



HAL
open science

Microlocalisation des modules coadmissibles sur une courbe formelle

Raoul Hallopeau

► **To cite this version:**

Raoul Hallopeau. Microlocalisation des modules coadmissibles sur une courbe formelle. 2023. hal-03975658v2

HAL Id: hal-03975658

<https://hal.science/hal-03975658v2>

Preprint submitted on 12 May 2023 (v2), last revised 25 Jan 2024 (v5)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Microlocalisation des modules coadmissibles sur une courbe formelle

Raoul Hallopeau

Abstract

Let \mathfrak{X} be a formal smooth quasi-compact curve over a complete discrete valuation ring \mathcal{V} of mixed characteristic $(0, p)$. We consider the sheaves of differential operators $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}$ with a congruence level $k \in \mathbb{N}$ and their projective limit $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty} = \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}$. In the first part, we introduce a microlocalisation of the sheaf $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}$. In fact, we construct microlocalisations for the sheaves $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}$ admitting transition morphisms. Then we pass to the projective limit. In the second part, we define a characteristic variety for coadmissible modules as a closed subset of the cotangent space $T^*\mathfrak{X}$. With such a characteristic variety, one can introduce a notion of holonomic modules : a coadmissible module is holonomic if its characteristic variety has dimension less than or equal to one. We prove that a coadmissible module is holonomic if and only if it a connection module on some open subset of \mathfrak{X} . At last, we bridge holonomic modules with weakly holonomic modules.

Table des matières

1	Introduction	2
2	Variété caractéristique des $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}$-modules cohérents	6
2.1	Variété caractéristique	6
2.2	Microlocalisation de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, k}$	9
3	Microlocalisations de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}$	13
3.1	Microlocalisation d'une algèbre de Banach quasi-abélienne	13
3.2	Un premier microlocalisé \mathcal{E}_k	16
3.3	Des microlocalisés $\mathcal{F}_{k, r}$ avec des morphismes de transition	24
4	Microlocalisations de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}$	31
4.1	Le faisceau $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}$	31
4.2	Les microlocalisés $\mathcal{F}_{\infty, r}$	34
4.3	Le microlocalisé \mathcal{F}_{∞}	40

5	$\mathcal{F}_{\infty,r}^*$-module coadmissible associé à un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-module coadmissible	43
5.1	$\mathcal{F}_{k,r}^*$ -module cohérent associé à un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent	44
5.2	$\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ -module coadmissible associé à un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible	50
6	$\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules holonomes	56
6.1	\mathcal{F}_{∞}^* -module associé à un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible	56
6.2	Variété caractéristique et inégalité de Bernstein	58
6.3	$\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules à connexion	61
6.4	Modules faiblement holonomes	64

Notations

- \mathcal{V} est un anneau complet de valuation discrète de caractéristique mixte $(0, p)$, d'idéal maximal \mathfrak{m} et de corps résiduel κ supposé parfait. On note $|\cdot|$ la valeur absolue normalisée de \mathcal{V} , ω une uniformisante et $K = \text{Frac}(\mathcal{V})$ son corps des fractions.
- X est une courbe sur κ lisse connexe quasi-compacte et $x \in X$ est un point donné.
- \mathfrak{X} est un \mathcal{V} -schéma formel lisse localement de type fini relevant X d'idéal de définition engendré par l'uniformisante ω .
- t est un relèvement local sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ d'une uniformisante en x ($\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète puisque X est une courbe). Alors dt est une base de $\Omega_{\mathfrak{X},x}^1$. On note ∂ la dérivation associée.
- U est un ouvert affine de \mathfrak{X} contenant x sur lequel on dispose d'un système de coordonnées locales (t, ∂) .
- Sauf mention contraire, les idéaux et les modules considérés seront tous à gauche.

1 Introduction

Nous rappelons d'abord brièvement la définition des modules coadmissibles sur un schéma formel \mathfrak{X} introduite dans l'article [6] de Christine Huyghe, Tobias Schmidt et Matthias Strauch. Cette définition fait intervenir des faisceaux cohérents de K -algèbres constituées d'opérateurs différentiels pour différents niveaux de congruence $k \in \mathbb{N}$. Plus précisément, nous introduisons les faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ définis localement sur les ouverts affines U de \mathfrak{X} munis d'une coordonnée locale par

$$\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n, \quad a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U), \quad |a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right\}$$

Ces algèbres sont complètes pour la topologie ω -adique. Les faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ interviennent naturellement pour résoudre certaines questions données par exemple dans l'article [7]

de Christine Huyghe, Tobias Schmidt et Matthias Strauch. Nous considérons les morphismes de transition $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ induits localement par les inclusions d'algèbres $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. Nous nous intéressons ensuite au faisceau limite projective $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty} = \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$. Localement, $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ est la K -algèbre de Fréchet-Stein donnée par

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \partial^n : a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U) \text{ tq } \forall \eta > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \eta^n = 0 \right\}$$

Le faisceau $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ est intéressant d'un point de vue conceptuel. En effet, les opérateurs différentiels de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ induisent des fonctions analytiques entières sur le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ de \mathfrak{X} . Nous pouvons associer aux éléments de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ des fonctions analytiques sur le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ de \mathfrak{X} convergents sur une bande horizontale de hauteur augmentant avec k . Plus précisément, soit (x, ξ) un système de coordonnées locales sur T^*U associée à la coordonnée étale de U . Nous pouvons associer à tout opérateur $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$ de l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ une fonction $P(x, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \xi^n$ sur le fibré cotangent T^*U . La fonction $P(x, \xi)$ converge sur la bande horizontale $\{|\xi_1| \leq 1, \dots, |\xi_d| \leq p^k\}$ de T^*U .

Un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible \mathcal{M} est par définition un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module isomorphe à une limite projective $\varprojlim_k \mathcal{M}_k$ de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents \mathcal{M}_k admettant de bonnes propriétés de transition entre les rangs k et $k+1$.

Dans [5], la variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{M}_k)$ d'un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent \mathcal{M}_k est introduite comme une sous-variété fermée du fibré cotangent T^*X de la fibre spéciale X de \mathfrak{X} . Les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module holonomes sont définis comme étant les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents \mathcal{M}_k dont la variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{M}_k)$ est de dimension au plus la dimension de X . Ainsi le module \mathcal{M}_k est holonome si $\dim(\text{Car}(\mathcal{M}_k)) \leq 1$. Lorsque X est une courbe, les modules holonomes ont de bonnes caractérisations. Ce sont des modules à connexion sur un certain ouvert de \mathfrak{X} . De plus, les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules holonomes sont exactement les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents de longueur finie. L'étape suivante consiste à introduire une bonne catégorie de modules holonomes pour les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$. Cependant, nous ne pouvons pas le faire directement à partir des variétés caractéristiques $\text{Car}(\mathcal{M}_k)$ des $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents \mathcal{M}_k . En effet, les morphismes de transition $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ sont triviaux après réduction modulo ω . Ces morphismes n'induisent donc pas de morphismes intéressants entre les différentes variétés caractéristiques $\text{Car}(\mathcal{M}_k)$.

Nous cherchons alors à définir une variété caractéristique des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles directement au niveau du fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ de \mathfrak{X} . L'objectif est d'introduire une catégorie de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules holonomes. Les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules holonomes devront vérifier la condition suivante. Soit $P \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. Nous aimerions que le module $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$ soit holonome seulement si P est un opérateur différentiel fini. En effet, si P n'est pas un opérateur fini,

alors $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$ est un module de longueur finie augmentant avec k . De plus, $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$ est localement un $\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}$ -module libre de dimension de plus en plus grande. On ne peut donc pas espérer avoir de bonnes propriétés de finitudes pour le module $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}/P = \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$. Cependant lorsque $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \partial^n$ est un opérateur fini d'ordre d de $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}(U)$, ces problèmes n'apparaissent pas. En effet, si (x, ξ) est un système de coordonnées locales sur T^*U associée à la coordonnée étale de U , il est possible de vérifier pour k suffisamment grand que

$$\text{Car} \left(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P \right) \cap T^*U = \{(x, \xi) \in T^*U : \sigma(\bar{P})(x, \xi) = a_d(x) \cdot \xi^d = 0\}$$

Ces variétés caractéristiques ne dépendent donc plus de k pour les niveaux de congruence suffisamment grands. Si x_1, \dots, x_s sont les zéros du coefficient dominant a_d de P , alors la figure suivante donne l'allure de la variété caractéristique des modules \mathcal{M}_k . La section nulle est une composante irréductible de ces variétés caractéristiques $\text{Car}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P)$ si et seulement si le degré d de P est supérieur ou égal à un.

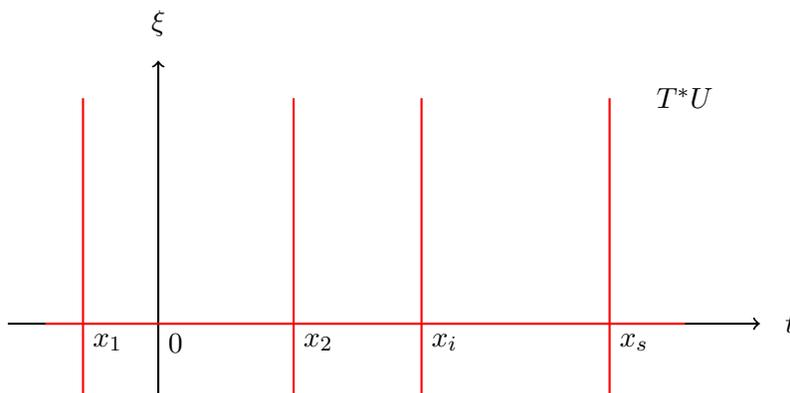


Figure 1 : $\text{Car}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P) \cap T^*U$

Afin de définir une variété caractéristique pour les $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ -modules coadmissibles, nous construisons un microlocalisé \mathcal{F}_∞ de $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ vérifiant la condition d'inversibilité suivante. Un opérateur différentiel P de $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}(U)$ est inversible dans le microlocalisé $\mathcal{F}_\infty(U)$ si et seulement si

1. $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \partial^n$ est un opérateur fini d'ordre d de $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}(U)$,
2. le coefficient dominant a_d de P est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U)$.

Ce critère d'inversibilité pour l'algèbre $\mathcal{F}_\infty(U)$ est l'analogie souhaité du lemme 2.8 énoncé pour le faisceau $\mathcal{D}_{X,k} = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k}^{(0)} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$. En effet, soit P un opérateur différentiel de $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}(U)$. Nous souhaitons que le module coadmissible $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}/P$ soit holonome si et seulement si P est un opérateur différentiel fini. Le support du module $\mathcal{M} = \mathcal{F}_\infty/P$ permet de distinguer les opérateurs infinis des opérateurs finis. Si P est un opérateur infini, alors

$\text{Supp } \mathcal{M} \cap U = U$ puisque P n'est pas inversible dans $\mathcal{F}_\infty(U)$ quelque soit l'ouvert U (voir la preuve de la proposition 2.9). Dans ce cas, $\dim \text{Supp } \mathcal{M} = 1$. Soit maintenant P un opérateur fini de coefficient dominant $a_d \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$. D'après la proposition 2.9 et le critère d'inversibilité des éléments de l'algèbre $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ dans le microlocalisé $\mathcal{F}_\infty(U)$, le support $\text{Supp } \mathcal{M} \cap U$ est l'union finie des zéros x_1, \dots, x_s de la fonction a_d dans l'ouvert U . Ainsi, $\dim \text{Supp } \mathcal{M} = 0$. Les points x_1, \dots, x_s du support $\text{Supp } \mathcal{M} \cap U$ sont les abscisses des composantes irréductibles verticales des variétés caractéristiques des modules $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$ données dans la figure 1 pour k suffisamment grand.

Dans un premier temps, nous fixons dans la partie 2 le niveau de congruence $k \in \mathbb{N}^*$. Le faisceau $\mathcal{D}_{X,k} = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ est défini sur la fibre spéciale X de \mathfrak{X} . Pour tout niveau de congruence $k \geq 1$, les algèbres $\mathcal{D}_{X,k}(U) \simeq \mathcal{O}_X(U)[X]$ sont commutatives isomorphes à un anneau de polynômes. Nous expliquons comment retrouver la variété caractéristique d'un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent \mathcal{M}_k à partir d'un microlocalisé du faisceau $\mathcal{D}_{X,k}$. Ce cas est élémentaire puisque pour $k \geq 1$, les algèbres $\mathcal{D}_{X,k}(U)$ sont commutatives. Nous pouvons donc inverser la dérivation ∂_k de $\mathcal{D}_{X,k}(U)$ pour construire le microlocalisé. Cet exemple motive l'introduction du microlocalisé \mathcal{F}_∞ du faisceau $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$.

La construction du faisceau d'algèbres microlocalisées \mathcal{F}_∞ fait intervenir des microlocalisés $\mathcal{F}_{k,r}$ des faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ pour tous les entiers $k \geq r \geq 1$. Plus précisément, $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ est le localisé de l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ obtenu en inversant la dérivation ∂ . La K -algèbre $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ est non commutative et ne vérifie pas les conditions de Ore. Pour inverser la dérivation, nous utilisons une localisation non commutative construite dans l'annexe de l'article [11] de Gergely Zábrádi. Les conditions de Ore sont remplacées par la condition d'être quasi-abélien. L'algèbre $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U), |\cdot|_k)$ est quasi-abélienne dès que $k \geq 1$: il existe une constante $\gamma \in]0, 1[$ telle que

$$\forall P, Q \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U), \quad |PQ - QP|_k = |[P, Q]|_k \leq \gamma \cdot |P|_k \cdot |Q|_k$$

La localisation de [11] ne s'applique pas directement à $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ puisque ce n'est pas une algèbre de Banach. La construction des microlocalisés $\mathcal{F}_{k,r}$ est faite dans la partie 3. Nous démontrerons que les sections du faisceau $\mathcal{F}_{k,r}$ sur l'ouvert U sont

$$\mathcal{F}_{k,r}(U) = \left\{ \sum_{0 \leq n \leq \infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n + \sum_{-\infty \leq n < 0} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n, \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \pm\infty} 0 \right\}$$

Les microlocalisés $\mathcal{F}_{k,r}$ admettent des morphismes de transition $\mathcal{F}_{k+1,r} \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}$ commutant avec les morphismes de transition $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$. En passant à la limite projective sur $k \geq r$ et pour r fixé, nous obtenons un microlocalisé $\mathcal{F}_{\infty,r}$ de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ dans lequel la dérivation est localement inversible. Ces microlocalisés sont introduits dans la partie 4.

Nous montrerons que $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ est une K -algèbre de Fréchet-Stein pour tout entier $r \in \mathbb{N}^*$. De plus, il existe des morphismes naturels injectifs de K -algèbres $\mathcal{F}_{\infty,r+1}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{\infty,r}(U)$. L'algèbre $\mathcal{F}_{\infty}(U)$ est simplement la limite inductive des algèbres $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ pour $r \geq 1$.

Enfin à l'aide de ces microlocalisés, nous définissons une variété caractéristique des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles en partie 6. Nous nous restreignons au cas d'une courbe formelle \mathfrak{X} afin de démontrer l'inégalité de Bernstein pour les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles. La preuve ne fonctionne qu'en dimension un. Cependant la construction des microlocalisés s'adapte à toute dimension supérieure. Le seul point plus délicat consistera à déterminer les éléments inversibles du microlocalisé. Un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible est appelé holonome si sa variété caractéristique est de dimension au plus un. Nous démontrons que tout module holonome est un module à connexion sur un certain ouvert de \mathfrak{X} . Avec nos hypothèses, les modules coadmissibles forment une catégorie abélienne équivalente à la catégorie des modules coadmissibles introduite dans l'article [2] de K. Ardakov et S. Wadsley d'après la proposition 3.2.5 de [6]. Ainsi, ce travail permet de définir une notion d'holonomie dans le cas des courbes analytiques rigides. Enfin nous terminons cet article en reliant les modules holonomes aux modules faiblement holonomes introduits par Ardakov-Bose-Wadsley dans l'article [1]. Un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module holonome est faiblement holonome et son dual va aussi être un module holonome.

2 Variété caractéristique des $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents

Cette partie permet de comprendre l'intérêt du microlocalisé et de voir son lien avec la variété caractéristique. On construit ici un microlocalisé du faisceau $\mathcal{D}_{X,k} = \mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ pour tout entier $k \geq 1$ permettant de retrouver la variété caractéristique des $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents en dehors de la section nulle. Il s'agit du cas le plus simple dans lequel on peut construire un microlocalisé. En effet pour un niveau de congruence $k \geq 1$, l'algèbre $\mathcal{D}_{X,k}(U)$ est commutative : on peut appliquer les constructions classiques d'algèbre commutative pour localiser la κ -algèbre $\mathcal{D}_{X,k}(U)$. On redéfinit tout d'abord brièvement la variété caractéristique des $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents.

2.1 Variété caractéristique

On commence par quelques rappels sur le faisceau $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ des opérateurs différentiels sur lequel on travaille. On peut consulter la seconde partie de l'article [6] de Christine Huyghe, Tobias Schmidt et Matthias Strauch et le document [5] pour plus de détails. On désigne par U un ouvert affine contenant x sur lequel on dispose d'une coordonnée locale.

Le faisceau $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}$ est défini comme un sous-faisceau de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{(0)}$ dépendant d'un paramètre $k \in \mathbb{N}$ appelé niveau de congruence. C'est une sous-algèbre de l'algèbre $(\text{End}_{\mathcal{V}}(\mathcal{O}_U, \mathcal{O}_U), +, \circ)$.

Le cas $k = 0$ donne $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{(0)}$. Localement, $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U)$ est la \mathcal{V} -algèbre engendrée par $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$ et par la dérivation $\omega^k \partial$. Plus précisément,

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U) = \left\{ \sum_{0 \leq n < \infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n, \quad a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U) \right\}$$

On peut aussi voir $\mathcal{D}_{U,k}^{(0)}$ comme le \mathcal{O}_U -module libre de base les puissances de $\omega^k \partial$:

$$\mathcal{D}_{U,k}^{(0)} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_U \cdot (\omega^k \partial)^n$$

Le produit de l'algèbre $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U)$ est caractérisé par les commutateurs suivants. Pour toutes fonctions $a, b \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$ et pour tous entiers $n, m \in \mathbb{N}^*$, on a

$$[(\omega^k \partial)^n, a] = \omega^{kn} \partial^n(a), \quad [(\omega^k \partial)^n, (\omega^k \partial)^m] = 0, \quad [a, b] = 0$$

Soit $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)} = \varprojlim_i (\mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)} / \omega^{i+1} \mathcal{D}_{\mathfrak{X},k}^{(0)})$ le complété ω -adique de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}$ et $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)} \otimes_{\mathcal{V}} K$. On dispose de la description locale suivante :

$$\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n, \quad a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U) \text{ tq } |a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right\}$$

Il est démontré dans l'article [6] que toutes ces algèbres sont noetheriennes et que les faisceaux associés sont cohérents. Pour $k' > k$, il est clair que $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k'}^{(0)}(U) \subset \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U)$. En particulier, $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ est une sous-algèbre de l'algèbre des opérateurs différentiels $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(0)}(U) = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},0}^{(0)}(U)$. On munit cette algèbre d'une norme multiplicative $|\cdot|_k$. On montre dans la section suivante que l'algèbre $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U), |\cdot|_k)$ est quasi-abélienne.

On note $\mathcal{D}_{X,k} = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ la réduction modulo ω du faisceau $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}$. On rappelle que \mathfrak{X} et X ont le même espace topologique ; on identifie U à un ouvert affine de X . Soit ∂_k est l'image de $\omega^k \partial$ dans $\mathcal{D}_{X,k}$, alors

$$\mathcal{D}_{X,k}(U) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_X(U) \cdot \partial_k^n$$

Lorsque $k \geq 1$, l'algèbre $\mathcal{D}_{X,k}(U)$ est commutative puisque l'algèbre $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U), |\cdot|_k)$ est quasi-abélienne. Ces propriétés ne sont pas vraies lorsque $k = 0$. Par exemple $[\partial, t] = 1$ dans $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{(0)}(U)$ et dans $\mathcal{D}_X(U) = \mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{(0)}(U) \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$.

On munit $\mathcal{D}_{X,k}$ de la filtration croissante donnée localement par l'ordre des opérateurs différentiels :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \text{Fil}^m(\mathcal{D}_{U,k}) = \bigoplus_{0 \leq n \leq m} \mathcal{O}_U \cdot \partial_k^n$$

On note $\text{gr } \mathcal{D}_{X,k} = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \text{gr}_m \mathcal{D}_{X,k}$ le gradué associé et ξ_k l'image de ∂_k dans $\text{gr}_1(\mathcal{D}_{U,k})$. Localement, $\text{gr}(\mathcal{D}_{U,k}) \simeq \mathcal{O}_U[\xi_k]$ est un anneau de polynômes en une variable sur \mathcal{O}_U . En particulier le fibré cotangent T^*X de X est isomorphe à $\text{Spec } \text{gr}(\mathcal{D}_{X,k})$ en tant que κ -schéma. On identifie ces deux schémas dans la suite. On note $\pi : T^*X \rightarrow X$ la projection canonique.

Soit $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \partial_k^n$ un élément de $\mathcal{D}_{X,k}(U)$ d'ordre d . On lui associe un élément du gradué $\text{gr } \mathcal{D}_{X,k}(U)$ appelé *symbole principal* de P par

$$\sigma(P) = a_d \cdot \xi_k^d \in \text{gr}_d \mathcal{D}_{X,k}(U)$$

Une filtration $(\text{Fil}^\ell E)_{\ell \in \mathbb{N}}$ d'un $\mathcal{D}_{X,k}$ -module quasi-cohérent à gauche E est une suite croissante $(\text{Fil}^\ell E)_\ell$ de sous- \mathcal{O}_X -modules quasi-cohérents de E telle que

1. $E = \bigcup_{\ell \geq 0} \text{Fil}^\ell E$;
2. $\forall n, \ell \in \mathbb{N}, (\text{Fil}^n \mathcal{D}_{X,k}) \cdot (\text{Fil}^\ell E) \subset \text{Fil}^{\ell+n} E$.

Le gradué $\text{gr } E$ pour une telle filtration est un $\text{gr } \mathcal{D}_{X,k}$ -module. La filtration est appelée *bonne filtration* si le gradué $\text{gr } E$ est un $\text{gr } \mathcal{D}_{X,k}$ -module cohérent. Puisque la courbe X est quasi-compacte, tout $\mathcal{D}_{X,k}$ -module cohérent admet une bonne filtration globale.

On se donne maintenant un $\mathcal{D}_{X,k}$ -module cohérent E muni d'une bonne filtration globale. On associe à E le \mathcal{O}_{T^*X} -module cohérent suivant

$$\tilde{E} = \mathcal{O}_{T^*X} \otimes_{\pi^{-1}(\text{gr } \mathcal{D}_{X,k})} \pi^{-1}(\text{gr } E)$$

Définition 2.1. *La variété caractéristique de E est le support du \mathcal{O}_{T^*X} -module cohérent $\tilde{E} : \text{Car } E = \text{Supp } \tilde{E}$.*

C'est une sous-variété fermée de T^*X puisque \tilde{E} est cohérent. La variété caractéristique est indépendante du choix de la bonne filtration choisie.

Soit maintenant \mathcal{E} un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent à gauche. Un *modèle entier* de \mathcal{E} est un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}$ -module cohérent \mathcal{E}° sans ω -torsion tel que $\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}^\circ \otimes_{\mathcal{V}} K$. Puisque \mathcal{E} est cohérent, il existe un modèle entier \mathcal{E}° . La réduction $\mathcal{E}^\circ \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ modulo ω de \mathcal{E}° est un $\mathcal{D}_{X,k}$ -module cohérent.

Définition 2.2. *La variété caractéristique de \mathcal{E} est la variété caractéristique du $\mathcal{D}_{X,k}$ -module cohérent $\mathcal{E}^\circ \otimes_{\mathcal{V}} \kappa : \text{Car } \mathcal{E} = \text{Car}(\mathcal{E}^\circ \otimes_{\mathcal{V}} \kappa)$.*

C'est un sous-schéma fermé du fibré cotangent T^*X de X indépendant du choix du modèle entier.

Exemple 2.3. On suppose que la courbe \mathfrak{X} est affine munie d'un système de coordonnées locale (t, ∂) . On note toujours $\xi_k = \sigma(\partial_k)$ l'image de ∂_k dans le gradué $\text{gr}_1 \mathcal{D}_{X,k}$.

1. Puisque le support du faisceau $\mathcal{D}_{X,k}$ est X tout entier, on a $\text{Car } \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} = T^*X$.

2. Si $\mathcal{E} = 0$, alors sa variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{E})$ est vide.
3. Soit $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$ avec $P \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\mathfrak{X})$ un opérateur différentiel non nul de norme un. Alors $\mathcal{E}^\circ = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}/P$ est un modèle entier de \mathcal{E} . On note $d = \overline{N}_k(P)$ et b le coefficient d'indice d de P . La réduction \bar{P} de P modulo ω est un opérateur de $\mathcal{D}_{X,k}(X)$ d'ordre d . Son coefficient dominant est $\bar{b} = (b \bmod \omega) \in \mathcal{O}_X(X)$. On a $\text{gr}(\mathcal{E}^\circ \otimes_{\mathcal{V}} \kappa) = \text{gr } \mathcal{D}_{X,k}/(\sigma(\bar{P}))$, où $\sigma(\bar{P}) = \bar{b} \cdot \xi_k^d$ est le symbole principal de \bar{P} . La variété caractéristique de \mathcal{E} est donc donnée par l'équation

$$\text{Car}(\mathcal{E}) = \{(t, \xi) \in T^*X : \sigma(\bar{P})(t, \xi) = \bar{b}(t) \cdot \xi^d = 0\}$$

Tout $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent \mathcal{M}_k vérifie l'inégalité de Bernstein démontrée dans [5] : si \mathcal{M}_k est non nul, alors les composantes irréductibles de $\text{Car}(\mathcal{M}_k)$ sont de dimension au moins un.

Définition 2.4. *Un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent \mathcal{M}_k est dit holonome si $\dim(\text{Car}(\mathcal{M}_k)) \leq 1$.*

La proposition suivante de [5] caractérise les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules holonomes.

Proposition 2.5. *Soit \mathcal{M}_k un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent. Les points suivants sont équivalents :*

1. \mathcal{M}_k est holonome.
2. $\mathcal{M}_k \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/\mathcal{J}$ pour un idéal non nul \mathcal{J} de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$.
3. \mathcal{M}_k est de longueur finie.
4. \mathcal{M}_k est un module de torsion.
5. $\text{Ext}_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) = 0$ pour tout $d \neq 1$.

On démontre de plus que \mathcal{M} est $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module holonome si et seulement si il existe un ouvert non vide U de \mathfrak{X} tel que $\mathcal{M}|_U$ soit un module à connexion. Un module à connexion est un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent qui est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module libre de rang fini. Ce résultat pour un niveau de congruence k fixé permet de démontrer un énoncé analogue pour les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules holonomes.

2.2 Microlocalisation de $\mathcal{D}_{X,k}$

On rappelle que T^*X est le fibré cotangent de X et $\pi : T^*X \rightarrow X$ la projection canonique. L'application π est ouverte : pour tout ouvert U de X , $V = \pi^{-1}(U)$ est un ouvert de T^*X . En effet $T^*X = \text{Spec}(\text{Sym } \Theta_X) \rightarrow X$, où Θ_X est le faisceau cotangent de X . Puisque X est lisse, Θ_X est un module localement libre de rang fini. En particulier le

morphisme $T^*X \rightarrow X$ est plat de présentation finie. Il est donc ouvert d'après la proposition 10.41.8 de [9]. On note $s : X \rightarrow T^*X$ la section nulle et $T_0^*X = T^*X \setminus s(X)$.

Pour un niveau de congruence $k \geq 1$ fixé, on construit un microlocalisé de $\mathcal{D}_{X,k}$ redonnant la variété caractéristique d'un $\mathcal{D}_{X,k}$ -module cohérent en dehors de la section nulle. Le microlocalisé est un \mathcal{O}_{T^*X} -module plat L_k défini sur $T_0^*(X)$ vérifiant pour tout $\mathcal{D}_{X,k}$ -module cohérent M l'égalité

$$\text{Car}(M) \cap T_0^*(X) = \text{Supp}(L_k \otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{D}_{X,k})} \pi^{-1}(M))$$

Soit U un ouvert affine de X sur lequel on dispose de coordonnées locales (t, ∂) . On rappelle que la κ -algèbre $\mathcal{D}_{U,k} = \mathcal{O}_U[\partial_k]$ est commutative. Si ∂'_k est une dérivation donnée par un autre système de coordonnées locales sur U , alors $\partial'_k = \alpha \cdot \partial_k$ pour un élément inversible $\alpha \in \mathcal{O}_U(U)$. Soit $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \partial_k^n = \sum_{n=0}^d a_n \cdot (\alpha \partial_k)^n \in \mathcal{O}_U[\partial'_k]$. Puisque $\mathcal{D}_{U,k}$ est commutative, $P = \sum_{n=0}^d (a_n \alpha^n) \cdot \partial_k^n$. Ainsi la description de l'algèbre $\mathcal{D}_{U,k}$ comme $\mathcal{O}_U[\partial_k]$ ne dépend pas du choix du système de coordonnées locales.

On considère le système de coordonnées locales (t, ξ) sur $V = \pi^{-1}(U) \subset T^*(X)$ associé à la coordonnée de départ t . Soit $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \partial_k^n$ un élément de $\mathcal{D}_{U,k}(U)$. On lui associe un élément de $\mathcal{O}_{T^*X}(V)$ en envoyant P sur l'élément $P(t, \xi) = \sum_{n=0}^d a_n(t) \cdot \xi^n$. On note $D_k(V)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{O}_{T^*X}(V)$ provenant d'un opérateur différentiel de $\mathcal{D}_{X,k}(U)$. Puisque $\mathcal{D}_{X,k}(U)$ est commutatif, le produit de $\mathcal{D}_{X,k}(U)$ induit un produit sur $D_k(V)$ coïncidant avec le produit de $\mathcal{O}_{T^*X}(V)$. Autrement dit $D_k(V)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{O}_{T^*X}(V)$. L'algèbre $D_k(V)$ ne dépend pas non plus du choix du système de coordonnées locales (t, ξ) . Les ouverts V de T^*X provenant d'ouverts affines U de X sur lequel on dispose de coordonnées locales forment une base d'ouverts de T^*X . Ainsi les $D_k(V)$ se recollent en un faisceau D_k sur le fibré cotangent T^*X .

On a $D_k|_V = \mathcal{O}_U[\xi]$. Autrement dit $D_k \simeq \mathcal{O}_{T^*X}$. On identifie par la suite ces deux faisceaux. Comme pour $\mathcal{D}_{X,k}$, on munit D_k de la filtration donnée localement par l'ordre des éléments en ξ . On a

$$\text{Fil}^\ell D_k|_V = \bigoplus_{0 \leq n \leq \ell} \mathcal{O}_U \cdot \xi^n$$

Cette filtration est compatible avec la filtration de $\mathcal{D}_{X,k}$ via l'isomorphisme défini précédemment $\mathcal{D}_{X,k}(U) \simeq D_k(V) = \mathcal{O}_{T^*X}(V)$. Le gradué est encore un anneau de polynôme sur $\mathcal{O}_U : \text{gr } D_k|_V \simeq \mathcal{O}_U[\zeta]$, où ζ est l'image de ξ dans $\text{gr}_1 D_k(U)$. L'application de D_k dans son gradué $\text{gr } D_k$ est donnée par le symbole principal σ . Si $P(t, \xi) = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \xi^n$ est un opérateur d'ordre d de D_k , alors $\sigma(P) = a_d \cdot \zeta^d$.

On se restreint maintenant à $T_0^*X = T^*X \setminus s(X)$ où la variable ξ n'est jamais nulle. On rappelle que $V = \pi^{-1}(U) \subset T^*(X)$. On suppose donc que $V \subset T_0^*X$.

Définition 2.6. On note $E_k(V)$ le localisé de $D_k(V) = \mathcal{O}_{T^*X}(V)$ pour la partie multiplicative $\{\xi^n\}_{n \in \mathbb{N}}$. On a $E_k(V) \simeq \mathcal{O}_X(U)[\xi, \xi^{-1}]$.

Les algèbres $E_k(V)$ ne dépendent pas non plus du choix des coordonnées locales. Elles se recollent pour former un faisceau E_k sur T_0^*X admettant \mathcal{O}_{T^*X} comme sous-faisceau. Localement, $E_{k|V} \simeq \mathcal{O}_U[\xi, \xi^{-1}]$. On note encore degré d'un élément $P(t, \xi) = \sum_{-\infty < n < \infty} a_n(t) \cdot \xi^n$ de $E_k(V)$ le plus petit entier n tel que $a_n \neq 0$ et $a_m = 0$ pour tout $m > n$. On munit $E_k(V)$ de la filtration donnée par le degré. Dans ce cas $\text{gr } E_{k|V} \simeq \mathcal{O}_U[\zeta, \zeta^{-1}]$. On rappelle que $\text{gr } D_{k|V} \simeq \mathcal{O}_U[\zeta]$.

On considère sur $E_k(V)$ la valuation v_ξ donnée par moins le degré en ξ :

$$v_\xi(P(t, \xi)) = -\deg_\xi P(t, \xi)$$

Définition 2.7. On note $L_k(V)$ le complété de $E_k(V)$ pour cette valuation. Autrement dit $L_k(V) \simeq \mathcal{O}_X(U)[[\xi^{-1}]][\xi]$.

Un élément Q de $L_k(V)$ s'écrit uniquement sous la forme

$$Q(t, \xi) = \sum_{-\infty \leq n < +\infty} a_n(t) \cdot \xi^n, \quad a_n(t) \in \mathcal{O}_X(U)$$

On définit son degré comme l'opposé de sa valuation ξ -adique : $\deg Q = -v_\xi(Q)$. C'est le plus grand entier n pour lequel le coefficient a_n est non nul. On munit à nouveau $L_k(V)$ de la filtration donnée par le degré des éléments en ξ . On a $\text{gr } L_k(V) \simeq \mathcal{O}_X(U)[\zeta, \zeta^{-1}] \simeq \text{gr } E_k(V)$. L'application de $E_k(V)$ dans $\text{gr } L_k(V)$ est encore donnée par le symbole principal :

$$\sigma(Q) = a_{\deg Q}(t) \cdot \zeta^{\deg(Q)}$$

On note toujours σ le symbole principal sur $L_k(V)$ puisqu'il est compatible avec les inclusions $D_k(V) \subset E_k(V) \subset L_k(V)$.

Les algèbres $L_k(V)$ se recollent en un faisceau d'algèbres L_k sur T_0^*X . Puisque \mathcal{O}_X est localement noethérien, il est clair que L_k est plat sur D_k . Le faisceau L_k est le microlocalisé recherché.

Le lemme suivant est le résultat clé permettant de faire le lien entre L_k et la variété caractéristique. Le localisé est justement construit comme le plus petit faisceau d'algèbres sur T_0^*X contenant D_k et vérifiant cette propriété.

Lemme 2.8. Soit $V = \pi^{-1}(U)$ un ouvert affine de T_0^*X muni de coordonnées locales $(t, \xi) \in T_0^*X$ et $P(t, \xi) = \sum_{n=0}^d a_n(t) \cdot \xi^n$ un élément d'ordre d de l'algèbre $D_k(V)$. Il existe un voisinage ouvert W de (t, ξ) dans T_0^*X pour lequel P est inversible dans $L_k(W)$ si et seulement si $\sigma(P)(t, \xi) = a_d(t) \cdot \xi^d \neq 0$.

Démonstration. Si P est inversible dans $L_k(W)$ pour un certain voisinage ouvert W de (t, ξ) , alors l'image de P dans le gradué est inversible au voisinage de (t, ξ) . Cette image est $\sigma(P) = a_d(t) \cdot \xi^d$ par définition. Il suffit qu'elle soit non nulle en (t, ξ) pour être inversible.

Réciproquement on suppose que $\sigma(P)(t, \xi) = a_d(t) \cdot \xi^d \neq 0$. Puisque le terme $a_d(t) \cdot \xi^d$ est non nul évalué en (t, ξ) , il est inversible sur un voisinage $W \subset V$ de (t, ξ) (en retirant les zéros potentiels de a_n dans V). On se restreint maintenant à cet ouvert W . Alors $P \cdot (a_n \xi^n)^{-1}$ s'écrit sous la forme $1 + R$ avec R un élément de $E_k(W)$ de degré < 0 . On note $S_m = 1 + R + \dots + R^m$ pour $m \in \mathbb{N}^*$. C'est un élément de $E_k(W)$ de degré $\leq -m$. En particulier la suite $(S_m)_m$ converge dans $L_k(W)$ vers un élément que l'on note S . Par ailleurs on observe que $\deg(S_m \cdot P \cdot (a_n \xi^n)^{-1} - 1) \leq -m + 1$. Ainsi le passage à la limite $m \rightarrow +\infty$ donne $S \cdot P \cdot (a_n \xi^n)^{-1} = 1$ dans $L_k(W)$. Autrement dit P est inversible dans le microlocalisé $L_k(W)$. \square

Soit maintenant M un $\mathcal{D}_{X,k}$ -module cohérent. Puisque L_k est plat sur $D_k = \mathcal{O}_{T^*X}$, on définit un L_k -module cohérent par

$$\tilde{M}^L = L_k \otimes_{\mathcal{O}_{T^*X}} \pi^{-1}(M)$$

Le support de ce module coïncide avec la variété caractéristique de M en dehors de la section nulle. Pour montrer ce résultat, on va se ramener au cas où $M = \mathcal{D}_{X,k}/I$ pour un idéal à gauche I de $\mathcal{D}_{X,k}$. On identifie I avec un idéal de $D_k = \mathcal{O}_{T^*X}$. On pose $\tilde{I} = L_k \cdot I$ l'idéal de L_k engendré par I . On munit I et \tilde{I} des filtrations obtenues par intersections de celles de D_k et L_k respectivement, ie $\text{gr } I = \sigma(I)$ et $\text{gr } \tilde{I} = \sigma(\tilde{I})$. On peut montrer alors que $\text{gr } \tilde{I}$ est engendré par $\sigma(I) : \text{gr } \tilde{I} = \text{gr } L_k \cdot \sigma(I)$.

Proposition 2.9. *On a $\text{Car}(M) \cap T_0^*(X) = \text{Supp } \tilde{M}^L$.*

Démonstration. On note $\text{Car}^*(M) = \text{Car}(M) \cap T_0^*(X)$. On peut se ramener au cas où X est affine et $M = \mathcal{D}_{X,k}/I$ pour un idéal à gauche I de $\mathcal{D}_{X,k}$. En effet puisque M est cohérent, M est engendré par des sections globales e_1, \dots, e_r . Si $I_i = \text{Ann}_{\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}}(e_i)$, alors $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k} \cdot e_i \simeq \mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}/I_i$. Comme la variété caractéristique est un support et puisque le support d'une somme est l'union des supports des termes de la somme, on a

$$\text{Car}(M) = \bigcup_{i=1}^r \text{Car}(\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}/I_i)$$

On suppose donc que $M = \mathcal{D}_{X,k}/I$. On note encore I l'image de I dans le faisceau D_k . Alors $\tilde{M}^L \simeq L_k/\tilde{I}$ en tant que D_k -module, où $\tilde{I} = L_k \cdot I$ est l'idéal de L_k engendré par I . Soit $(t, \xi) \notin \text{Supp } \tilde{M}^L$. Cela signifie que sur un voisinage affine V de (t, ξ) , $L_k|_V = \tilde{I}|_V$. Dans ce cas $\sigma(\tilde{I}|_V) = \text{gr}(E_k|_V) \cdot \sigma(I|_V) = \text{gr}(E_k|_V)$. En particulier $I|_V$ contient un élément P tel que $\sigma(P)(t, \xi) \neq 0$. On rappelle que

$$\text{Car } M \cap T^*V = \{(t, \xi) \in T^*V : \sigma(P)(t, \xi) = 0 \ \forall P \in I(V)\}$$

On en déduit que $(t, \xi) \notin \text{Car}^*(M)$.

Réciproquement on suppose que $(t, \xi) \notin \text{Car}^*(M)$. Cela signifie que I contient un élément P défini sur un voisinage affine V de (t, ξ) tel que $\sigma(P)(t, \xi) \neq 0$. Alors d'après le lemme 2.8 et quitte à réduire l'ouvert V , l'élément $P \in \tilde{I}(V)$ est inversible dans le microlocalisé $L_k(V)$. Ainsi $\tilde{I} = L_k$ au voisinage de (t, ξ) et $\tilde{M}^L \simeq L_k/\tilde{I}$ est nul en (t, ξ) . Autrement dit $(t, \xi) \notin \text{Supp}(\tilde{M}^L)$. \square

On rappelle que si \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{X,k}$ -module cohérent, alors $\text{Car } \mathcal{M} = \text{Car}(\mathcal{M}^\circ \otimes_{\mathcal{V}} \kappa)$ où \mathcal{M}° est un modèle entier de \mathcal{M} et $\mathcal{M}^\circ \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ est un $\mathcal{D}_{X,k}$ -module cohérent. On a alors

$$\text{Car}(\mathcal{M}) \cap T_0^*(X) = \text{Supp} (L_k \otimes_{\mathcal{O}_{T^*X}} \pi^{-1}(\mathcal{M}^\circ \otimes_{\mathcal{V}} \kappa))$$

3 Microlocalisations de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$

On construit dans cette section des microlocalisés du faisceau $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ pour un niveau de congruence k supérieur ou égale à un. Pour cela, on utilise une localisation non commutative décrite dans l'annexe de l'article [11] de Gergely Zábrádi. On commence par rappeler les principales propriétés de ce microlocalisé. La condition pour construire un tel microlocalisé est d'être une algèbre quasi-abélienne. Comme déjà dit en introduction, les K -algèbres de Banach $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U), |\cdot|_k)$ sont quasi-abéliennes dès que $k \geq 1$. On inverse en pratique la partie multiplicative $S = \{\partial^n, n \in \mathbb{N}\}$ des puissances de la dérivation ∂ . Une difficulté est de construire des microlocalisés des algèbres $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ pour la partie multiplicative S admettant des morphismes de transition commutant avec les morphismes injectifs $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$.

Soit $k \geq r \geq 1$. On va pouvoir définir un tel microlocalisé en inversant les éléments de S dans l'algèbres $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ pour toutes les normes $|\cdot|_r, \dots, |\cdot|_k$. On obtient ainsi une K -algèbre de Banach noëtherienne $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ dont la norme est seulement sous-multiplicative. Les faisceaux $\mathcal{F}_{k,r}$, pour un niveau r fixé, vont admettre des morphismes de transition $\mathcal{F}_{k+1,r} \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}$ commutant avec les morphismes $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$. En passant à la limite projective sur $k \geq r$, on construit un faisceau $\mathcal{F}_{\infty,r} = \varprojlim_{k \geq r} \mathcal{F}_{k,r}$. Localement, $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ est une K -algèbre de Fréchet-Stein. On introduit dans cette section les faisceaux $\mathcal{F}_{k,r}$. On démontre ensuite plusieurs de leurs propriétés. On définit le faisceau $\mathcal{F}_{\infty,r}$ plus tard dans la partie 4.

3.1 Microlocalisation d'une algèbre de Banach quasi-abélienne

On résume et rappelle dans cette partie quelques résultats vérifiés par le microlocalisé d'une algèbre de Banach quasi-abélienne construit dans l'appendice de l'article [11].

Soit K un corps valué complet non archimédien et A une K -algèbre de Banach munie d'une norme multiplicative $|\cdot|$ non archimédienne.

Définition 3.1. On dit que A est quasi-abélienne pour la norme $|\cdot|$ s'il existe un réel $\gamma \in [0, 1[$ tel que pour tout couple $(a, b) \in A^2$,

$$|ab - ba| = |[a, b]| \leq \gamma \cdot |ab| = \gamma \cdot |a||b|$$

On fixe maintenant m normes $|\cdot|_1, \dots, |\cdot|_m$ quasi-abéliennes sur A . Une partie multiplicative de A est un sous ensemble S de A vérifiant

1. $0 \notin S$ et $1 \in S$;
2. S est stable par multiplication : $\forall s, t \in S, s \cdot t \in S$.

Soit S une partie multiplicative de A . Il existe alors une unique K -algèbre de Banach $B = A(|\cdot|_1, \dots, |\cdot|_m, S)$ munie d'une norme sous-multiplicative $\|\cdot\|$ non archimédienne et d'un morphisme isométrique de K -algèbres

$$\phi : (A, \max\{|\cdot|_1, \dots, |\cdot|_m\}) \rightarrow (B, \|\cdot\|)$$

tels que $\phi(S) \subset B^\times$ et tels que les éléments de B de la forme $s^{-1}a$ pour $(s, a) \in S \times A$ soient denses dans B . On identifie A à une sous-algèbre de B via ϕ : on note encore a l'image d'un élément a de A et s^{-1} l'inverse de $s \in S$ dans B . Par ailleurs le morphisme $\phi : A \rightarrow B$ vérifie la propriété universelle suivante.

Proposition 3.2. Soit $(D, \|\cdot\|_D)$ une K -algèbre de Banach munie d'un morphisme de K -algèbres $f : A \rightarrow D$ tel que $f(S) \subset D^\times$. On suppose qu'il existe une constante $c > 0$ pour laquelle

$$\forall (s, a) \in S \times A, \quad \|f(s)^{-1} \cdot f(a)\|_D \leq c \cdot \max_{1 \leq i \leq m} |s|_i^{-1} \cdot |a|_i.$$

Alors il existe un unique morphisme continu de K -algèbres $\tilde{f} : B \rightarrow D$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ & \searrow f & \downarrow \tilde{f} \\ & & D \end{array}$$

commute. De plus si $c = 1$ et si la norme $\|\cdot\|_D$ de D est sous-multiplicative, alors \tilde{f} est 1-lipschitzienne :

$$\forall b \in B, \quad \|\tilde{f}(b)\|_D \leq \|b\|$$

Remarque 3.3. La condition vérifiée par f permet de la prolonger naturellement par uniformité de continuité sur B . En effet puisque $s(s^{-1}a) = a$ dans B et puisque \tilde{f} est multiplicative, on a nécessairement $\tilde{f}(s^{-1}a) = f(s)^{-1}f(a)$. La condition sur f (impliquant au passage la continuité de f) signifie que l'application $S \times A \rightarrow D$, $(s, a) \mapsto f(s)^{-1}f(a)$ est uniformément continue. Ainsi puisque les éléments de la forme $s^{-1}a$ sont denses dans B , elle se prolonge uniquement en une application continue $\tilde{f} : B \rightarrow D$.

On se donne une constante $\gamma \in [0, 1[$ telle que

$$\forall a, b \in A, \quad \forall 1 \leq i \leq m, \quad |ab - ba|_i \leq \gamma \cdot |ab|_i$$

Proposition 3.4. *Pour tout $(e_1, \dots, e_n) \in B^n$ et pour toute permutation $\sigma \in S_n$, on a*

$$\|e_1 \dots e_n - e_{\sigma(1)} \dots e_{\sigma(n)}\| \leq \gamma \|e_1 \dots e_n\|$$

En particulier B est quasi-abélienne de constante γ et $\|ab\| = \|ba\|$. Par ailleurs dans le cas où B est le localisé de A pour une unique norme, la norme de B est multiplicative.

Le lemme suivant relie la norme des éléments de B de la forme $s^{-1}a$ avec les normes $|\cdot|_i$ de s et de a .

Lemme 3.5. *Pour $a, b \in A$ et $s, t \in S$, on a*

1. $\|s^{-1}a - s^{-1}b\| = \max_{1 \leq i \leq m} \{|s|_i^{-1} \cdot |a - b|_i\}$;
2. $\|s^{-1}a\| = \max_{1 \leq i \leq m} \{|s|_i^{-1} \cdot |a|_i\}$;
3. $\|s^{-1}a - t^{-1}b\| = \max_{1 \leq i \leq m} \{|s|_i^{-1} \cdot |t|_i^{-1} \cdot |a - b|_i\}$.

On démontre maintenant que la K -algèbre $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U), |\cdot|_k)$ est quasi-abélienne dès que le niveau de congruence k est supérieur ou égale à un. On désigne toujours par U un ouvert affine contenant x sur lequel on dispose d'un système de coordonnées locales (t, ∂) . On rappelle que les sections du faisceau $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}$ sur l'ouvert U sont données par

$$\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n, \quad a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{x}, \mathbb{Q}}(U) \text{ tq } |a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \right\}$$

La K -algèbre $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ est munie d'une norme multiplicative complète notée $|\cdot|_k$.

Définition 3.6. *Soit $P = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$ un élément de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. On pose $|P|_k = \max_{n \geq 0} \{|a_n|\}$ et $\overline{N}_k(P) = \max\{n \in \mathbb{N} : |a_n| = |P|_k\}$. Par ailleurs on appelle coefficient dominant de P son coefficient d'indice $\overline{N}_k(P)$.*

On rappelle que la norme $|\cdot|_k$ et la fonctions \overline{N}_k ne dépendent pas du choix du système de coordonnées locales. Il a été vu dans [5] que $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U), |\cdot|_k)$ est une K -algèbre de Banach et que sa topologie est équivalente à la topologie ω -adique. De plus la norme $|\cdot|_k$ est multilicative.

Proposition 3.7. *Pour tout entier $k \geq 1$, l'algèbre de Banach $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U), |\cdot|_k)$ est quasi-abélienne de constante $|\omega|^k = p^{-k}$.*

Démonstration. Soit $P = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$ et $Q = \sum_{n \geq 0} b_n \cdot (\omega^k \partial)^n$ deux éléments de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. On a

$$\begin{aligned} PQ &= \sum_{i \geq 0} a_i \cdot (\omega^k \partial)^i \cdot \left(\sum_{j \geq 0} b_j (\omega^k \partial)^j \right) \\ &= \sum_{i, j \geq 0} a_i \cdot \left(\sum_{\ell=0}^i \binom{i}{\ell} \cdot \omega^{k\ell} \cdot \partial^\ell(b_j) \cdot \omega^{k(i+j-\ell)} \cdot \partial^{i+j-\ell} \right) \\ &= \sum_{u \geq 0} \left(\sum_{\substack{\ell \geq 0 \\ 0 \leq j \leq u}} \binom{u+\ell-j}{\ell} \cdot a_{u+\ell-j} \cdot \omega^{k\ell} \cdot \partial^\ell(b_j) \right) \cdot (\omega^k \partial)^u \end{aligned}$$

On en déduit que le coefficient d'indice u de $PQ - QP$ est

$$\alpha_u = \sum_{\substack{\ell \geq 0 \\ 0 \leq j \leq u}} \omega^{k\ell} \binom{u+\ell-j}{\ell} (a_{u+\ell-j} \cdot \partial^\ell(b_j) - b_{u+\ell-j} \cdot \partial^\ell(a_j))$$

Pour $\ell = 0$, la somme sur j est nulle. Il vient

$$\alpha_u = \omega^k \sum_{\substack{\ell \geq 1 \\ 0 \leq j \leq u}} \omega^{k(\ell-1)} \binom{u+\ell-j}{\ell} (a_{u+\ell-j} \cdot \partial^\ell(b_j) - b_{u+\ell-j} \cdot \partial^\ell(a_j))$$

Quitte à normaliser P et Q , on peut supposer que $|P|_k = |Q|_k = 1$. Chaque terme de la somme a une norme inférieure à 1. La somme est donc aussi de norme inférieure à 1. Ainsi $|\alpha_u| \leq |\omega^k| = p^{-k}$ et $|PQ - QP|_k = \max_{u \in \mathbb{N}} \{|\alpha_u|\} \leq p^{-k}$. \square

Remarque 3.8. L'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}^{(0)}(U) = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, 0, \mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ n'est pas quasi-abélienne puisque par exemple $[\partial, t] = 1$. Pour $k > 0$, on a $[\omega^k \partial, t] = \omega^k$ avec $|\omega^k \partial|_k = 1 = |t|$ et $|\omega^k| < 1$.

3.2 Un premier microlocalisé \mathcal{E}_k

On suppose à partir de maintenant, et dans toute la suite, que le niveau de congruence k est supérieur ou égale à un. Ainsi la K -algèbre $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U), |\cdot|_k)$ est quasi-abélienne. On peut donc la localiser pour n'importe quelle partie multiplicative. On choisit concrètement comme partie multiplicative de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ les puissance de $\partial : S = \{\partial^n, n \in \mathbb{N}\}$.

Définition et premières propriétés

On localise dans cette partie $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ pour la seule norme $|\cdot|_k$. Le microlocalisé $\mathcal{E}_k(U)$ obtenu a de très bonnes propriétés en tant qu'algèbre de Banach. En particulier, on peut déterminer facilement ses éléments inversibles. Cependant il n'y a de morphismes de transition naturels $\mathcal{E}_{k+1}(U) \rightarrow \mathcal{E}_k(U)$ commutant avec les morphismes de transition $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k+1}^{(0)}(U) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k}^{(0)}(U)$. On ne peut donc pas construire à partir des algèbres $\mathcal{E}_k(U)$ un microlocalisé au niveau de l'algèbre $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}(U) = \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) = \bigcap_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$.

On introduit dans la partie suivante un autre microlocalisé $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ admettant quant à lui des morphismes de transition injectifs $\mathcal{F}_{k+1,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$. Néanmoins ce microlocalisé est plus compliqué : sa norme n'est plus multiplicative, mais seulement sous-multiplicative. Cependant on obtient facilement une injection naturelle $\mathcal{F}_{k,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$ continue. Ainsi bien connaître $\mathcal{E}_k(U)$ permet d'en déduire de nombreuses propriétés pour l'algèbre $\mathcal{F}_{k,r}(U)$.

Définition 3.9. On définit l'algèbre $\mathcal{E}_k(U) = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \langle |\cdot|_k, S \rangle$ comme le microlocalisé de l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ donné par la partie multiplicative S et la norme $|\cdot|_k$. On note $\phi_k : \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$ le morphisme de K -algèbres associé.

Le microlocalisé $\mathcal{E}_k(U)$ est une K -algèbre de Banach. Puisqu'on a localisé par rapport à la seule norme $|\cdot|_k$ de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$, la norme de $\mathcal{E}_k(U)$ est encore multiplicative. De plus le morphisme $\phi_k : \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$ est une isométrie. Autrement dit la norme d'un élément de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ est la même dans $\mathcal{E}_k(U)$ et $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. On identifie $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ à une sous-algèbre de $\mathcal{E}_k(U)$ via le morphisme ϕ_k . On peut noter encore $|\cdot|_k$ la norme de $\mathcal{E}_k(U)$ sans ambiguïté.

Remarque 3.10. Il revient au même de prendre comme partie multiplicative les puissances de $\omega^k \partial$ puisque l'uniformisante ω est inversible dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$.

On a $|\partial|_k = |\omega|^{-k} = p^{-k}$. Le lemme 3.5 nous dit que $|\partial^{-1}|_k = |\omega|^k = p^k$. De manière équivalente, $|\omega^k \partial|_k = |(\omega^k \partial)^{-1}|_k = 1$.

Proposition 3.11. Tout élément S de $\mathcal{E}_k(U)$ s'écrit uniquement sous la forme d'une série $S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$ avec $a_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \pm\infty$. De plus $|S|_k = \max_{n \in \mathbb{Z}} \{|a_n|\}$.

Démonstration. On commence par démontrer que $\mathcal{E}_k(U)$ contient les sommes de cette forme. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U)$ vérifiant $a_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \pm\infty$. On pose $S_m = \sum_{n \geq -m} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$ pour tout entier $m \in \mathbb{N}$. Puisque $\mathcal{E}_k(U)$ contient $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ et les puissances de ∂^{-1} , les éléments S_m appartiennent à $\mathcal{E}_k(U)$. On a pour tout $\ell \geq 0$, $S_{m+\ell} - S_m = \sum_{-(m+\ell) \leq n < -m} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$ et

$$|S_{m+\ell} - S_m|_k \leq \max_{-(m+\ell) \leq n < -m} |a_n \cdot (\omega^k \partial)^n|_k = \max_{-(m+\ell) \leq n < -m} |a_n|$$

Puisque la suite a_n converge vers 0 pour $n \rightarrow -\infty$, la suite $(S_m)_m$ est de Cauchy dans l'algèbre complète $\mathcal{E}_k(U)$. Elle converge donc vers un élément de $\mathcal{E}_k(U)$ que l'on note $S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$. Par ailleurs, on a $|S_m|_k = \max_{n \geq -m} |a_n|$. En effet $S_m \cdot (\omega^k \partial)^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-m} (\omega^k \partial)^n$. Puisque la norme $|\cdot|_k$ est multiplicative et comme $|\omega^k \partial|_k = 1$, on obtient

$$|S_m|_k = |S_m \cdot (\omega^k \partial)^m|_k = \max_{n \in \mathbb{N}} |a_{n-m}| = \max_{n \geq -m} |a_n|$$

On en déduit en passant à la limite $m \rightarrow \infty$ que $|S|_k = \max_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|$. En particulier $S = 0$ si et seulement si tous ses coefficients a_n sont nuls. Ainsi une telle écriture est unique.

On démontre maintenant que $\mathcal{E}_k(U)$ coïncide avec l'ensemble de ces séries. On note F le sous-ensemble de $\mathcal{E}_k(U)$ constitué des éléments de la forme $S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$ avec $a_n \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow \pm\infty$. On va vérifier que F contient les éléments $(\omega^k \partial)^n \cdot P$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et $P \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ et que F est fermé. Puisque l'ensemble des $(\omega^k \partial)^n \cdot P$ est dense dans $\mathcal{E}_k(U)$, on aura bien $\mathcal{E}_k(U) = F$.

Pour le premier point, il suffit de prouver que si f est un élément de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}(U)$, alors $\partial^{-1} f \in F$. On a $[\partial, f] = \partial f - f \partial = \partial(f)$, soit $\partial f = \partial(f) + f \partial$. Il vient

$$\partial^{-1} \partial f = f = \partial^{-1} \partial(f) + \partial^{-1} f \partial$$

Ainsi $\partial^{-1} f = f \partial^{-1} - \partial^{-1} \partial(f) \partial^{-1}$. En réitérant ce calcul pour $\partial^{-1} \partial(f)$ et en modifiant ce terme dans l'expression de $\partial^{-1} f$, on obtient $\partial^{-1} \partial^n(f) = \partial^n(f) \partial^{-1} - \partial^{-1} \partial^{n+1}(f) \partial^{-1}$. Une récurrence montre alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\partial^{-1} f = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \partial^j(f) \partial^{-(j+1)} + (-1)^n \partial^{-1} \partial^n(f) \partial^{-n}$$

On a

$$|\partial^j(f) \partial^{-(j+1)}|_k = |\partial^j(f)| \cdot |\partial^{-(j+1)}|_k \leq |f| \cdot p^{-k(j+1)} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

$$|\partial^{-1} \partial^n(f) \partial^{-n}|_k = |\partial^{-1}|_k \cdot |\partial^n(f)| \cdot |\partial^{-n}|_k \leq |f| \cdot p^{-k(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

La somme partielle de $\partial^{-1} f$ converge donc lorsque $n \rightarrow \infty$. On en déduit que

$$\partial^{-1} f = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \partial^n(f) \partial^{-(n+1)} \in F$$

Enfin puisque la norme d'un élément $S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$ de F est $|S|_k = \max_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|$, toute suite de Cauchy d'éléments $S_m = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{n,m} \cdot (\omega^k \partial)^n$ de F converge aussi vers un élément de F . En effet le fait que (S_m) soit de Cauchy implique que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la

suite $(a_{n,m})_m$ est de cauchy. Elle converge donc vers un élément $\alpha_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U)$. La suite $(S_m)_m$ converge alors vers $S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n \cdot (\omega^k \partial)^n$. Cela prouve que F est fermé. Il en résulte que $\mathcal{E}_k(U) = F$. \square

Remarque 3.12. *On a démontré dans cette preuve que pour toute fonction $f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U)$,*

$$\partial^{-1} f = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \partial^n (f) \cdot \partial^{-(n+1)} \in \mathcal{E}_k(U)$$

On démontre le résultat suivant en considérant la graduation de $\mathcal{E}_k(U)$ induite par la norme $|\cdot|_k$.

Proposition 3.13. *La K -algèbre $\mathcal{E}_k(U)$ est noetherienne à gauche et à droite. De plus le morphisme $\phi_k : \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$ est plat à gauche et à droite.*

Démonstration. Quitte à étendre K par une extension finie, on peut supposer que x est κ -rationnel. On rappelle que la norme spectrale de $\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U)$ est à valeur dans $p^{\mathbb{Z}}$ (corollaire 1.5.4 de l'article [4] de Laurent Garnier) lorsque x est un point κ -rationnel. On munit $\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U)$ de la filtration indexée par \mathbb{Z} fournie par la norme spectrale :

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U)(m) = \{f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U) : |f| \leq p^m\} \quad \text{pour } m \in \mathbb{Z}$$

Elle est croissante exhaustive. Soit $\text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U))$ le gradué associé. Si $|f| = p^m$, on définit $\gamma(f)$ comme étant l'image de f dans le gradué $\text{gr}_m \mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U) = \mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U)(m) / \mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U)(m-1)$. On note $\gamma : \mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U) \rightarrow \text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U))$ l'application associée, et $\gamma : K \rightarrow \text{gr } K$ la restriction à K . Cette application permet de doter $\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U)$ d'un produit et donc d'une structure de $\text{gr } K$ -algèbre. Le gradué $\text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U))$ est noetherien puisque l'algèbre $\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U)$ est noetherienne.

Soit $P = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$ un élément non nul de $\mathcal{E}_k(U)$. Par construction, sa norme $|P|_k = \max_{n \in \mathbb{Z}} \{|a_n|\}$ appartient à $p^{\mathbb{Z}}$. On munit aussi $\mathcal{E}_k(U)$ de la filtration donnée par la norme :

$$\mathcal{E}_k(U)(m) = \{P \in \mathcal{E}_k(U) : |P|_k \leq p^m\} \quad \text{pour } m \in \mathbb{Z}$$

C'est une filtration croissante indexée par \mathbb{Z} vérifiant

$$\forall m, m' \in \mathbb{Z}, \quad \mathcal{E}_k(U)(m) \cdot \mathcal{E}_k(U)(m') \subset \mathcal{E}_k(U)(m + m')$$

On note $\text{gr}_m \mathcal{E}_k(U) = \mathcal{E}_k(U)(m) / \mathcal{E}_k(U)(m-1)$ et $\text{gr } \mathcal{E}_k(U) = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \text{gr}_m \mathcal{E}_k(U)$ la gradué associé. Soit ζ_k l'image de $\omega^k \partial$ dans $\text{gr}_0 \mathcal{E}_k(U)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{E}_k(U)(m)$ est isomorphe à $\mathcal{E}_k(U)(m + \lambda)$ via la multiplication par ω^λ . On en déduit que $\text{gr}_m \mathcal{E}_k(U) \simeq \text{gr}_{m+\lambda} \mathcal{E}_k(U)$ via la multiplication par $\gamma(\omega^\lambda)$. On peut donc identifier $\gamma(\omega^\lambda) \cdot \zeta_k$ avec l'image de $\omega^\lambda \cdot \omega^k \partial$ dans $\text{gr}_\lambda \mathcal{E}_k(U)$.

On suppose que $|P|_k = p^m$ pour un certain $m \in \mathbb{Z}$. L'image de P dans le gradué $\text{gr}_m \mathcal{E}_k(U)$ est l'élément $\sum_{\bar{n}_k(P) \leq n \leq \bar{N}_k(P)} \gamma(a_n) \cdot \zeta_k^n$. On définit ainsi une application $\gamma :$

$\mathcal{E}_k(U) \rightarrow \text{gr } \mathcal{E}_k(U)$ dont l'image engendre le gradué en tant que $\text{gr } K$ -algèbre. Puisque $\mathcal{E}_k(U)$ est une algèbre quasi-abélienne, le gradué est commutatif. On en déduit que $\text{gr } \mathcal{E}_k(U) \simeq \text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_k, \zeta_k^{-1}]$ en tant que $\text{gr } K$ -algèbre. En particulier, $\text{gr } \mathcal{E}_k(U)$ est une $\text{gr } K$ -algèbre noetherienne d'après la proposition 1.1 de l'article [8].

De même on munit l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ de la filtration donnée par la norme. L'inclusion $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$ induit une inclusion entre les gradués $\text{gr } \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \text{gr } \mathcal{E}_k(U)$. On a $\text{gr } \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \simeq \text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_k]$ en tant que $\text{gr } K$ -algèbre. Le morphisme de $\text{gr } K$ -algèbres $\text{gr } \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \text{gr } \mathcal{E}_k(U)$ est donc plat. D'après la propositions 1.2 de l'article [8], on en déduit le résultat. \square

Elements inversibles de $\mathcal{E}_k(U)$

On rappelle que $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U)$ est l'ensemble des éléments de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ de norme inférieure ou égale à un. On note $\mathcal{D}_{X,k}$ la réduction modulo ω de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}$. C'est le faisceau de κ -algèbres sur la fibre spéciale $X = \mathfrak{X} \times_{\mathcal{V}} \text{Spec } \kappa$ de \mathfrak{X} engendré localement sur U par $\mathcal{O}_{X|U}$ et par la dérivation ∂_k image de $\omega^k \partial$ après réduction modulo ω . On rappelle que \mathfrak{X} et X ont même espace topologique ; on identifie U à un ouvert affine de X . On a

$$\mathcal{D}_{X,k} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_X(U) \cdot \partial_k^n$$

C'est une κ -algèbre commutative puisque $[\omega^k \partial, t] = \omega^k$ dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U)$ et comme $k \geq 1$. Ainsi $\mathcal{D}_{X,k}(U) = \mathcal{O}_X(U)[\partial_k]$ est un anneau de polynôme en la variable ∂_k . On en déduit que $\mathcal{D}_{X,k}(U)^\times = \mathcal{O}_X(U)^\times$.

Soit $\mathcal{E}_k^\circ(U)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}_k(U)$ de norme inférieure ou égale à un. C'est une \mathcal{V} -algèbre de Banach contenant $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U)$. On note $E_k(U) = \mathcal{E}_k^\circ(U) \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ la réduction modulo ω de $\mathcal{E}_k^\circ(U)$. C'est une κ -algèbre contenant $\mathcal{D}_{X,k}(U)$ dans laquelle la dérivation ∂_k est inversible. Puisque l'algèbre $(\mathcal{E}_k(U), |\cdot|)$ est quasi-abélienne, $E_k(U)$ est une κ -algèbre commutative. Il en découle que $E_k(U) = \mathcal{O}_X(U)[\partial_k, \partial_k^{-1}]$. Après réduction modulo ω , $E_k(U)$ est donc le localisé classique commutatif de l'algèbre de polynômes $\mathcal{O}_X(U)[\partial_k]$ pour la partie multiplicative constituée des puissances de la dérivation ∂_k . On en déduit l'égalité

$$E_k(U)^\times = \{a \cdot \partial_k^n, \quad a \in \mathcal{O}_X(U)^\times \text{ et } n \in \mathbb{Z}\}$$

Définition 3.14. Pour tout élément $P = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n \in \mathcal{E}_k(U)$, on définit

$$\overline{N}_k(P) = \max\{n \in \mathbb{Z} : |a_n| = |P|_k\}$$

$$\underline{n}_k(P) = \min\{n \in \mathbb{Z} : |a_n| = |P|_k\}$$

La fonction \overline{N}_k généralise celle de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. La proposition suivante caractérise l'inversibilité des éléments de $\mathcal{E}_k(U)$ en fonctions de \overline{N}_k et de \overline{n}_k .

Proposition 3.15. *Un élément P de $\mathcal{E}_k(U)$ est inversible dans $\mathcal{E}_k(U)$ si et seulement si $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P)$ et si son coefficient d'indice $\overline{N}_k(P)$ est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U)$.*

Démonstration. Quitte à normaliser P , on peut supposer que $|P|_k = 1$. Alors $P \in \mathcal{E}_k^\circ(U)$. On note $\bar{P} = (P \bmod \omega)$ l'image de P dans $E_k(U) = \mathcal{E}_k^\circ(U) \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$. On commence par démontrer que P est inversible dans $\mathcal{E}_k(U)$ si et seulement si \bar{P} est inversible dans $E_k(U)$. Le sens direct est évident. On suppose que \bar{P} est inversible dans $E_k(U)$: il existe $Q \in \mathcal{E}_k^\circ(U)$ tel que $\bar{P}\bar{Q} = 1$. Ainsi PQ est de la forme $1 + \omega R$ pour un certain élément $R \in \mathcal{E}_k^\circ(U)$. Puisque $|\omega R|_k \leq |\omega| < 1$, l'élément $1 + \omega R$ est inversible dans $\mathcal{E}_k(U)$. En effet son inverse est donné par la série « classique »

$$(1 + \omega R)^{-1} = \sum_{i \geq 0} (-\omega R)^i$$

Cette somme est bien convergente puisque $|\omega R|_k < 1$. On en déduit que $P \cdot Q(1 + \omega R)^{-1} = 1$ dans $\mathcal{E}_k(U)$. Autrement dit P est inversible à droite dans $\mathcal{E}_k(U)$. De même, P est inversible à gauche puisque $\bar{Q}\bar{P} = 1$. Ainsi P est inversible dans $\mathcal{E}_k(U)$.

On rappelle que $E_k(U)^\times = \{a \cdot \partial_k^n, a \in \mathcal{O}_X(U)^\times \text{ et } n \in \mathbb{Z}\}$. L'élément P est inversible dans $\mathcal{E}_k(U)$ si et seulement si \bar{P} est de la forme $\bar{a} \cdot \partial_k^n$ avec $\bar{a} \in \mathcal{O}_X(U)^\times$. La réduction modulo ω de P est un monôme si et seulement si $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P)$. Le terme \bar{a} est inversible dans $\mathcal{O}_X(U)$ si et seulement si a est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{x}}(U)$. Il s'agit exactement des conditions données dans la proposition. \square

Remarque 3.16.

1. *Ce critère est analogue à la condition d'inversibilité des séries de Laurent convergente $K\langle T \rangle$ à coefficients dans un corps ultramétrique complet K .*
2. *On peut démontrer ce résultat sans réduire modulo ω les faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k}^{(0)}(U)$ et $\mathcal{E}_k^\circ(U)$. En effet on peut raisonner d'une manière analogue en utilisant le gradué de $\mathcal{E}_k(U)$:*

$$\text{gr } \mathcal{E}_k(U) \simeq \text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{x},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_k, \zeta_k^{-1}]$$

Les éléments inversibles de ce gradué sont aussi les éléments de la forme $\alpha \cdot \zeta_k$ avec α inversible. Il est clair qu'un élément inversible de $\mathcal{E}_k(U)$ est inversible dans le gradué $\text{gr } \mathcal{E}_k(U)$. La preuve est alors similaire à celle de la proposition 3.15.

Soit $P = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$ un élément inversible de $\mathcal{E}_k(U)$. Son inverse s'exprime explicitement en fonction des coefficients a_n . On note $d = \overline{N}_k(P)$ l'ordre de P . On sait

que $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P)$ et que le coefficient a_d de P est inversible d'après la proposition 3.15. On a

$$P = a_d \cdot \underbrace{\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{a_{n+d}}{a_d} (\omega^k \partial)^n \right)}_Q \cdot (\omega^k \partial)^d$$

Le coefficient constant de Q est égale à 1. Ses autres coefficients sont de normes strictement inférieures à 1. Son inverse est comme précédemment donné par $Q^{-1} = \sum_{i \geq 0} (-(Q-1))^i$. On obtient

$$P^{-1} = (\omega^k \partial)^{-d} \cdot \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(- \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{a_{n+d}}{a_d} (\omega^k \partial)^n \right)^i \cdot a_d^{-1}$$

Le lemme suivant servira dans la démonstration de l'inégalité de Bernstein pour les $\mathcal{D}_{\mathfrak{x}, \infty}$ -modules coadmissibles.

Lemme 3.17. *Soit \mathcal{J} un idéal cohérent de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. On note $\mathcal{E}_k(U) \cdot \mathcal{J}$ l'idéal à gauche de $\mathcal{E}_k(U)$ engendré par \mathcal{J} . Si $\mathcal{E}_k(U) \cdot \mathcal{J} = \mathcal{E}_k(U)$, alors $\mathcal{J} \cap \mathcal{E}_k(U)^\times \neq \emptyset$.*

Démonstration. On reprend les notations de la proposition 3.13 pour les gradués. Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on pose $\mathcal{J}(m) = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U)(m) \cap \mathcal{J}$. On définit ainsi une filtration croissante exhaustive sur \mathcal{J} . Le gradué associé $\text{gr } \mathcal{J}$ est un idéal de $\text{gr } \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. On note $\gamma : \mathcal{J} \rightarrow \text{gr } \mathcal{J}$ la restriction à \mathcal{J} de l'application $\gamma : \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U) \rightarrow \text{gr } \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. On observe alors que $\text{gr } \mathcal{J} = \text{gr}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U)) \cdot \gamma(\mathcal{J})$. De même $\text{gr}(\mathcal{E}_k(U) \cdot \mathcal{J}) = \text{gr}(\mathcal{E}_k(U)) \cdot \gamma(\mathcal{J})$ pour la filtration $(\mathcal{E}_k(U) \cdot \mathcal{J})(m) = \mathcal{E}_k(U)(m) \cap (\mathcal{E}_k(U) \cdot \mathcal{J})$. On rappelle que $\text{gr } \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U) \simeq \text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{x}, \mathbb{Q}}(U))[\zeta_k]$ et que $\text{gr } \mathcal{E}_k(U) \simeq \text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{x}, \mathbb{Q}}(U))[\zeta_k, \zeta_k^{-1}]$.

L'hypothèse $\mathcal{E}_k(U) \cdot \mathcal{J} = \mathcal{E}_k(U)$ implique $\text{gr}(\mathcal{E}_k(U) \cdot \mathcal{J}) = \text{gr}(\mathcal{E}_k(U)) \cdot \gamma(\mathcal{J}) = \text{gr } \mathcal{E}_k(U)$. Autrement dit il existe des opérateurs $P_1, \dots, P_s \in \mathcal{J}$ et $Q_1, \dots, Q_s \in \text{gr } \mathcal{E}_k(U)$ tels que

$$Q_1 \cdot \gamma(P_1) + \dots + Q_s \cdot \gamma(P_s) = 1$$

Puisque $\text{gr } \mathcal{E}_k(U) \simeq \text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{x}, \mathbb{Q}}(U))[\zeta_k, \zeta_k^{-1}]$, on peut trouver un entier naturel n pour lequel $\zeta_k^n \cdot Q_1, \dots, \zeta_k^n \cdot Q_s \in \text{gr } \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U) \simeq \text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{x}, \mathbb{Q}}(U))[\zeta_k]$. On note $R_i = \zeta_k^n \cdot Q_i \in \text{gr } \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. Alors

$$\zeta_k^n = R_1 \cdot \gamma(P_1) + \dots + R_s \cdot \gamma(P_s) \in \text{gr } \mathcal{J} = \text{gr}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x}, k, \mathbb{Q}}^{(0)}(U)) \cdot \gamma(\mathcal{J})$$

Puisque ζ_k^n est un monôme de norme un, $\zeta_k^n \in \text{gr}_0 \mathcal{J} = \mathcal{J}(0)/\mathcal{J}(-1)$. En particulier ζ_k^n se relève en un élément $P \in \mathcal{J}$ pour lequel $\gamma(P) = \zeta_k^n$. Cela signifie que $\overline{N}_k(P) = n_k(P) = n$ et que le coefficient d'indice n de P est inversible. D'après la proposition 3.15, P est inversible dans $\mathcal{E}_k(U)$. \square

Pas de morphismes de transition $\mathcal{E}_{k+1}(U) \rightarrow \mathcal{E}_k(U)$

On ne dispose pas de morphismes naturels de transition $\mathcal{E}_{k+1}(U) \rightarrow \mathcal{E}_k(U)$ prolongeant les inclusions $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U)$. La propriété universelle du microlocalisé ne fournit pas un tel morphisme. En effet le morphisme $f_k := \phi_k|_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)} : \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$ ne vérifie pas la condition d'uniforme continuité de la propriété universelle 3.2 appliquée à $\mathcal{E}_{k+1}(U)$. Cette condition s'écrit

$$\exists c > 0 \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}, \forall P \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U), |\partial^{-n} \cdot P|_k \leq c \cdot |\partial|_{k+1}^{-n} \cdot |P|_{k+1}$$

On a $|\partial^{-1}|_k = |\omega|^k = p^{-k}$ et $|\partial^{-1}|_{k+1} = p^{-k+1}$. Ainsi pour $P = 1$, il n'est pas possible de trouver une telle constante c . Le morphisme f_k ne se factorise donc pas naturellement en un morphisme de $\mathcal{E}_{k+1}(U)$ dans $\mathcal{E}_k(U)$ étendant l'inclusion de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$.

Pour tout $P \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$, on a $|P|_k \leq |P|_{k+1}$ avec égalité stricte dès que $\overline{N}_k(P) > 0$. En effet si $P = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot \partial^n$, alors

$$|P|_k = \max_{n \in \mathbb{N}} \{|a_n| \cdot p^{kn}\} \leq |P|_{k+1} = \max_{n \in \mathbb{N}} \{|a_n| \cdot p^{(k+1)n}\}$$

Puisque la norme de $\mathcal{E}_k(U)$ est multiplicative, cette inégalité est inversée dès que l'on inverse ∂ . L'inclusion de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U)$ est inversée dès que l'on considère des opérateurs dont les puissances de ∂ sont toutes négatives. Par exemple $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} \omega^n \cdot (\omega^{k+1} \partial)^n$ est un élément de $\mathcal{E}_{k+1}(U) \setminus \mathcal{E}_k(U)$. Il n'existe donc pas de morphisme injectif de $\mathcal{E}_{k+1}(U)$ dans $\mathcal{E}_k(U)$.

Le faisceau de K -algèbres \mathcal{E}_k

Dans tout ce qui précède, on a défini le microlocalisé $\mathcal{E}_k(U)$ sur un ouvert affine U de \mathfrak{X} sur lequel on dispose d'un système de coordonnées locale (t, ∂) . On rappelle que l'algèbre $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U), |\cdot|_k)$ ne dépend pas du système de coordonnées locale. Puisque l'algèbre $\mathcal{E}_k(U)$ est définie par une propriété universelle au dessus de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$, le microlocalisé $\mathcal{E}_k(U)$ est indépendant du système de coordonnées locale.

On note \mathcal{U} l'ensemble des ouverts affines de \mathfrak{X} sur lesquels on dispose de coordonnées locale. C'est une base de voisinages ouverts de \mathfrak{X} .

Proposition 3.18. *Il existe un unique faisceau \mathcal{E}_k de K -algèbres sur \mathfrak{X} tel que pour tout ouvert U de \mathcal{U} , $\mathcal{E}_k(U) = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \langle |\cdot|_k, \{\partial^n\}_{n \in \mathbb{N}} \rangle$.*

Démonstration. Soit $V \subset U$ deux ouverts de \mathcal{U} . Puisque $\mathcal{E}_k(V)$ ne dépend pas du choix du système de coordonnées locale, le morphisme composé $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(V) \rightarrow \mathcal{E}_k(V)$

vérifie les hypothèses de la propriété universelle 3.2 appliquée à $\mathcal{E}_k(V)$. Il existe donc un unique morphisme $\mathcal{E}_k(U) \rightarrow \mathcal{E}_k(V)$ induit par le morphisme $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(V)$. On en déduit que \mathcal{E}_k est un préfaisceau sur l'ensemble des ouverts de \mathcal{U} .

Puisque \mathcal{U} est une base de voisinages ouverts de \mathfrak{X} , il existe un unique préfaisceau \mathcal{E}_k sur \mathfrak{X} coïncidant avec les $\mathcal{E}_k(U)$ sur les ouverts U de \mathcal{U} .

L'unicité de l'écriture des éléments de $\mathcal{E}_k(U)$ comme séries en les puissances de $(\omega^k \partial)$ implique que \mathcal{E}_k est un faisceau sur les ouverts U de \mathcal{U} . On en déduit que \mathcal{E}_k est un faisceau de K -algèbres sur \mathfrak{X} . \square

On a donc construit un faisceau de K -algèbres \mathcal{E}_k sur \mathfrak{X} admettant $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ comme sous-faisceau et pour lequel la dérivation ∂ est localement inversible. Cependant on ne dispose pas de morphismes de transition naturels $\mathcal{E}_{k+1} \rightarrow \mathcal{E}_k$ induits par les morphismes de départ $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$.

Soit U un ouvert affine contenant le point x sur lequel on dispose d'un système de coordonnées locale (t, ∂) associé à x . La proposition 3.15 se traduit de la manière suivante :

Proposition 3.19. *Un élément $P \in \mathcal{E}_k(U)$ est inversible dans $\mathcal{E}_k(V)$ pour un voisinage $V \subset U$ de x si et seulement si $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P)$ et si le coefficient d'indice $\overline{N}_k(P)$ de P est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(V)$.*

Soit $P = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$ un opérateur de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. On note $d = \overline{N}_k(P)$. On rappelle que si P est inversible dans $\mathcal{E}_k(V)$, alors son inverse est donné par

$$P^{-1} = (\omega^k \partial)^{-d} \cdot \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(- \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+d}}{a_d} (\omega^k \partial)^n \right)^i \cdot a_d^{-1}$$

L'opérateur P^{-1} appartient à $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(V)$ si et seulement si $d = 0$. On retrouve ainsi les éléments inversibles de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$, déjà donnés dans le corollaire 2.8 de [5] :

Corollaire 3.20. *Soit $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$ un opérateur de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. Il existe un ouvert V de U tel que $P \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(V)^\times$ si et seulement si $\overline{N}_k(P) = 0$ et si $a_0 \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(V)^\times$. Si de plus $\|P\|_k = 1$, alors $P^{-1} \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(V)$.*

3.3 Des microlocalisés $\mathcal{F}_{k,r}$ avec des morphismes de transition

On fixe tout d'abord l'ouvert affine U sur lequel on dispose d'une coordonnée locale. Soit r un entier naturel supérieur ou égale à un. On ne considère plus que les indices k plus grands que r . En ne prenant plus la seule norme $|\cdot|_k$ pour définir le microlocalisé de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$, mais un certain nombre des normes précédentes $|\cdot|_r, \dots, |\cdot|_k$, la condition d'uniforme continuité pour obtenir des morphismes de transition devient évidente.

Dans cette partie l'entier $r \geq 1$ est fixé. On ne le fera varier que dans la section 6. Le niveau de congruence k sera toujours supposé supérieur ou égale à r lorsqu'on considère l'algèbre $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. La partie multiplicative S est toujours constituée des puissances de la dérivation ∂ .

Définition et propriétés

Définition 3.21. *Pour tout entier $k \geq r$, on pose $\mathcal{F}_{k,r}(U) = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \langle |\cdot|_r, \dots, |\cdot|_k; S \rangle$. On note $\varphi_{k,r} : \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$ le morphisme de K -algèbres associé.*

Soit $\|\cdot\|_{k,r}$ la norme de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$; $(\mathcal{F}_{k,r}(U), \|\cdot\|_{k,r})$ est une K -algèbre de Banach. Par construction, $\varphi_{k,r}$ est une isométrie de $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U), \max\{|\cdot|_r, \dots, |\cdot|_k\})$ dans $(\mathcal{F}_{k,r}(U), \|\cdot\|_{k,r})$. Pour tout opérateur $P \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$, on vérifie que $|P|_r \leq \dots \leq |P|_k$. On en déduit l'égalité $\max\{|P|_r, \dots, |P|_k\} = |P|_k$. Autrement dit $\varphi_{k,r}$ est une isométrie de $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U), |\cdot|_k)$ dans $(\mathcal{F}_{k,r}(U), \|\cdot\|_{k,r})$. On identifie toujours $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ à une sous-algèbre de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ via le morphisme $\varphi_{k,r}$. Cette identification est encore compatible avec les normes.

La norme de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ n'est cette fois plus multiplicative mais seulement sous-multiplicative dès que $k > r$. En effet, on sait d'après le lemme 3.5 que

$$\|\partial^{-1}\|_{k,r} = \max_{r \leq i \leq k} \{|\partial|_i^{-1}\} = \max_{r \leq i \leq k} \{|\omega|^i\} = |\omega| = p^{-r}$$

Cependant on a toujours $\|\partial\|_{k,r} = |\partial|_k = |\omega|^{-k} = p^k$.

Remarque 3.22. *Pour $k = r$, on a $\mathcal{F}_{k,k}(U) = \mathcal{E}_k(U)$. En effet on localise $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ seulement pour la norme $|\cdot|_k$. En particulier la norme de $\mathcal{F}_{k,k}(U)$ est multiplicative.*

Le morphisme $f_k := \phi_k|_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)} : \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$ vérifie de manière évidente la condition d'uniforme continuité pour $\mathcal{F}_{k+1,r}$ avec pour constante $c = 1$. En effet pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $P \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$, on a

$$\max_{r \leq i \leq k} \{|\partial^{-n} \cdot P|_i\} \leq \max_{r \leq i \leq k+1} \{|\partial^{-n} \cdot P|_i\} \leq \max_{r \leq i \leq k+1} \{|\partial|_i^{-n} \cdot |P|_i\}$$

Par propriété universelle du localisé $\mathcal{F}_{k+1,r}(U)$, le morphisme f_k se factorise uniquement par un morphisme continu de K -algèbres $\varepsilon_{k,r} : \mathcal{F}_{k+1,r}(U) \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$. De plus ce morphisme $\varepsilon_{k,r}$ est 1-lipschitzien, tout comme l'est l'inclusion de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. Ainsi $\|\varepsilon_{k,r}(S)\|_{k,r} \leq \|S\|_{k+1,r}$ pour tout élément S de $\mathcal{F}_{k+1,r}(U)$.

Proposition 3.23. *Tout élément de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ s'écrit uniquement sous la forme*

$$S = \sum_{0 \leq n \leq \infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n + \sum_{-\infty \leq n < 0} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n$$

avec $a_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \pm\infty$. De plus $\|S\|_{k,r} = \max_{n \in \mathbb{Z}} \{|a_n|\}$.

Démonstration. On montre comme dans la preuve de la proposition 3.11 que la suite

$$S_m = \sum_{0 \leq n \leq \infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n + \sum_{-m \leq n < 0} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n$$

est de Cauchy dans $(\mathcal{F}_{k,r}(U), \|\cdot\|_{k,r})$. La norme $\|\cdot\|_{k,r}$ n'est maintenant plus que sous-multiplicative. Il n'est pas clair que $\|S_m\|_{k,r} = \max_{-m \leq n \leq +\infty} \{|a_n|\}$. Cette égalité nécessite plus de travail que pour $\mathcal{E}_k(U)$. L'élément

$$S'_m := S_m \cdot (\omega^r \partial)^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \omega^{rm} \omega^{kn} \cdot \partial^{n+m} + \sum_{n=0}^{m-1} a_{n-m} \cdot (\omega^r \partial)^n$$

appartient à $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. D'après la proposition 3.4 et le lemme 3.5, on sait que

$$\|S_m\|_{k,r} = \|S'_m \cdot (\omega^r \partial)^{-m}\|_{k,r} = \|(\omega^r \partial)^{-m} \cdot S'_m\|_{k,r} = \max_{r \leq \ell \leq k} \{|\omega^r \partial|_{\ell}^{-m} \cdot |S'_m|_{\ell}\}$$

Pour $r \leq \ell \leq k$, on a

$$S'_m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \omega^{rm+kn-\ell(n+m)} \cdot (\omega^{\ell} \partial)^{n+m} + \sum_{n=0}^{m-1} a_{n-m} \cdot \omega^{(r-\ell)n} \cdot (\omega^{\ell} \partial)^n$$

Comme $|\omega^r \partial|_{\ell}^{-m} = |\omega|^{(\ell-r)m}$, on obtient

$$\begin{aligned} |\omega^r \partial|_{\ell}^{-m} \cdot |S'_m|_{\ell} &= \max \left\{ \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \cdot |\omega|^{rm+kn-\ell(n+m)+(\ell-r)m}, \max_{0 \leq n \leq m-1} |a_{n-m}| \cdot |\omega|^{(r-\ell)n+(\ell-r)m} \right\} \\ &= \max \left\{ \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \cdot |\omega|^{(k-\ell)n}, \max_{0 \leq n \leq m-1} |a_{n-m}| \cdot |\omega|^{((\ell-r)(m-n))} \right\} \end{aligned}$$

Le terme $\max_{n \in \mathbb{N}} \{|a_n| \cdot |\omega|^{(k-\ell)n}\}$ est maximum pour $\ell = k$. En effet lorsque $\ell \in \{1, \dots, k\}$, la puissance $(k-\ell)n$ de ω est positive et $|\omega|^{(k-\ell)n} \leq 1$. De manière analogue, le terme $\max_{0 \leq n \leq m-1} \{|a_{n-m}| \cdot |\omega|^{((\ell-r)(m-n))}\}$ est maximum pour $\ell = r$, auquel cas on obtient $\max_{0 \leq n \leq m-1} |a_{n-m}| = \max_{-m \leq n < 0} |a_n|$. On en déduit finalement que

$$\|S_m\|_{k,r} = \max \left\{ \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|, \max_{-m \leq n < 0} |a_n| \right\} = \max \left\{ \max_{n \in \mathbb{Z}} |a_n| \right\}$$

Il en découle immédiatement que la suite $(S_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Elle converge donc dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ vers un élément que l'on note S . Enfin le passage à la limite $m \rightarrow \infty$ donne $\|S\|_{k,r} = \max_{n \in \mathbb{Z}} \{|a_n|\}$. Le reste de la preuve est analogue à celle de la proposition 3.11. \square

Soit S un élément de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. D'après cette proposition, il s'écrit uniquement sous la forme

$$S = \underbrace{\sum_{0 \leq n \leq \infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n}_{P \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)} + \underbrace{\sum_{-\infty \leq n < 0} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n}_Q$$

avec $a_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \pm\infty$. L'opérateur P est dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. On a

$$\|S\|_{k,r} = \max_{n \in \mathbb{Z}} \{|a_n|\} = \max\{\|P\|_k, \|Q\|_{k,r}\}$$

Soient Q et Q' deux éléments de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ formés seulement de puissances strictement négatives de $\omega^r \partial$. On observe sans difficulté que $\|Q \cdot Q'\|_{k,r} = \|Q\|_{k,r} \cdot \|Q'\|_{k,r}$. Autrement dit la norme $\|\cdot\|_{k,r}$ de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ est multiplicative pour le produit de ces éléments, comme elle l'est pour le produit d'éléments de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. On peut noter $|Q|_r$ pour $\|Q\|_{k,r}$ et $\|S\|_{k,r} = \max\{|P|_k, |Q|_r\}$.

On rappelle que le morphisme $\varepsilon_{k,r} : \mathcal{F}_{k+1,r}(U) \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$ est une factorisation de l'inclusion de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. Comme le morphisme $\varepsilon_{k,r}$ envoie la dérivation ∂ sur elle-même, $\varepsilon_{k,r}(\partial^n) = \partial^n$ pour tout entier relatif $n \in \mathbb{Z}$. Puisque par construction ce morphisme est continu, on en déduit que $\varepsilon_{k,r}(S) = S$ pour tout élément S de $\mathcal{F}_{k+1,r}(U)$. Ainsi $\varepsilon_{k,r}$ injecte l'algèbre $\mathcal{F}_{k+1,r}(U)$ dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. Pour récapituler, on dispose du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) & \xrightarrow{i_k} & \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \\ \varphi_{k+1,r} \downarrow & & \downarrow \varphi_{k,r} \\ \mathcal{F}_{k+1,r}(U) & \xrightarrow{\varepsilon_{k,r}} & \mathcal{F}_{k,r}(U) \end{array}$$

où i_k et $\varepsilon_{k,r}$ sont des inclusions 1-lipschitziennes et $\varphi_{k,r}$ et $\varphi_{k+1,r}$ des isométries.

La proposition suivante relie les K -algèbres $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ et $\mathcal{E}_k(U) : \mathcal{F}_{k,r}(U)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{E}_k(U)$.

Proposition 3.24. *Le morphisme $\phi_k : \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$ se relève en un morphisme injectif de K -algèbres $\gamma_{k,r} : \mathcal{F}_{k,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$. De plus l'application $\gamma_{k,r}$ est 1-lipschitzienne.*

Démonstration. Le morphisme $\phi_k : \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$ vérifie clairement la condition d'uniforme continuité dans la propriété universelle de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. Il induit donc un unique morphisme de K -algèbres 1-lipschitzien $\gamma_{k,r} : \mathcal{F}_{k,r}(U) \rightarrow \mathcal{E}_k(U)$. Ce morphisme envoie les

éléments de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ sur eux mêmes et ∂^{-1} sur ∂^{-1} . Par continuité, il envoie tout élément S de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ sur l'élément S de $\mathcal{E}_k(U)$ (il s'agit bien d'une série convergente dans $\mathcal{E}_k(U)$). Ainsi $\gamma_{k,r}$ est injectif. \square

Comme pour $\mathcal{E}_k(U)$, on peut munir $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ de la filtration croissante donnée par la norme $\|\cdot\|_{k,r}$. Pour $k = r$, on rappelle que $\mathcal{F}_{k,k}(U) = \mathcal{E}_k(U)$. On suppose que $k > r$. La norme de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ étant sous-abélienne, le gradué $\text{gr } \mathcal{F}_{k,r}(U)$ est une gr K -algèbre commutative. On note ζ_k et ζ_r les images respectives de $\omega^k \partial$ et de $(\omega^r \partial)^{-1}$ dans $\text{gr}_0 \mathcal{F}_{k,r}(U)$. Puisque $(\omega^k \partial) \cdot (\omega^r \partial)^{-1} = \omega^{k-r}$ et $\|(\omega^k \partial) \cdot (\omega^r \partial)^{-1}\|_{k,r} = p^{r-k} < \|\omega^k \partial\|_{k,r} \cdot \|(\omega^r \partial)^{-1}\|_{k,r} = 1$, on a $\zeta_k \cdot \zeta_r = 0$ dans le gradué $\text{gr } \mathcal{F}_{k,r}(U)$. On en déduit que $\text{gr } \mathcal{F}_{k,r}(U) \simeq \text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_k, \zeta_r]/(\zeta_k \cdot \zeta_r)$ en tant que gr K -algèbre. La première partie de la proposition suivante en découle.

Proposition 3.25. *La K -algèbre $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ est noetherienne. De plus le morphisme d'algèbres $\varphi_{k,r} : \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$ est plat à gauche et à droite.*

Démonstration. Puisque le gradué $\text{gr } \mathcal{F}_{k,r}(U) \simeq \text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_k, \zeta_r]/(\zeta_k \cdot \zeta_r)$ est noetherien, l'algèbre $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ l'est aussi toujours d'après la proposition 1.1 de l'article [8].

On démontre maintenant que le morphisme $\varphi_{k,r} : \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$ est plat. On note $\mathcal{F}_{k,r}^\circ(U)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ de norme $\|\cdot\|_{k,r}$ inférieure ou égale à un :

$$\mathcal{F}_{k,r}^\circ(U) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n + \sum_{-\infty \leq n < 0} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n \in \mathcal{F}_{k,r}(U), \quad a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U) \right\}$$

C'est une \mathcal{V} -algèbre contenant $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U)$ égale au complété ω -adique de l'algèbre

$$F_{k,r}(U) = \left\{ \sum_{0 \leq n < \infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n + \sum_{-\infty < n < 0} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n, \quad a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U) \right\}$$

Les opérateurs différentiels de l'algèbre $F_{k,r}(U)$ sont finis : les sommes les définissant sont finies. On pose $H = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U) + F_{k,r}(U)$. C'est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$ -module contenu dans $\mathcal{F}_{k,r}^\circ(U)$. On le munit de la norme $\|\cdot\|_{k,r}$ et de la filtration induite par cette norme. On rappelle que

$$\mathcal{F}_{k,r}^\circ(U)(m) = \begin{cases} \{P \in \mathcal{F}_{k,r}^\circ(U) : \|P\|_{k,r} \leq p^m\} & \text{si } m \leq 0 \\ \mathcal{F}_{k,r}^\circ(U) & \text{si } m \geq 0 \end{cases}$$

On vérifie que le gradué de H est égale au gradué de $\mathcal{F}_{k,r}^\circ(U)$:

$$\text{gr}(H) = \text{gr}(\mathcal{F}_{k,r}^\circ(U)) \simeq \text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U))[\zeta_k, \zeta_r]/(\zeta_k \cdot \zeta_r)$$

Puisque ce gradué est noetherien, le module H est aussi noetherien. Comme $H \subset \mathcal{F}_{k,r}^\circ(U)$ et comme le complété ω -adique de $F_{k,r}(U)$ est exactement $\mathcal{F}_{k,r}^\circ(U)$, le complété ω -adique

de $H = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}(U) + F_{k,r}(U)$ est exactement $\mathcal{F}_{k,r}^\circ(U) : \widehat{H} = \mathcal{F}_{k,r}^\circ(U)$. On en déduit que le morphisme $H \hookrightarrow \widehat{H} = \mathcal{F}_{k,r}^\circ(U)$ est plat. Le morphisme

$$H \otimes_{\mathcal{V}} K = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) + F_{k,r}(U) \otimes_{\mathcal{V}} K \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U) = \mathcal{F}_{k,r}^\circ(U) \otimes_{\mathcal{V}} K$$

est donc plat. Par ailleurs le morphisme $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow H \otimes_{\mathcal{V}} K = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) + F_{k,r}(U) \otimes_{\mathcal{V}} K$ est plat. En effet

$$F_{k,r}(U) \otimes_{\mathcal{V}} K = \left\{ \sum_{0 \leq n < \infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n + \sum_{-\infty < n < 0} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n, \quad a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U) \right\}$$

On en déduit que $\text{gr}(F_{k,r}(U) \otimes_{\mathcal{V}} K) \simeq \text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_k, \zeta_k^{-1}]$. En particulier le morphisme $\text{gr}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)) \simeq \text{gr}(\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U))[\zeta_k] \rightarrow \text{gr}(F_{k,r}(U) \otimes_{\mathcal{V}} K)$ est plat. L'inclusion $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow H \otimes_{\mathcal{V}} K$ est donc plate. Ainsi le morphisme composé $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow H \otimes_{\mathcal{V}} K \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$ est plat. \square

On rappelle que \mathcal{U} est l'ensemble des ouverts affines de \mathfrak{X} sur lesquels on dispose d'une coordonnée locale. C'est une base de voisinages ouverts de \mathfrak{X} . On démontre comme pour \mathcal{E}_k le résultat suivant.

Proposition 3.26. *Il existe un unique faisceau $\mathcal{F}_{k,r}$ de K -algèbres sur \mathfrak{X} tel que pour tout ouvert U de \mathcal{U} , $\mathcal{F}_{k,r}(U) = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \langle |\cdot|_r, \dots, |\cdot|_k, \{\partial^n\}_{n \in \mathbb{N}} \rangle$.*

Les inclusions locales $\mathcal{F}_{k+1,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$ pour tout ouvert U de \mathcal{U} induisent des morphismes de faisceaux $\mathcal{F}_{k+1,r} \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}$ commutant avec les morphismes de transition $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$.

Eléments de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ inversibles dans $\mathcal{F}_{k,r}$

Soit U un ouvert affine contenant le point κ -rationnel x sur lequel on dispose d'un système de coordonnée locale (t, ∂) associé à x .

Il est plus délicat de déterminer les éléments inversibles de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ que de $\mathcal{E}_k(U)$ lorsque $k > r$. En effet soit S un élément de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. Il s'écrit uniquement comme série

$$S = \sum_{-\infty \leq n < 0} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n + \sum_{0 \leq n \leq \infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$$

On note ∂_k et $(\partial_r)^{-1}$ les réductions modulo ω respectivement de $\omega^k \partial$ et $(\omega^r \partial)^{-1}$. La réduction modulo ω de S est de la forme

$$\bar{S} = \sum_{-\infty < n < 0} \bar{a}_n \cdot \partial_r^n + \sum_{0 \leq n < \infty} \bar{a}_n \cdot \partial_k^n$$

Pour $k > r$, on a $\partial_k \cdot \partial_r^{-1} = \partial_r^{-1} \cdot \partial_k = 0$ puisque $(\omega^k \partial) \cdot (\omega^r \partial)^{-1} = \omega^{k-r}$. On ne peut donc pas déterminer les éléments inversibles de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ après réduction modulo ω . Le même phénomène apparaît en considérant le gradué $\text{gr } \mathcal{F}_{k,r}(U)$. Bien que la dérivation ∂ soit inversible dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$, l'image de ∂ dans le gradué n'est plus inversible.

Cependant on dispose d'un morphisme injectif d'algèbres $\varepsilon_{k,r} : \mathcal{F}_{k,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{E}_k(U)$. Puisqu'on connaît les éléments inversibles de l'algèbre $\mathcal{E}_k(U)$, on en déduit facilement les éléments de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ inversibles dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. Ce cas est suffisant pour définir la variété caractéristique à partir du microlocalisé. En effet, comme il a été vu dans la section 2, il est suffisant de déterminer les opérateurs différentiels de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ inversibles dans le microlocalisé $\mathcal{F}_{k,r}(U)$.

Soit $P = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$ un élément de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. Les normes de P dans $\mathcal{E}_k(U)$ et dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ coïncident avec la norme usuelle $|P|_k$ de P dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. Si P est inversible dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$, alors P est inversible dans $\mathcal{E}_k(U)$. Il doit donc vérifier $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P)$. On rappelle que

$$\overline{N}_k(P) = \max\{n \in \mathbb{N} : |a_n| = |P|_k\} \quad \text{et} \quad \overline{n}_k(P) = \min\{n \in \mathbb{N} : |a_n| = |P|_k\}$$

On note d cet entier. Pour que P soit inversible dans $\mathcal{E}_k(U)$, il faut de plus que son coefficient a_d soit inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$. L'inverse de P dans $\mathcal{E}_k(U)$ est alors

$$P^{-1} = (\omega^k \partial)^{-d} \cdot \sum_{i \in \mathbb{N}} \left(- \sum_{n=0}^{d-1} \frac{a_n}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^{n-d} - \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+d}}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^n \right)^i \cdot a_d^{-1}$$

L'opérateur P^{-1} appartient à $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ si et seulement si la somme sur i converge pour la norme $\|\cdot\|_{k,r}$ de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. On doit donc avoir

$$\left\| \sum_{n=0}^{d-1} \frac{a_n}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^{n-d} + \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+d}}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^n \right\|_k < 1$$

On a toujours

$$\left\| \sum_{n \geq 1} \frac{a_{n+d}}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^n \right\|_{k,r} < 1$$

Par ailleurs

$$\sum_{n=0}^{d-1} \frac{a_n}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^{n-d} = \sum_{n=0}^{d-1} \frac{a_n}{a_d} \cdot \omega^{(k-r)(n-d)} (\omega^r \partial)^{n-d}$$

On obtient

$$\left\| \sum_{n=0}^{d-1} \frac{a_n}{a_d} \cdot (\omega^k \partial)^{n-d} \right\|_{k,r} = \max_{0 \leq n < d} \left(\frac{|a_n|}{|a_d|} \cdot |\omega|^{(k-r)(n-d)} \right)$$

On en déduit que P est inversible dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ si de plus

$$\forall 0 \leq n \leq d-1, \quad |a_n| \cdot p^{(k-r)(d-n)} < |a_d|$$

La proposition suivante résume tout ce qui vient d'être dit.

Proposition 3.27. *Soit $P = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. Il existe un ouvert $V \subset U$ contenant x tel que P soit inversible dans $\mathcal{F}_{k,r}(V)$ si et seulement si*

1. $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P) = d$,
2. a_d est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(V)$,
3. $\forall n \in \{0, \dots, d-1\}, |a_n| \cdot p^{(k-r)(d-n)} < |a_d|$.

4 Microlocalisations de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$

On commence par rappeler la définition du faisceau $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ puis celle des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles. On construit ensuite un microlocalisé $\mathcal{F}_{\infty,r}$ de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ comme limite projective sur la variable k des faisceaux de K -algèbres $\mathcal{F}_{k,r}(U)$.

4.1 Le faisceau $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$

Pour plus de détails sur le faisceau $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ et sur les propriétés des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles, le lecteur peut regarder l'article [6] de Christine Huyghe, Tobias Schmidt et Matthias Strauch. Localement, $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ est une K -algèbre de Fréchet-Stein. On termine cette section par déterminer les opérateurs différentiels de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ inversibles dans le microlocalisé $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$.

Soit U un ouvert affine contenant le point x sur lequel on dispose d'un système de coordonnée locale (t, ∂) associé à x . Pour tout entier k , l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ est une sous-algèbre de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. On considère les morphismes de transition $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ induits par ces inclusions locales. On définit le faisceau $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ comme la limite projective des faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$.

Définition 4.1. *On pose $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty} = \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$.*

Le faisceau $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ est un faisceau de K -algèbres sur le schéma formel \mathfrak{X} . Il vérifie les trois points suivant :

1. $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ est une K -algèbre de Fréchet-Stein et sa topologie est induite par les normes $|\cdot|_k$ des algèbres de Banach $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$;
2. $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U) = \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) = \bigcap_{k \geq 0} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$;

$$3. \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \partial^n : a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U) \text{ tq } \forall \eta > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \eta^n = 0 \right\}.$$

Le lemme suivant caractérise les opérateurs différentiels finis de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ à l'aide des fonctions \overline{N}_k . On en déduit les éléments inversibles de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$.

Lemme 4.2. *Soit P un opérateur différentiel de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. La suite $(\overline{N}_k(P))_{k \geq 0}$ est croissante. De plus P est un opérateur fini d'ordre d si et seulement si la suite $(\overline{N}_k(P))_k$ est stationnaire de valeur limite d .*

Démonstration. On écrit $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \partial^n$. On commence par montrer que la suite $(\overline{N}_k(P))_k$ est croissante. Les coefficients de P dans la base $(\omega^k \partial)^n$ de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ sont $\omega^{-kn} a_n$ et donc

$$\overline{N}_k(P) = \max\{n \in \mathbb{N} : |\omega|^{-kn} \cdot |a_n| = |P|_k\}$$

Soit $n_0 = \overline{N}_{k+1}(P)$. Puisque $|P|_{k+1} = |\omega^{-(k+1)n_0} \cdot a_{n_0}| > |\omega^{-(k+1)n} \cdot a_n|$ par définition de n_0 , on a

$$\forall n > n_0, |\omega^{-kn} a_n| = |\omega|^n \cdot |\omega^{-(k+1)n} a_n| < |\omega|^{n_0} \cdot |\omega^{-(k+1)n_0} a_{n_0}| = |\omega^{-kn_0} a_{n_0}|$$

On en déduit que $\overline{N}_k(P) \leq n_0 = \overline{N}_{k+1}(P)$.

On suppose maintenant que $\overline{N}_k(P) = m$ à partir d'un rang k_0 . Cela signifie que pour tout entier $k \geq k_0$ et pour tout entier $n > m$, $|a_n| \cdot |\omega|^{-kn} < |a_m| \cdot |\omega|^{-km}$. Autrement dit $|a_n| < |a_m| \cdot |\omega|^{k(n-m)}$. Mais $|\omega|^{k(n-m)} \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Le passage à la limite $k \rightarrow \infty$ donne $|a_n| = 0$. Ainsi P est un opérateur fini d'ordre m . \square

Corollaire 4.3. *Les éléments inversibles de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ sont les fonctions inversibles :*

$$\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)^\times = \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)^\times$$

Démonstration. Soit $P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ un opérateur inversible. Alors P est inversible dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ pour tout niveau de congruence $k \in \mathbb{N}$. De manière équivalente, $\overline{N}_k(P) = 0$ pour tout entier k et le coefficient constant de P inversible d'après le corollaire 3.20. Le lemme 4.2 implique que P est un opérateur fini d'ordre 0. Autrement dit P est un élément inversible de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$. \square

On termine cette partie par la définition des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles suivie d'un exemple.

Définition 4.4. *Un module coadmissible est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module \mathcal{M} isomorphe à une limite projective $\varprojlim_k \mathcal{M}_k$ de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents \mathcal{M}_k tels que les applications de transition $\mathcal{M}_{k+1} \rightarrow \mathcal{M}_k$ soient $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -linéaires et tels que pour chaque indice k , on dispose d'un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -isomorphisme $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_{k+1} \simeq \mathcal{M}_k$ induit par l'application de transition.*

La catégorie des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles est abélienne. Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible. Il est démontré dans [6] et [8] que $\mathcal{M}_k \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}} \mathcal{M}$ et que $\mathcal{M} \simeq \varprojlim_k \left(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}} \mathcal{M} \right)$ en tant que $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible. On peut donc choisir \mathcal{M}_k égale à $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}} \mathcal{M}$.

On explicite ci-dessous un élément infini P de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ vérifiant $\overline{N}_k(P) = k$. On montre que $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$ est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible isomorphe à une limite projective de la forme $\varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P_k$ avec P_k un opérateur fini d'ordre k de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$.

Exemple 4.5.

1. Tout $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module cohérent est coadmissible.
2. Soit $P = \prod_{n \geq 1} (1 - \omega^n \partial) \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. Alors $\overline{N}_k(P) = k$. En effet le coefficient de ∂^n est à un signe près

$$\omega^{1+2+\dots+n} \cdot (1 + \omega + \omega^2 + \dots) = \omega^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot a_n$$

avec a_n un élément de \mathcal{V} de valeur absolue 1. Dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$, le coefficient d'ordre n de P est $\pm \omega^{n(\frac{n+1}{2}-k)} \cdot a_n$. Par définition $\overline{N}_k(P)$ est le plus grand entier n maximisant la norme $|\omega|^{n(\frac{n+1}{2}-k)}$. On cherche donc l'entier n minimisant la puissance $n(\frac{n+1}{2} - k)$.

La fonction $x \mapsto x(\frac{x+1}{2} - k)$ est minimale en $x = k - \frac{1}{2}$ de valeur $-k^2 - k + \frac{3}{4}$. L'entier le plus proche est $-k^2 - k + 1$ et donc l'entier $n(\frac{n+1}{2} - k)$ est minimal pour $n = k$. Ceci prouve que $\overline{N}_k(P) = k$. On a de plus

$$|P_k|_k = |\omega|^{k(\frac{k+1}{2}-k)} = |\omega|^{-k^2/2+k/2}$$

Dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$, P s'écrit $P = P_k \cdot Q_k$ avec $P_k = \prod_{1 \leq n \leq k} (1 - \omega^n \partial)$ un opérateur fini d'ordre $\overline{N}_k(P_k) = k$ et $Q_k = \prod_{n > k} (1 - \omega^n \partial)$ inversible dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ (car $\overline{N}_k(Q_k) = 0$ et car son coefficient constant est inversible). On en déduit que $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P_k$. Par ailleurs $P_{k+1} = (1 - \omega^{k+1} \partial) \cdot P_k$ avec $1 - \omega^{k+1} \partial$ inversible dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. On a donc $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P_{k+1} \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P_k$. Autrement dit $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P \simeq \varprojlim_k \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P_k$ en tant que $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible.

On peut retrouver P à partir des opérateurs P_k puisque la suite $(P_k)_k$ converge vers P dans $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. En effet il suffit de le montrer pour toutes les normes $|\cdot|_m$. On a $P - P_k = (Q_k - 1) \cdot P_k$. Pour $k \geq m$, on observe que $\overline{N}_m(P_k) = m$ et que $|P_k|_m = |\omega|^{-\frac{1}{2}(m^2-m)}$. Le coefficient constant de $Q_k - 1$ est nul et le coefficient de ∂^n est de la forme $\omega^{k+(k+1)+\dots+(k+n-1)} \cdot a_n$, où $a_n \in \mathcal{V}$ de valeur absolue 1. Dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},m,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$, le coefficient de $(\omega^k \partial)^n$ est $\omega^{n(k+\frac{n-1}{2}-m)} \cdot a_n$. Les coefficients de

$Q_k - 1$ sont presque ceux de P_k : il suffit de remplacer k par $m + 1 - k$. La fonction $x(k + \frac{x-1}{2} - m)$ est minimale pour $x = m + 1 - k - 1/2$. Pour k assez grand, par exemple $k \geq m + 1$, ce terme est négatif. La norme de $1 - Q_k$ est donc donnée par le coefficient d'indice un : $\overline{N}_k(Q_k - 1) = 1$ et $|Q_k - 1|_m = |\omega|^{k-m}$. Il vient

$$|P - P_k|_m = |1 - Q_k|_m \cdot |P_k|_m = |\omega|^{k - \frac{m^2}{2} - \frac{m}{2}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

4.2 Les microlocalisés $\mathcal{F}_{\infty, r}$

Définition et structure

Pour l'instant r est un entier fixé supposé supérieur ou égale à un et k désigne toujours un entier plus grand que r . On rappelle que tout élément S de $\mathcal{F}_{k, r}(U)$ s'écrit uniquement sous la forme

$$S = \sum_{0 \leq n \leq \infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n + \sum_{-\infty \leq n < 0} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n \quad \text{avec } a_n \xrightarrow{n \rightarrow \pm \infty} 0$$

Les morphismes de transition $\varepsilon_{k, r} : \mathcal{F}_{k+1, r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k, r}(U)$ sont injectifs et vérifient $\|\varepsilon_{k, r}(S)\|_{k, r} \leq \|S\|_{k+1, r}$. On note $\mathcal{F}_{k+1, r} \rightarrow \mathcal{F}_{k, r}$ le morphisme de faisceaux de K -algèbres induit localement par les inclusions $\varepsilon_{k, r} : \mathcal{F}_{k+1, r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k, r}(U)$. La limite projective des faisceaux $\mathcal{F}_{k, r}$ définit un faisceau de K -algèbres sur l'espace topologique sous-jacent à \mathfrak{X} .

Définition 4.6. On pose $\mathcal{F}_{\infty, r} = \varprojlim_{k \geq r} \mathcal{F}_{k, r}$.

On a $\mathcal{F}_{\infty, r}(U) = \varprojlim_{k \geq r} \mathcal{F}_{k, r}(U) = \bigcap_{k \geq r} \mathcal{F}_{k, r}(U)$. C'est une K -algèbre contenant l'algèbre de Fréchet-Stein $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}(U)$. La proposition suivante permet de montrer que $\mathcal{F}_{\infty, r}(U)$ est elle aussi une algèbre de Fréchet-Stein. La preuve de ce résultat est inspirée de la preuve de la proposition 2.2.16 de l'article [6]. Cette dernière est elle-même adaptée d'une méthode de Berthelot de [3].

Proposition 4.7. *Le morphisme $\varepsilon_{k, r} : \mathcal{F}_{k+1, r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k, r}(U)$ est plat à gauche et à droite. Le morphisme de faisceaux d'algèbres $\mathcal{F}_{k+1, r} \rightarrow \mathcal{F}_{k, r}$ est donc plat à gauche et à droite.*

Démonstration. On reprend les notations de la preuve de la proposition 3.25. On rappelle que

$$F_{k, r}(U) = \left\{ \sum_{0 \leq n < \infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n + \sum_{-\infty < n < 0} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n, \quad a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U) \right\}$$

On note $\mathcal{F}_{k, r}^{\circ}(U)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{F}_{k, r}(U)$ dont tous les coefficients a_n sont dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$:

$$\mathcal{F}_{k, r}^{\circ}(U) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n + \sum_{-\infty \leq n < 0} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n \in \mathcal{F}_{k, r}(U), \quad a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U) \right\}$$

Puisque la norme de $\mathcal{F}_{k,r}^\circ(U)$ est équivalente à la topologie ω -adique, il est clair que $\mathcal{F}_{k,r}^\circ(U) = \widehat{F_{k,r}(U)}$ est le complété ω -adique de $F_{k,r}(U)$.

On pose $H = \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U) + F_{k,r}(U)$. C'est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$ -module. Le terme $(\omega^k \partial)$ n'appartient pas à $\mathcal{F}_{k,r}^\circ(U)$. Cependant $(\omega^k \partial) \in \mathcal{F}_{k+1,r}(U) = \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U) \otimes_{\mathcal{V}} K$. On vérifie tout d'abord que H est une K -algèbre. Il suffit de prouver que si $P \in \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)^\circ$, alors $(\omega^k \partial) \cdot P \in H$. On peut écrire $P = P_1 + \omega P_2$ avec $P_1 \in F_{k+1,r}(U)$ et $P_2 \in \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$. Comme $F_{k+1,r}(U) \subset F_{k,r}(U)$, on a $(\omega^k \partial) \cdot P_1 \in F_{k,r}(U)$. Par ailleurs $(\omega^k \partial) \cdot (\omega P_2) = (\omega^{k+1} \partial) \cdot P_2 \in \mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U)$. Autrement dit $(\omega^k \partial) \cdot P \in H$.

Puisque $\mathcal{F}_{k+1,r}^\circ(U) \subset \mathcal{F}_{k,r}^\circ(U)$, on a $H \subset \mathcal{F}_{k,r}^\circ(H)$. De plus H contient $F_{k,r}(U)$ et $\mathcal{F}_{k,r}^\circ(U)$ est le complété ω -adique de $F_{k,r}(U)$. Le complété ω -adique \widehat{H} de H est donc égale à $\mathcal{F}_{k,r}^\circ(U)$: $\widehat{H} = \mathcal{F}_{k,r}^\circ(U)$.

On démontre maintenant que H est noetherien. On rappelle que $H \subset \mathcal{F}_{k,r}^\circ(U)$. On peut donc munir H de la norme $\|\cdot\|_{k,r}$ de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ et considérer la filtration induite. Le gradué $\text{gr } H$ est alors un sous-anneau de $\text{gr } \mathcal{F}_{k,r}(U)$. Mais puisque $\text{gr } F_{k,r}(U) = \text{gr } \mathcal{F}_{k,r}(U)$, on obtient $\text{gr } H = \text{gr } \mathcal{F}_{k,r}(U)$. On en déduit que H est noetherien puisque $\text{gr } \mathcal{F}_{k,r}(U)$ l'est.

Comme $F_{k,r}(U) \otimes_{\mathcal{V}} K = F_{k+1,r}(U) \otimes_{\mathcal{V}} K$, on a $H \otimes_{\mathcal{V}} K = \mathcal{F}_{k+1,r}(U)$. Comme H est noetherien, \widehat{H} est plat à gauche et à droite au dessus de H . On en déduit alors que $\widehat{H} \otimes_{\mathcal{V}} K = \mathcal{F}_{k,r}(U)$ est plat au dessus de $H \otimes_{\mathcal{V}} K = \mathcal{F}_{k+1,r}(U)$. \square

On en déduit que $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ est une algèbre de Fréchet-Stein. La proposition suivante résume les principales propriétés du faisceau $\mathcal{F}_{\infty,r}$.

Proposition 4.8.

1. $\mathcal{F}_{\infty,r}$ est une algèbre de Fréchet-Stein dont la topologie est induite localement par les normes $\|\cdot\|_{k,r}$ des $\mathcal{F}_{k,r}(U)$;
2. $\mathcal{F}_{\infty,r}(U) = \varprojlim_{k \geq r} \mathcal{F}_{k,r}(U) = \bigcap_{k \geq r} \mathcal{F}_{k,r}(U)$;
3. $\mathcal{F}_{\infty,r}(U) = \left\{ P + \sum_{-\infty \leq n < 0} a_n \cdot (\omega^n \partial)^n : P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U), a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U) \text{ tq } \lim_{n \rightarrow -\infty} a_n = 0 \right\}$.

L'algèbre $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ contient l'algèbre des opérateurs différentiels $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. Cette inclusion correspond au morphisme continu $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ induit par passage à la limite projective sur k dans les diagrammes commutatifs de K -algèbres topologiques

$$\begin{array}{ccc}
\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) & \hookrightarrow & \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{F}_{k+1,r}(U) & \hookrightarrow & \mathcal{F}_{k,r}(U)
\end{array}$$

Eléments de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ inversibles dans $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$

Soit $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \partial^n$ un opérateur fini d'ordre d de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. Pour k assez grand, $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P) = d$ d'après la preuve du lemme 4.2. Ainsi P est inversible dans $\mathcal{E}_k(U)$ si et seulement si son coefficient dominant a_d est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$. De plus on déduit de la proposition 3.27 que P est inversible dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ si de plus

$$\forall n \in \{0, \dots, d-1\}, \quad |a_n| < |a_d| \cdot p^{r(d-n)}$$

Ce critère ne dépendant pas de k , on peut expliciter les opérateurs finis de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ inversibles dans $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$: un opérateur $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \partial^n \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ fini d'ordre d appartient à $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)^\times$ si et seulement si

1. $a_d \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)^\times$,
2. $\forall n \in \{0, \dots, d-1\}, \quad |a_n| < |a_d| \cdot p^{r(d-n)}$.

Cette condition est vérifiée par exemple pour les opérateurs dominants : $|a_n| \leq |a_d|$ pour tout $n \in \{0, \dots, d\}$. Réciproquement, on va démontrer que tout opérateur de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ inversible dans $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ est de cette forme.

Soit maintenant $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \partial^n$ un opérateur infini de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. Il n'est pas vrai en général qu'à partir d'un certain rang k , $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P)$. Autrement dit P n'est pas forcément inversible dans $\mathcal{E}_k(U)$ pour k suffisamment grand dès que son coefficient d'ordre $\overline{N}_k(P)$ est inversible.

Exemple 4.9.

1. Soit $P = \prod_{n \geq 1} (1 - \omega^n \partial) \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. Alors $\overline{N}_k(P) = k$ et $\overline{n}_k(P) = k - 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Soit $P = \sum_{n \geq 0} \omega^{n^2} \cdot \partial^n \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. On a $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P) = k/2$ si k est paire. Sinon $\overline{N}_k(P) = \frac{k+1}{2}$ et $\overline{n}_k(P) = \frac{k-1}{2}$.

Cependant on dispose de morphismes de transition injectifs $\mathcal{F}_{k+1,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$. Si P est inversible dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$, alors P est inversible dans $\mathcal{F}_{\ell,r}(U)$ pour tout $\ell \in \{0, \dots, k\}$. Ainsi ou bien P est inversible dans tous les $\mathcal{F}_{k,r}(U)$, ou bien P n'est plus inversible dans les $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ à partir d'un rang k . Puisque $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{E}_k(U)$, les deux opérateurs de l'exemple 4.9 ne sont pas inversibles dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ quel que soit le niveau de congruence $k \geq r$.

Soit $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cdot \partial^n$ un élément de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ inversible dans $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$. Alors P est inversible dans tous les $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ et tous les $\mathcal{E}_k(U)$. Une condition nécessaire est donc d'avoir $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par exemples les deux opérateurs de l'exemple 4.9 ne sont pas inversibles dans $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$. De plus on rappelle que P est inversible dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ si

pour tout $n \in \{0, \dots, \overline{N}_k(P) - 1\}$, $|a_n| < |a_{\overline{N}_k(P)}| \cdot p^{r(\overline{N}_k(P)-n)}$. On s'intéresse donc aux opérateurs $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \partial^n \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ vérifiant la condition

$$d_k = \overline{N}_k(f) = \overline{n}_k(f) \text{ et } \forall n \in \{0, \dots, d_k - 1\}, \quad |a_n| < |a_{d_k}| \cdot p^{r(d_k-n)} \quad (1)$$

On démontre dans ce qui suit que si P vérifie cette condition pour tout entier naturel k , alors P est un opérateur différentiel fini. Les éléments de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ inversibles dans $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ seront donc des opérateurs finis.

On pose $U = \text{Spf } A'$ et $A = A' \otimes_{\mathcal{V}} K$. C'est une K -algèbre affinoïde. La norme spectrale $|\cdot|$ sur A est multiplicative puisque \mathfrak{X} est connexe et lisse, donc intègre. On fixe une clôture algébrique \overline{K} de K . Elle est munie d'une valuation extension de la valuation de K que l'on note encore v . Soit $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cdot \partial^n \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. Les coefficients a_n sont des éléments de A vérifiant la condition de convergence :

$$\forall \mu \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \omega^{-\mu n} = 0$$

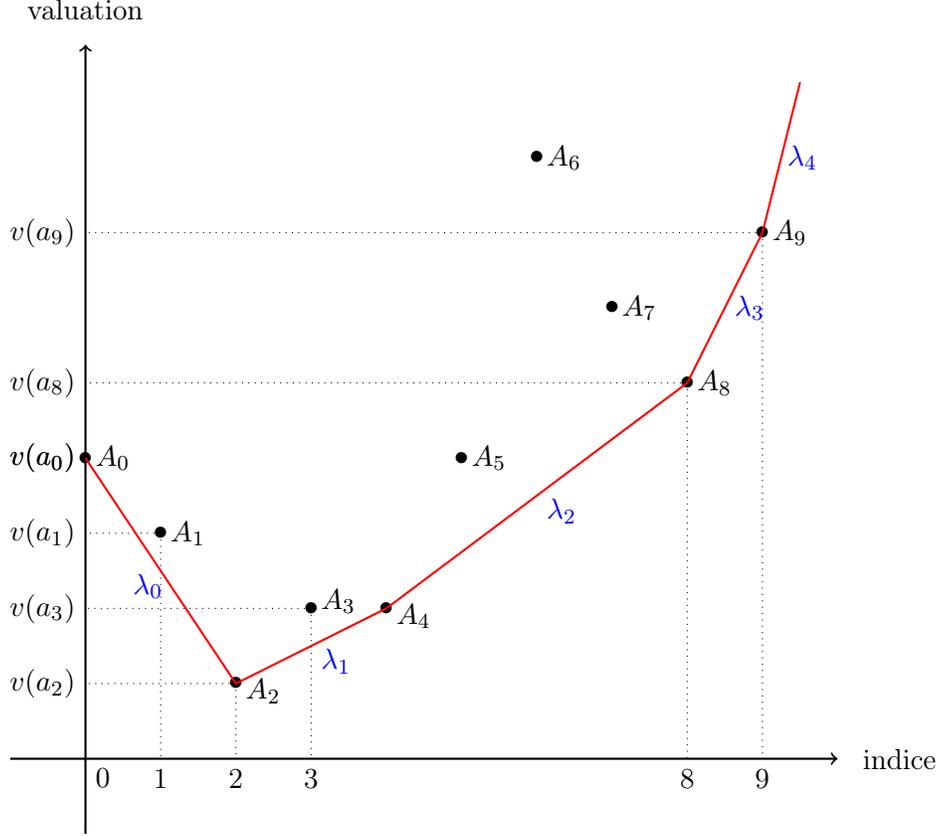
Pour tout $\mu \in v(\overline{K})$, on pose

$$\begin{aligned} |P|_{\mu} &= \max_{\ell \in \mathbb{N}} |a_{\ell} \cdot \omega^{-\mu \ell}| \\ \overline{N}_{\mu}(P) &= \max \{n \in \mathbb{N} : |a_n \cdot \omega^{-\mu n}| = |P|_{\mu}\} \\ \overline{n}_{\mu}(P) &= \min \{n \in \mathbb{N} : |a_n \cdot \omega^{-\mu n}| = |P|_{\mu}\} \end{aligned}$$

Lorsque $\mu = k \in \mathbb{N}$, on retrouve les fonctions définies précédemment. La norme spectrale $|\cdot|$ est à valeurs dans $|\overline{K}|$. Pour toute fonction a de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$, on note $v(a)$ l'élément μ de $v(\overline{K})$ pour lequel $|a| = |\omega|^{-\mu}$.

Définition 4.10. Soit $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cdot \partial^n \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. On définit son polygone de Newton comme étant l'enveloppe convexe des points $A_n = (n, v(a_n))$ de \mathbb{R}^2 . Les pentes des segments du polygone de Newton de P sont des éléments de $v(\overline{K})$.

La figure suivante représente graphiquement le polygone de Newton d'un opérateur P . Les pentes sont écrites en bleu.



Polygone de Newton de $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cdot \partial^n \in \mathcal{D}_{x, \infty}(U)$

Si P est un opérateur différentiel fini, alors son polygone de Newton n'a qu'un nombre fini de pentes. Dans le cas contraire, la suite des pentes (rangée dans l'ordre des indices des coefficients) est strictement croissante et diverge vers $+\infty$. La proposition suivante montre que les pentes du polygone de Newton sont étroitement liées aux fonctions \overline{N} et \overline{n} de P .

Proposition 4.11. *Soit $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cdot \partial^n \in \mathcal{D}_{x, \infty}(U)$ et $\mu \in v(\overline{K})$.*

1. *Si μ n'est pas une pente du polygone de Newton de P , alors $\overline{N}_\mu(P) = \overline{n}_\mu(P)$.*
2. *Si μ est une pente du polygone de Newton de P , alors $\overline{n}_\mu(P) < \overline{N}_\mu(P)$.*

Démonstration. On suppose tout d'abord que μ n'est pas une pente du polygone de Newton de P . La suite $(|a_n| \cdot p^{\mu n})_n$ converge vers zéro. La condition $\overline{N}_\mu(P) = \overline{n}_\mu(P)$ signifie exactement qu'elle admet un unique élément maximal. On suppose qu'il existe deux indices $j < i$ tels que

$$|P|_\mu = \max_{n \in \mathbb{N}} \{|a_n| \cdot p^{\mu n}\} = |a_i| \cdot p^{\mu i} = |a_j| \cdot p^{\mu j} \quad (2)$$

On note α la valuation commune des éléments $a_i \cdot \omega^{-\mu i}$ et $a_j \cdot \omega^{-\mu j}$. Les points A_i et A_j appartiennent à la même droite d'équation $Y = \mu \cdot X + \alpha$. L'égalité 2, pour la valuation de A , signifie que α minimise la valuation des termes $a_n \cdot \omega^{-\mu n}$. La minimalité de α implique que $[A_i, A_j]$ est un côté du polygone de Newton de P . Mais ce segment a pour pente μ ! Cela contredit l'hypothèse de départ. La suite $(|a_n| \cdot p^{\mu n})_n$ a donc un unique élément maximal. Autrement dit on a $\overline{N}_\mu(P) = \overline{n}_\mu(P)$.

Soit maintenant μ une pente du polygone de Newton de P . Alors le polygone de Newton admet un segment $[A_i, A_j]$ de pente μ pour deux indices i et j distincts. Les points A_i et A_j appartiennent à une même droite d'équation $Y = \mu \cdot X + \beta$. Cela se traduit par $|a_i| \cdot p^{\mu i} = |a_j| \cdot p^{\mu j} = |P|_\mu$ au niveau des normes. En particulier $\overline{n}_\mu(P) < \overline{N}_\mu(P)$. \square

La condition 1 pour un niveau $k \geq r$ fixé a d'importantes conséquences sur les valeurs possibles des pentes du polygone de Newton de P :

Corollaire 4.12. *Soit $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cdot \partial^n \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}(U)$. Si P vérifie la condition 1 pour un certain $k \geq r$, alors le polygone de Newton de P n'admet pas de pente appartenant au segment $[r, k]$.*

Démonstration. Soit μ une pente du polygone de Newton de P appartenant à l'intervalle $[r, k]$. On sait d'après la proposition 4.11 qu'il existe deux indices distincts $n < m$ tels que $|P|_\mu = |a_n| \cdot p^{\mu n} = |a_m| \cdot p^{\mu m}$. On suppose m maximal. L'hypothèse 1 dit que $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P)$. On note d_k cet entier. Le lemme 4.2 nous assure que $m \leq d_k$. Par maximalité de m , on a $|a_m| \cdot p^{\mu m} > |a_{d_k}| \cdot p^{\mu d_k}$. On en déduit que

$$|a_n| = p^{\mu(m-n)} \cdot |a_m| > p^{\mu(m-n)} \cdot p^{\mu(d_k-m)} \cdot |a_{d_k}| = p^{\mu(d_k-n)} \cdot |a_{d_k}|$$

On rappelle que $n < m \leq d_k$. Le fait que μ soit supérieur ou égale à r contredit la seconde partie de l'hypothèse 2 :

$$\forall n \in \{0, \dots, d_k - 1\}, \quad |a_n| < |a_{d_k}| \cdot p^{r(d_k-n)}$$

Ainsi aucune pente du polygone de Newton de P n'appartient au segment $[r, k]$. \square

Lorsque P vérifie l'hypothèse 1 pour tout entier naturel $k \geq r$, on en déduit que P est un opérateur fini.

Corollaire 4.13. *Soit $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cdot \partial^n \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}(U)$. Si P vérifie la condition 1 pour tout entier $k \geq r$, alors P est un opérateur fini.*

Démonstration. On suppose que $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \partial^n$ est un opérateur infini. Alors son polygone de Newton admet une infinité de pentes λ_ℓ et la suite $(\lambda_\ell)_\ell$ est strictement croissante de limite $+\infty$. Mais le corollaire 4.12 nous dit que pour tout $k \geq r$, il n'y a aucune pente dans le segment $[r, k]$. Le polygone de Newton de P ne peut donc pas admettre de pente dans l'intervalle $[r, +\infty[$. La suite des pentes $(\lambda_\ell)_\ell$ est donc finie et P est un opérateur fini. \square

Soit $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \partial^n$ un élément de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. Si P est inversible dans $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$, alors P est inversible dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ pour tout entier $k \geq r$. En particulier P vérifie la condition 1 pour tout entier naturel k . Le corollaire 4.13 permet donc de décrire les éléments de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ inversibles au voisinage de x dans $\mathcal{F}_{\infty,r}$.

Proposition 4.14. *Soit $P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. Alors P est inversible dans $\mathcal{F}_{\infty,r}(V)$ pour un ouvert $V \subset U$ contenant x si et seulement si*

1. $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \partial^n$ dans $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$,
2. a_d est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(V)$,
3. $\forall n \in \{0, \dots, d-1\}, |a_n| < |a_d| \cdot p^{r(d-n)}$.

Il ne s'agit pas pas exactement la condition d'inversibilité souhaitée. On souhaite que tout opérateur fini de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ soit inversible dans le microlocalisé dès que son coefficient dominant est inversible. La condition 3 de la proposition 4.14 contient cependant beaucoup d'opérateurs : les coefficients a_i peuvent être bien plus grands que a_d pour la norme spectrale. On peut les autoriser à être de plus en plus grands en augmentant r . En prenant tous les entiers $r \geq 1$, la condition 3 donne exactement tous les opérateurs finis dont le coefficient dominant est inversible.

On montre facilement que $\mathcal{F}_{\infty,r}(U) \subset \mathcal{F}_{\infty,r+1}(U)$. On peut alors considérer l'algèbre $\mathcal{F}_{\infty}(U)$ limite inductive des algèbres $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$. Les morphismes de transition sont simplement les inclusions. Les éléments de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ inversibles dans $\mathcal{F}_{\infty}(U)$ sont exactement les opérateurs finis dont le coefficient dominant est inversible, sans aucune autre condition sur les coefficients. Ce critère d'inversibilité est la propriété désirée du microlocalisé discutée en introduction.

4.3 Le microlocalisé \mathcal{F}_{∞}

On rappelle que U est un ouvert affine contenant x sur lequel on dispose d'une coordonnée locale. On introduit dans cette partie un faisceau de K -algèbres \mathcal{F}_{∞} sur le schéma formel \mathfrak{X} vérifiant les points suivants :

1. $\mathcal{F}_{\infty}(U)$ est l'union croissante dénombrable des K -algèbres de Fréchet-Stein $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$;
2. Un opérateur $P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ est inversible dans $\mathcal{F}_{\infty}(U)$ si et seulement si P est un opérateur fini dont le coefficient dominant est inversible.

On rappelle brièvement la construction des faisceaux $\mathcal{F}_{\infty,r}$ avant de définir \mathcal{F}_{∞} . Pour des entiers $k \geq r \geq 1$, l'algèbre $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ est le localisé de l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ pour la partie multiplicative des puissances de la dérivation ∂ et pour les normes $|\cdot|_r, \dots, |\cdot|_k$ de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$. Le microlocalisé $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ est une K -algèbre de Banach munie d'une norme seulement sous-multiplicative $\|\cdot\|_{k,r}$; $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. Tout élément S de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$

s'écrit uniquement sous la forme $S = P + Q$ avec

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \text{ et } Q = \sum_{-\infty \leq n < 0} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n \text{ tq } a_n \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0$$

De plus $\|S\|_{k,r} = \max_{n \in \mathbb{Z}} \{|a_n|\}$.

Pour tout entier $k \geq r$, on dispose de morphismes de transition $\mathcal{F}_{k+1,r} \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}$ commutant avec les morphismes $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$. Par définition, $\mathcal{F}_{\infty,r} = \varprojlim_{k \geq r} \mathcal{F}_{k,r}$. Les algèbres $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ sont des algèbres de Frechet-Stein. Tout élément de $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ s'écrit uniquement sous la forme $S = P + Q$ avec $P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ et $Q = \sum_{-\infty \leq n < 0} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n$ vérifiant $a_n \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0$. En particulier, l'algèbre $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ contient $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. Les éléments de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ inversibles dans $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ sont donnés par la proposition 4.14.

On regarde maintenant les liens entre les algèbres $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ pour un niveau de congruence k fixé et r variable. Soit $r < r'$ deux entiers strictement positifs et $k \geq r'$. On se donne un élément S de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$,

$$S = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n}_P + \underbrace{\sum_{-\infty \leq n < 0} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n}_Q$$

Alors S appartient à $\mathcal{F}_{k,r'}(U)$. En effet puisque $P \in \mathcal{F}_{k,r'}(U)$, il suffit de vérifier que Q est dans $\mathcal{F}_{k,r'}(U)$. On a

$$Q = \sum_{-\infty \leq n < 0} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n = \sum_{-\infty \leq n < 0} a_n \omega^{-(r'-r)n} \cdot (\omega^{r'} \partial)^n$$

Puisque $|\omega|^{-(r'-r)n} \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0$, on a bien $Q \in \mathcal{F}_{k,r'}(U)$. Il est clair que $\|P\|_{k,r} = \|P\|_{k,r'} = \max_{n \in \mathbb{N}} \{|a_n|\}$. Par ailleurs $\|Q\|_{k,r} = \max_{n < 0} \{|a_n|\}$ et $\|Q\|_{k,r'} = \max_{n < 0} \{|a_n| \cdot p^{-(r'-r)n}\}$. Ainsi $\|Q\|_{k,r'} \leq \|Q\|_{k,r}$ et $\|S\|_{k,r'} \leq \|S\|_{k,r}$. Autrement dit l'inclusion $\mathcal{F}_{k,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r'}(U)$ est 1-lipschtizienne. Elle est donc continue.

Cependant la topologie de $\mathcal{F}_{k,r'}(U)$ induite sur $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ par l'inclusion $\mathcal{F}_{k,r}(U) \subset \mathcal{F}_{k,r'}(U)$ ne coïncide pas avec la topologie de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. En effet les normes $\|\cdot\|_{k,r}$ et $\|\cdot\|_{k,r'}$ ne définissent pas les mêmes suites convergentes pour les éléments de la forme $\sum_{-\infty \leq n < 0} a_n \cdot (\omega^r \partial)^n$.

En conclusion, $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}_{k,r'}(U)$ dès que $k \geq r' \geq r$ et la topologie de $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ est plus fine que celle de $\mathcal{F}_{k,r'}(U)$.

Ces inclusions $\mathcal{F}_{k,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r'}(U)$ pour $k \geq r' \geq r$ commutent avec les morphismes de transition $\mathcal{F}_{k+1,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$: le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{k+1,r}(U) & \hookrightarrow & \mathcal{F}_{k,r}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_{k+1,r'}(U) & \hookrightarrow & \mathcal{F}_{k,r'}(U) \end{array}$$

En passant à la limite projective sur k dans la catégorie des K -algèbres topologiques, on obtient un morphisme injectif continu de K -algèbres $\mathcal{F}_{\infty,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{\infty,r'}(U)$.

Définition 4.15. On pose $\mathcal{F}_{\infty}(U) = \varprojlim_{r \geq 1} \mathcal{F}_{\infty,r}(U) = \bigcup_{r \geq 1} \mathcal{F}_{\infty,r}(U)$.

C'est une K -algèbre contenant toutes les algèbres de Fréchet-Stein $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ dès que $r \geq 1$. Si $P \in \mathcal{F}_{\infty}(U)$, alors $P \in \mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ pour un certain $r \in \mathbb{N}^*$. En particulier, P s'écrit uniquement sous la forme $P = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \cdot \partial^n$ avec $|a_n| \cdot R^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ pour tout réel $R > 0$ et $|a_n| \cdot p^{nr} \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0$. La première condition correspond à $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \cdot \partial^n \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. Si $|a_n| \cdot p^{nr} \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0$, alors pour tout $R \geq p^r$ on a $|a_n| \cdot R^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0$. On obtient la description suivante de $\mathcal{F}_{\infty}(U)$:

$$\mathcal{F}_{\infty}(U) = \left\{ P + \sum_{-\infty \leq n < 0} a_n \cdot \partial^n, \quad P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U), \quad \exists R > 0 \text{ tq } |a_n| \cdot R^n \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0 \right\}$$

On munit la K -algèbre $\mathcal{F}_{\infty}(U)$ de la topologie la plus fine pour laquelle les inclusions $\mathcal{F}_{\infty,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{\infty}(U)$ sont continues. Il s'agit de la topologie localement convexe.

Puisque l'algèbre $\mathcal{F}_{\infty}(U)$ est l'union croissante des algèbres $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$, on a

$$\mathcal{F}_{\infty}(U)^\times = \bigcup_{r \geq 1} \mathcal{F}_{\infty,r}(U)^\times$$

Le résultat suivant se déduit de la proposition 4.14. En effet, l'union sur r des opérateurs finis de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ vérifiant le point 3 de cette proposition est l'ensemble des opérateurs finis de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$.

Proposition 4.16. Un opérateur différentiel P de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ est inversible dans $\mathcal{F}_{\infty}(U)$ si et seulement si

1. $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \partial^n$ dans $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$,

2. a_d est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$.

Soit $r' \geq r \geq 1$. Les morphismes injectifs d'algèbres $\mathcal{F}_{\infty,r}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{\infty,r'}(U)$ induisent des morphismes transition $\mathcal{F}_{\infty,r} \rightarrow \mathcal{F}_{\infty,r'}$ au niveau des faisceaux. On note \mathcal{F}_{∞} la limite inductive de ces morphismes. C'est un préfaisceau de K -algèbres sur \mathfrak{X} dont les sections sur les ouverts affines U de \mathcal{U} sont les algèbres $\mathcal{F}_{\infty}(U)$. Puisque \mathfrak{X} est quasi-compacte et puisque les morphismes de transition sont localement injectifs, \mathcal{F}_{∞} est un faisceau sur \mathfrak{X} d'après le lemme 6.29.1 de [9].

Définition 4.17. On définit un faisceau \mathcal{F}_{∞} sur \mathfrak{X} dont les sections sont exactement les unions croissantes $\bigcup_{r \geq 1} \mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ en posant

$$\mathcal{F}_{\infty} = \varinjlim_{r \geq 1} \mathcal{F}_{\infty,r}$$

5 $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ -module coadmissible associé à un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible

On note $\pi : T^*\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ le fibré cotangent de \mathfrak{X} et $s : \mathfrak{X} \rightarrow T^*\mathfrak{X}$ la section nulle. Le morphisme π est ouvert. En effet la propriété d'être ouvert étant topologique, il suffit de le vérifier sur la fibre spéciale et de voir que le morphisme $T^*X = \text{Spec}(\text{Sym } \Theta_X) \rightarrow X$ est ouvert. Ici Θ_X est le faisceau cotangent de X . Puisque X est lisse, Θ_X est un \mathcal{O}_X -module localement libre de rang fini. En particulier le morphisme $T^*X \rightarrow X$ est plat de présentation finie. Il est donc ouvert d'après la proposition 10.41.8 de [9].

On associe au faisceau $\mathcal{F}_{k,r}$ défini sur \mathfrak{X} un faisceau $\mathcal{F}_{k,r}^*$ sur le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ de \mathfrak{X} de la manière suivante. Pour un V ouvert de $T^*\mathfrak{X}$, on pose

$$\mathcal{F}_{k,r}^*(V) = \begin{cases} \mathcal{F}_{k,r}(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset \\ \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset \end{cases}$$

L'image $\pi(V)$ de V est bien un ouvert de \mathfrak{X} puisque le morphisme $\pi : T^*\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ est ouvert. D'une manière analogue, on construit un $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -module cohérent à partir de tout $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent. En effet soit \mathcal{M}_k un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent et $r \in \{1, \dots, k\}$. On associe à \mathcal{M}_k le $\mathcal{F}_{k,r}$ -module cohérent

$$\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_k$$

Si V est un ouvert de $T^*\mathfrak{X}$, on définit un $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -module cohérent en posant

$$\mathcal{M}_{k,r}^*(V) = \begin{cases} \tilde{\mathcal{M}}_{k,r}(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset \\ \mathcal{M}_k(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset \end{cases}$$

On note $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ le support de $\mathcal{M}_{k,r}^*$ en tant que faisceau sur le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$. On démontre à la fin de la première partie l'inégalité de Bernstein pour le support de $\mathcal{M}_{k,r}^*$: \mathcal{M}_k est un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module non nul si et seulement si $\dim \text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*) \geq 1$.

On considère maintenant un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$. Pour r fixé, les modules $\mathcal{M}_{k,r}^*$ admettent des morphismes de transition $\mathcal{M}_{k+1,r}^* \rightarrow \mathcal{M}_{k,r}^*$ $\mathcal{F}_{k+1,r}^*$ -linéaires induits par les morphismes $\mathcal{M}_{k+1} \rightarrow \mathcal{M}_k$. Le faisceau limite projective \mathcal{M}_r^* des modules $\mathcal{M}_{k,r}^*$ est un $\mathcal{F}_{\infty,r} = \varprojlim_{k \geq r} \mathcal{F}_{\infty,r}^*$ -module coadmissible. On définit son support comme la fermeture de l'union croissante des supports des faisceaux $\mathcal{M}_{k,r}^*$:

$$\text{Supp } \mathcal{M}_r^* = \overline{\bigcup_{k \geq r} \text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*} \subset T^*\mathfrak{X}$$

Le $\mathcal{F}_{\infty,r}$ -module \mathcal{M}_r^* vérifie lui aussi l'inégalité de Bernstein.

5.1 $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -module cohérent associé à un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent

Définitions

On fixe dans cette partie les entiers $k \geq r \geq 1$. On définit le faisceau $\mathcal{F}_{k,r}^*$ sur le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ de \mathfrak{X} de la manière suivante.

Définition 5.1. *Soit V un ouvert de $T^*\mathfrak{X}$. On pose*

$$\mathcal{F}_{k,r}^*(V) = \begin{cases} \mathcal{F}_{k,r}(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset \\ \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset \end{cases}$$

C'est une K -algèbre de Banach munie d'une norme seulement sous-multiplicative lorsque $V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset$ et multiplicative dans le cas où $V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset$. On désigne la norme de $\mathcal{F}_{k,r}^*(V)$ toujours par $\|\cdot\|_{k,r}$. Si $V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset$, il s'agit de la norme de $\mathcal{F}_{k,r}(\pi(V))$. Sinon pour $V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset$, $\|\cdot\|_k$ est la norme multiplicative $|\cdot|_k$ de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\pi(V))$.

On vérifie que $\mathcal{F}_{k,r}^*$ est un préfaisceau sur $T^*\mathfrak{X}$. En effet soient $W \subset V$ deux ouverts de $T^*\mathfrak{X}$. Si V et W n'interceptent pas la section nulle $s(\mathfrak{X})$, ou s'ils l'interceptent tous les deux, alors les morphismes de restrictions sont respectivement ceux de $\mathcal{F}_{k,r}$ ou ceux de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$. On suppose maintenant que $W \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset$ mais que $V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset$. Par définition,

$$\mathcal{F}_{k,r}^*(W) = \mathcal{F}_{k,r}(\pi(W)) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{k,r}^*(V) = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\pi(V))$$

L'inclusion $W \subset V$ implique que $\pi(W) \subset \pi(V)$. Le morphisme de restriction $\mathcal{F}_{k,r}^*(V) \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}^*(W)$ est simplement le morphisme composé

$$\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\pi(V)) \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\pi(W)) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(\pi(W))$$

La condition de recollement est claire puisque $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ est un sous-faisceau de $\mathcal{F}_{k,r}$. Ainsi $\mathcal{F}_{k,r}^*$ définit bien un faisceau sur le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ de \mathfrak{X} .

On considère maintenant un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent \mathcal{M}_k . On rappelle que $\widetilde{\mathcal{M}}_{k,r}$ est le $\mathcal{F}_{k,r}$ -module cohérent $\widetilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_k$.

Définition 5.2. On associe à \mathcal{M}_k le $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -module cohérent $\mathcal{M}_{k,r}^*$ défini localement par

$$\mathcal{M}_{k,r}^*(V) = \begin{cases} \widetilde{\mathcal{M}}_{k,r}(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset \\ \mathcal{M}_k(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset \end{cases}$$

Pour vérifier que $\mathcal{M}_{k,r}^*$ est un faisceau sur $T^*\mathfrak{X}$, il suffit de regarder ce qu'il se passe sur les ouverts dont un seul exactement intercepte la section nulle. Soient $W \subset V$ deux ouverts de $T^*\mathfrak{X}$ tels que $W \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset$ et $V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset$. Le morphisme de restriction $\mathcal{M}_{k,r}^*(W) \rightarrow \mathcal{M}_{k,r}^*(V)$ est donné par

$$\mathcal{M}_k(\pi(V)) \rightarrow \mathcal{M}_k(\pi(W)) \xrightarrow{1 \otimes \text{id}} \widetilde{\mathcal{M}}_{k,r}(\pi(W)) = \mathcal{F}_{k,r}(\pi(W)) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\pi(W))} \mathcal{M}_k(\pi(W))$$

Ainsi $\mathcal{M}_{k,r}^*$ est un préfaisceau sur $T^*\mathfrak{X}$. La condition de recollement pour ces morphismes de transition est immédiate. En effet soient V et W deux ouverts de $T^*\mathfrak{X}$ tels que $W \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset$ et $V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset$. Alors $V \cap W$ n'intercepte pas la section nulle. On se donne deux éléments $a \in \mathcal{M}_k(\pi(V))$ et $b \in \widetilde{\mathcal{M}}_{k,r}(\pi(W))$ vérifiant $a|_{\pi(V \cap W)} = 1 \otimes a = b|_{\pi(V \cap W)} = b$. La condition de recollement est simplement celle de $\widetilde{\mathcal{M}}_{k,r}$.

Pour $V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset$, $\mathcal{M}_{k,r}^*(V) = \widetilde{\mathcal{M}}_{k,r}(\pi(V))$ est un $\mathcal{F}_{k,r}^*(V) = \mathcal{F}_{k,r}(\pi(V))$ -module cohérent. Lorsque $V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset$, $\mathcal{M}_{k,r}^*(V) = \mathcal{M}_k(\pi(V))$ est un $\mathcal{F}_{k,r}^*(V) = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\pi(V))$ -module par hypothèse. On en déduit que $\mathcal{M}_{k,r}^*$ définit bien un $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -module cohérent.

Soit \mathcal{M}_k un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent. On note $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ le support de $\mathcal{M}_{k,r}^*$ en tant que faisceau sur $T^*\mathfrak{X}$. C'est un fermé de $|T^*\mathfrak{X}|$ d'après le lemme suivant puisque $\mathcal{M}_{k,r}^*$ est un $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -module cohérent.

Lemme 5.3. Le support $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ de $\mathcal{M}_{k,r}^*$ est un fermé de $|T^*\mathfrak{X}|$.

Démonstration. On rappelle que $T^*\mathfrak{X}$ est quasi-compact et que $\mathcal{M}_{k,r}^*$ est un $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -module cohérent. Soit V_1, \dots, V_n un recouvrement ouvert affine fini de $T^*\mathfrak{X}$ tel que $\mathcal{M}_{k,r}^*|_{V_i}$ soit un $\mathcal{F}_{k,r}^*|_{V_i}$ -module de type fini. Il existe donc des sections $e_1, \dots, e_s \in \mathcal{M}_{k,r}^*(V_i)$ telles que $\mathcal{M}_{k,r}^*|_{V_i} = \mathcal{F}_{k,r}^*|_{V_i} \cdot e_1 + \dots + \mathcal{F}_{k,r}^*|_{V_i} \cdot e_s$. Comme $\text{Supp } \mathcal{F}_{k,r} = \text{Supp } \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} = \mathfrak{X}$, le faisceau $\mathcal{F}_{k,r}^*$ est supporté par $T^*\mathfrak{X}$ tout entier. On en déduit que

$$\text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*) \cap V_i = \bigcup_{j=1}^s \text{Supp}(e_j)$$

Le support $\text{Supp}(e_j)$ d'une section e_j de $\mathcal{M}_{k,r}^*$ est fermé dans $|T^*\mathfrak{X}|$ d'après le lemme 17.5.2 de [9]. On en déduit que $\text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*) \cap V_i$ est fermé car union finie de fermée. Puisque les V_i recouvrent $T^*\mathfrak{X}$, le support $\text{Supp}\mathcal{M}_{k,r}^*$ est une partie fermée de $|T^*\mathfrak{X}|$. \square

Inégalité de Bernstein

Soit $\mathcal{M}_k = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/\mathcal{J}_k$ un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent, où \mathcal{J}_k est un idéal à gauche cohérent de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$. On commence par redéfinir brièvement la variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{M}_k) \subset T^*X$ du module \mathcal{M}_k . On note \mathcal{J}_k° l'ensemble des éléments de \mathcal{J}_k de norme $|\cdot|_k$ inférieure ou égale à un :

$$\mathcal{J}_k^\circ(U) = \{P \in \mathcal{J}_k(U) : |P|_k \leq 1\}$$

C'est un idéal cohérent de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}$. On identifie U à un ouvert affine de la fibre spéciale X de \mathfrak{X} . On munit $T^*U \subset T^*X$ du système de coordonnées locales (t, ξ) associé à la coordonnée étale de U . Soit $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$ un élément de $\mathcal{J}_k^\circ(U)$. On associe à P l'élément de T^*U donné par

$$\sigma(P) = \sigma_k(P) = \bar{a}_{\bar{N}_k(P)} \cdot \xi^{\bar{N}_k(P)}$$

où $\bar{a}_{\bar{N}_k(P)} \in \mathcal{O}_X(U)$ est la réduction modulo ω de $a_{\bar{N}_k(P)}$. On a $\sigma(P) = \sigma(\bar{P})$, où $\sigma(\bar{P})$ est le symbole principal de $\bar{P} \in (\mathcal{J}_k^\circ \otimes_{\mathbb{V}} \kappa)(U)$. On appelle $\sigma(P)$ le symbole principal de P ; il dépend du niveau de congruence k . Avec cette notation, on a

$$\text{Car}(\mathcal{M}_k) \cap T^*U = \{(t, \xi) \in T^*U : \sigma(P)(t, \xi) = 0 \quad \forall P \in \mathcal{J}_k^\circ(U)\}$$

On peut relier la variété caractéristique de \mathcal{M}_k au support de $\mathcal{M}_{k,r}^*$ en les considérant comme des parties fermées de $|T^*\mathfrak{X}| = |T^*X|$:

Proposition 5.4. *Pour tout $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent \mathcal{M}_k et pour tout entier $r \in \{1, \dots, k\}$, $\text{Car} \mathcal{M}_k \subset \text{Supp} \mathcal{M}_{k,r}^*$ en tant qu'espaces topologiques.*

Démonstration. On peut supposer \mathfrak{X} affine et se ramener au cas où $\mathcal{M}_k = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/\mathcal{J}$ pour un idéal cohérent \mathcal{J} de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ comme dans la preuve de la proposition 2.9. Dans ce cas $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r}/\mathcal{F}_{k,r} \cdot \mathcal{J}$, où $\mathcal{F}_{k,r} \cdot \mathcal{J}$ est l'idéal à gauche de $\mathcal{F}_{k,r}$ engendré par \mathcal{J} .

On commence par montrer que $\text{Car} \mathcal{M}_k$ et $\text{Supp} \mathcal{M}_{k,r}^*$ coïncident au niveau de la section nulle. Soit U un ouvert affine de \mathfrak{X} . Alors $V = \pi^{-1}(U)$ intercepte la section nulle. On a $\mathcal{M}_{k,r}^*(V) = \mathcal{M}_k(U)$ et $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,\xi)} = (\mathcal{M}_k)_x$ pour tout point (x, ξ) de V . On se restreint à l'ouvert V quitte à supposer que $\mathfrak{X} = U$. On rappelle que \mathcal{J}° est l'idéal de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)}$ constitué des éléments de \mathcal{J} norme $|\cdot|_k$ inférieure ou égale à un. Soit $I = \mathcal{J}^\circ \otimes_{\mathbb{V}} \kappa$ la réduction modulo ω de \mathcal{J}° . C'est un idéal cohérent de $\mathcal{D}_{X,k} = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k}^{(0)} \otimes_{\mathbb{V}} \kappa$. On se donne des éléments P_1, \dots, P_s

de $\mathcal{J}^\circ(U)$ tels que $\sigma(P_1), \dots, \sigma(P_s)$ engendrent le gradué $\text{gr } I$. Alors P_1, \dots, P_s engendrent l'idéal \mathcal{J} . De plus

$$\begin{aligned} \text{Car}(\mathcal{M}_k) &= \text{Car}(\mathcal{D}_{X,k}/I) = \{(t, \xi) \in T^*X : \sigma(P)(t, \xi) = 0 \ \forall P \in I\} \\ &= \{(t, \xi) \in T^*X : \sigma(P_1)(t, \xi) = \dots = \sigma(P_s)(t, \xi) = 0\} \end{aligned}$$

On écrit $\sigma(P_i) = \sigma(\bar{P}_i) = a_i \cdot \xi^{d_i} \in \text{gr } I(X)$. La section nulle est une composante irréductible de la variété caractéristique $\text{Car } \mathcal{M}_k$ si et seulement si les ordres d_1, \dots, d_s des opérateurs P_1, \dots, P_s sont supérieurs ou égaux à un. Puisque l'idéal $\text{gr } I$ est engendré par les monômes $\sigma(P_1), \dots, \sigma(P_s)$, l'idéal $\text{gr } I$ ne contient pas de terme d'ordre zéro en ξ . On en déduit que \mathcal{J} ne contient pas d'opérateur P vérifiant $\bar{N}_k(P) = 0$. Sinon $\sigma(P)$ serait un élément d'ordre $\bar{N}_k(P) = 0$ en ξ de $\text{gr } I$. Les points du support $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ sur la section nulle sont donnés par le support du module $\mathcal{M}_k = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/\mathcal{J}$ vu en tant faisceau sur le schéma formel \mathfrak{X} . Puisque tout élément P de l'idéal $\mathcal{J}(U)$ vérifie $\bar{N}_k(P) \geq 1$, aucun élément de \mathcal{J} n'est inversible dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ d'après le corollaire 3.20. Ainsi $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/\mathcal{J})_x \neq 0$ en tout point x de $\mathfrak{X} = U$. Autrement dit $\text{Supp } \mathcal{M}_k = \mathfrak{X}$ et le support $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ contient la section nulle.

Réciproquement le support du module $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/\mathcal{J}$ n'est pas $\mathfrak{X} = U$ tout entier si et seulement l'idéal $\mathcal{J}(U)$ contient un opérateur P vérifiant $\bar{N}_k(P) = 0$. Dans ce cas, le support du module $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/\mathcal{J}$ consiste en un nombre fini de points contenus dans l'ensemble des zéros du coefficient constant a_0 de P . Par ailleurs $\sigma(P) = \bar{a}_0$ est un élément du gradué $\text{gr } I(U)$. Donc la variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{D}_{X,k}/I)$ ne contient pas la section nulle. On vérifie, en raisonnant de manière analogue à ce que l'on a fait dans le paragraphe précédent, que la variété caractéristique $\text{Car } \mathcal{M}_k$ intercepte la section nulle exactement en les points du support du module $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/\mathcal{J}$, autrement dit en les zéros du coefficient constant a_0 de P .

On regarde maintenant ce qu'il se passe en dehors de la section nulle. Soit V un ouvert affine de $T^*\mathfrak{X}$ n'interceptant pas la section nulle. On pose $U = \pi(V) \subset \mathfrak{X}$. C'est un ouvert de \mathfrak{X} . Quitte à restreindre V , on peut supposer que U est affine et que $\mathfrak{X} = U$. Avec ces notations, $\mathcal{M}_{k,r}^*(V) = \mathcal{F}_{k,r}(U)/(\mathcal{F}_{k,r} \cdot \mathcal{J})(U)$. On reprend les notations de la partie 2 du microlocalisé L_k du faisceau $\mathcal{D}_{X,k}$ sur le fibré cotangent T^*X de X .

Soit $P \in \mathcal{J}(U)$ un opérateur de norme un. On rappelle que $\bar{P} = (P \bmod \omega)$ est inversible dans le microlocalisé L_k au voisinage d'un point $(x, \xi) \in T_0^*X = T^*X \setminus s(X)$ si et seulement si $\sigma(P)(x, \xi) \neq 0$. Cette condition est nécessaire, mais non suffisante, pour que P soit inversible dans \mathcal{E}_k au voisinage du point x . En effet cette condition implique seulement que le coefficient d'indice $\bar{N}_k(P)$ de P est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ au voisinage de x . D'après la proposition 3.19, il faut de plus avoir $\bar{N}_k(P) = \bar{n}_k(P)$ pour que P soit inversible dans \mathcal{E}_k au voisinage de x . Ainsi si \bar{P} est non inversible dans $L_k(W)$ pour tout voisinage ouvert W du point (x, ξ) dans T_0^*X , alors P est non inversible au voisinage de x dans \mathcal{E}_k et donc à fortiori dans $\mathcal{F}_{k,r}$.

On se donne un point (x, ξ) dans $\text{Car}(\mathcal{M}_k) \cap T_0^*X$. On rappelle qu'un point (x, ξ) appartient à $\text{Car}(\mathcal{M}_k) \cap T_0^*X$ si et seulement pour tout opérateur P de $\mathcal{J}(U)$ de norme un,

$\sigma(P)(x, \xi) = 0$. On en déduit qu'aucun élément P de $\mathcal{J}(U)$ n'est inversible dans \mathcal{E}_k au voisinage du point x . En effet, le coefficient dominant a de tout opérateur P de $\mathcal{J}(U)$ s'annule en x puisque le point (x, ξ) n'appartient pas à la section nulle du fibré cotangent : $\xi \neq 0$ et $\sigma(P) = \bar{a}(x) \cdot \xi^{\overline{N}_k(P)} = 0$ implique $a(x) = 0$. D'après le lemme 3.17, l'idéal $\mathcal{E}_k \cdot \mathcal{J}$ de \mathcal{E}_k engendré par l'idéal \mathcal{J} ne contient pas d'élément inversible au voisinage de x . Autrement dit $\mathcal{F}_{k,r}(W) \cdot \mathcal{J}_k(W) \subsetneq \mathcal{J}_k(W)$ pour tout ouvert affine W de $\mathfrak{X} = U$. Il en découle que l'idéal $\mathcal{F}_{k,r} \cdot \mathcal{J}_k$ de $\mathcal{F}_{k,r}$ ne contient aucun élément inversible au voisinage de x dans $\mathcal{F}_{k,r}$. Dans le cas contraire, il existerait un voisinage ouvert W de x pour lequel $\mathcal{F}_{k,r}(W) \cdot \mathcal{J}_k = \mathcal{F}_{k,r}(W)$. Alors

$$\mathcal{E}_k(W) \cdot \mathcal{F}_{k,r}(W) \cdot \mathcal{J}_k = \mathcal{E}_k(W) \cdot \mathcal{J} = \mathcal{E}_k(W) \cdot \mathcal{F}_{k,r}(W) = \mathcal{E}_k(W)$$

Ainsi $\mathcal{E}_k(W) \cdot \mathcal{J}(W) = \mathcal{E}_k(W)$ et $\mathcal{J}(W)$ contiendrait un élément inversible au voisinage de x d'après le lemme 3.17. Ainsi aucun élément de l'idéal $\mathcal{F}_{k,r} \cdot \mathcal{J}_k$ n'est inversible au voisinage de x dans $\mathcal{F}_{k,r}$. Cela contredit l'hypothèse de départ. On en déduit que $(\mathcal{F}_{k,r}/\mathcal{F}_{k,r} \cdot \mathcal{J}_k)_x \neq 0$ et que $(x, \xi) \in \text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$. On a donc montré que $\text{Car } \mathcal{M}_k \subset \text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ en dehors de la section nulle. \square

Remarque 5.5. Soit \mathcal{M}_k un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent et $r \in \{1, \dots, k\}$. On a démontré que la variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{M}_k)$ et que le support $\text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*)$ coïncident au niveau de la section nulle. Cependant l'inclusion $\text{Car}(\mathcal{M}_k) \subset \text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*)$ peut être stricte en dehors de la section nulle. Cela provient du fait qu'il est plus « difficile » d'être inversible dans $\mathcal{F}_{k,r}$ que dans L_k . Soit par exemple P un opérateur infini de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. Alors les variétés caractéristiques $\text{Car}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P)$ sont de dimension un mais $\text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*) = T^*\mathfrak{X}$ pour r et k suffisamment grands (voir l'exemple 5.16).

Puisque \mathfrak{X} est une courbe, on dispose de l'inégalité de Bernstein démontrée dans [5] pour les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents \mathcal{M}_k : $\mathcal{M}_k \neq 0$ si et seulement si $\dim \text{Car } \mathcal{M}_k \geq 1$. On fixe dans la suite un entier $r \in \{1, \dots, k\}$. On déduit de la proposition 5.4 que $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*) = 1$ implique $\dim(\text{Car } \mathcal{M}_k) = 1$. En effet il suffit de vérifier que $\mathcal{M}_k \neq 0$. Si $\mathcal{M}_k = 0$, alors $\mathcal{M}_{k,r}^* = 0$ et $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^* = \emptyset$. Autrement dit si $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*) = 1$, alors \mathcal{M}_k est un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module holonome non nul.

Réciproquement soit \mathcal{M}_k un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module non nul. Alors $\dim(\text{Car } \mathcal{M}_k) \geq 1$ et la proposition 5.4 montre que $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*) \geq 1$. On en déduit l'inégalité de Bernstein pour les $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -modules cohérents énoncée dans le corollaire suivant.

Corollaire 5.6. Un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent \mathcal{M}_k est non nul si et seulement si

$$\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*) \geq 1$$

Puisque \mathfrak{X} est connexe et lisse, \mathfrak{X} est intègre. En particulier \mathfrak{X} est irréductible. Dans ce cas $T^*\mathfrak{X}$ est aussi irréductible. Comme $\dim(T^*\mathfrak{X}) = 2$, si le support de $\mathcal{M}_{k,r}^*$ est de dimension deux, alors $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^* = T^*\mathfrak{X}$.

Lorsque $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*) = 1$, la proposition suivante montre que le support de $\mathcal{M}_{k,r}^*$ est une partie conique de $T^*\mathfrak{X}$ constituée de composantes irréductibles verticales et potentiellement d'une composante irréductible horizontale d'équation $\xi = 0$.

Proposition 5.7 (inégalité de Bernstein). *Soit \mathcal{M}_k un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent non nul. Si $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*) = 2$, alors $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^* = T^*\mathfrak{X}$. Sinon $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*) = 1$ et les composantes irréductibles du support $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ sont toutes de dimension un.*

Démonstration. On suppose que $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*) = 1$. Comme pour la preuve de la proposition 2.9, on peut se ramener au cas où $\mathcal{M}_k = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/\mathcal{J}_k$ avec \mathcal{J}_k un idéal cohérent de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$. On a $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r}/\mathcal{F}_{k,r} \cdot \mathcal{J}_k$, où $\mathcal{F}_{k,r} \cdot \mathcal{J}_k$ est l'idéal de $\mathcal{F}_{k,r}$ engendré par \mathcal{J}_k . On peut supposer que $\mathfrak{X} = U$ est affine.

Il a été vu dans la proposition 5.4 que le support $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ et la variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{M}_k)$ coïncident au niveau de la section nulle et que $\text{Car}(\mathcal{M}_k) \subset \text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$. Puisque les composantes irréductibles de $\text{Car}(\mathcal{M}_k)$ sont toutes de dimension un, $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ n'a pas de point isolé sur la section nulle. Il reste à regarder ce qu'il se passe en dehors de la section nulle.

Soit $(x, \xi) \in T^*\mathfrak{X} \setminus s(\mathfrak{X})$. On rappelle que $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,\xi)} = (\tilde{\mathcal{M}}_{k,r})_x$. En effet pour tout voisinage ouvert V suffisamment petit de (x, ξ) dans $T^*\mathfrak{X}$, on a $\mathcal{M}_{k,r}^*|_V = \mathcal{F}_{k,r}|_V/\mathcal{J}_k|_V$. On en déduit que si $(\tilde{\mathcal{M}}_{k,r})_x \neq 0$, alors le support du module $\mathcal{M}_{k,r}^*$ contient la droite verticale passant par x sauf potentiellement le point sur la section nulle. Il reste à regarder ce qu'il se passe au niveau de la section nulle. Si le support de $\mathcal{M}_{k,r}^*$ contient la section nulle, il n'y a rien à montrer. Dans ce cas le support $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ consiste en une composante horizontale d'équation $\xi = 0$ et en un nombre fini de composantes verticales.

On suppose maintenant que la section nulle n'est pas une composante irréductible du support $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$. Il faut montrer que si $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,\xi)} = (\tilde{\mathcal{M}}_{k,r})_x \neq 0$ pour tout $\xi \neq 0$, alors $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,0)} = (\mathcal{M}_k)_x \neq 0$. Autrement dit, il faut prouver qu'aucun élément P de $\mathcal{J}_k(U)$, pour U un voisinage ouvert affine de x dans \mathfrak{X} , n'est inversible au voisinage de x dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$. Si $\overline{N}_k(P) \geq 1$, alors la proposition 3.20 montre que P n'est jamais inversible au voisinage de x dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$. Néanmoins on a vu dans la preuve de la proposition 5.4 que $\mathcal{J}_k(U)$ contient des éléments P vérifiant $\overline{N}_k(P) = 0$ lorsque la section nulle n'est pas une composante irréductible. Soit P un tel élément. L'hypothèse $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,\xi)} = (\tilde{\mathcal{M}}_{k,r})_x \neq 0$ implique que le coefficient constant a_0 de P s'annule en x . Autrement P serait inversible au voisinage de tout point $(x, \xi) \neq (t, 0)$ dans $\mathcal{F}_{k,r}$ d'après la proposition 3.27 puisque $\overline{N}_k(P) = 0$ implique $\overline{n}_k(P) = 0$ et puisque a_0 serait inversible au voisinage de x . Ceci impliquerait que $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,\xi)} = (\tilde{\mathcal{M}}_{k,r})_x = 0$. Ainsi aucun élément P de $\mathcal{J}_k(U)$ vérifiant $\overline{N}_k(P) = 0$ n'est inversible au voisinage de x . On en déduit que $(\mathcal{M}_k)_x \neq 0$. Le support du module $\mathcal{M}_{k,r}^*$ contient donc la droite verticale passant par x . \square

5.2 $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ -module coadmissible associé à un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible

On va maintenant associer à tout $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible \mathcal{M} un $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ -module coadmissible \mathcal{M}_r^* , où $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ est la limite projective sur k des faisceaux d'algèbres $\mathcal{F}_{k,r}^*$. Le module \mathcal{M}_r^* est simplement la limite projective sur k des $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -modules cohérents $\mathcal{M}_{k,r}^*$. L'inégalité de Bernstein pour le support $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ découle des inégalités de Bernstein pour les $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -modules cohérents $\mathcal{M}_{k,r}^*$.

Le faisceau $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$

On considère les morphismes de transition $\mathcal{F}_{k+1,r}^* \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}^*$ induits localement par l'inclusion $\mathcal{F}_{k+1,r}(\pi(V)) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(\pi(V))$ lorsque $V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset$ et par le morphisme identité $\text{id} : \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\pi(V)) \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\pi(V))$ dans le cas où $V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset$. Comme pour $\mathcal{F}_{\infty,r}$, on définit le faisceau $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ comme la limite projective sur $k \geq r$ des faisceaux $\mathcal{F}_{k,r}^*$.

Définition 5.8. On pose $\mathcal{F}_{\infty,r}^* = \varprojlim_{k \geq r} \mathcal{F}_{k,r}^*$.

On vérifie que $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ est un faisceau sur le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ défini localement par les algèbres de Fréchet-Stein $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ et $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$:

$$\mathcal{F}_{\infty,r}^*(V) = \begin{cases} \mathcal{F}_{\infty,r}(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset \\ \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset \end{cases}$$

Les $\mathcal{F}_{\infty,r}$ -modules $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$

On se donne maintenant un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$. Pour tout $k \geq r$, on rappelle que

$$\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_k$$

C'est un $\mathcal{F}_{k,r}$ -module cohérent. On note g_k le morphisme de transition $\mathcal{M}_{k+1} \rightarrow \mathcal{M}_k$ et $i_{k,r} : \mathcal{F}_{k+1,r} \rightarrow \mathcal{F}_{k,r}$ le morphisme donné localement par l'inclusion de $\mathcal{F}_{k+1,r}(U)$ dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$. On considère le morphisme de transition $g_{k,r} = i_{k,r} \otimes g_k : \tilde{\mathcal{M}}_{k+1,r} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{k,r}$. Il est $\mathcal{F}_{k+1,r}$ -linéaire. Pour ces morphismes de transition, on pose

$$\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = \varprojlim_{k \geq r} \tilde{\mathcal{M}}_{k,r}$$

Proposition 5.9. On a $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} \simeq \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\mathcal{F}_{k+1,r}} \tilde{\mathcal{M}}_{k+1,r}$. Autrement dit $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$ est un $\mathcal{F}_{\infty,r}$ -module coadmissible.

Démonstration. L'algèbre $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ est naturellement un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ -module via la composition des morphismes d'algèbres $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_{k,r}(U)$. Ainsi $\mathcal{F}_{k,r}$ est

un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module. On dispose de l'isomorphisme suivant de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\mathcal{F}_{k+1,r}} \tilde{\mathcal{M}}_{k+1,r} &= \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\mathcal{F}_{k+1,r}} \mathcal{F}_{k+1,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_{k+1} \\ &\simeq \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_{k+1} \end{aligned}$$

La structure de $\mathcal{F}_{k,r}$ -modules prolonge celle de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules. Cet isomorphisme est donc un isomorphisme de $\mathcal{F}_{k,r}$ -modules. Comme $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_{k+1} \simeq \mathcal{M}_k$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_{k+1} &\simeq \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_{k+1} \\ &\simeq \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_k = \tilde{\mathcal{M}}_{k,r} \end{aligned}$$

en tant que $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules. Puisque la structure de $\mathcal{F}_{k,r}$ -modules étend celle de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules, c'est aussi un isomorphisme de $\mathcal{F}_{k,r}$ -modules. On obtient donc l'isomorphisme souhaité de $\mathcal{F}_{k,r}$ -modules :

$$\mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\mathcal{F}_{k+1,r}} \tilde{\mathcal{M}}_{k+1,r} \simeq \tilde{\mathcal{M}}_{k,r}$$

□

On note $\text{Supp } \tilde{\mathcal{M}}_{k,r}$ le support de $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r}$ comme faisceau sur le schéma formel \mathfrak{X} . Puisque $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r}$ est un $\mathcal{F}_{k,r}$ -module cohérent, il s'agit d'un fermé de \mathfrak{X} . Soit $y \in \mathfrak{X}$, l'isomorphisme $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} \simeq \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\mathcal{F}_{k+1,r}} \tilde{\mathcal{M}}_{k+1,r}$ induit un isomorphisme

$$(\tilde{\mathcal{M}}_{k,r})_y \simeq (\mathcal{F}_{k,r})_y \otimes_{(\mathcal{F}_{k+1,r})_y} (\tilde{\mathcal{M}}_{k+1,r})_y$$

En particulier $\text{Supp } \tilde{\mathcal{M}}_{k,r} \subset \text{Supp } \tilde{\mathcal{M}}_{k+1,r}$.

Définition 5.10. On définit le support de $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$ comme la fermeture de l'union croissante des supports des $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r}$:

$$\text{Supp } \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = \overline{\bigcup_{k \geq r} \text{Supp } \tilde{\mathcal{M}}_{k,r}}$$

Remarque 5.11. En général, l'union croissante des supports des $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r}$ n'est a priori pas fermée.

Exemple 5.12. On suppose que la courbe formelle \mathfrak{X} est affine munie d'une coordonnée locale. Soit P un opérateur de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ et $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$. C'est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible. On a $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r}/P$ et $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = \mathcal{F}_{\infty,r}/P$.

1. Si P est un opérateur infini, alors P n'est jamais inversible dans $\mathcal{F}_{\infty,r}(U)$ d'après la proposition 4.14. Ceci implique que P n'est pas inversible dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ pour k assez grand. Ainsi $\text{Supp } \mathcal{F}_{k,r}/P = \mathfrak{X}$ pour k assez grand. On en déduit que $\text{Supp } \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = \mathfrak{X}$. Prenons par exemple $P = \prod_{n \geq 1} (1 - a_n \cdot \omega^n \cdot \partial) \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ avec $a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$ de norme un. Alors P s'écrit

$$P = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cdot \omega^{n(n+1)/2} \cdot \partial^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \cdot \omega^{n((n+1)/2-k)} \cdot (\omega^k \partial)^n$$

avec $\beta_n = \varepsilon_n \cdot a_1 \dots a_n + \alpha_n$ où $\varepsilon_n \in \mathcal{V}^\times$ et $|\alpha_n| < 1$. On a donc $|\beta_n| = 1$. On montre que $\overline{N}_k(P) = \overline{n}_k(P) = k$. De plus pour que P soit inversible dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$, on doit avoir (proposition 3.27) :

$$\forall n \in \{0, \dots, k-1\}, \quad |\omega|^{n((n+1)/2-k)} \cdot p^{(k-r)(k-n)} < |\omega|^{k((k+1)/2-k)}$$

Cette condition se réécrit

$$\forall n \in \{0, \dots, k-1\}, \quad \frac{k(k+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} + r(n-k) < 0$$

Pour $n = 0$, on obtient $\frac{k(k+1)}{2} - rk < 0$. Ce n'est possible que pour $\frac{k+1}{2} < r$. Ainsi dès que k est supérieur ou égale à $2r - 1$, P n'est jamais inversible dans $\mathcal{F}_{k,r}(U)$ et $\text{Supp } \mathcal{F}_{k,r}/P = \mathfrak{X}$.

2. On suppose maintenant que $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \partial^n$ est un opérateur fini d'ordre d . Pour k assez grand, disons $k \geq k_0$, $\overline{N}_k(P) = d$. Pour r assez grand, disons $r \geq r_0$, et pour $k \geq k'_0 = \max\{k_0, r_0\}$, P vérifie la condition 3 de la proposition 3.27 :

$$\forall n \in \{0, \dots, d-1\}, \quad |a_n| \cdot p^{r(d-n)} < |a_d|$$

Ainsi pour tout $k \geq k'_0$ et pour tout $r \geq r_0$, P est inversible dans $\mathcal{F}_{k,r}$ au voisinage de x si et seulement si son coefficient dominant a_d est inversible au voisinage de x (proposition 3.27). Dans ce cas $\text{Supp } \tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = V(a_d)$. On en déduit que $\text{Supp } \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = V(a_d)$ pour tout $r \geq r_0$.

Pour les autres valeurs de r , P n'est jamais inversible. Donc $\text{Supp } \tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathfrak{X}$ pour tout k dès que $r < r_0$ en prenant r_0 minimal. Ainsi $\text{Supp } \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = \mathfrak{X}$ pour $r < r_0$.

Le $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ -module \mathcal{M}_r^*

On considère toujours un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$. Pour $k \geq r \geq 1$, les morphismes de transition $\tilde{\mathcal{M}}_{k+1,r} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{k,r}$ et $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ induisent des morphismes de transition $\mathcal{M}_{k+1,r}^* \rightarrow \mathcal{M}_{k,r}^*$. On définit maintenant un $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ -module \mathcal{M}_r^* à partir de \mathcal{M} en prenant la limite projective sur k des $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -modules cohérents $\mathcal{M}_{k,r}^*$. Ce module va être coadmissible.

Définition 5.13. On pose $\mathcal{M}_r^* = \varprojlim_{k \geq r} \mathcal{M}_{k,r}^*$.

Le $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ -module $\mathcal{M}_{k,r}^*$ est caractérisé localement sur les ouverts V de $T^*\mathfrak{X}$ par

$$\mathcal{M}_r^*(V) = \begin{cases} \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset \\ \mathcal{M}(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset \end{cases}$$

Comme $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$ est un $\mathcal{F}_{\infty,r}$ -module coadmissible et comme \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible, $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$ est un $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ -module coadmissible.

Remarque 5.14. Soient \mathcal{M} et \mathcal{N} deux $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles. S'il existe un entier $r \geq 1$ tel que $\mathcal{M}_r^* = \mathcal{N}_r^*$, alors $\mathcal{M} = \mathcal{N}$. En effet pour tout ouvert V de $T^*\mathfrak{X}$ interceptant la section nulle, on a par hypothèse $\mathcal{M}_r^*(\pi(V)) = \mathcal{M}(\pi(V)) = \mathcal{N}_r^*(\pi(V)) = \mathcal{N}(\pi(V))$. Puisque les ouverts $\pi(V)$ recouvrent \mathfrak{X} , on en déduit bien l'égalité $\mathcal{M} = \mathcal{N}$.

On a vu que la suite des supports $(\text{Supp } \tilde{\mathcal{M}}_{k,r})_{k \geq r}$ est croissante. On montre de manière analogue que la suite des supports $(\text{Supp } \mathcal{M}_k)_{k \geq 1}$ est elle aussi croissante. On en déduit que la suite des supports des modules $\mathcal{M}_{k,r}^*$ est croissante.

Définition 5.15. On définit le support de \mathcal{M}_r^* comme la fermeture de l'union croissante des supports des $\mathcal{M}_{k,r}^*$:

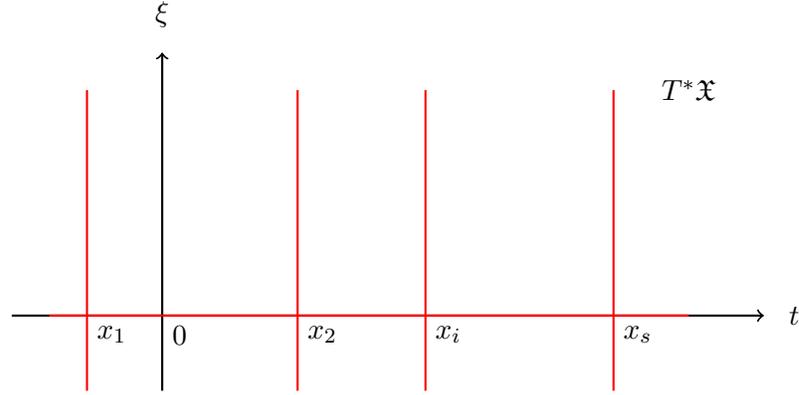
$$\text{Supp } \mathcal{M}_r^* = \overline{\bigcup_{k \geq r} \text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*} \subset T^*\mathfrak{X}$$

Lorsque \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible non nul, les supports $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ sont des parties fermées coniques de $T^*\mathfrak{X}$. On en déduit que $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ est une aussi une partie fermée conique de $T^*\mathfrak{X}$.

Exemple 5.16. On suppose que $\mathfrak{X} = U$ est affine. On rappelle que T^*X et $T^*\mathfrak{X}$ ont le même espace topologique. On note (t, ξ) les coordonnées locales de $T^*\mathfrak{X}$ associées à la coordonnée étale de $\mathfrak{X} = U$. Soit $P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. On considère le $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ avec $\mathcal{M}_k = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$.

On a $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r}/P$. Soit V un ouvert de $T^*\mathfrak{X}$. Si $V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset$, alors $\mathcal{M}_{k,r}^*(V) = \mathcal{F}_{k,r}(\pi(V))/P$. Sinon lorsque $V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset$, $\mathcal{M}_{k,r}^*(V) = \mathcal{M}_k(\pi(V)) = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\pi(V))/P$.

1. On suppose tout d'abord que $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \partial^n$ est un opérateur fini d'ordre d . Pour k assez grand, $\overline{N}_k(P) = d$. A partir de ce rang là et pour r assez grand, le support $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ de $\mathcal{M}_{k,r}^*$ coïncide avec la variété caractéristique de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$. En effet pour r et k assez grand, le support de $\mathcal{M}_{k,r}^*$ est donné par



$\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$

Ici x_1, \dots, x_s sont les zéros du coefficient dominant a_d de P . Ce support admet la section nulle comme composante irréductible si et seulement si $d > 0$.

Soit $(x, \xi) \in T^*\mathfrak{X}$. Si $(x, \xi) \in s(\mathfrak{X})$, alors $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(t,\xi)} = (\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P)_x$. Si $d > 0$, alors P n'est jamais inversible dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ au voisinage de x . En effet pour que P soit inversible dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$, une condition nécessaire est d'avoir $\overline{N}_k(P) = 0$ d'après le corollaire 3.20. Mais pour k suffisamment grand, $\overline{N}_k(P) = d > 0$. On en déduit que $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,\xi)} = (\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P)_x \neq 0$. Autrement dit le support de $\mathcal{M}_{k,r}^*$ contient la section nulle. Les variétés caractéristiques $\text{Car}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P)$ la contiennent aussi. Si $d = 0$, alors $P = a$ est une fonction de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\mathfrak{X})$. Le support du module $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/a$ est l'ensemble des zéros de a (en dehors de ces zéros, a est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(\mathfrak{X})$). Dans ce cas le support de $\mathcal{M}_{k,r}^*$ coupe la section nulle seulement en les zéros x_1, \dots, x_s de a . La section nulle n'est donc pas dans le support du module $\mathcal{M}_{k,r}^*$. Lorsque $d = 0$, la section nulle n'est pas non plus une composante irréductible des variétés caractéristiques $\text{Car}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P)$ pour k assez grand.

On suppose maintenant que $(x, \xi) \in T^*\mathfrak{X} \setminus s(\mathfrak{X})$. Alors $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,\xi)} = (\mathcal{F}_{k,r}/P)_x$. On a déjà vu dans l'exemple 5.12 que pour r et k assez grands, $(\mathcal{F}_{k,r}/P)_x \neq 0$ si et seulement si x est un zéro du coefficient dominant a_d de P . Le support du module $\mathcal{M}_{k,r}^*$ contient ainsi les droites verticales d'équations $x = x_i$, où x_1, \dots, x_s sont les zéros de a_d , auxquelles on a retiré les points de la section nulle. Mais ces points de la section nulle sont compris dans le cas traité précédemment.

Ces supports $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ ne dépendent donc plus de k pour k suffisamment grand et $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^* = \text{Car}(\mathcal{M}_k)$ en tant qu'espace topologique. On en déduit que pour r assez grand, le support du module \mathcal{M}_r^* est donné par l'ensemble des points $(x, \xi) \in T^*\mathfrak{X}$ vérifiant $a_d(x) \cdot \xi^d = 0$.

2. On traite maintenant le cas d'un opérateur infini P . Pour $(x, \xi) \in s(\mathfrak{X})$, on a $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,\xi)} = (\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P)_x$. La suite $(\overline{N}_k(P))_k$ est croissante et diverge vers $+\infty$. Pour k suffisamment grand, P n'est donc pas inversible au voisinage de x dans $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$. Autrement dit $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P)_x \neq 0$. Ainsi le support du module $\mathcal{M}_{k,r}^*$ contient la section nulle pour k assez grand. Enfin pour tout point $(x, \xi) \in T^*\mathfrak{X} \setminus s(\mathfrak{X})$ et pour k suffisamment grand, $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{(x,\xi)} = (\mathcal{F}_{k,r}/P)_x \neq 0$ d'après l'exemple 5.12. On en déduit que $\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^* = T^*\mathfrak{X}$ pour k suffisamment grand. Donc si P est infini, alors $\text{Supp } \mathcal{M}_r^* = T^*\mathfrak{X}$ quelque soit $r \in \mathbb{N}^*$.

Inégalité de Bernstein

Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible et r un entier supérieur ou égale à un. Si $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_r^*) = 1$, alors $\mathcal{M} \neq 0$. Dans ce cas $\mathcal{M}_k \neq 0$ pour k assez grand. On a donc $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*) = 1$ pour k suffisamment grand d'après le corollaire 5.6 car $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*) \leq \dim(\text{Supp } \mathcal{M}_r^*) = 1$. On en déduit que les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules \mathcal{M}_k sont holonomes pour k assez grand. En effet d'après la proposition 5.4, $\text{Car } \mathcal{M}_k \subset \text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ et donc $\dim(\text{Car } \mathcal{M}_k) \leq 1$.

La réciproque est néanmoins fautive. Les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules \mathcal{M}_k peuvent être holonomes pour tout niveau de congruence k , ie $\dim(\text{Car } \mathcal{M}_k) \leq 1$, tout en ayant $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_r^*) = 2$. C'est le cas par exemple pour $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$ dès que P est un opérateur infini de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. En effet, on a vu dans l'exemple 5.16 que $\text{Supp } \mathcal{M}_r^* = T^*\mathfrak{X}$. Cependant d'après [5], le $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$ est holonome pour tout entier naturel k .

On déduit du corollaire 5.6 l'inégalité de Bernstein pour le support du $\mathcal{F}_{\infty,r}$ -module coadmissible \mathcal{M}_r^* . On rappelle que son support est défini par

$$\text{Supp } \mathcal{M}_r^* = \overline{\bigcup_{k \geq r} \text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*}$$

Proposition 5.17 (inégalité de Bernstein). *Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible. Alors \mathcal{M} est non nul si et seulement si $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_r^*) \geq 1$.*

Le fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ de \mathfrak{X} est noethérien. Ainsi les supports des $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -modules cohérents $\mathcal{M}_{k,r}^*$ n'ont qu'un nombre fini de composantes irréductibles. On déduit le résultat suivant de la proposition 5.7.

Proposition 5.18. *Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible non nul. Si $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_r^*) = 2$, alors $\text{Supp } \mathcal{M}_r^* = T^*\mathfrak{X}$. Sinon $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_r^*) = 1$ et $\text{Supp } \mathcal{M}_r^* = \text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ pour k suffisamment grand. En particulier les composantes irréductibles du support $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ sont toutes de dimension un.*

Démonstration. Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible non nul. Si la dimension du support $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ est deux, alors $\text{Supp } \mathcal{M}_r^* = T^*\mathfrak{X}$ puisque le fibré cotangent

$T^*\mathfrak{X}$ est irréductible. On suppose maintenant que $\dim(\text{Supp}\mathcal{M}_r^*) = 1$. On a alors vu que $\dim(\text{Supp}\mathcal{M}_{k,r}^*) = 1$ pour k assez grand. On ne considère maintenant que ces niveaux de congruences k . Le support $\text{Supp}\mathcal{M}_r^*$ n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles. Elles sont toutes de dimension un. En effet, si une composante irréductible de $\text{Supp}\mathcal{M}_r^*$ est réduite à un point point, alors ce point appartient à l'un des supports $\text{Supp}\mathcal{M}_{k,r}^*$ pour k suffisamment grand. Mais les composantes irréductibles des supports $\text{Supp}\mathcal{M}_{k,r}^*$ sont toutes de dimension un d'après la proposition 5.7. Comme $\text{Supp}\mathcal{M}_{k,r}^* \subset \text{Supp}\mathcal{M}_r^*$, le support $\text{Supp}\mathcal{M}_r^*$ contient cette composante de dimension un. Ainsi ce point ne peut être une composante irréductible de $\text{Supp}\mathcal{M}_r^*$.

Les composantes irréductibles des supports $\text{Supp}\mathcal{M}_{k,r}^*$ et du support $\text{Supp}\mathcal{M}_r^*$ sont donc toutes de dimension un. Pour une raison de dimension, les composantes irréductibles des $\text{Supp}\mathcal{M}_{k,r}^*$ sont des composantes irréductibles de $\text{Supp}\mathcal{M}_r^*$. On en déduit que $\text{Supp}\mathcal{M}_r^* = \text{Supp}\mathcal{M}_{k,r}^*$ à partir d'un certain rang $k \geq r$. En effet puisque le support $\text{Supp}\mathcal{M}_r^*$ n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles, on a forcément l'égalité des supports à partir d'un rang k suffisamment grand. \square

6 $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules holonomes

Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible. La suite des supports $(\text{Supp}\mathcal{M}_r^*)_r$ est décroissante. On définit la variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{M})$ de \mathcal{M} comme l'intersection des supports des $\mathcal{M}_{k,r}^*$. Elle vérifie l'inégalité de Bernstein : $\mathcal{M} \neq 0$ si et seulement si $\dim \text{Car}(\mathcal{M}) \geq 1$.

6.1 \mathcal{F}_∞^* -module associé à un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible

Les morphismes de transition $\mathcal{F}_{\infty,r} \rightarrow \mathcal{F}_{\infty,r+1}$ et $\text{id} : \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ induisent des morphismes de transition $\mathcal{F}_{\infty,r}^* \rightarrow \mathcal{F}_{\infty,r+1}^*$. Comme $T^*\mathfrak{X}$ est quasi-compacte et comme les morphismes de transition $\mathcal{F}_{\infty,r}^* \rightarrow \mathcal{F}_{\infty,r+1}^*$ sont localement injectifs, la limite inductive des $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ définit un faisceau sur $T^*\mathfrak{X}$.

Définition 6.1. On définit un faisceau sur $T^*\mathfrak{X}$ par $\mathcal{F}_\infty^* = \varinjlim_{r \geq 1} \mathcal{F}_\infty^*$.

Pour tout ouvert V de $T^*\mathfrak{X}$, on vérifie que

$$\mathcal{F}_\infty^*(V) = \begin{cases} \mathcal{F}_\infty(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) = \emptyset \\ \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(\pi(V)) & \text{si } V \cap s(\mathfrak{X}) \neq \emptyset \end{cases}$$

Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible. Pour tout entier $k \geq r$, on rappelle que $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_k$ et que $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = \varprojlim_{k \geq r} \tilde{\mathcal{M}}_{k,r}$ est un $\mathcal{F}_{\infty,r}$ -module coadmissible. Pour $k \geq r+1$, on note $j_{k,r} : \mathcal{F}_{k,r} \rightarrow \mathcal{F}_{k,r+1}$ le morphisme induit localement par les inclusions $\mathcal{F}_{k,r}(U) \subset \mathcal{F}_{k,r+1}(U)$. Les morphismes

$$j_{k,r} \otimes \text{id} : \tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_k \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{k,r+1} = \mathcal{F}_{k,r+1} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_k$$

sont $\mathcal{F}_{k,r}$ -linéaires. Ils commutent avec les morphismes de transition. En effet le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} & \xrightarrow{j_{k,r} \otimes \text{id}} & \tilde{\mathcal{M}}_{k,r+1} \\
g_{k,r} \downarrow & & \downarrow g_{k,r+1} \\
\tilde{\mathcal{M}}_{k+1,r} & \xrightarrow{j_{k+1,r} \otimes \text{id}} & \tilde{\mathcal{M}}_{k+1,r+1}
\end{array}$$

En passant à la limite projective sur $k \geq r+1$, on obtient un morphisme continu $\mathcal{F}_{\infty,r}$ -linéaire $j_r : \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r+1}$. On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{k,r+1} \otimes_{\mathcal{F}_{k,r}} \tilde{\mathcal{M}}_{k,r} &= \mathcal{F}_{k,r+1} \otimes_{\mathcal{F}_{k,r}} \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_k \\
&\simeq \mathcal{F}_{k,r+1} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_k \\
&\simeq \tilde{\mathcal{M}}_{k,r+1}
\end{aligned}$$

en tant que $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules. Puisque la structure de $\mathcal{F}_{k,r+1}$ -modules étend celle de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules, on obtient un isomorphisme de $\mathcal{F}_{k,r+1}$ -modules

$$\mathcal{F}_{k,r+1} \otimes_{\mathcal{F}_{k,r}} \tilde{\mathcal{M}}_{k,r} \simeq \tilde{\mathcal{M}}_{k,r+1}$$

On en déduit que $\text{Supp } \tilde{\mathcal{M}}_{k,r+1} \subset \text{Supp } \tilde{\mathcal{M}}_{k,r}$. Donc

$$\text{Supp } \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r+1} \subset \text{Supp } \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$$

On rappelle que $\mathcal{F}_{\infty} = \varinjlim_{r \geq 1} \mathcal{F}_{\infty,r}$. La limite inductive sur r des modules $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$ pour les morphismes $j_r : \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r+1}$ est un préfaisceau de \mathcal{F}_{∞} -modules.

On considère les morphismes de transition $\mathcal{M}_r^* \rightarrow \mathcal{M}_{r+1}^*$ induits par les morphismes $j_r : \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r+1}$ et $\text{id} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$. Les inclusions $\text{Supp } \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r+1} \subset \text{Supp } \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r}$ permettent d'obtenir des inclusions $\text{Supp } \mathcal{M}_r^* \subset \text{Supp } \mathcal{M}_{r+1}^*$.

Définition 6.2.

1. On associe un \mathcal{F}_{∞}^* -module \mathcal{M}_{∞}^* à \mathcal{M} en prenant le faisceautisé du préfaisceau de \mathcal{F}_{∞}^* -modules $\varinjlim_{r \geq 1} \mathcal{M}_r^*$.
2. On définit le support de \mathcal{M}_{∞}^* comme l'intersection décroissante des supports des $\mathcal{F}_{\infty,r}^*$ -modules coadmissibles \mathcal{M}_r^* :

$$\text{Supp } \mathcal{M}_{\infty}^* = \bigcap_{r \geq 1} \text{Supp } \mathcal{M}_r^*$$

Exemple 6.3. On reprend l'exemple 5.16 : $\mathfrak{X} = U$ est affine et $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$ pour un opérateur $P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$. On rappelle que $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r}/P$ et que $\tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = \mathcal{F}_{\infty,r}/P$.

1. Si P est un opérateur infini, alors $\text{Supp } \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = \mathfrak{X}$ pour tout $r \geq 1$ d'après l'exemple 5.16. Ainsi $\text{Supp } \mathcal{M}_{\infty}^* = T^*\mathfrak{X}$.
2. Si $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \partial^n$ est un opérateur fini d'ordre d , alors il existe un rang r_0 tel que $\text{Supp } \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = V(a_d)$ pour tout $r \geq r_0$ et $\text{Supp } \tilde{\mathcal{M}}_{\infty,r} = \mathfrak{X}$ pour tout $r < r_0$. Pour $r \geq r_0$, ces supports sont l'ensemble des abscisses des composantes irréductibles des variétés caractéristiques $\text{Car}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P)$ pour k assez grand, comme discuté en introduction. L'exemple 5.16 montre que pour r assez grand, le support de \mathcal{M}_r^* coïncide avec la variété caractéristique de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$ pour k suffisamment grand. Ainsi le support $\text{Supp } \mathcal{M}_{\infty}^* = \bigcap_{r \geq 1} \text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ redonne les variétés caractéristiques $\text{Car}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P)$ pour k assez grand.

6.2 Variété caractéristique et inégalité de Bernstein

Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible. On rappelle que la suite des supports $(\text{Supp } \mathcal{M}_r^*)_r$ est décroissante. L'objet qui nous intéresse est l'intersection de ces supports. C'est un fermé de $T^*\mathfrak{X}$. On définit la variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{M})$ de \mathcal{M} comme cette intersection. L'inégalité de Bernstein est vérifiée par cette variété caractéristique : $\mathcal{M} \neq 0$ si et seulement si $\dim \text{Car}(\mathcal{M}) \geq 1$.

Définition 6.4. Pour tout $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible \mathcal{M} , on définit la variété caractéristique de \mathcal{M} par

$$\text{Car}(\mathcal{M}) = \text{Supp } \mathcal{M}_{\infty}^* = \bigcap_{r \geq 1} \text{Supp } \mathcal{M}_r^* \subset T^*\mathfrak{X}$$

Exemple 6.5. On continue l'exemple 6.3. On suppose que $\mathfrak{X} = U$ est affine, que $P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}(U)$ et que $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ avec $\mathcal{M}_k = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$.

1. Si $P = \sum_{n=0}^d a_n \cdot \partial^n$ est un opérateur fini d'ordre d , alors pour k assez grand

$$\text{Car } \mathcal{M} = \{(t, \xi) \in T^*\mathfrak{X} : a_d(x) \cdot \xi^d = 0\} = \text{Car}(\mathcal{M}_k)$$

2. Si P est infini, alors $\text{Car } \mathcal{M} = T^*\mathfrak{X}$.

Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible non nul. Si $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_r^*) = 2$ pour tout $r \geq 1$, alors $\text{Supp } \mathcal{M}_r^* = T^*\mathfrak{X}$ et donc $\text{Car}(\mathcal{M}) = T^*\mathfrak{X}$. Sinon $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_r^*) = 1$ à partir d'un rang r_0 et $\dim \text{Car}(\mathcal{M}) \leq 1$. On montre dans la proposition suivante que $\dim \text{Car}(\mathcal{M}) \geq 1$. Il s'agit de l'inégalité de Bernstein pour les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules codadmissibles : un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible \mathcal{M} est non nul si et seulement si $\dim \text{Car}(\mathcal{M}) \geq 1$.

Proposition 6.6. *Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible non nul. Il existe un rang $r \in \mathbb{N}^*$ à partir duquel $\text{Car}(\mathcal{M}) = \text{Supp } \mathcal{M}_r^*$. Si $\dim(\text{Car}(\mathcal{M})) = 2$, alors $\text{Car}(\mathcal{M}) = T^*\mathfrak{X}$. Sinon $\dim(\text{Car}(\mathcal{M})) = 1$. On rappelle que pour $k \geq r$ assez grand (dépendant de r), $\text{Supp } \mathcal{M}_r^* = \text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$.*

Démonstration. On suppose que $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_r^*) = 1$ à partir d'un certain rang r_0 . On ne considère maintenant que les rangs r plus grands que r_0 . Puisque $\text{Supp } \mathcal{M}_{r+1}^* \subset \text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ et comme les composantes irréductibles des supports $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ sont toutes de dimension un, les composantes irréductibles de $\text{Supp } \mathcal{M}_{r+1}^*$ sont des composantes irréductibles de $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$.

On suppose que $\dim(\bigcap_{r \geq 1} \text{Supp } \mathcal{M}_r^*) = 0$. Soit L une composante irréductible de $\text{Supp } \mathcal{M}_{r_0}^*$. Elle est de dimension un. Si L est une composante irréductible de tous les $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$, alors L est aussi une composante irréductible de $\text{Car}(\mathcal{M}) = \bigcap_{r \geq 1} \text{Supp } \mathcal{M}_r^*$. Cela contredit l'hypothèse $\dim \text{Car}(\mathcal{M}) = 0$. On en déduit que L n'est plus une composante irréductible des $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ pour r assez grand. Enfin comme le support $\text{Supp } \mathcal{M}_{r_0}^*$ n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles, aucune composante irréductible de $\text{Supp } \mathcal{M}_{r_0}^*$ n'est une composante irréductible des supports $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ pour un rang r suffisamment grand. Il en découle que $\dim(\text{Supp } \mathcal{M}_r^*) = 0$. Alors $\mathcal{M} = 0$ d'après la proposition 5.18. Puisque $\mathcal{M} \neq 0$, on en déduit que $\dim(\text{Car } \mathcal{M}) = 1$ et que les composantes irréductibles de $\text{Car } \mathcal{M}$ sont les composantes irréductibles communes à tous les supports $\text{Supp } \mathcal{M}_r^*$.

Les supports des modules \mathcal{M}_r^* et la variété caractéristique $\text{Car}(\mathcal{M})$ n'ont qu'un nombre fini de composantes irréductibles. On en déduit que $\text{Car}(\mathcal{M}) = \text{Supp } \mathcal{M}_r^*$ à partir d'un certain rang r . Enfin on sait toujours d'après la proposition 5.18 que $\text{Supp } \mathcal{M}_r^* = \text{Supp } \mathcal{M}_{k,r}^*$ pour un niveau de congruence k suffisamment grand. \square

Définition 6.7. *Un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible \mathcal{M} est dit holonome si $\dim \text{Car}(\mathcal{M}) \leq 1$.*

Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module holonome. D'après l'inégalité de Bernstein (proposition 6.6), ou bien $\mathcal{M} = 0$ et $\text{Car}(\mathcal{M}) = \emptyset$, ou bien $\mathcal{M} \neq 0$ et $\dim \text{Car}(\mathcal{M}) = 1$. Par ailleurs si $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$, alors les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents \mathcal{M}_k sont holonomes à partir d'un certain rang puisque $\text{Car } \mathcal{M}_k \subset \text{Supp } \mathcal{M}_{k,k}^* \subset \text{Supp } \mathcal{M}_k^* = \text{Car}(\mathcal{M})$ pour k suffisamment grand.

Exemple 6.8. Le $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P$ est holonome si et seulement si P est un opérateur fini.

On termine cette partie en démontrant que la catégorie des $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules holonomes est abélienne. Cela découle du corollaire 6.9. Soit $0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$ une suite exacte de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles. On note $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$, $\mathcal{N} = \varprojlim_k \mathcal{N}_k$ et $\mathcal{L} = \varprojlim_k \mathcal{L}_k$. Par définition, \mathcal{M}_k , \mathcal{N}_k et \mathcal{L}_k sont des $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents. La suite exacte précédente induit une suite exacte de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules pour tout entier naturel k :

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}_k \longrightarrow \mathcal{N}_k \longrightarrow \mathcal{L}_k \longrightarrow 0$$

On rappelle que $\tilde{\mathcal{M}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_k$, $\tilde{\mathcal{N}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{N}_k$ et $\tilde{\mathcal{L}}_{k,r} = \mathcal{F}_{k,r} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{L}_k$. Puisque le faisceau $\mathcal{F}_{k,r}$ est plat sur $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ (proposition 3.25), on obtient les suites exactes suivantes de $\mathcal{F}_{k,r}$ -modules cohérents

$$0 \longrightarrow \tilde{\mathcal{M}}_{k,r} \longrightarrow \tilde{\mathcal{N}}_{k,r} \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}_{k,r} \longrightarrow 0$$

On en déduit finalement des suites exactes de $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -modules cohérents

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}_{k,r}^* \longrightarrow \mathcal{N}_{k,r}^* \longrightarrow \mathcal{L}_{k,r}^* \longrightarrow 0$$

Le corollaire suivant se démontre en utilisant ces suites exactes et la proposition 6.6.

Corollaire 6.9. *Soit $0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$ une suite exacte de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles. Alors $\text{Car}(\mathcal{N}) = \text{Car}(\mathcal{M}) \cup \text{Car}(\mathcal{L})$. En particulier \mathcal{N} est holonome si et seulement si \mathcal{M} et \mathcal{L} le sont aussi.*

Démonstration. Si \mathcal{N} n'est pas holonome et si \mathcal{M} ou \mathcal{L} n'est pas holonome, alors la proposition 6.6 implique que

$$\text{Car}(\mathcal{N}) = T^*\mathfrak{X} = \text{Car}(\mathcal{M}) \cup \text{Car}(\mathcal{L})$$

On suppose \mathcal{N} holonome. Si $\mathcal{N} = 0$, alors $\mathcal{M} = \mathcal{L} = 0$ et il n'y a rien à faire. On considère le cas $\mathcal{N} \neq 0$. On sait d'après la proposition 6.6 que $\dim \text{Car}(\mathcal{N}) = 1$ et que $\text{Car}(\mathcal{N}) = \text{Supp} \mathcal{N}_{k,r}^*$ pour k et r suffisamment grands. On rappelle qu'on dispose d'une suite exacte $0 \longrightarrow \mathcal{M}_{k,r}^* \longrightarrow \mathcal{N}_{k,r}^* \longrightarrow \mathcal{L}_{k,r}^* \longrightarrow 0$ de $\mathcal{F}_{k,r}^*$ -modules cohérents. En regardant les supports de ces modules, on obtient l'égalité

$$\text{Supp}(\mathcal{N}_{k,r}^*) = \text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*) \cup \text{Supp}(\mathcal{L}_{k,r}^*) \quad (3)$$

Les supports $\text{Supp} \mathcal{M}_{k,r}^*$ et $\text{Supp} \mathcal{L}_{k,r}^*$ sont donc contenus dans $\text{Supp} \mathcal{N}_{k,r}^* = \text{Car}(\mathcal{N})$. Puisque ces inclusions sont vérifiées pour tous les niveaux de congruences k suffisamment grands, on a $\text{Supp}(\mathcal{M}_r^*) \subset \text{Car}(\mathcal{N})$ et $\text{Car}(\mathcal{L}_r^*) \subset \text{Car}(\mathcal{N})$. Enfin ces inclusions étant vraies pour r assez grand, il en découle que $\text{Car}(\mathcal{M}), \text{Car}(\mathcal{L}) \subset \text{Car}(\mathcal{N})$. Ainsi les dimensions des variétés caractéristiques $\text{Car}(\mathcal{M})$ et $\text{Car}(\mathcal{L})$ sont inférieures ou égales à la dimension de $\text{Car}(\mathcal{N})$. Autrement dit \mathcal{M} et \mathcal{L} sont holonomes car $\dim \text{Car}(\mathcal{N}) = 1$. La proposition 6.6 permet d'écrire $\text{Car}(\mathcal{N}) = \text{Supp} \mathcal{N}_{k,r}^*$, $\text{Car}(\mathcal{M}) = \text{Supp} \mathcal{M}_{k,r}^*$ et $\text{Car}(\mathcal{L}) = \text{Supp} \mathcal{L}_{k,r}^*$ pour k et r suffisamment grands. On en déduit alors que $\text{Car}(\mathcal{N}) = \text{Car}(\mathcal{M}) \cup \text{Car}(\mathcal{L})$ par 3.

On suppose maintenant que les modules \mathcal{M} et \mathcal{L} sont tous deux holonomes. D'après la proposition 6.6, il existe un rang r pour lequel $\text{Car}(\mathcal{M}) = \text{Supp} \mathcal{M}_r^*$, $\text{Car}(\mathcal{N}) = \text{Supp} \mathcal{N}_r^*$ et $\text{Car}(\mathcal{L}) = \text{Supp} \mathcal{L}_r^*$. De plus il existe un rang $k_r \geq r$ tel que $\text{Car}(\mathcal{M}) = \text{Supp} \mathcal{M}_r^* = \text{Supp} \mathcal{M}_{k,r}^*$ et $\text{Car}(\mathcal{L}) = \text{Supp} \mathcal{L}_r^* = \text{Supp} \mathcal{L}_{k,r}^*$ pour tout entier $k \geq k_r$. La relation 3 montre que pour tout $k \geq k_r$,

$$\text{Supp} \mathcal{N}_{k,r}^* = \text{Supp}(\mathcal{M}_{k,r}^*) \cup \text{Supp}(\mathcal{L}_{k,r}^*) = \text{Car}(\mathcal{M}) \cup \text{Car}(\mathcal{L})$$

Le support $\text{Supp } \mathcal{N}_{k,r}^*$ ne dépend donc plus de k à partir du rang k_r . On en déduit que

$$\text{Supp } \mathcal{N}_r^* = \overline{\bigcup_{k \geq r} \text{Supp } \mathcal{N}_{k,r}^*} = \text{Car}(\mathcal{M}) \cup \text{Car}(\mathcal{L})$$

Il en découle que

$$\text{Car}(\mathcal{N}) = \bigcap_{r \geq 1} \text{Supp } \mathcal{N}_r^* \subset \text{Supp } \mathcal{N}_r^* = \text{Car}(\mathcal{M}) \cup \text{Car}(\mathcal{L})$$

Cette inclusion étant vraie pour tout indice r suffisamment grand, on obtient l'égalité $\text{Car}(\mathcal{N}) = \text{Car}(\mathcal{M}) \cup \text{Car}(\mathcal{L})$. En particulier \mathcal{N} est aussi holonome. \square

6.3 $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules à connexion

On identifie \mathfrak{X} avec la section nulle $s : \mathfrak{X} \rightarrow T^*\mathfrak{X}$ du fibré cotangent $T^*\mathfrak{X}$ de \mathfrak{X} . On démontre dans cette section qu'un module holonome est un module à connexion sur un certain ouvert de \mathfrak{X} .

Définition 6.10. Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible. On dit que \mathcal{M} est un module à connexion si $\text{Car}(\mathcal{M}) \subset \mathfrak{X}$.

Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un module à connexion non nul : $\text{Car}(\mathcal{M}) = |\mathfrak{X}| = |X|$. Il existe un rang $r \geq 1$ à partir duquel $\text{Supp } \mathcal{M}_r^* = \text{Car}(\mathcal{M}) = |\mathfrak{X}|$. Ainsi pour tout entier $k \geq r$, $\text{Car}(\mathcal{M}_k) \subset \text{Car}(\mathcal{M}) = |X|$. Puisque \mathcal{M} est non nul, les modules \mathcal{M}_k sont non nuls pour k assez grand. L'hypothèse $\text{Car}(\mathcal{M}) = \mathfrak{X}$ implique donc que $\text{Car}(\mathcal{M}_k) = X$ à partir d'un rang k suffisamment grand. On sait alors d'après le lemme 3.23 de [5] que chaque \mathcal{M}_k est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module libre de rang fini. On va démontrer que les rangs des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -modules libres \mathcal{M}_k ne dépendent pas de k . On en déduit ensuite que \mathcal{M} est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module libre de rang fini.

Lemme 6.11. Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module holonome tel que $\text{Car}(\mathcal{M}) = \mathfrak{X}$. Alors pour k suffisamment grand, les \mathcal{M}_k sont des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -modules libres de même rang fini.

Démonstration. Soit $r \in \mathbb{N}^*$ un rang pour lequel $\text{Supp } \mathcal{M}_r^* = \text{Car}(\mathcal{M}) = \mathfrak{X}$. On ne considère maintenant que les niveaux de congruences $k \geq r$ pour lesquels $\text{Car}(\mathcal{M}_k) = X$. Soit x un point de \mathfrak{X} . Quitte à étendre les scalaires par une extension finie de K , on peut supposer que x est un point κ -rationnel. D'après le lemme 3.23 de [5], il existe un voisinage ouvert U_k de x dans \mathfrak{X} et un opérateur différentiel P_k de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U_k)$ fini dominant tel que $\mathcal{M}_k|_{U_k} \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{U_k,k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P_k$. Si d_k est l'ordre de P_k , alors \mathcal{M}_k est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module libre de rang d_k . Il suffit de montrer que d_k ne dépend pas de k . Puisque $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible, on a

$$\widehat{\mathcal{D}}_{U_k \cap U_{k+1},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{U_k \cap U_{k+1},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \widehat{\mathcal{D}}_{U_k \cap U_{k+1},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}/P_{k+1} \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{U_k \cap U_{k+1},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P_k$$

Autrement dit

$$\widehat{\mathcal{D}}_{U_k \cap U_{k+1}, k, \mathbb{Q}}^{(0)} / P_{k+1} \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{U_k \cap U_{k+1}, k, \mathbb{Q}}^{(0)} / P_k$$

Le corollaire 2.16 de [5] implique que $\overline{N}_k(P_k) = \overline{N}_k(P_{k+1})$. De plus on sait par le lemme 4.2 que $\overline{N}_{k+1}(P_{k+1}) \geq \overline{N}_k(P_{k+1})$. On en déduit que la suite $(\overline{N}_k(P_k))_k$ est croissante. Il faut prouver qu'elle est stationnaire.

On suppose par l'absurde que la suite $(\overline{N}_k(P_k))_k$ diverge vers l'infini. Soit $k \geq r$ un entier tel que $d_k = \overline{N}_k(P_k) > d_{k-1} = \overline{N}_{k-1}(P_k) = \overline{N}_{k-1}(P_{k-1})$. L'hypothèse

$$\text{Supp}((\mathcal{M}_{k,r}^*)_{|\pi^{-1}(U_k)}) = \text{Supp}((\mathcal{F}_{k,r}^*)_{|\pi^{-1}(U_k)} / P_k) \subset \text{Car}((\mathcal{M})_{|U_k}) = U_k$$

implique que P_k est inversible dans $\mathcal{F}_{k,r}(U_k)$. Autrement le support du module $(\mathcal{M}_{k,r}^*)_{|\pi^{-1}(U_k)}$ contiendrait des composantes irréductibles verticales. On écrit $P_k = \sum_{n=0}^{d_k} a_n \cdot \partial^n$, où $a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}(U_k)$. On rappelle que $P_k \in (\mathcal{F}_{k,r}(U_k))^\times$ si et seulement si $\overline{N}_k(P_k) = \overline{n}_k(P_k) = d_k$ et

$$\forall n \in \{0, \dots, d_k - 1\}, \quad |a_n| < |a_{d_k}| \cdot p^{r(d_k - n)}$$

Pour $n = d_{k-1}$, on obtient

$$|a_{d_{k-1}}| < |a_{d_k}| \cdot p^{r(d_k - d_{k-1})}$$

La condition $d_{k-1} < d_k$ implique

$$|a_{d_{k-1}}| > |a_{d_k}| \cdot p^{(k-1)(d_k - d_{k-1})}$$

Comme la suite $(\overline{N}_k(P_k))_k$ n'est pas bornée, on peut choisir $k > r+1$. Sous cette hypothèse, les deux inégalités précédentes sont incompatibles! On en déduit par l'absurde que la suite $(d_k)_k$ est stationnaire. \square

Ce lemme permet d'obtenir l'équivalence suivante : les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}$ -modules à connexion sont exactement les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}$ -modules coadmissibles qui sont des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}$ -modules libres de rang fini.

Proposition 6.12. *Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}$ -module coadmissible. Alors \mathcal{M} est un module à connexion si et seulement si \mathcal{M} est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}$ -module libre de rang fini.*

Démonstration. On peut se ramener au cas où \mathfrak{X} est affine muni d'une coordonnée locale. On suppose tout d'abord que \mathcal{M} est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}$ -module libre non nul de rang $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe des sections e_1, \dots, e_n de $\mathcal{M}(\mathfrak{X})$ telles que $\mathcal{M} \simeq \mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}} \cdot e_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}} \cdot e_n$ en tant que $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}$ -module. Les sections e_1, \dots, e_n engendrent aussi \mathcal{M} en tant que $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}$ -module : $\mathcal{M} \simeq \mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty} \cdot e_1 + \dots + \mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty} \cdot e_n$. On en déduit que $\text{Car}(\mathcal{M}) \subset \bigcup_{i=1}^n \text{Car}(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty} \cdot e_i)$. Il suffit de montrer que $\text{Car}(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty} \cdot e_i) \subset \mathfrak{X}$ pour chaque indice $i \in \{1, \dots, n\}$. On peut donc se ramener au cas $n = 1$: \mathcal{M} est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}$ -module libre de rang un engendré par une section e . Puisque $\mathcal{M} \simeq \mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}} \cdot e$ en tant que $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}$ -module, la famille $\{\partial^n \cdot e\}_{n \in \mathbb{N}}$ est liée sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}, \mathbb{Q}}$. Il existe donc un opérateur différentiel unitaire $P \in \mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}(\mathfrak{X})$ tel que $P \cdot e = 0$. En particulier P appartient à l'idéal annulateur de e et \mathcal{M} est sous- $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}$ -module de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}, \infty}/P$.

On en déduit que $\text{Car}(\mathcal{M}) \subset \text{Car}(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P)$. Comme P est un opérateur fini de coefficient dominant unitaire, on a $\text{Car}(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}/P) = \mathfrak{X}$. Donc $\text{Car}(\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty} \cdot e) \subset \mathfrak{X}$.

Réciproquement on suppose que $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ est un module à connexion non nul. D'après le lemme 6.11, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un niveau de congruence $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que \mathcal{M}_k soit un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module libre de rang n pour tout niveau de congruence $k \geq k_0$. On ne considère maintenant que les indices k supérieurs ou égaux à k_0 . On note $\lambda_k : \mathcal{M}_{k+1} \rightarrow \mathcal{M}_k$ le morphisme de transition. Il est $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -linéaire donc $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -linéaire. Par hypothèse, l'application $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_{k+1} \rightarrow \mathcal{M}_k, P \otimes e \mapsto P \cdot \lambda_k(e)$ est un isomorphisme $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -linéaire. Cela implique que l'image $\lambda_k(\mathcal{M}_{k+1})$ de λ_k est dense dans \mathcal{M}_k pour la topologie ω -adique. Comme \mathcal{M}_k est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module libre de rang fini, $\lambda_k(\mathcal{M}_{k+1})$ est un sous- $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module fermé de \mathcal{M}_k . Puisqu'il est dense, $\lambda(\mathcal{M}_k) \simeq \mathcal{M}_k$ en tant que $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -modules. Autrement dit l'application $\lambda_k : \mathcal{M}_{k+1} \rightarrow \mathcal{M}_k$ est surjective. Comme \mathcal{M}_k et \mathcal{M}_{k+1} sont des $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -modules libre de même rang fini n , λ_k est un isomorphisme de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -modules. On en déduit que $\mathcal{M} \simeq \varprojlim_{k \geq k_0} \mathcal{M}_k \simeq \mathcal{M}_{k_0}$ en tant que $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module. Ainsi \mathcal{M} est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module libre de rang fini n . \square

La proposition suivante fait le lien entre les modules à connexion et les modules holonomes.

Proposition 6.13. *Soit \mathcal{M} un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible. Alors \mathcal{M} est holonome si et seulement si il existe un ouvert non vide U de \mathfrak{X} tel que $\mathcal{M}|_U$ soit un module à connexion.*

Démonstration. On suppose dans un premier temps que \mathcal{M} est holonome. La variété caractéristique de \mathcal{M} a un nombre fini de composantes irréductibles verticales. On note U l'ouvert de \mathfrak{X} obtenu en ôtant à \mathfrak{X} les abscisses des composantes verticales de $\text{Car}(\mathcal{M})$. Par construction de U , on a $\text{Car}(\mathcal{M}|_U) \subset U$. Autrement dit $\mathcal{M}|_U$ est un module à connexion par définition.

Réciproquement soit U un ouvert non vide de \mathfrak{X} tel que $\mathcal{M}|_U$ soit un module à connexion. Par définition, $\text{Car}(\mathcal{M}|_U) \subset U$. Si \mathcal{M} n'est pas holonome, alors $\text{Car}(\mathcal{M}) = T^*\mathfrak{X}$ d'après la proposition 6.6. On aurait alors $\text{Car}(\mathcal{M}|_U) = T^*U$. Cela contredit l'hypothèse $\text{Car}(\mathcal{M}|_U) \subset U$. On en déduit que \mathcal{M} est holonome. \square

Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module à connexion. On sait par la proposition 6.12 que \mathcal{M} est un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module libre de rang fini $r \in \mathbb{N}$. Pour k assez grand, \mathcal{M}_k est aussi un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ -module libre de rang r . D'après le lemme 3.23 et la proposition 3.10 de [5], les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents \mathcal{M}_k n'ont qu'une multiplicité non nulle égale à r . Le résultat suivant correspond à la proposition 4.11 de [5] écrite pour le module à connexion \mathcal{M} .

Proposition 6.14. *Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module à connexion. Alors \mathcal{M} est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module de longueur finie inférieure ou égale au rang $\text{rg}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{M})$.*

6.4 Modules faiblement holonomes

On définit dans cette partie les $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -modules coadmissibles faiblement holonomes au sens de Konstantin Ardakov, Andreas Bode, et Simon Wadsley dans l'article [1]. Un module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ sur la courbe formelle \mathfrak{X} est appelé faiblement holonome si

$$\text{Ext}_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}}^0(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}) := \varprojlim_k \text{Ext}_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^0(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) = 0$$

De manière équivalente, \mathcal{M} est faiblement holonome si et seulement si les modules \mathcal{M}_k sont tous holonomes à partir d'un certain niveau de congruence k . A tout module faiblement holonome \mathcal{M} , on peut associer un module faiblement holonome dual \mathcal{M}^d vérifiant $(\mathcal{M}^d)^d \simeq \mathcal{M}$. Si maintenant \mathcal{M} est holonome, alors les modules \mathcal{M}_k sont holonomes pour k suffisamment grand. En particulier, \mathcal{M} est faiblement holonome. On montre à la fin de cette partie que si \mathcal{M} est holonome, alors son dual \mathcal{M}^d reste holonome.

Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible. Puisque \mathcal{M}_k est un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent à gauche, on peut munir le groupe $\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$ d'une structure de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent à droite. En effet, la question étant locale, on peut supposer que \mathfrak{X} est un ouvert affine suffisamment petit pour que le module \mathcal{M}_k soit de présentation finie : $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^m \rightarrow (\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^n \rightarrow \mathcal{M}_k \rightarrow 0$. Alors $\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$ est un sous-module de type fini du $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent à droite $\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}((\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^n, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \simeq (\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^n$. Il en découle que le module $\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$ est cohérent.

Lemme 6.15. *Pour tout niveau de congruence $k \in \mathbb{N}$, on dispose d'un isomorphisme de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules à droites :*

$$\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \simeq \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$$

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})$. On lui associe une application $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\mathfrak{X})$ -linéaire

$$\tilde{\varphi} : \mathcal{M}_k \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \mathcal{M}_{k+1} \longrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}, \quad P \otimes m \mapsto P \cdot \varphi(m)$$

On en déduit une application entre les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\mathfrak{X})$ -modules à droite

$$\begin{aligned} \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\mathfrak{X}) &\longrightarrow \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \\ \varphi \otimes Q &\mapsto \tilde{\varphi} \cdot Q \end{aligned}$$

On dispose d'une telle application sur chaque ouvert U de \mathfrak{X} . On obtient ainsi un morphisme entre $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents à droite

$$\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$$

On montre maintenant que ce morphisme est un isomorphisme. Il suffit de le vérifier localement. On suppose que \mathfrak{X} est affine tel que \mathcal{M}_{k+1} soit de présentation finie :

$$(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})^m \rightarrow (\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})^n \rightarrow \mathcal{M}_{k+1} \rightarrow 0$$

En tensorisant par $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$, on obtient une présentation $(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^m \rightarrow (\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^n \rightarrow \mathcal{M}_k \rightarrow 0$ de \mathcal{M}_k . En appliquant les foncteurs $\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\bullet, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})$ et $\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\bullet, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$, on obtient le diagramme commutatif suivant entre $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules à droites.

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}((\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})^n, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}((\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^n, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}((\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})^m, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}((\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^m, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \end{array}$$

On déduit du fait que les deux dernières flèches horizontales soient des isomorphismes que la première flèche en est aussi un. \square

On pose $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}) = \varprojlim_k \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$. C'est un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible à droite. Plus généralement, le groupe $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$ admet une structure de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module à droite. On démontre maintenant que pour tout entier naturel d , les modules $\left\{ \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \right\}_{k \in \mathbb{N}}$ forment un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible à droite.

Pour tout entier $d \geq 2$ et pour tout niveau de congruence k , il a été vu dans la preuve de la proposition 3.28 de [5] que $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) = 0$. Ainsi pour $d \geq 2$, on peut définir

le groupe $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},\infty}}^d(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty})$ simplement par

$$\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},\infty}}^d(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}) = \varprojlim_k \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) = 0$$

pour les morphismes de transition triviaux. Le cas $d = 0$ correspond au lemme 6.15. Il reste donc à traiter le cas $d = 1$.

Proposition 6.16. *Pour tout niveau de congruence $k \in \mathbb{N}$, le morphisme de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules à droites*

$$\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$$

induit par le morphisme $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -linéaire

$$\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \rightarrow \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$$

du lemme 6.15 est un isomorphisme. De plus, le $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module à droite $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$ est cohérent.

Démonstration. On vérifie localement que le morphisme

$$\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$$

est un isomorphisme. Soit $x \in \mathfrak{X}$ et U un ouvert affine de \mathfrak{X} contenant x sur lequel \mathcal{M}_{k+1} est de présentation finie. On va montrer que le $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module \mathcal{M}_{k+1} admet localement, sur un certain voisinage ouvert V de x , une résolution projective de la forme

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow L^2 \longrightarrow L^1 \longrightarrow L^0 \longrightarrow (\mathcal{M}_{k+1})|_V \longrightarrow 0$$

avec P un $\widehat{\mathcal{D}}_{V,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module projectif et L^2, L^1, L^0 des $\widehat{\mathcal{D}}_{V,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules libres de rang fini. On sait d'après la proposition 3.25 de [5] que $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ est de longueur cohomologique inférieure ou égale à trois. Ainsi $\text{Ext}_{(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})_x}^d((\mathcal{M}_{k+1})_x, \mathcal{N}_x) = 0$ pour tout entier $d > 3$ et pour tout $\widehat{\mathcal{D}}_{W,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module \mathcal{N} défini sur un certain voisinage ouvert W de x . Comme \mathcal{M}_{k+1} est de présentation finie sur l'ouvert U , il existe un $\widehat{\mathcal{D}}_{U,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module libre de rang fini L^0 et un $\widehat{\mathcal{D}}_{U,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent K tels que l'on ait une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow L^0 \longrightarrow (\mathcal{M}_{k+1})|_U \longrightarrow 0$$

Comme L^0 est un module libre de rang fini, on a $\text{Ext}_{(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})_x}^d(L_x^0, \mathcal{N}_x) = 0$ pour tout entier $d \geq 1$ et pour tout $\widehat{\mathcal{D}}_{W,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module \mathcal{N} défini sur un voisinage ouvert W de x . En prenant la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte précédente, on obtient

$$\forall d \in \mathbb{N}, \forall \mathcal{N}, \quad \text{Ext}_{(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})_x}^d(K_x, \mathcal{N}_x) \simeq \text{Ext}_{(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})_x}^{d+1}((\mathcal{M}_{k+1})_x, \mathcal{N}_x)$$

En particulier, $\text{Ext}_{(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})_x}^d(K_x, \mathcal{N}_x) = 0$ pour tout $d > 2$ et pour tout $\widehat{\mathcal{D}}_{W,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module \mathcal{N} défini sur un voisinage ouvert W de x . Par une récurrence finie, et quitte à réduire l'ouvert U contenant x , on obtient une résolution locale de \mathcal{M}_{k+1} de la forme

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow L^2 \longrightarrow L^1 \longrightarrow L^0 \longrightarrow (\mathcal{M}_{k+1})|_U \longrightarrow 0$$

avec L^2, L^1, L^0 des $\widehat{\mathcal{D}}_{U,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules libres de rang finis et $\text{Ext}_{(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})_x}^d(P_x, (\mathcal{N})_x) = 0$ pour tout entier $d > 0$ et pour tout $\widehat{\mathcal{D}}_{W,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module \mathcal{N} défini sur un voisinage ouvert W de x . Autrement dit, P est un module projectif au voisinage de x .

On écrit $L^i \simeq (\widehat{\mathcal{D}}_{U,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_i}$ avec $n_i \in \mathbb{N}$. Comme $\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ est plat sur $\widehat{\mathcal{D}}_{U,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}$, on obtient la suite exacte suivante en tensorisant par $\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)}$:

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{U,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} P \longrightarrow (\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_2} \longrightarrow (\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_1} \longrightarrow (\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_0} \longrightarrow (\mathcal{M}_k)|_U \longrightarrow 0$$

Soit $0 \longrightarrow P^3 \longrightarrow P^2 \longrightarrow P^1 \longrightarrow P^0 \longrightarrow 0$ une résolution projective finie du $\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent $\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{U,k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} P$ sur ouvert contenant x que l'on note encore U . On en déduit la résolution projective suivante du module $(\mathcal{M}_k)|_U$:

$$\begin{array}{ccccccc} (\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_2} & \longrightarrow & (\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_1} & \longrightarrow & (\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_0} & \longrightarrow & (\mathcal{M}_k)|_U \longrightarrow 0 \\ \uparrow & & & & & & \\ P^0 & \longleftarrow & P^1 & \longleftarrow & P^2 & \longleftarrow & P^3 \longleftarrow 0 \end{array}$$

On suppose maintenant que $\mathfrak{X} = U$ pour simplifier l'écriture. On obtient finalement le

diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc}
0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}((\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_0}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}((\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_0}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \\
\downarrow \varphi & & \downarrow \\
\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}((\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}((\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \\
\downarrow \psi & & \downarrow \\
\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}((\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_2}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} & \xrightarrow{\simeq} & \mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}((\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^{n_2}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

Le groupe $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)})$ est donné par les morphisme φ et ψ . Le groupe $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$ est quant à lui donné par les morphismes $\varphi \otimes \text{id}_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}$ et $\psi \otimes \text{id}_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}$. On en déduit que

$$\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \simeq \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$$

Enfin les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules à droite $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$ sont cohérents car ce sont localement des quotients du module $\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}((\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^n, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \simeq (\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})^n$. \square

Pour tout $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ et pour tout entier naturel d , on note $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}}^d(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty})$ le $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible à droite limite projective des modules $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$:

$$\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}}^d(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}) := \varprojlim_k \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$$

Pour tout entier $d \geq 2$, on rappelle que $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}}^d(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}) = 0$.

Définition 6.17. Un $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ -module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ est appelé faiblement holonome si $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}}^0(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}) = 0$.

De manière équivalente, un $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ -module coadmissible \mathcal{M} est faiblement holonome si et seulement si $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}}^d(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}) = 0$ pour tout entier $d \neq 1$. Dans l'article [1], Konstantin Ardakov, Andreas Bode, et Simon Wadsley définissent les modules faiblement holonomes de la manière suivante. Soit X_K un espace analytique rigide lisse de dimension n . Un $\widehat{\mathcal{D}}$ -module coadmissible \mathcal{M} sur X_K est faiblement holonome si les groupes de cohomologie $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}}^d(\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{D}})$ sont nuls pour tout entier $d \neq n$. La définition 6.17 correspond aux modules faiblement holonomes en considérant une courbe formelle à la place d'un espace analytique rigide.

Proposition 6.18. Un $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ -module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ est faiblement holonome si et seulement si il existe un niveau de congruence k_0 à partir duquel les modules \mathcal{M}_k sont tous holonomes.

Démonstration. Si les modules \mathcal{M}_k sont holonomes, alors $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^0(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) = 0$ d'après la proposition 3.28 [5]. Il en découle que $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}}^0(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}) = \varprojlim_k \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^0(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) = 0$. Réciproquement, on suppose que $\mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}}^0(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}) = 0$. Comme ce module est coadmissible, on a $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^0(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) = \mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}}^0(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}) \otimes_{\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)} = 0$. On en déduit que \mathcal{M}_k est holonome toujours la proposition 3.28 de [5]. \square

On en déduit immédiatement que la catégorie des modules faiblement holonomes est abélienne. Elle est de plus non triviale. Elle contient par exemple les $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ -modules cohérents de la forme $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}/\mathcal{J}$ avec \mathcal{J} un idéal cohérent non nul de $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$.

Corollaire 6.19. La catégorie des modules faiblement holonomes est abélienne.

Démonstration. Soit $0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$ une suite exacte de $\mathcal{D}_{\mathfrak{x},\infty}$ -modules coadmissibles. On écrit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$, $\mathcal{N} = \varprojlim_k \mathcal{N}_k$ et $\mathcal{L} = \varprojlim_k \mathcal{L}_k$. Alors pour tout niveau de congruence k , on a une suite exacte de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}_k \longrightarrow \mathcal{N}_k \longrightarrow \mathcal{L}_k \longrightarrow 0$$

D'après la proposition 3.16 de [5], \mathcal{N}_k est holonome si et seulement si \mathcal{M}_k et \mathcal{L}_k le sont. On en déduit que les modules \mathcal{N}_k sont holonomes à partir d'un certain niveau de congruence k si et seulement les modules \mathcal{M}_k et \mathcal{L}_k le sont aussi. La proposition 6.18 implique alors que \mathcal{N} est faiblement holonome si et seulement \mathcal{M} et \mathcal{L} sont faiblement holonomes. \square

Remarque 6.20. Lorsque $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ est faiblement holonome, on dispose localement d'une résolution libre finie des modules \mathcal{M}_k donnée par la proposition 2.20 [5]. En effet, le module \mathcal{M}_k est holonome pour k suffisamment grand. Il existe donc un idéal cohérent non

nul \mathcal{J}_k de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ tel que $\mathcal{M}_k \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/\mathcal{J}_k$. Soit $x \in \mathfrak{X}$. Une base de division relativement au point x fournit une présentation explicite de \mathcal{J}_k sur un voisinage U de x :

$$0 \longrightarrow (\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)})^{r-1} \xrightarrow{\cdot R} (\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)})^r \longrightarrow \mathcal{J}_{k|U} \longrightarrow 0$$

La matrice R s'exprime entièrement en fonction de la base de division. Combinée avec la suite exacte courte $0 \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \rightarrow \mathcal{M}_k \rightarrow 0$, on obtient la présentation suivante du module \mathcal{M}_k sur l'ouvert U :

$$0 \longrightarrow (\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)})^{r-1} \xrightarrow{\cdot R} (\widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)})^r \longrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{U,k,\mathbb{Q}}^{(0)} \longrightarrow \mathcal{M}_{k|U} \longrightarrow 0$$

On retrouve bien que $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) = 0$ pour tout entier $d \geq 2$. Par ailleurs, cette résolution permet de calculer explicitement le groupe $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$ au voisinage de x en fonction d'une base de division relativement au point x .

Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible et d un entier naturel. Les $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents à gauche $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{-1}$ forment un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible à gauche. En effet, cela résulte du lemme 2.2 de l'article [10] de Anne Virrion :

$$\begin{aligned} & \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \otimes \left(\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{-1} \right) \\ & \simeq \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \left(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{-1} \right) \\ & \simeq \left(\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_{k+1}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}}^{(0)}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \right) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{-1} \\ & \simeq \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{-1} \end{aligned}$$

On note $\mathcal{M}_k^d = \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{-1}$ le dual du $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module cohérent \mathcal{M}_k . Il a été vu dans la partie 3.5 [5] que si \mathcal{M}_k est holonome, alors son dual \mathcal{M}_k^d est aussi holonome. Par ailleurs, on dispose d'un isomorphisme naturel de bidualité $(\mathcal{M}_k^d)^d \simeq \mathcal{M}_k$.

Définition 6.21. *Le dual d'un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ est le module coadmissible*

$$\mathcal{M}^d = \varprojlim_k \left(\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{-1} \right)$$

On démontre maintenant que si \mathcal{M} est faiblement holonome, alors son dual \mathcal{M}^d l'est aussi.

Proposition 6.22. *Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible faiblement holonome. Alors son dual \mathcal{M}^d est aussi un module faiblement holonome. De plus, on dispose d'un isomorphisme de bidualité : $(\mathcal{M}^d)^d \simeq \mathcal{M}$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible faiblement holonome. Par définition, il existe un niveau de congruence k_0 tel que \mathcal{M}_k soit un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module holonome pour tout entier $k \geq k_0$. Alors $\mathcal{M}_k^d = \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^d(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{-1}$ est un module holonome d'après la proposition 3.28 de [5]. La proposition 6.18 implique ensuite que le $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible $\mathcal{M}^d = \varprojlim_k \mathcal{M}_k^d$ est faiblement holonome. Enfin les isomorphismes de bidualité $(\mathcal{M}_k^d)^d \simeq \mathcal{M}_k$ pour chaque niveau de congruence $k \geq k_0$ induit un isomorphisme $(\mathcal{M}^d)^d \simeq \mathcal{M}$ en prenant la limite projective. \square

Un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module à connexion est un module holonome. Son dual est donc un module holonome. En fait son dual est aussi un module à connexion de même rang, comme on peut le voir dans le lemme suivant.

Lemme 6.23. *Soit \mathcal{M}_k un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module à connexion de rang n . Alors son dual \mathcal{M}_k^d est aussi un module à connexion de rang n .*

Démonstration. D'après le lemme 3.23 [5], on peut se ramener au cas où \mathfrak{X} est affine tel que $\mathcal{M}_k \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$ avec P un opérateur différentiel fini unitaire. Il suffit de vérifier que \mathcal{M}_k^d est aussi de la forme $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P^t$ avec P^t fini unitaire. On considère la suite exacte courte de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules cohérents

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \xrightarrow{P \times} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \longrightarrow \mathcal{M}_k \longrightarrow 0$$

Puisque $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) = 0$, on obtient la suite exacte courte suivante de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules à droites en prenant le foncteur $\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}(\bullet, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{H}om(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) & \longrightarrow & \mathcal{H}om(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) & \longrightarrow & \mathcal{H}om(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Comme les algèbres $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(U)$ sont intègres et $\mathcal{M}_k \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P$ avec P non nul, on a $\mathcal{H}om(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) = 0$. Par ailleurs, $\mathcal{H}om(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ en tant que $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module à droite. Le morphisme $\mathcal{H}om(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \rightarrow \mathcal{H}om(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)})$ ci dessus

correspond via cette correspondance au morphisme $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \xrightarrow{\times P} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ multiplication à gauche par P . La suite exacte précédente s'écrit donc

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \xrightarrow{P \times} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)} \longrightarrow \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \longrightarrow 0$$

On en déduit que $\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P \cdot \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ en tant que $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -module à droite. On écrit $P = \sum_{\ell=0}^n a_\ell \cdot (\omega^k \partial)^\ell \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}(\mathfrak{X})$. On définit son adjoint formel P^t par $P^t = \sum_{\ell=0}^n (-1)^\ell \cdot (\omega^k \partial) \cdot a_\ell$. On vérifie alors que

$$\mathcal{M}_k^d = \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{-1} \simeq \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}/P^t$$

Comme P est unitaire d'ordre n , P^t est aussi unitaire d'ordre n . Ainsi \mathcal{M}_k^d est un module à connexion de rang n . \square

Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module coadmissible. Si \mathcal{M} est holonome, alors les modules \mathcal{M}_k sont holonomes pour k suffisamment grand. En particulier, \mathcal{M} est faiblement holonome d'après la proposition 6.18. Son dual \mathcal{M}^d est un module faiblement holonome. On montre maintenant que si \mathcal{M} est holonome, alors son dual \mathcal{M}^d reste holonome.

Proposition 6.24. *Soit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$ un $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ -module holonome. Alors \mathcal{M} est holonome si et seulement si \mathcal{M} est faiblement holonome et si son dual \mathcal{M}^d est holonome.*

Démonstration. Il suffit de montrer que si \mathcal{M} est holonome, alors son dual \mathcal{M}^d l'est aussi. L'équivalence énoncée provient ensuite de l'isomorphisme de bidualité. On suppose donc que \mathcal{M} est un module holonome. D'après la proposition 6.13, il existe un ouvert non vide U de \mathfrak{X} tel que $\mathcal{M}|_U$ soit un module à connexion. On peut donc supposer que \mathfrak{X} est affine, que \mathcal{M} est un module à connexion de rang n . Toujours d'après la proposition 6.13, on peut se ramener à montrer que \mathcal{M}^d est aussi un module à connexion. On écrit $\mathcal{M} = \varprojlim_k \mathcal{M}_k$. Comme \mathcal{M} est un module à connexion, les modules \mathcal{M}_k sont des modules à connexion de rang n pour k suffisamment grand. On sait alors d'après le lemme 6.23 que

$$\mathcal{M}_k^d = \mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{-1}$$

est un module à connexion de rang n . Enfin la preuve de la proposition 6.12 implique que

$$\mathcal{M}^d = \varprojlim_k \left(\mathcal{E}xt_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}}^1(\mathcal{M}_k, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}^{(0)}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{-1} \right)$$

est un module à connexion de rang n . \square

Références

- [1] Konstantin Ardakov, Andreas Bode, and Simon Wadsley. D-modules on rigid analytic spaces III : Weak holonomicity and operations, 2019.
- [2] Konstantin Ardakov and Simon Wadsley. D-modules on rigid analytic spaces I, 2015.
- [3] P Berthelot. \mathcal{D}^\dagger -modules cohérents I. opérateurs différentiels de niveau fini. In *Annales Scient. ENS*, volume 29, pages 185–272, 1996.
- [4] Laurent Garnier. Théorèmes de division sur $\widehat{D}^{(0)}$ et applications. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 123(4) :547–589, 1995.
- [5] Raoul Hallopeau. $\widehat{D}_{\mathfrak{x},k,\mathbb{Q}}^{(0)}$ -modules holonomes sur une courbe, 2022.
- [6] Christine Huyghe, Tobias Schmidt, and Matthias Strauch. Arithmetic structures for differential operators on formal schemes. *Nagoya Mathematical Journal*, 243 :157–204, 2021.
- [7] Christine Huyghe, Tobias Schmidt, and Matthias Strauch. Arithmetic differential operators with congruence level structures : First results and examples. *Journal of Number Theory*, 237 :332–352, 2022.
- [8] Peter Schneider and Jeremy Teitelbaum. Algebras of p-adic distributions and admissible representations. *arXiv preprint math/0206056*, 2002.
- [9] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. <https://stacks.math.columbia.edu>, 2018.
- [10] Anne Virrion. Dualité locale et holonomie pour les \mathcal{D} -modules arithmétiques. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 128(1) :1–68, 2000.
- [11] Gergely Zábrádi. Generalized robba rings and duality. *arXiv preprint arXiv :1006.4690*, 2010.