{L}_r^* = \text{Supp} \mathcal{L}_{k,r}^*$ et $\text{Car}(\mathcal{N}) = \text{Supp} \mathcal{N}_r^* = \text{Supp} \mathcal{N}_{k,r}^*$ pour tout entier $k \geq k_r$. En vertu de la proposition 5.4, on a

$$\text{Car}(\mathcal{L}_k|_U) \subset \text{Supp}(\mathcal{L}_{k,r|\pi^{-1}(U)}^*) = \text{Car}(\mathcal{L}|_U) \subset \text{Car}(\mathcal{N}|_U) \subset U$$

Ainsi, pour tout entier $k \geq k_r$, $\mathcal{L}_k|_U$ est un module à connexion intégrable. Le lemme 3.23 de [4] implique que localement, sur un voisinage $V \subset U$ de tout point donné de U , le module $\mathcal{L}_k|_V$ est de la forme $\widehat{\mathcal{D}}_{V,k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P_k$ pour un certain opérateur P_k de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(V)$. On a

$$\text{Tor}_{\widehat{\mathcal{D}}_{V,k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^0(\mathcal{F}_{k,r|V}, \mathcal{L}_k|_V) \simeq \mathcal{F}_{k,r|V} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{V,k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{L}_k|_V = \tilde{\mathcal{L}}_{k,r|V} \simeq \mathcal{F}_{k,r|V}/P_k$$

On rappelle que $\mathcal{F}_{k,r}(V)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{E}_k(V)$ et que la norme de $|\cdot|_k$ de $\mathcal{E}_k(V)$ est multiplicative. Ainsi l'algèbre $\mathcal{F}_{k,r}(V)$ est intègre. La multiplication par P dans $\mathcal{F}_{k,r}(V)$ est donc injective. On en déduit que

$$\text{Tor}_{\widehat{\mathcal{D}}_{V,k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1(\mathcal{F}_{k,r|V}, \mathcal{L}_k|_V) = 0$$

En effet, une résolution projective de $\tilde{\mathcal{L}}_{k,r|V}$ en tant que $\mathcal{F}_{k,r|V}$ -module à gauche est donnée par la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{k,r|V} \xrightarrow{\times P} \mathcal{F}_{k,r|V} \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_{k,r|V} \simeq \mathcal{F}_{k,r|V}/P_k \longrightarrow 0$$

On obtient finalement la suite exacte courte suivante de $\mathcal{F}_{k,r|U}$ -modules cohérents

$$0 \longrightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{k,r|U} \longrightarrow \tilde{\mathcal{N}}_{k,r|U} \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_{k,r|U} \longrightarrow 0$$

Il en résulte que la suite de $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -modules cohérents

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}_{k,r|\pi^{-1}(U)}^* \longrightarrow \mathcal{N}_{k,r|\pi^{-1}(U)}^* \longrightarrow \mathcal{L}_{k,r|\pi^{-1}(U)}^* \longrightarrow 0$$

est exacte. Autrement dit, $\text{Car}(\mathcal{N}_{k,r|\pi^{-1}(U)}^*) = \text{Car}(\mathcal{M}_{k,r|\pi^{-1}(U)}^*) \cup \text{Car}(\mathcal{L}_{k,r|\pi^{-1}(U)}^*)$. Comme $\text{Car}(\mathcal{M}|_U) = \text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r|\pi^{-1}(U)}^*)$, $\text{Car}(\mathcal{L}|_U) = \text{Supp}(\mathcal{L}_{k,r|\pi^{-1}(U)}^*)$ et $\text{Car}(\mathcal{N}|_U) = \text{Supp}(\mathcal{N}_{k,r|\pi^{-1}(U)}^*)$ pour tout entier $k \geq k_r$, il en découle que

$$\text{Car}(\mathcal{N}|_U) = \text{Car}(\mathcal{M}|_U) \cup \text{Car}(\mathcal{L}|_U) \subset U$$

On en déduit que $\text{Car}(\mathcal{M}|_U) \subset U$ et donc \mathcal{M} est holonome d'après la proposition 6.4. De plus, l'égalité des variétés caractéristiques sur U implique que les composantes irréductibles verticales de $\text{Car}(\mathcal{M})$ et de $\text{Car}(\mathcal{L})$ sont parmi celles de $\text{Car}(\mathcal{N})$. Comme ses variétés caractéristiques coïncident au niveau de la section nulle, on obtient l'inclusion

$$\text{Car}(\mathcal{M}) \cup \text{Car}(\mathcal{L}) \subset \text{Car}(\mathcal{N})$$

Enfin, puisque \mathcal{M} et \mathcal{L} sont holonomes, l'inclusion réciproque est vérifiée. Ainsi, dès que \mathcal{N} est holonome ou dès que \mathcal{L} et \mathcal{M} sont holonomes, on a

$$\text{Car}(\mathcal{N}) = \text{Car}(\mathcal{M}) \cup \text{Car}(\mathcal{L})$$

On a donc démontré que \mathcal{N} est holonome si et seulement si \mathcal{M} et \mathcal{L} le sont aussi. Si \mathcal{N} n'est pas holonome et si \mathcal{M} ou \mathcal{L} n'est pas holonome, alors la proposition 5.23 implique que

$$\text{Car}(\mathcal{N}) = T^*\mathfrak{X} = \text{Car}(\mathcal{M}) \cup \text{Car}(\mathcal{L})$$

Autrement dit, l'égalité des supports tient dans tous les cas possibles! \square

6.2 Propriétés

On rappelle qu'un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible \mathcal{M} est un module à connexion intégrable si $\text{Car}(\mathcal{M}) \subset \mathfrak{X}$. On démontre dans cette partie que les modules à connexion sont des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -modules libres de rang fini. Enfin, on établit une caractérisation cohomologique des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules holonomes.

Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module à connexion. Il a été vu dans la section précédente que $\text{Car}(\mathcal{M}_k) \subset X$ pour un niveau de congruence k suffisamment grand. On sait alors, d'après le lemme 3.23 de [4], que chaque \mathcal{M}_k est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module libre de rang fini. On démontre que les rangs des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -modules libres \mathcal{M}_k ne dépendent pas de k . On en déduit ensuite que \mathcal{M} est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module libre de rang fini.

Lemme 6.6. *Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module holonome tel que $\text{Car}(\mathcal{M}) = \mathfrak{X}$. Alors pour k suffisamment grand, les \mathcal{M}_k sont des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -modules libres de même rang fini.*

Démonstration. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ un rang pour lequel $\text{Supp } \mathcal{M}_r^* = \text{Car}(\mathcal{M}) = \mathfrak{X}$. On ne considère maintenant que les niveaux de congruences $k \geq r$ pour lesquels $\text{Car}(\mathcal{M}_k) = X$. Soit x un point de \mathfrak{X} . Quitte à étendre les scalaires par une extension finie de K , on peut supposer que x est un point κ -rationnel. D'après le lemme 3.23 de [4], il existe un voisinage ouvert U_k de x dans \mathfrak{X} et un opérateur différentiel P_k de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U_k)$ fini dominant tel que $\mathcal{M}_k|_{U_k} \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{U_k,k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P_k$. Si d_k est l'ordre de P_k , alors \mathcal{M}_k est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module libre de rang d_k . Il suffit de montrer que le degré d_k ne dépend pas de k . Puisque $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible, on a

$$\widehat{\mathcal{D}}_{U_k \cap U_{k+1},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{U_k \cap U_{k+1},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \widehat{\mathcal{D}}_{U_k \cap U_{k+1},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}/P_{k+1} \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{U_k \cap U_{k+1},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P_k$$

Autrement dit,

$$\widehat{\mathcal{D}}_{U_k \cap U_{k+1}, k, \mathbb{Q}}^{(0)} / P_{k+1} \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{U_k \cap U_{k+1}, k, \mathbb{Q}}^{(0)} / P_k$$

Le corollaire 2.16 de [4] implique que $\overline{N}_k(P_k) = \overline{N}_k(P_{k+1})$. De plus, on sait par le lemme 3.2 que $\overline{N}_{k+1}(P_{k+1}) \geq \overline{N}_k(P_{k+1})$. On en déduit que la suite $(\overline{N}_k(P_k))_k$ est croissante. Il faut prouver qu'elle est stationnaire.

On suppose par l'absurde que la suite $(\overline{N}_k(P_k))_k$ diverge vers l'infini. Soit $k \geq r$ un entier tel que $d_k = \overline{N}_k(P_k) > d_{k-1} = \overline{N}_{k-1}(P_k) = \overline{N}_{k-1}(P_{k-1})$. L'hypothèse

$$\text{Supp}((\mathcal{M}_{k,r}^*)_{|\pi^{-1}(U_k)}) = \text{Supp}((\mathcal{F}_{k,r}^*)_{|\pi^{-1}(U_k)} / P_k) \subset \text{Car}((\mathcal{M})_{|U_k}) = U_k$$

implique que P_k est inversible dans $\mathcal{F}_{k,r}(U_k)$. Autrement le support du module $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{|\pi^{-1}(U_k)}$ contiendrait des composantes irréductibles verticales. On écrit $P_k = \sum_{n=0}^{d_k} a_n \cdot \partial^n$, où $a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}(U_k)$. On rappelle que $P_k \in (\mathcal{F}_{k,r}(U_k))^\times$ si et seulement si $\overline{N}_k(P_k) = \overline{n}_k(P_k) = d_k$ et

$$\forall n \in \{0, \dots, d_k - 1\}, \quad |a_n| < |a_{d_k}| \cdot p^{r(d_k - n)}$$

Pour $n = d_{k-1}$, on obtient

$$|a_{d_{k-1}}| < |a_{d_k}| \cdot p^{r(d_k - d_{k-1})}$$

La condition $d_{k-1} < d_k$ implique

$$|a_{d_{k-1}}| > |a_{d_k}| \cdot p^{(k-1)(d_k - d_{k-1})}$$

Comme la suite $(\overline{N}_k(P_k))_k$ n'est pas bornée, on peut choisir $k > r + 1$. Sous cette hypothèse, les deux inégalités précédentes sont incompatibles! On en déduit par l'absurde que la suite $(d_k)_k$ est stationnaire. \square

Ce lemme permet d'obtenir l'équivalence suivante : les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}$ -modules à connexion intégrable sont exactement les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}$ -modules coadmissibles qui sont des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}$ -modules libres de rang fini.

Proposition 6.7. *Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}$ -module coadmissible. Alors \mathcal{M} est un module à connexion intégrable si et seulement si \mathcal{M} est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}$ -module libre de rang fini.*

Démonstration. On peut se ramener au cas où \mathfrak{X} est affine muni d'une coordonnée locale. On suppose tout d'abord que \mathcal{M} est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}$ -module libre non nul de rang $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe des sections e_1, \dots, e_n de $\mathcal{M}(\mathfrak{X})$ telles que $\mathcal{M} \simeq \mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}} \cdot e_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}} \cdot e_n$ en tant que $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}$ -module. Les sections e_1, \dots, e_n engendrent aussi \mathcal{M} en tant que $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}$ -module : $\mathcal{M} \simeq \mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty} \cdot e_1 + \dots + \mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty} \cdot e_n$. On en déduit que $\text{Car}(\mathcal{M}) \subset \bigcup_{i=1}^n \text{Car}(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty} \cdot e_i)$. Il suffit de montrer que $\text{Car}(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty} \cdot e_i) \subset \mathfrak{X}$ pour chaque indice $i \in \{1, \dots, n\}$. On peut donc se ramener au cas $n = 1$: \mathcal{M} est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}$ -module libre de rang un engendré par une section e . Puisque $\mathcal{M} \simeq \mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}} \cdot e$ en tant que $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}$ -module, la famille $\{\partial^n \cdot e\}_{n \in \mathbb{N}}$ est liée sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}(\mathfrak{X})$. Il existe donc un opérateur différentiel unitaire $P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}(\mathfrak{X})$ tel que $P \cdot e = 0$. En

particulier, P appartient à l'idéal annulateur de e et \mathcal{M} est sous- $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$. On en déduit que $\text{Car}(\mathcal{M}) \subset \text{Car}(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P)$. Comme P est un opérateur fini de coefficient dominant unitaire, on a $\text{Car}(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P) = \mathfrak{X}$. Donc $\text{Car}(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty} \cdot e) \subset \mathfrak{X}$.

Réciproquement, on suppose que $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ est un module à connexion non nul. D'après le lemme 6.6, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un niveau de congruence $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que \mathcal{M}_k soit un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module libre de rang n pour tout niveau de congruence $k \geq k_0$. Alors \mathcal{M} est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module libre de rang fini n d'après le lemme 4.13 de [4]. \square

Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module à connexion intégrable. On sait par la proposition 6.7 que \mathcal{M} est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module libre de rang fini $r \in \mathbb{N}$. Pour k assez grand, \mathcal{M}_k est aussi un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module libre de rang r . D'après le lemme 3.23 et le corollaire 3.11 de [4], les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents \mathcal{M}_k n'ont qu'une multiplicité non nulle égale à r . On rappelle le résultat suivant de la proposition 4.11 de [4] : tout $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module à connexion intégrable \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module de longueur finie inférieure ou égale au rang $\text{rg}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{M})$.

Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible. Si \mathcal{M} est holonome, alors les modules \mathcal{M}_k sont holonomes pour k suffisamment grand. En particulier, \mathcal{M} est faiblement holonome d'après la proposition 3.9. Son dual \mathcal{M}^d est un module faiblement holonome. On montre maintenant que si \mathcal{M} est holonome, alors son dual \mathcal{M}^d reste holonome.

Proposition 6.8. *Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module holonome. Alors \mathcal{M} est holonome si et seulement si \mathcal{M} est faiblement holonome et si son dual \mathcal{M}^d est holonome.*

Démonstration. Il suffit de montrer que si \mathcal{M} est holonome, alors son dual \mathcal{M}^d l'est aussi. L'équivalence énoncée provient ensuite de l'isomorphisme de bidualité. On suppose donc que \mathcal{M} est un module holonome. D'après la proposition 6.4, il existe un ouvert non vide U de \mathfrak{X} tel que $\mathcal{M}|_U$ soit un module à connexion. On peut donc supposer que \mathfrak{X} est affine et que \mathcal{M} est un module à connexion de rang n . Toujours d'après la proposition 6.4, on peut se ramener à montrer que \mathcal{M}^d est aussi un module à connexion. On écrit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$. Comme \mathcal{M} est un module à connexion, les modules \mathcal{M}_k sont des modules à connexion de rang n pour k suffisamment grand. Il reste à prouver que

$$\mathcal{M}_k^d = \text{Ext}_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{-1}$$

est un module à connexion de rang n . D'après le lemme 3.23 de [4], on peut se ramener au cas où \mathfrak{X} est affine tel que $\mathcal{M}_k \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$ avec P un opérateur différentiel fini unitaire. Il suffit de vérifier que \mathcal{M}_k^d est aussi de la forme $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P^t$ avec P^t fini unitaire. On considère la suite exacte courte de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \xrightarrow{\times P} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \longrightarrow \mathcal{M}_k \longrightarrow 0$$

Puisque $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) = 0$, on obtient la suite exacte courte suivante de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules à droites en prenant le foncteur $\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\bullet, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{H}om(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) & \longrightarrow & \mathcal{H}om(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) & \longrightarrow & \mathcal{H}om(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Comme les algèbres $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ sont intègres et $\mathcal{M}_k \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$ avec P non nul, on a $\mathcal{H}om(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) = 0$. Par ailleurs, $\mathcal{H}om(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ en tant que $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module à droite. Le morphisme $\mathcal{H}om(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \rightarrow \mathcal{H}om(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$ ci dessus correspond via cette correspondance au morphisme $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \xrightarrow{P \times} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ multiplication à gauche par P . La suite exacte précédente s'écrit donc

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \xrightarrow{P \times} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \longrightarrow \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \longrightarrow 0$$

On en déduit que $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P \cdot \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ en tant que $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module à droite. On écrit $P = \sum_{\ell=0}^n a_\ell \cdot (\omega^k \partial)^\ell \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\mathfrak{X})$. On définit son adjoint formel P^t par $P^t = \sum_{\ell=0}^n (-1)^\ell \cdot (\omega^k \partial) \cdot a_\ell$. On vérifie alors que

$$\mathcal{M}_k^d = \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1(\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}^{-1} \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P^t$$

Comme P est unitaire d'ordre n , P^t est aussi unitaire d'ordre n . Ainsi, \mathcal{M}_k^d est un module à connexion de rang n .

Enfin le lemme 4.13 de [4] implique que

$$\mathcal{M}^d = \varprojlim_k \left(\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}^{-1} \right)$$

est un module à connexion de rang n . □

Références

- [1] Konstantin Ardakov, Andreas Bode, and Simon Wadsley. \widehat{D} -modules on rigid analytic spaces III : Weak holonomicity and operations. *Compositio Mathematica*, 157(12) :2553–2584, 2021.

- [2] Konstantin Ardakov and Simon J Wadsley. \widehat{D} -modules on rigid analytic spaces I. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2019(747) :221–275, 2019.
- [3] Laurent Garnier. Théorèmes de division sur $\widehat{D}^{(0)}$ et applications. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 123(4) :547–589, 1995.
- [4] Raoul Hallopeau. $\widehat{D}_k^{(0)}$ -modules holonomes sur une courbe formelle, 2023.
- [5] Christine Huyghe, Deepam Patel, Tobias Schmidt, and Matthias Strauch. \mathcal{D}^\dagger -affinity of formal models of flag varieties. *Mathematical Research Letters*, 26(6) :1677–1745, 2019.
- [6] Christine Huyghe, Tobias Schmidt, and Matthias Strauch. Arithmetic structures for differential operators on formal schemes. *Nagoya Mathematical Journal*, 243 :157–204, 2021.
- [7] Christine Huyghe, Tobias Schmidt, and Matthias Strauch. Arithmetic differential operators with congruence level structures : First results and examples. *Journal of Number Theory*, 237 :332–352, 2022.
- [8] Peter Schneider and Jeremy Teitelbaum. Algebras of p -adic distributions and admissible representations. *Inventiones mathematicae*, 153(1) :145–196, 2003.
- [9] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. <https://stacks.math.columbia.edu>, 2018.
- [10] Anne Virrion. Dualité locale et holonomie pour les \mathcal{D} -modules arithmétiques. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 128(1) :1–68, 2000.
- [11] Gergely Zábrádi. Generalized Robba rings. *Israel J. Math.*, 191(2) :817–887, 2012. With an appendix by Peter Schneider.