



**HAL**  
open science

## Bruits gaussiens stationnaires

François Bondu

► **To cite this version:**

François Bondu. Bruits gaussiens stationnaires. Doctorat. Bruits gaussiens stationnaires, Rennes  
Université Rennes 1, France. 2022, pp.28. hal-03959937

**HAL Id: hal-03959937**

**<https://hal.science/hal-03959937v1>**

Submitted on 27 Jan 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

# Bruits gaussiens stationnaires

François Bondu

27 janvier 2023

Institut FOTON, UMR6082, CNRS / Univ Rennes, Rennes, France

## Introduction : signaux bruités

La pratique nous montre que les bruits et signaux sont difficiles à manipuler et interpréter simultanément. Une densité spectrale de bruit n'est pas commensurable avec la transformée de Fourier d'un signal déterministe ; un signal peut avoir une durée finie, tandis qu'un bruit a une énergie infinie. La transformée de Fourier d'un signal déterministe est souvent continue, tandis que celle d'un bruit ne l'est ni pour son amplitude ni pour sa phase. Ce document, sans apporter d'éléments nouveaux, vise à diffuser des modèles utiles à l'intention de des étudiants expérimentateurs en instrumentation plutôt que des théoriciens en statistiques. Nous rappelons la définition de Cramér par intégrale de Stieltjes-Fourier d'un bruit et l'estimateur de densité spectrale de Thomson trop méconnu et pas assez répandu en instrumentation. Nous donnons les définitions des rapports signaux à bruits. Nous verrons ainsi que le rapport signal à bruit n'est pas une grandeur facile à apprécier sur un signal temporel : la visualisation de ce dernier peut apporter de la confusion.

Nous n'abordons pas dans ce document les bruits spécifiques de numérisation. Nous nous restreignons aux systèmes linéaires indépendants du temps.

## 1 Définition d'un bruit gaussien stationnaire

### 1.1 Grandeurs continues

Soit  $n(t)$  un bruit réel de moyenne nulle d'une grandeur continue. Après les travaux, initialement sur le mouvement brownien, de P. Lévy, A. Kolmogorov et N. Wiener, H. Cramér a décrit un bruit continu par une variable aléatoire comme une superposition linéaire de signaux sinusoïdaux, définie par une intégrale de Stieltjes-Fourier (eq. (11) dans [1]) :

$$n(t) = \int_0^\infty dn_{rms}(f) \sqrt{2} \cos(2\pi ft + \phi_n(f)) \quad (1)$$

avec des fréquences positives seulement ; cela peut aussi s'écrire :

$$\boxed{n(t) = \int_{-\infty}^\infty dn_c(f) \exp(i2\pi ft)} \quad (2)$$

avec des fréquences négatives et positives où l'amplitude complexe est définie par :

$$dn_c(f) = \frac{\sqrt{2}}{2} dn_{rms}(f) \exp(i\phi_n(f)) \quad (3)$$

Notons que l'intégrale de Stieltjes-Fourier n'est pas une transformée de Fourier. Techniquement, l'intégrale de Stieltjes  $\int f(x) dg(x)$  existe si  $dg(x)$  est à incréments finis. Les variables  $dn_c(f)$  vérifient :

— puisque  $n(t)$  est réel,

$$dn_c^*(f) = dn_c(-f) \quad (4)$$

où  $x^*$  désigne le complexe conjugué de  $x$  ;

— les composantes spectrales complexes sont des variables indépendantes :  $\langle dn_c(f) dn_c(f') \rangle = 0$  si  $f \neq f'$  avec  $f, f' > 0$  ;

— les composantes spectrales se décomposent en deux quadratures réelles  $dn_{Ic}(f)$  et  $dn_{Qc}(f)$  avec  $dn_c(f) = dn_{Ic}(f) + i dn_{Qc}(f)$  ; celles-ci sont des variables aléatoires réelles, indépendantes pour  $f > 0$ , gaussiennes centrées de moyenne nulle, de variances égales ; la quantité  $|dn_{rms}(f)|$  suit donc une loi de Rayleigh. Le signal est réel donc  $dn_{Qc}(0) = 0$ .

— La formule de Cramér définit la variance de la composante spectrale avec :

$$\boxed{S_n(f) df = \langle |dn_{rms}(f)|^2 \rangle = 2 \langle |dn_c(f)|^2 \rangle} \quad (5)$$

où  $\langle x \rangle$  est la moyenne d'ensemble de la variable  $x$ . La variance  $S_n(f)$  s'appelle par définition densité spectrale de puissance (DSP) du bruit  $n(t)$ .

— On a aussi pour chacune des quadratures

$$\langle |dn_{Ic}(f)|^2 \rangle = \langle |dn_{Qc}(f)|^2 \rangle = \frac{1}{4} S_n(f) df \quad (6)$$

Remarques :

— On indique en indice de  $S$  la grandeur dont on mesure la densité spectrale. Ainsi la densité spectrale de puissance d'un bruit de phase  $\varphi(t)$  sera notée  $S_\varphi(f)$ .

—  $dn_c(f)$  est une variable aléatoire, fonction discontinue en tout point, tant sur le module que sur l'argument. La grandeur statistique  $S_n(f)$  est une fonction réelle continue.

—  $n(t)$  n'a pas, dans le cas général, de distribution gaussienne, sauf si  $n(t)$  est un bruit blanc ; dans un bruit « gaussien », ce sont les quadratures  $dn_{Ic}(f)$  et  $dn_{Qc}(f)$  qui sont des variables gaussiennes.

— Si la grandeur physique  $n(t)$  a pour dimension  $u$  :  $[n(t)] = u$ , alors  $[S_n(f)] = u^2/\text{Hz}$ . Quelle que soit la grandeur de  $u$ , on ne procède jamais à la simplification d'unités : la marque "1/Hz" est une étiquette qui rappelle que l'on a affaire à une densité spectrale de bruit. Par exemple, pour un bruit de fréquence  $\nu(t)$ , la densité spectrale de bruit a pour unité  $[S_\nu] = \text{Hz}^2/\text{Hz}$ .

— On appelle « densité spectrale linéaire » l'écart type :  $\tilde{n}(f) = \sqrt{S_n(f)}$ . Si  $[n(t)] = u$ , alors  $[\tilde{n}(f)] = u/\sqrt{\text{Hz}}$ . Alors que la densité spectrale de puissance est fréquemment utilisée pour les bruits de phase d'oscillateurs radiofréquences et hyperfréquences, la densité spectrale linéaire est plus usuelle en instrumentation.

- L'équation 5 comporte un facteur 2 avec celle décrite dans la littérature en théorie des probabilités, écrite  $S_{th,n}(f) = \langle |dn_c(f)|^2 \rangle$ . En effet, en théorie des probabilités, on considère une densité définie pour les fréquences positives et négatives ; on dit que la densité spectrale est bilatérale. En sciences expérimentales, on ne considère que les fréquences positives,  $S_n(f) = 2S_{th,n}(f)$  : on dit que la densité spectrale est mono-latérale.
- Le terme « puissance » dans « densité spectrale de puissance » ne désigne pas, en théorie des probabilités, la puissance physique en watts, mais une variance. Si  $n(t)$  est une tension continue mesurée aux bornes d'une résistance, la puissance physique dissipée à la fréquence  $f$  dans la bande de fréquence de largeur  $df$  sera :

$$P_f = \frac{S_n(f) df}{R} \quad (7)$$

et  $\tilde{n}(f)\sqrt{df}$  représente la valeur quadratique moyenne de la variation sinusoïdale à la fréquence  $f$ .

Pour le bruit de phase ou d'amplitude des oscillateurs, on considère parfois séparément les bruits aux fréquences  $+f$  et  $-f$  (en pratique à  $\nu_0 + f$  et  $\nu_0 - f$ , où  $\nu_0$  est la fréquence de l'oscillateur). On note dans ce cas  $L(f) = S(f)/2$  [2]. Pour clarifier, dans ce contexte, on définit  $S_n(f)$  comme densité spectrale mono-latérale, tandis que  $L(f)$  est définie comme densité spectrale bilatérale.  $L(f)$  ne mesure qu'une seule des bandes latérales (SSB, « single side band » en anglais). Les bruits de phase et bruits relatifs d'amplitude sont parfois pris en échelle log. L'unité d'une instabilité de phase  $S_{\varphi,dB}(f) = 10 \log_{10}(S_{\varphi})$  est « dB rad<sup>2</sup>/Hz » en échelle log, tandis que celle de  $L_{dB}(f) = S_{\varphi,dB} - 3$  dB est « dBc/Hz » dans cette même échelle, ce qui signifie qu'il s'agit de la puissance d'une des bandes latérales relativement à la porteuse.

## 1.2 Grandeurs numériques ou échantillonnées

L'échantillon  $k$  d'un bruit d'une série numérique (ou d'un signal échantillonné avec la période  $T_s$ ) s'écrit [3] :

$$n[k] = \int_{-F_N}^{F_N} dZ(f) \exp(i2\pi f k T_s) \quad (8)$$

où la fréquence de Nyquist  $F_N$  est définie par  $F_N = 1/(2T_s)$ . La formule de Cramér correspondant à un signal échantillonné s'écrit donc :

$$S_n(f) df = 2 \langle |dZ(f)|^2 \rangle \quad (9)$$

où  $S_n(f)$  correspond à la densité spectrale mono-latérale.

## 1.3 Bruit blanc et colorés

On appelle bruit blanc un bruit  $S_n(f)$  tel que  $S_n(f) = S_0$  est indépendant de  $f$ .

Un bruit rose est tel que  $S_n(f) = \alpha/f$ , avec  $\alpha$  une constante réelle positive.

Un bruit brownien est un bruit blanc intégré ; sa densité spectrale est alors  $S_n(f) = \alpha/f^2$ .

## 2 Estimateurs de densités spectrale de bruit

La définition de la densité spectrale de bruit fait intervenir la moyenne d'ensemble  $\langle x \rangle$ . Cette notion de moyenne d'ensemble est très utile pour définir les concepts mathématiques. Au laboratoire, on ne dispose toutefois que d'un seul canal mesure ou, au mieux, d'un tout petit nombre de canaux de mesures dans des conditions absolument identiques, et le bruit n'est bien sûr mesuré que sur une période finie de temps. On ne peut donc pas « mesurer » la densité spectrale de bruit : il faut construire un estimateur à partir des données disponibles, généralement échantillonnées. Les questions de biais et de variance d'estimateur vont donc se poser. La publication [4] fournit une discussion détaillée des estimateurs numériques. Les estimateurs utilisés en sciences expérimentales sont toujours des fonctions définies pour les fréquences positives seules (densités spectrales monolatérales).

### 2.1 Largeur de bruit d'un filtre

La notion largeur de bruit équivalente est indispensable à la fois pour calibrer correctement les données d'un analyseur de spectre électrique (cf. section 2.8) et pour comprendre la résolution en fréquence d'un analyseur de spectre ou d'un estimateur numérique de densité spectrale de bruit (cf. 2.4.3 et 2.6).

Soit un filtre passe-bas  $H(f)$ . Si on injecte un bruit blanc à l'entrée de ce filtre, on aura en sortie un bruit de puissance finie  $\langle s^2_{out} \rangle$ . On définit la largeur de bruit équivalente d'un filtre ENB<sub>LP</sub> (« Equivalent Noise Bandwidth » en anglais) par un filtre idéal de transmission  $|H_{max}|$  constante dans la bande de transmission de largeur ENB<sub>LP</sub>, nulle en dehors, qui donne la même puissance de bruit  $\langle s^2_{out} \rangle$  :

$$\text{ENB}_{\text{LP}} = \int_0^\infty df \frac{|H(f)|^2}{|H_{max}(f)|^2}. \quad (10)$$

Ainsi, pour un filtre passe-bas du premier ordre de fréquence de coupure  $f_0$ , de temps de réponse  $\tau = 1/(2\pi f_0)$ , la largeur de bruit équivalente est :

$$\text{ENB}_{\text{LP}} = f_0 \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4\tau}. \quad (11)$$

Si le filtre  $w(f)$  est utilisé comme fenêtre pour une convolution dans le domaine des fréquences, alors la largeur de bruit équivalente est définie par :

$$\text{ENB}_{\text{window}} = \int_{-\infty}^\infty df \frac{|w(f)|^2}{|w_{max}(f)|^2}. \quad (12)$$

En effet, dans une convolution, on analysera les fréquences à  $f_0 - f$  et  $f_0 + f$  pour lesquelles  $S_f$  n'est pas nul : il faut aussi prendre en compte les fréquences « négatives » de la fenêtre.

### 2.2 À partir de la fonction d'auto-corrélation

#### 2.2.1 Théorème d'Einstein-Wiener-Khintchine

Pour  $n(t)$  réel continu, en utilisant l'équation 4, l'équation 2 s'écrit :

$$n(t) = \int dn_c^*(-f) \exp(i2\pi ft)$$

et avec un changement de variable  $f \rightarrow -f$

$$n(t) = \int dn_c^*(f) \exp(-i2\pi ft).$$

La fonction d'autocorrélation

$$C_n(\tau) = \langle n(t)n(t+\tau) \rangle = \left\langle \left( \int dn_c(f) \exp(i2\pi ft) \right) \left( \int dn_c^*(f') \exp(-i2\pi f'(t+\tau)) \right) \right\rangle$$

devient donc après distribution

$$C_n(\tau) = \int \int \langle dn_c(f) dn_c^*(f') \rangle \exp(-i2\pi f'\tau) \delta(f - f')$$

et on a alors

$$C_n(\tau) = \int df \frac{1}{2} S_n(f) \exp(-i2\pi f\tau)$$

On obtient alors le théorème [5, 6, 7] qui donne la densité spectrale de puissance monolatérale comme transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation :

$$\int C_n(t) \exp(-i2\pi ft) dt = \frac{1}{2} S_n(f). \quad (13)$$

H. Cramér note [1] que ce théorème porte des problèmes de convergence pour certaines fonctions d'autocorrélation dont les densités spectrales sont pourtant définies.

### 2.2.2 Utilisation

Une analyse trop rapide amènerait à invoquer l'ergodicité, estimer la fonction d'auto-corrélation sur un échantillon fini puis en déduire la densité spectrale de bruit. En fait, l'estimation de la fonction d'auto corrélation à partir d'un échantillon fini comporte de multiples sources de biais. En particulier, cette méthode ne prendrait pas en compte le problème de « fuites spectrales », cf. la discussion en 2.4.3. À proscrire, sauf pour un bruit blanc (mais ce serait alors inutile).

## 2.3 Périodogramme

Une méthode, maintenant abandonnée, consistait à faire la transformée de Fourier de la mesure de  $n(t)$  sur l'intervalle  $[0, T]$ , puis à lisser le carré du module de la transformée. Cette méthode ne conserve pas l'énergie et comporte de multiples biais. Elle est maintenant totalement abandonnée dans sa version initiale ; elle inspire la méthode de Welch.

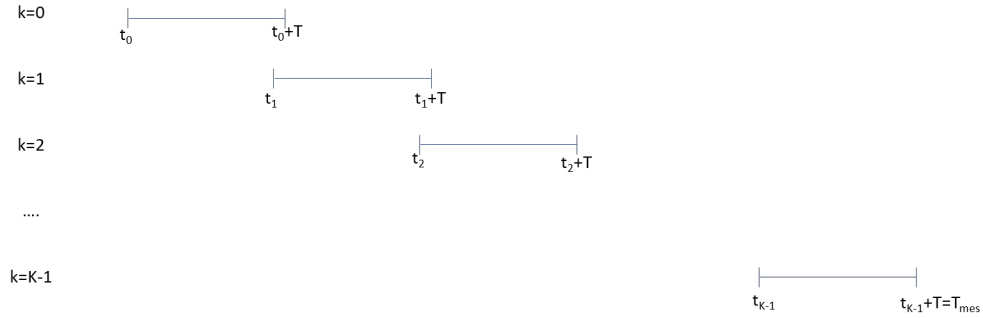


FIGURE 1 – Découpage des données par l'estimateur de Welch

## 2.4 Méthode de Welch

### 2.4.1 Définition

Cette méthode [8] est la plus populaire, très largement utilisée dans les instruments de mesure commerciaux et dans les logiciels de traitement de données (Matlab, Python). On effectue  $K$  mesures sur des segments de durée  $T$  de  $n(t)$  à partir de  $t_0$ , cf. figure 1 :

$$n_k(t) = n(t_0 + kT - \alpha_{\text{ovlp}}T) \quad (14)$$

où  $0 \leq \alpha_{\text{ovlp}} < 1$  est un facteur de superposition en général nul et  $k = 0, \dots, K-1$  est l'indice de segment. Les données sont échantillonnées avec une période d'échantillonnage  $T_s$ , avec  $M$  échantillons sur chaque segment, avec  $T = MT_s$ . Sur chaque segment les données sont numérotées avec  $m = 0, \dots, M-1$ . L'estimateur de densité spectrale de puissance (monolatérale) est alors :

$$\hat{S}_n(f) = \frac{2T_s^2}{T} \left[ \frac{1}{K} \sum_k |FFT(n_k[m] \times w[m])| \right] \quad (15)$$

avec  $w[m]$  une fenêtre d'apodisation, non nulle sur  $[0, T]$ . Pour que la fenêtre conserve la puissance du signal, il faut qu'elle la conserve pour un bruit blanc. Elle doit donc conserver la variance d'un échantillon de bruit blanc ; la normalisation est donc :

$$\frac{1}{T} \int_0^T w^2(t) dt = 1 \quad (16)$$

soit pour une fenêtre numérique

$$\sum_{m=0}^{M-1} w^2[m] = M. \quad (17)$$

Une des fenêtres les plus populaires est la fenêtre de Hann (ou Hanning) :

$$w_{\text{Hann}}[m] = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ 1 - \cos\left(\frac{2\pi m}{M}\right) \right]. \quad (18)$$

Un facteur  $K = 20$  donne déjà un bon “lissage” de l’estimateur de DSP. La fenêtre de Hann utilisée séparément d’un algorithme n’est en général pas correctement normalisée (par exemple en Python en `scipy.signal.windows.hann()` ou `numpy.hanning()`).

### 2.4.2 Utilisation avec des données échantillonnées

**Python** À partir de données numérisées, la fonction `scipy.signal.welch()` retourne un vecteur de fréquences et le vecteur des densités spectrales.

Les paramètres d’entrée sont :

- le vecteur  $x(nT_s)$  des données échantillonnées, avec  $n = 0, \dots, N - 1$ , avec  $N = \text{len}(x)$ ,
- $f_s = 1/T_s$  la fréquence d’échantillonnage (par défaut  $f_s = 1$  Hz),
- `window='hann'` la fenêtre par défaut,
- `nperseg=None` : la longueur par défaut sera de 256 points. Pour avoir  $K=20$  moyennes, il faut donc programmer `nperseg=len(x)/K`.
- `noverlap=None` : par défaut les segments ne se superposent pas. Si les segments se superposent, l’indépendance statistique des éléments n’est plus réalisée.
- `nft=None` : longueur de la FFT par rapport au nombre de points du vecteur ; par défaut identiques.
- `detrend='None'` : l’autre option `'detrend'=linear` donne de meilleurs résultats si la donnée comporte des pentes non nulles sur chaque segment, par exemple pour un bruit coloré.
- `return_onesided=True` : permet d’estimer la densité spectrale monolatérale.
- `scaling='density'` : fait un retour calibré en  $\text{u}^2/\text{Hz}$  adapté à une DSP monolatérale tandis que l’option `scaling='spectrum'` retournerait la transformée de Fourier en  $\text{u}^2$ , permettant de mieux lire les amplitudes de raies.
- `axis=-1` permet de sélectionner l’axe suivant lequel faire les calculs si le tableau en entrée est multi-dimensionnel.

**Matlab** La commande d’estimation de DSP s’appelle « `pwelch` ». Pour contrôler le nombre de moyennes effectuées, il faut adapter le terme `nfft`.

#### Remarques d’utilisation

- Chaque segment de durée  $T$  comporte  $M$  points, et la période d’échantillonnage est  $T_s$ . La fréquence maximale observée est la fréquence de Nyquist  $f_s = \frac{1}{2T_s}$ . L’intervalle entre deux fréquences successives (‘bin’) est  $\Delta F = \frac{1}{MT_s} = \frac{1}{T}$ .
- Si  $\alpha_{\text{ovlp}} \neq 0$  il y a une superposition des segments ; il n’y a alors plus indépendance statistique des données d’un segment par rapport à l’autre. Au contraire, si  $\alpha_{\text{ovlp}} = 0$ , chacune des composantes spectrales d’un bin de fréquence reçoit un déphasage différent, ce qui garantit l’indépendance des échantillons temporels successifs. Il faut donc faire les calculs avec  $\alpha_{\text{ovlp}} = 0$ .
- Avec  $\alpha_{\text{ovlp}} = 0$ , la résolution de fréquence effective sur la durée totale de mesure de  $K$  segments est  $\Delta F = \frac{1}{T} = \frac{K}{T_{\text{mes}}}$ .



- Les deux premiers points d'un spectre souffrent fréquemment d'un biais important de toutes les composantes basses fréquences, cf. 2.4.3, en présence d'un bruit coloré, probablement en raison de la calibration (équation 12) qui devient fautive. Pour éviter toute (mauvaise) interprétation de calculs biaisés, il est prudent de ne pas afficher ces points.

### 2.4.3 Fenêtres et fuites spectrales

Historiquement, les premières fenêtres ont été pensées pour « lisser » les données temporelles sur les bords de chacun des segments, d'où le nom de fenêtres d'apodisation. Le problème réel est celui toutefois de fuites spectrales. En effet, lorsqu'un bruit est échantillonné par une fenêtre  $w_T$ , la donnée réellement utilisée est

$$n'[m] = n[m] \times w_T[m] \quad (19)$$

dans l'espace des fréquences on a une convolution :

$$dn'(f) = dn(f) \star w_T(f). \quad (20)$$

On démontre alors le fait que prendre un échantillon fini va convoluer le spectre cherché avec la fenêtre :

$$S_{n'}(f') = \int_0^\infty df |w(f - f')|^2 S_n(f'). \quad (21)$$

Le fait de prendre un segment de durée finie mélange donc les composantes spectrales, et biaise nécessairement l'estimation des composantes spectrales. La fenêtre  $w_T$  est conçue pour limiter ce phénomène de fuites spectrales. Idéalement elle s'approche d'une fonction de Dirac dans l'espace des fréquences. Toutefois, sa durée étant finie, ce ne peut être parfaitement le cas. Pour évaluer les différentes fenêtres, on va donc comparer leurs performances [9] :

- La largeur de bruit équivalente définit la résolution effective en fréquence. En utilisant le théorème de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} df |w(f)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dt |w(t)|^2, \quad (22)$$

la normalisation d'une fenêtre, et la relation pour une fenêtre symétrique autour de son milieu, on trouve que  $w_{\max}(f) = w(0) = T\bar{w}(t)$ , la largeur équivalente de bruit est dans ce cas :

$$\text{ENB}_{\text{window}} = \frac{T}{|T\bar{w}(t)|^2}. \quad (23)$$

Ainsi pour une fenêtre de Hann on trouve la résolution effective en fréquence :

$$\text{ENB}_{\text{Hann}}(f) = \frac{1,5}{T}. \quad (24)$$

Numériquement on peut aussi calculer

$$\text{ENB}_{\text{window}} = M \frac{\sum_m |w[n]|^2}{|\sum w[n]|^2}. \quad (25)$$

Ainsi l'utilisation d'une fenêtre donne une résolution de fréquence effective plus grande que l'espacement entre deux points successifs en fréquence  $1/(MT_s)$ .

- les fuites spectrales seront réduites si le premier lobe est réduit (-32 dB pour la fenêtre de Hann), si les pics secondaires suivent une décroissance en fonction de la fréquence avec une pente élevée : la fenêtre de Hann montre une pente en  $1/f^3$ , efficace en présence de bruit coloré ou de signaux sinusoïdaux.
- On pourrait aussi calculer la fuite spectrale totale :

$$\epsilon_{\text{leak}} = 1 - \frac{\int_0^{\text{ENB}/2} df |w(f)|^2}{\int_0^{\infty} df |w(f)|^2}. \quad (26)$$

Pour une fenêtre de Hann, on trouve numériquement  $\epsilon_{\text{leak}} = 17,9 \%$ .

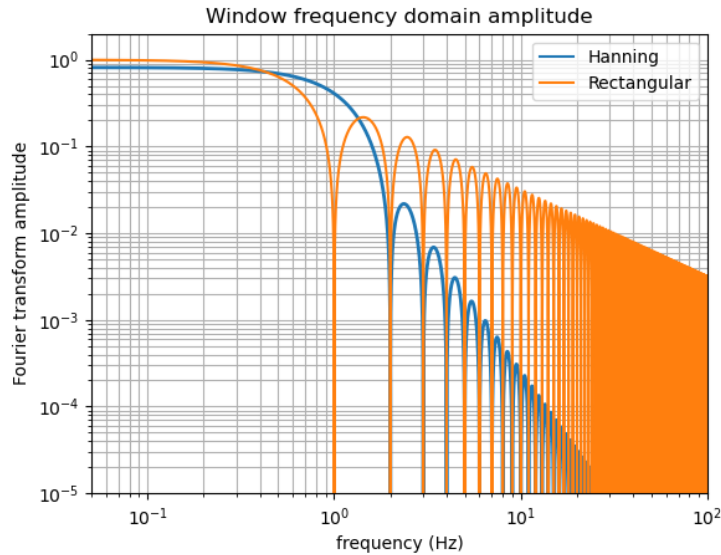


FIGURE 2 – Réponse spectrale de la fenêtre de Hann et de la fenêtre rectangulaire.

Notons que « sans fenêtre », on a  $w_T(t) = 1$ , on emploie en fait une fenêtre « rectangulaire ». La largeur équivalente de bruit est de  $1/T$ , le premier lobe secondaire n'est que à -13 dB, et les pics secondaires ne chutent qu'avec une pente en  $1/f$  : la fenêtre rectangulaire (ou l'absence de fenêtre) se comporte assez mal pour l'estimation de la DSP d'un bruit coloré ou de présence de signaux sinusoïdaux ; cette fenêtre est à éviter.

De multiples recherches ont eu lieu pour produire la « meilleure fenêtre », cf. par exemple [10]. Toutefois, la fenêtre réduisant au maximum les fuites spectrales est connue, il s'agit de la fenêtre de Slepian, que nous détaillerons dans la partie 2.5.

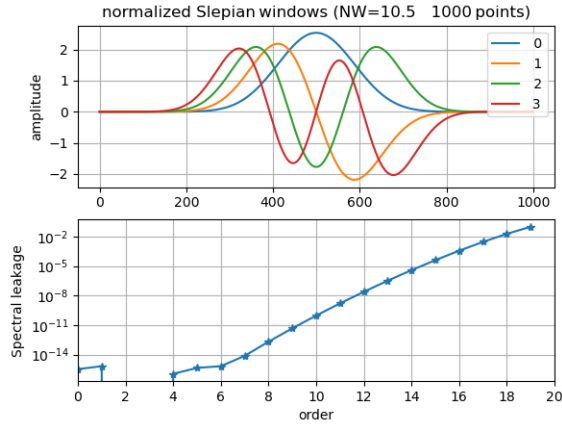


FIGURE 3 – Fenêtres de Slepian (fonctions prolates sphéroïdales d’ordre 0) d’indices 0 à 3. Les fuites spectrales estimées pour les bas indices sont limitées par la résolution numérique. La méthode de Thomson pondérée va atténuer l’usage des fenêtre d’indices plus élevés en présence d’un bruit très coloré.

## 2.5 Méthode de Thomson

L’estimateur de Thomson [4] est aussi appelé aussi multi-fenêtres (« multitaper » en anglais). Cette méthode semble peu connue en dehors de la communauté des géophysiciens. Elle n’est pas implémentée par les fabricants d’appareils de mesure. Elle apporte pourtant des avantages indéniables, dans des conditions égales (temps total de mesure identique, nombre de moyennes), à l’estimateur de Welch : moins biaisée pour les bruits colorés, moins de variance, une barre d’erreur d’estimation est disponible, ainsi qu’un critère de fiabilité de l’estimation de la densité spectrale de mesure. Le calcul des fenêtres associées à cette méthode a connu récemment des avancées en mathématiques appliquées qui rendent leur calcul rapide et fiable, y compris pour des fenêtres de grande taille. Un module python récent permet de populariser l’usage de la méthode de Thomson.

L’estimateur de DSP de Welch sans superposition découpe la durée totale de mesure  $T_{mes} = KT_s$  en  $K$  segments de  $M$  points chacun qui fournissent autant de données statistiquement indépendantes pour un bruit ; le nombre total de points est tel que  $N = KM$ . L’estimateur de Thomson quant à lui utilise sur un même échantillon un ensemble de fenêtres orthogonales qui vont utiliser des données statistiquement indépendantes pour le bruit. Ces fenêtres sont des « fonctions de Slepian ». D. Slepian avait noté que les fonctions définies sur un support fini qui maximisent la concentration spectrale dans un intervalle de fréquences fini sont les fonctions prolates sphéroïdales d’ordre 0 [11, 12, 13], orthogonales entre elles. Ce sont les fonctions propres de la convolution avec la fonction sinus cardinal. La série des fonctions de Slepian a une allure similaire à celle des fonctions d’Hermite-Gauss ; elles en sont une généralisation à des intervalles de définition finis.

Avec des données échantillonnées, on définit le facteur  $NW$  de résolution de fréquence en multiple de la distance entre deux fréquences  $1/NT_s$  (pour une

fenêtre de Hann,  $NW = 1,5$ ). Le nombre de moyennes effectué sera de

$$K = \lfloor 2 \times NW \rfloor - 1$$

où  $\lfloor x \rfloor$  représente la partie entière de  $x$  : le choix de  $NW$  conditionne celui du nombre de moyennes. Par équivalent à la fenêtre de Welch, on pourra par exemple choisir  $NW = 10,5$  pour avoir 20 moyennes.

La première fonction de Slepian  $\psi_0$  est celle qui maximise l'énergie sur l'intervalle de fréquences  $[-NW/NT_s, NW/NT_s]$ . Le facteur de concentration est noté  $\lambda_k$  ; c'est la valeur propre dans la convolution avec un sinus cardinal ; c'est aussi le facteur de concentration en énergie dans la bande visée. La deuxième fonction de Slepian  $\psi_1$  est la fonction orthogonale à  $\psi_0$  qui maximise l'énergie sur le même intervalle, etc. Les valeurs  $\lambda_0, \lambda_1$ , sont extrêmement proches de 1 pour  $k \leq K$ , et très proches de 0 pour les suivantes. Le facteur  $(1 - \lambda_k)$  représente la fraction d'énergie non comprise dans l'intervalle cible de fréquence ; c'est donc la fuite spectrale qui contribuera aux biais d'estimation de DSP. Par rapport aux fenêtres classiques de la méthode de Welch, le défaut de concentration d'énergie est meilleur par des dizaines d'ordres de grandeur !

Ces fonctions sont donc idéales pour constituer des filtres qui vont minimiser les biais d'estimation. La version discrète de ces fonctions sont appelées DPSS (Discrete Prolate Spheroidal Sequence) ; leur définition dans l'espace des fréquences est nommée PSWF (Prolate Spheroidal Wave Function). La transformée de Fourier d'une fonction de Slepian est aussi une fonction de Slepian. Les transformées sont orthogonales entre elles sur l'intervalle de concentration maximale, et sont également orthogonales entre elles sur tout l'axe des fréquences  $]-\infty, +\infty[$ .

La méthode de Thomson permet de donner une barre d'erreur à l'estimation de densité spectrale de puissance [14]. Elle permet aussi de donner une « stabilité », rapport à chaque fréquence d'une estimation du nombre de degrés de libertés par deux fois le nombre de fenêtres utilisées [4]. Si ce nombre est significativement inférieur à 1 sur un intervalle de fréquences, alors la valeur de la DSP y est probablement incorrecte. Il n'existe pas d'indicateur de fiabilité pour la méthode de Welch.

## Implémentation Python

La méthode de Thomson peut être implémentée selon plusieurs variantes, basées sur différentes pondérations des fenêtres en fonction de leur indice. La première méthode consiste à donner un poids égal à toutes les fenêtres ; la deuxième à pondérer les fenêtres par les valeurs propres des fonctions de Slepian ; la troisième à donner en sus des valeurs propres un poids adaptatif aux fenêtres, en fonction du contexte du reste du spectre. Cette dernière méthode est la plus robuste pour des bruits colorés. L'implémentation Python « multitaper » disponible depuis 2022 [15] implémente cette option ; elle peut également calculer des fonctions cohérence (cf. section 2.9) et des fonctions de transfert. Elle est basée sur la fonction DPSS de Python.

La fonction `scipy.signal.windows.dpss()` utilise l'algorithme recommandé dans les « numerical recipes » [16], par la recherche des vecteurs propres et valeurs propres d'une matrice tridiagonale. La fenêtre avec l'option 'norm=2' doit être multipliée par  $\sqrt{M}$  pour être correctement normalisée. La fonction

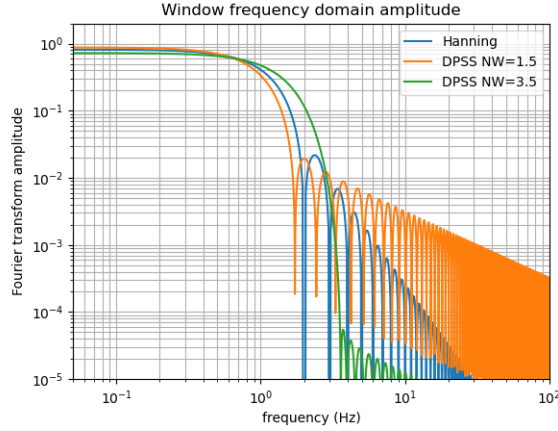


FIGURE 4 – Comparaison des fenêtres de Slepian avec la fenêtre Hann

`scipy.signal.windows.dpss()` retourne des fenêtres erronées pour  $M > 92681$ . Cette méthode n'est pas optimale pour garantir une vitesse d'exécution optimale, une bonne exactitude, une bonne orthogonalité des fonctions et une bonne exactitude des valeurs propres en particulier si le nombre de points est élevé. Des recherches récentes en mathématiques fournissent un développement des DPSS sur la base des polynômes de Legendre, pour obtenir finalement une évaluation à la fois rapide et exacte des PSWF [17, 18]. À notre connaissance, ces dernières formulations ne sont pas encore implémentées en Python.

## 2.6 Comparaison des estimateurs de Welch et Thomson

Pour  $K = 20$  moyennes et une fenêtre de Hanning, la résolution de fréquence de fréquence effective de l'estimateur de Welch, sans superpositions, avec une fenêtre de Hanning, est

$$\text{ENB}_{\text{Welch,Hann}} = \frac{1,5K}{T} \quad (27)$$

tandis qu'avec le même nombre de moyennes, sur la même durée totale de mesure, la résolution de fréquence effective de l'estimateur de Thomson pour une largeur  $NW = K/2$  est

$$\text{ENB}_{\text{Welch,Hann}} = \frac{NW}{T} \approx \frac{K}{2T}. \quad (28)$$

On a donc une résolution de fréquence 3 fois meilleure pour l'estimateur de Thomson, à nombre équivalent de moyennes. À résolution de fréquence égale,  $NW = 1,5K$ , on aurait une variance 3 fois meilleure pour l'estimateur de Thomson. L'estimateur de Thomson donne de meilleurs biais et de meilleures performances sur une durée identique que l'estimateur de Welch. Il devrait donc s'imposer, maintenant que les difficultés de calcul des fenêtres de Slepian sont levées.

Même lorsque le paramètre  $NW$  reste modeste, la fenêtre de Slepian est bien meilleure, cf. figure 4. La fenêtre de Hann a une fuite spectrale totale de 17,9 % ;

avec une résolution identique,  $NW=1,5$ , la fenêtre de Slepian d'indice 0 a une fuite spectrale totale de 0,11%; avec  $NW=3,5$ , la fuite spectrale totale de la fenêtre d'indice 0 est  $6,3 \cdot 10^{-9}$ . Il vaut donc mieux, avec la méthode de Welch, utiliser la fenêtre de Slepian quand elle est disponible.

## 2.7 Spectres mixtes

En pratique, un signal mesuré comporte souvent à la fois un bruit stationnaire, des raies fines (multiples de la fréquence du secteur, résonances, etc.) et du signal déterministe de durée finie. Si les données sont calibrées en densité spectrale (par exemple en  $V/\sqrt{\text{Hz}}$ ), alors une division par deux de la résolution de fréquence (par doublement de la durée d'acquisition) ne changera pas l'amplitude des bruits, mais augmentera d'un facteur  $\sqrt{2}$  l'amplitude des raies et du signal déterministe, donnant l'impression d'un meilleur rapport signal à bruit. Si les données sont calibrées en intensité (par exemple en  $V$ ), alors une division par deux de la résolution de fréquence ne changera pas l'amplitude des raies fines et des signaux déterministes, dont on pourra mesurer l'amplitude, mais l'amplitude du bruit paraîtra deux fois plus petite.

## 2.8 Analyseurs de spectres électriques

Le terme « RBW » (Resolution BandWidth) d'un analyseur de spectre électrique désigne la distance qui sépare deux points successifs : ce n'est pas la largeur de bande de bruit. Les instruments « anciens » (écran cathodique, traitement analogique, ...) affichent la puissance détectée en dBm dans la bande de fréquence de largeur ENB. Pour convertir le résultat en densité spectrale, il faut calibrer les données avec

$$S_V = \frac{10^{-3} 10^{P_{dBm}/10}}{\text{ENB}} \text{ [W/Hz]}. \quad (29)$$

Le rapport entre RBW et ENB dépend de l'instrument [19] ! Dans les instruments « modernes » (écran couleur tactile, traitement numérique des données, mode « FFT », ...) le rapport entre la RBW et le ENB est fixe, proche de 1 (pour un filtre gaussien le rapport est 1,056), et est pris en compte pour un affichage directement de données calibrées en densités spectrales [20].

La mesure de bruit de phase avec les instruments FSW (Rohde et Schwarz) estime  $L_{\varphi, dB}(f)$ .

## 2.9 Cohérence

### 2.9.1 Définition

Il est hasardeux d'utiliser la « ressemblance temporelle » de deux signaux pour en déduire si l'un est possiblement la cause de l'autre, ou s'ils ont une cause commune. Dans le domaine fréquentiel, il est possible de définir rigoureusement si deux signaux ont une relation de phase. Si cette relation de phase est déterministe sur un intervalle non nul de fréquences, alors il est possible de proposer une interprétation physique sur une cause mutuelle ou commune des deux signaux. Cela se montre très utile pour la compréhension de sources de bruit en instrumentation. Si la cohérence est proche de 1, il est valide de calculer une

fonction de transfert. La cohérence de deux signaux  $n_x$  et  $n_y$  est définie dans le domaine fréquentiel par :

$$C_{xy} = \frac{|\langle dn_x(f) dn_y^*(f) \rangle|^2}{\langle |dn_x(f)|^2 \rangle \langle |dn_y(f)|^2 \rangle}. \quad (30)$$

La moyenne statistique du numérateur va tendre vers 0 pour des signaux décorrélés, et vers 1 si les signaux sont proportionnels l'un à l'autre, éventuellement avec un déphasage.

La fonction cohérence, implémentée sur certains instruments, par exemple le SR780 de Stanford Research Systems, est très utile pour rechercher des limitations de bruits instrumentales.

### 2.9.2 Cross-corrélateurs

Pour mesurer le bruit de phase  $\varphi_{DUT}$  d'un oscillateur très performant, on peut le comparer non pas à un mais à deux oscillateurs locaux. La cohérence des signaux  $\varphi_{DUT}(t) - \varphi_{OL1}(t)$  et  $\varphi_{DUT}(t) - \varphi_{OL2}(t)$  permet, si elle est strictement non nulle, de « descendre » en dessous du plancher d'un oscillateur local seul. Si les deux oscillateurs ont des bruits de phase similaires, il suffit de prendre l'estimée du bruit de différence de phase et de la multiplier par la fonction cohérence pour obtenir le bruit réel d'un oscillateur meilleur que les oscillateurs internes à l'instrument.

## 3 Bruits dans les systèmes linéaires indépendants du temps

### 3.1 Variables indépendantes

Soient  $n_1(t)$  et  $n_2(t)$  deux bruits stationnaires, décrits par une intégrale de Fourier-Stieltjes. La somme de ces deux signaux s'écrit :

$$n(t) = n_1(t) + n_2(t) = \int (dn_1(f) + dn_2(f)) \exp(i2\pi ft). \quad (31)$$

On voit immédiatement que pour les fréquences pour lesquelles  $dn_1(f)$  et  $dn_2(f)$  sont des variables statistiquement indépendantes on aura

$$S_n(f) = S_{n_1}(f) + S_{n_2}(f). \quad (32)$$

On additionne les variances bien entendu, donc on additionne les densités spectrales de puissance.

### 3.2 Systèmes linéaires invariants dans le temps

Soit  $H$  un système linéaire invariant dans le temps. Pour deux signaux d'entrée  $x(t)$  et  $y(t)$  et deux facteurs  $\alpha$  et  $\beta$ , par définition,

$$H(\alpha x(t) + \beta y(t)) = \alpha H(x(t)) + \beta H(y(t)) \quad (33)$$

et

$$\text{si } x(t) \text{ donne en sortie } x_{out}(t), \text{ alors } x(t + \tau) \text{ donne en sortie } x_{out}(t + \tau) \quad (34)$$

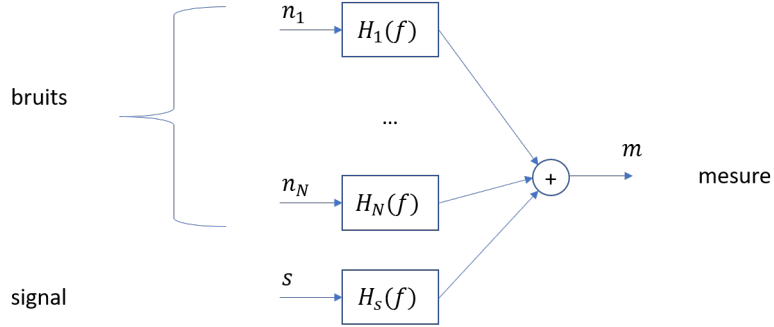


FIGURE 5 – Instrumentation avec différentes sources de bruit et un signal

Donc pour un bruit à l'entrée  $n_{in}(t)$  décrit par une intégrale de Fourier-Stieltjes, par l'équation 33 on trouve que

$$H(n(t)) = \int (dn_{in}(f)H(f)) \exp(i2\pi ft). \quad (35)$$

On voit donc immédiatement que le bruit en sortie à une densité spectrale de puissance

$$\boxed{S_{n,out}(f) = S_{n,in}(f) \times |H(f)|^2}. \quad (36)$$

et en densité spectrale linéaire

$$\tilde{n}_{out}(f) = \tilde{n}_{in}(f) \times |H(f)|. \quad (37)$$

Par exemple, un filtre intégrateur a pour forme  $H(f) = f_0/(if)$ . Un bruit blanc injecté dans un filtre intégrateur est un bruit brownien ; la densité spectrale de ce dernier est donc sous la forme  $\alpha/f^2$ , où  $\alpha$  est une constante réelle positive.

À l'aide de l'équation 36 on peut démontrer la définition de largeur équivalente de bruit  $\text{ENB}_{\text{LP}}$  (équation 10). Si un bruit blanc  $S_{in}$  constant entre dans un filtre passe-bas  $H(f)$ , la variance du signal en sortie est

$$\langle s^2_{out}(t) \rangle = \int_0^\infty df S_{in} \times |H(f)|^2$$

et la variance en sortie d'un filtre idéal de transmission  $|H_{max}|$  et de largeur  $\text{ENB}_{\text{LP}}$  est

$$\langle s^2_{out}(t) \rangle = |H_{max}(f)|^2 \text{ENB}_{\text{LP}}.$$

La définition de  $\text{ENB}_{\text{LP}}$  suit immédiatement.

### 3.3 Bilan de bruit d'un instrument

Soit un instrument dans lequel des bruits parasites  $n_i$  indépendants, avec des fonctions de transfert  $H_i(f)$  entre chaque source de bruit et la sortie, cf. figure 5.

Le bruit en sortie aura donc pour densité spectrale de puissance, suivant le principe de superposition :



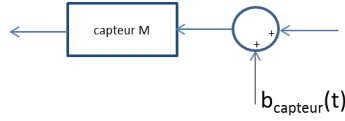


FIGURE 6 – Bruits ramenés à l'entrée

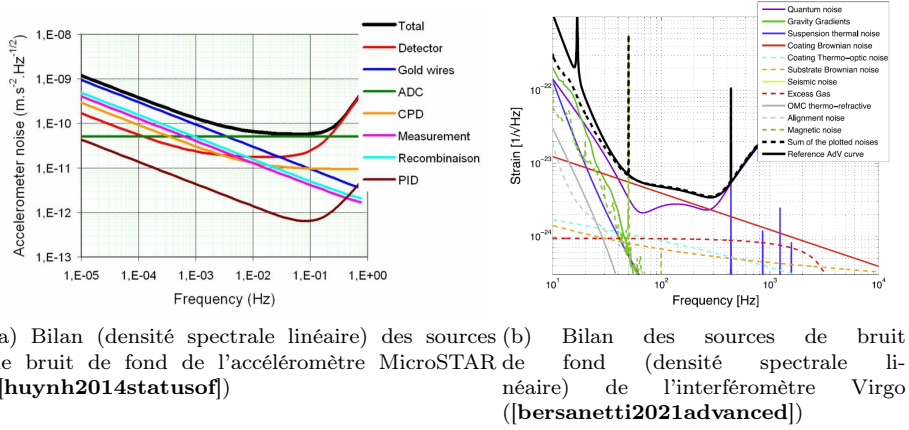


FIGURE 7

$$S_{out}(f) = \sum S_{n_i}(f) |H_i(f)|^2. \quad (38)$$

Le signal recherché a une fonction de transfert  $H_s(f)$  avec la sortie qui représente la sensibilité de l'instrument. L'ensemble des bruits peut être ramené à l'entrée du signal, dans une grandeur temporelle commensurable au signal recherché :

$$S_{n,in}(f) = \frac{1}{|H_s(f)|^2} \sum S_{n_i}(f) |H_i(f)|^2. \quad (39)$$

L'ensemble de l'instrumentation peut alors être représentée comme un capteur avec les bruits à l'entrée comme dans la figure 6.

Dans le jargon des scientifiques travaillant sur les détecteurs d'ondes gravitationnelles cette courbe s'appelle « sensibilité de l'instrument ». Selon le vocabulaire international de la métrologie [21], il s'agit plutôt de la densité spectrale de la limite de détection. Elle est très utile pour mieux appréhender, pour un signal dont la forme est connue, là où les efforts d'amélioration instrumentaux doivent être appuyés, cf. figure 7.

### 3.4 Gamme dynamique d'un capteur

La valeur maximale de sortie d'un capteur est une tension exprimée en volts. La densité spectrale linéaire de bruit est en  $V/\sqrt{\text{Hz}}$ . La gamme dynamique devrait donc s'exprimer comme le rapport de la valeur maximale à la densité spectrale linéaire, donc en  $\sqrt{\text{Hz}}$ . On trouve rarement cette unité toutefois : la

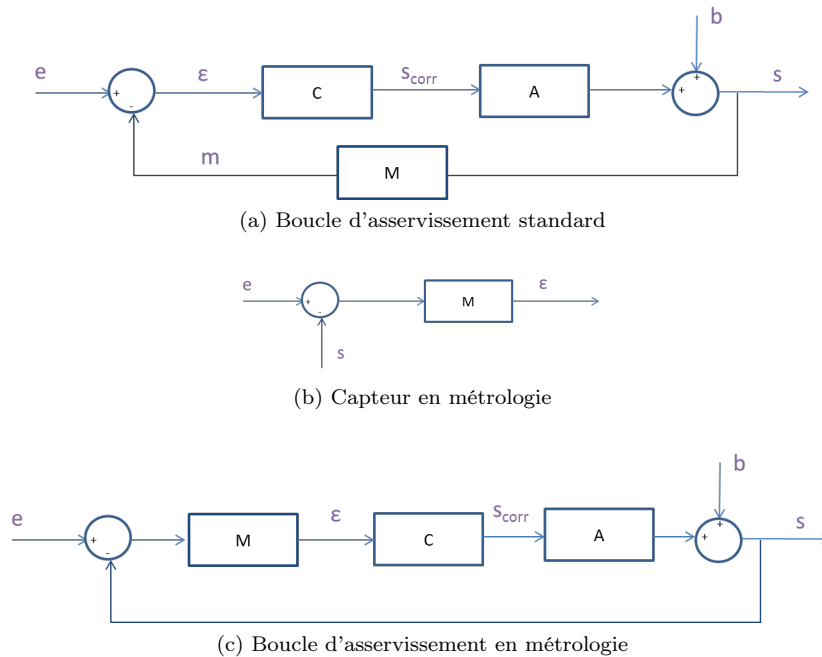


FIGURE 8

« gamme dynamique » affichée ou vendue prend alors en compte des paramètres accessoires, souvent non spécifiés, comme par exemple le temps d'intégration, sans l'indiquer ! Les pratiques devraient évoluer.

### 3.5 Bruits dans les boucles d'asservissement

Dans une boucle d'asservissement classique, le dispositif est représenté par la figure 8a où  $M(f)$  est la fonction de transfert du capteur,  $A(f)$  celle de l'actionneur,  $C(f)$  celle du circuit de l'électronique de correction, qui peut être un PID par exemple.

En métrologie, le capteur compare les valeurs physiques de la sortie avec une autre grandeur physique de référence, souvent idéalisée comme constante, comme sur la figure 8b.

La boucle d'asservissement dans un tel contexte se représente alors comme sur la figure 8c.

La fonction de transfert en boucle ouverte s'exprime dans les deux cas par :

$$G_{bo} = M(f) C(f) A(f) \quad (40)$$

Si on suppose que les grandeurs de référence et de bruit sont déterministes, alors on établit les équations entre les transformées de Fourier des entrées et les signaux mesurables,  $\epsilon(f)$  le signal d'erreur et  $p(f)$  une perturbation, dans le cas d'une boucle en métrologie :

$$s_{\text{out}}(f) = \frac{G_{bo}}{1 + G_{bo}} s_{\text{ref}}(f) + \frac{1}{1 + G_{bo}} p(f) \quad (41)$$

$$\varepsilon(f) = \frac{M}{1 + G_{bo}} s_{\text{ref}}(f) + \frac{M}{1 + G_{bo}} p(f) \quad (42)$$

$$s_{\text{corr}}(f) = \frac{1}{A} \frac{G_{bo}}{1 + G_{bo}} s_{\text{ref}}(f) + \frac{1}{A} \frac{1}{1 + G_{bo}} p(f) \quad (43)$$

Nous n'avons pas écrit la dépendance en fréquence des fonctions de transfert  $M, C, A, G_{bo}$  pour alléger la notation. Pour les fréquences pour lesquelles  $|G_{bo}| \gg 1$ , le signal de correction se comporte comme un capteur de  $s_{ref}$  et  $p$  avec la fonction de transfert  $1/A$ . Si les signaux  $p(t)$  et  $s_{ref}(t)$  sont des variables aléatoires indépendantes qui s'écrivent par une intégrale de Fourier-Stieltjes, alors on peut donner les densités spectrales avec l'équation 38. On obtient alors les expressions entre les densités spectrales de puissance :

$$S_{\text{out}}(f) = \left| \frac{G_{bo}}{1 + G_{bo}} \right|^2 S_{\text{ref}}(f) + \left| \frac{1}{1 + G_{bo}} \right|^2 S_p(f) \quad (44)$$

$$S_\varepsilon(f) = \left| \frac{M}{1 + G_{bo}} \right|^2 S_{\text{ref}}(f) + \left| \frac{M}{1 + G_{bo}} \right|^2 S_p(f) \quad (45)$$

$$S_{\text{corr}}(f) = \left| \frac{1}{A} \frac{G_{bo}}{1 + G_{bo}} \right|^2 S_{\text{ref}}(f) + \left| \frac{1}{A} \frac{1}{1 + G_{bo}} \right|^2 S_p(f) \quad (46)$$

$S_\varepsilon(f)$  mesure les performances maximales de la boucle d'asservissement ; une mesure « hors boucle » est souvent indispensable pour vérifier les performances réelles.

La boucle d'asservissement est souvent réalisée parce que la référence est bien meilleure que la perturbation,  $S_p(f) \gg S_\varepsilon(f)$  pour les fréquences telles que  $|G_{bo}| \gg 1$ . La densité spectrale  $S_{\text{corr}}(f)$ , corrigée de la fonction de transfert  $|A|^2$ , permet de calculer  $S(p)$ .

## 4 Rapport signal à bruit

Nous avons vu que dans le domaine spectral les signaux déterministes et les bruits ne sont pas commensurables. Cette partie montre comment utiliser ces deux grandeurs simultanément.

### 4.1 Signaux d'énergie finie

#### 4.1.1 Définition

Le rapport signal à bruit est défini par :

$$\boxed{\frac{S}{N} = \int_0^\infty \frac{2|s(f)|^2 df}{S_n(f)}} \quad (47)$$

Le rapport signal à bruit est la somme des rapports de la densité d'énergie du signal à la DSP de bruit pour chacune des fréquences. Au numérateur

de la grandeur intégrée, le facteur 2 permet de rétablir la puissance contenue fréquences négatives,  $s(f)$  étant la transformée de Fourier de  $s(t)$  et  $S_n(f)$  la densité spectrale de bruit monolatérale.

Une analyse dimensionnelle montre rapidement que le rapport signal à bruit est sans dimension.

#### 4.1.2 Rapport signal à bruit et filtrage

Si le signal bruité passe dans un filtre  $H(f)$ , la densité spectrale de bruit devient

$$S_n(f) |H(f)|^2,$$

tandis que la densité d'énergie du signal devient

$$2 |s(f)H(f)|^2 df.$$

Dans le calcul du rapport signal à bruit, les grandeurs  $|H(f)|^2$  se simplifient donc. Cela montre qu'un filtrage ne change pas le rapport signal à bruit, contrairement à une idée préconçue. Cela montre surtout que la visualisation en fonction du temps est peu informative de ce rapport. Si le signal est à bande étroite, et le capteur bruyant avec une bande passante beaucoup trop large, il est évident que « visuellement » à l'oscilloscope la situation apparaîtra meilleure avec un filtre ; l'impression sur la grandeur temporelle n'en reste pas moins est trompeuse.

Ainsi, lors de la première détection d'ondes gravitationnelles en 2015, le signal sur les interféromètres LIGO était visible à l'œil nu sur le signal d'interférence non traité : le bruit basse fréquence était comprimé par une boucle d'asservissement. Sur les données « calibrées » (cf. équation 39) avec beaucoup de bruit en basse fréquence, le signal est noyé dans le bruit. La publication [22] montre les traces temporelles avec un filtre passe-haut suffisamment efficace pour rendre la donnée appréciable. Le rapport signal à bruit, tel que défini par l'équation 47 est pourtant le même. L'aspect pédagogique d'une donnée dans le domaine temporel est indéniable, mais n'emporte pas la conviction : le rapport signal à bruit n'est pas « what you see is what you get » sur la trace temporelle ; le véritable juge de paix est bien le rapport signal à bruit et le taux de fausse alarme associé.

#### 4.1.3 Filtre adapté

Dans un instrument réel, la mesure  $m(t) = s(t-t_0) + n(t)$  ne permet évidemment pas de trier automatiquement le signal du bruit. Si on connaît le prototype du signal  $s_0(t)$ , le filtre adapté permet de répondre aux questions :  $s(t)$  est-il présent ? à quel moment ? La théorie du signal montre le filtre linéaire qui répond le mieux à cette question est le filtre adapté, de réponse fréquentielle [23] :

$$h_{\text{adap}}(f) = \frac{s_0^*(f)}{S_n(f)}. \quad (48)$$

Si  $S_n$  est indépendant de la fréquence ( $n(t)$  est un bruit blanc), la réponse temporelle du filtre est, à un facteur d'échelle près, le signal en entrée renversé

dans le temps. En sortie du filtre adapté on aura un signal de transformée de Fourier :

$$\frac{s_0^*(f)m(f)}{S_n(f)} \quad (49)$$

Les composantes de bruit, de phases aléatoires, ne vont pas créer d'additions cohérentes en sortie, tandis que pour le signal correctement positionné en temps, on va reconstituer la puissance de signal. En sortie on aura donc un pic proportionnel au rapport signal à bruit. Un seuil (par exemple 3) permet de décider si le signal est présent, et à quel instant. Le rapport signal à bruit est proportionnel à l'amplitude, il peut donc aussi donner cette valeur.

Pour poursuivre la discussion en 4.1.2, un filtre adapté donnera des résultats identiques quel que soit le point de mesure, que ce soit la sortie brute de d'instrument où l'on mesure  $s(t) \star H_s(t)$ , ou la donnée calibrée où l'on prendra dans ce cas la DSP de bruit ramenée à l'entrée.

## 4.2 Signaux de puissance finie

### 4.2.1 Contexte

Des porteuses modulées en phase et/ou en amplitude traversent différents éléments d'un système, antenne ou photodiode, propagation, amplificateur, filtre, etc. Le signal modulé occupe une bande de fréquences  $[F_0 - B/2, F_0 + B/2]$ . On fait l'hypothèse que la densité spectrale de bruit est indépendante de la fréquence de bruit.

### 4.2.2 Définition

Le rapport signal à bruit se définit dans ce contexte par le rapport de la puissance de signal sur la puissance de bruit (la « puissance » n'est pas la puissance physique en watts, mais la moyenne quadratique du signal) :

$$\boxed{\text{SNR} = \frac{P_{\text{signal}}}{P_{\text{bruit}}} = \frac{\langle s^2(t) \rangle}{S_n \times B}} \quad (50)$$

### 4.2.3 Bruits planchers de référence

**Système électrique** Dans le contexte d'un équipement de télécommunications, la longueur d'onde de la porteuse est généralement plus petite que les éléments de propagation entre équipements (antennes, amplificateurs, etc.). Dans ce cas, les impédances d'entrée sont fixées à  $50 \Omega$ . La densité spectrale de puissance de tension de bruit aux bornes d'une résistance de  $50 \Omega$  vaut

$$S_{V_{\text{plancher}, 50\Omega}} = 4k_B T_a R \text{ [V}^2/\text{Hz]} \quad (51)$$

où  $k_B$  est la constante de Boltzmann,  $T_a$  la température absolue en Kelvin (290 K). La densité spectrale linéaire de tension est alors de  $0,91 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$ . Cela donne l'ordre de grandeur du niveau de performances des très bons amplificateurs commerciaux, par ex. le LT1028 avec  $1,0 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$ . La puissance de bruit est

$$S_p = \frac{S_V}{R} = 4k_B T_a \text{ [W/Hz]}. \quad (52)$$

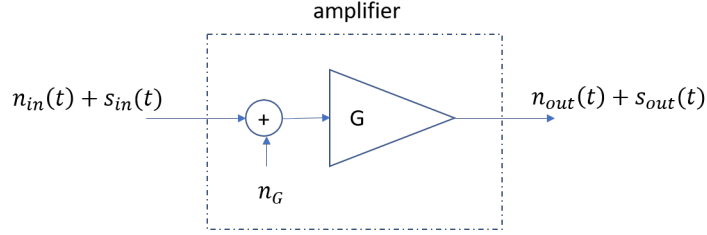


FIGURE 9 – Un système, par exemple un amplificateur, avec bruit ramené à l'entrée

Le bruit plancher de référence est défini par le bruit d'une résistance de  $50 \Omega$  branchée en entrée de l'équipement lui-même équipé d'une impédance d'entrée de  $50 \Omega$ , qu'on suppose non bruyante. On a alors un pont diviseur et la puissance de bruit de référence est par définition

$$S_{p,\text{ref}} = k_B T_a \text{ [W/Hz]}. \quad (53)$$

En dBm, cela donne le niveau de référence de -174 dBm/Hz.

**Système optique** Le niveau plancher de référence est défini par bruit quantique ; pour une puissance moyenne  $P_{\text{opt}}$  de référence, la densité spectrale de bruit de puissance mesurée est :

$$S_{\text{opt}} = 2P_{\text{opt}} h_P \nu_0 \text{ [W}^2\text{/Hz]} \quad (54)$$

où  $h_P$  est la constante de Planck et  $\nu_0$  la fréquence de la porteuse optique.

Remarquons la différence des unités pour les bruits électriques vis à vis des bruits optiques : dans le premier cas, le système est équivalent à un capteur de champ ; dans le second, à un capteur de puissance.

#### 4.2.4 Facteur de bruit d'un élément d'un système

Un signal bruité traverse un système, par exemple un amplificateur, modélisé par sa fonction de transfert (constante) et la densité spectrale de bruit ramenée à l'entrée (constante) comme sur la figure 9.

Le facteur de bruit (« noise factor » en anglais) décrit la dégradation du rapport signal à bruit au travers du filtre, lorsque le bruit en entrée  $n_{in}(t)$  est un bruit au plancher  $S_{in}(f) = S_{in,\text{plancher}}$  [24] :

$$F = \frac{\text{SNR}_{in,\text{plancher}}}{\text{SNR}_{out}} \quad (55)$$

Le rapport signal à bruit à l'entrée, en utilisant l'équation 50, est :

$$\text{SNR}_{in,\text{plancher}} = \frac{\langle s_{in}^2(t) \rangle}{S_{in,\text{plancher}} \times B} \quad (56)$$

et en sortie on a, avec  $G = g^2$  le gain en puissance de l'amplificateur, et  $S_{nG}$  le bruit ramené à l'entrée du filtre :

$$\text{SNR}_{out} = \frac{\langle G s_{in}^2(t) \rangle}{G(S_{nG} + S_{in,\text{plancher}}) \times B}. \quad (57)$$

On voit donc que le facteur de bruit compare le bruit ramené à l'entrée au bruit plancher :

$$F = 1 + \frac{S_{nG}}{S_{n,\text{plancher}}}. \quad (58)$$

Puisque le bruit plancher d'un composant électrique est proportionnel à sa température, le facteur de bruit d'un tel équipement se définit aussi par

$$F_{\text{comp}} = 1 + \frac{T_{\text{eff}}}{290 \text{ K}} \quad (59)$$

où  $T_{\text{eff}}$  est la température de bruit effective de l'élément, décrivant son bruit ajouté par rapport à celui d'une résistance de  $50 \Omega$  extérieure. Cette façon d'évaluer le bruit est utilisée pour les composants en ondes millimétriques et submillimétriques.

On exprime aussi le facteur de bruit en dB (« noise figure » en anglais) :

$$F_{dB} = 10 \log_{10}(F). \quad (60)$$

Les densités spectrales de bruit étant des fonctions positives, quelque soit le composant, même si celui-ci est une propagation avec pertes ( $G < 1$ ), on a

$$F \geq 1. \quad (61)$$

$F = 1$  vaut pour un système qui n'apporte aucun bruit. Un filtre avec  $F = 2$  ( $F_{dB} = 3 \text{ dB}$ ) dégrade le rapport signal à bruit d'un facteur 2, si le signal est limité par le bruit plancher en entrée.

On trouve des amplificateurs électriques commerciaux avec des facteurs de bruits  $< 2$ . Par exemple l'amplificateur ZKL-33ULN-S+ chez Mini-Circuits est un amplificateur 400 MHz - 3 GHz avec un facteur de bruit de 0,36 dB à 900 MHz.

Les amplificateurs optiques commerciaux ont tous un facteur de bruit supérieur à 3 dB, par exemple l'amplificateur LNA-320 chez Alnair. Des développements d'amplificateurs « sensibles à la phase », avec un facteur de bruit potentiellement inférieur à 3 dB, sont en cours.

Notons qu'un facteur de bruit petit n'est indispensable que si le signal à l'entrée est lui-même peu bruité. Si le signal à l'entrée à une DSP de bruit égale à  $k$  fois le bruit plancher, alors le calcul de dégradation de rapport signal à bruit va donner :

$$\frac{\text{SNR}_{in}}{\text{SNR}_{out}} = 1 + \frac{S_{nG}}{S_n} \quad (62)$$

$$= 1 + \frac{S_{nG}}{k S_{n,\text{plancher}}} \quad (63)$$

$$= 1 + \frac{F - 1}{k}. \quad (64)$$

Par exemple, avec  $F = 2$  et  $k = 10$  la dégradation du rapport signal à bruit est 1,1 ; cette valeur est probablement supportable.

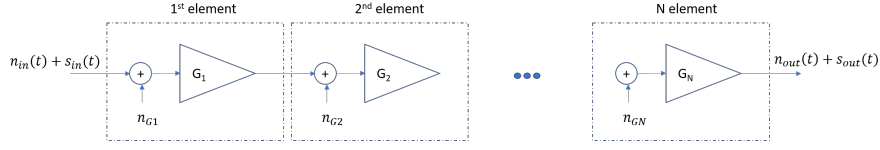


FIGURE 10 – Système d'éléments en cascade

#### 4.2.5 Formule de Friis

Soit maintenant un système composé : antenne, amplificateurs, propagation, etc... On peut le modéliser par la chaîne d'éléments de la figure 10.

Le calcul du bruit à la sortie donne naturellement :

$$S_{n,out} = (S_{n,in} + S_{nG1}) \times G_1 \dots G_N + S_{nG2} \times (G_2 \dots G_N) + \dots + S_{nGN} \times G_N \quad (65)$$

et donc le bruit ramené à l'entrée du système est :

$$S_{syst,in} = \frac{S_{n,out}}{G_1 \times \dots \times G_N} \quad (66)$$

$$= S_{n,in} + S_{nG1} + \frac{S_{nG2}}{G_1} + \dots + \frac{S_{nGN}}{G_1 \dots G_{N-1}}. \quad (67)$$

En remplaçant par la définition du facteur de bruit

$$S_{nGi} = (F_i - 1)S_{n,plancher} \quad (68)$$

on trouve la formule de Friis [24] :

$$F_{sys} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \dots + \frac{F_N - 1}{G_1 \dots G_{N-1}}. \quad (69)$$

Dans un système composé, c'est le facteur de bruit du premier étage qui prime très largement. Il faut donc être attentif à placer un amplificateur bas bruit aussi près que possible de la collection du signal pour en préserver l'intégrité. Si le premier élément est un élément de propagation à pertes ( $G_1 < 1$ ), c'est alors le facteur de bruit du deuxième élément, un amplificateur, qui va compter.

## 5 Synthèse de bruit à densité spectrale donnée

Dans certains contextes, des systèmes non-linéaires par exemple, on souhaite pouvoir générer des bruits dans le domaine temporel avec des densités spectrales données.

### 5.1 Moteur de Langevin

Dans l'hypothèse où la densité spectrale de bruit est représentée par  $|H(f)|^2$  le module carré d'une fonction rationnelle de la variable  $if$  à coefficients réels, alors le bruit  $n(t)$  peut être décrit comme le produit de convolution

$$n(t) = h(t) \star g(t) \quad (70)$$



où  $g(t)$  est un bruit blanc gaussien avec  $S_g = 1/\text{Hz}$  et  $h(t)$  est la transformée de Fourier inverse de  $H(f)$ .

Une réalisation numérique, échantillonnée à la période  $T_s$ , peut être trouvée sous forme [25]

$$n[k] = b_1g[k] + b_2g[k-1] + \dots + b_Ng[k-N+1] \quad (71)$$

$$+ a_2n[k-1] + \dots + a_Mn[k-M+1] \quad (72)$$

qui s'écrit, avec la transformée en  $z$ , où  $z = \exp(i2\pi fT_s)$ ,

$$n(z) = H(z)g(z) \quad (73)$$

avec

$$H(z) = \frac{b_1 + b_2z^{-1} + \dots + b_Nz^{-N+1}}{1 + a_2z^{-1} + \dots + a_Mz^{-M+1}} \quad (74)$$

On peut trouver  $H(z)$  à partir de  $H(f)$  avec, par exemple, une transformée bilinéaire. En Python on utilisera `scipy.signal.bilinear()`. Le filtrage d'une entrée de bruit blanc  $n[k]$  s'effectuera en Python avec `scipy.signal.lfilter()`.

## 5.2 Densités spectrales linéaires quelconques

On peut générer une série de durée finie à partir de  $S_n(f)$  définie, qui peut par exemple être un bruit en  $1/f$ , comme certains bruits thermiques. Cela est également utile pour tester des algorithmes d'estimateurs spectraux.

On veut générer  $2N + 2$  points échantillonnés avec une période  $T_s$ . La résolution en fréquence de la transformée de Fourier de cet échantillon sera  $\Delta F = 1/((2N + 2)T_s)$ .

On utilise pour cela l'équation 6. On génère d'abord le demi-vecteur de  $n(f)$  en tirant  $2N$  nombres aléatoires avec une distribution gaussienne normale, on multiplie ces quadratures par  $\sqrt{S_n(f)\Delta F/4}$ . Il faut déterminer les deux degrés manuellement les deux degrés de liberté supplémentaires, la moyenne et la somme demi-alternée (valeur à la fréquence de Nyquist) ; on pose par exemple ces deux valeurs à zéro. Une transformée de Fourier rapide inverse à partir du demi-vecteur défini pour les fréquences positives donne la réponse voulue. Une implémentation en Python est par exemple :

```

def PSD2TD (xPSD, fmin):
    #PSD2TD (PSD, fmin)
    # generate time-domain data
    # for gaussian noise with given PSD
    #
    # input:
    #     PSD : an array of PSDvalues, equally spaced in frequency,
    #           with interval fmin
    #           array has length N
    #     fmin: first frequency
    #           other frequencies to be n*fmin
    #           not zero!
    # output:
    #     t: time vector
    #     x: data evenly spaced in time, with interval Ts
    # for input of size N, time data has size 2N+2

    v = xPSD*fmin/4 #variance for quadratures
    N = len(xPSD)
    vi = np.random.randn(N) # variance 1
    vq = np.random.randn(N)
    w = (vi + 1j*vq)*np.sqrt(v)

    # length of returned time sequence
    N_return = 2*(len(w)+1)

    # sampling time of returned time sequence
    Ts = 1/(N_return*fmin)

    # compute time vector
    x = np.fft.irfft(np.concatenate(([0], w, [0])),N_return)
    # add 0 amplitude at 0 frequency
    # add 0 amplitude at semi-alternate value
    # exact Nyquist frequency

    x = x*N_return
    # correct for inverse fft factor

    t = np.linspace(0,Ts*(N_return-1),N_return)
    # prepare time vector for plots

    return t, x

```

## Références

- [1] Harald CRAMÉR. “A century with probability theory : some personal recollections”. en. In : *The annals of Probability* 4.4 (1976), p. 509-546.
- [2] “IEEE Standard Definitions of Physical Quantities for Fundamental Frequency and Time Metrology - Random Instabilities”. In : *IEEE Std 1139-1999* (1999), 0\_1-. DOI : 10.1109/IEEESTD.1999.90575.
- [3] D.B. PERCIVAL et A.T. WALDEN. *Spectral Analysis for Physical Applications : multitaper and conventional univariate techniques*. Cambridge university press, 1993. ISBN : 978-0-521-43541-3. URL : <http://ebooks.cambridge.org/ebook.jsf?bid=CB09780511622762>.
- [4] D.J. THOMSON. “Spectrum estimation and harmonic analysis”. In : *Proceedings of the IEEE* 70.9 (sept. 1982), p. 1055-1096. ISSN : 0018-9219. DOI : 10.1109/PROC.1982.12433.
- [5] Albert EINSTEIN. “Méthode pour la détermination de valeurs statistiques d’observations concernant des grandeurs soumises à des fluctuations régulières”. In : *Compte rendu de la séance de la société suisse de physique* (fév. 1914), p. 254-257.
- [6] Norbert WIENER. “Generalized harmonic analysis”. en. In : *Acta Mathematica* 55 (1930), p. 112-258.
- [7] A. KHINTCHINE. “Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse”. de. In : *Mathematische Annalen* 109.1 (déc. 1934), p. 604-615. ISSN : 0025-5831, 1432-1807. DOI : 10.1007/BF01449156. URL : <http://link.springer.com/10.1007/BF01449156>.
- [8] Peter D. WELCH. “The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra : A method based on time averaging over short, modified periodograms”. In : *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics* 15.2 (juin 1967), p. 70-73. ISSN : 0018-9278. DOI : 10.1109/TAU.1967.1161901.
- [9] Frederic J. HARRIS. “On the Use of Windows for Harmonic Analysis with the Discrete Fourier Transform”. en. In : *Proceedings of the IEEE* 66.1 (jan. 1978), p. 51-63.
- [10] Gerhard HEINZEL, Albrecht RÜDIGER et Roland SCHILLING. “Spectrum and spectral density estimation by the Discrete Fourier transform (DFT), including a comprehensive list of window functions and some new at-top windows”. In : (2002). URL : [https://pure.mpg.de/pubman/faces/ViewItemOverviewPage.jsp?itemId=item\\_152164%7D](https://pure.mpg.de/pubman/faces/ViewItemOverviewPage.jsp?itemId=item_152164%7D).
- [11] D. SLEPIAN et H. O. POLLAK. “Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis and Uncertainty — I”. en. In : *Bell System Technical Journal* 40.1 (jan. 1961), p. 43-63. ISSN : 1538-7305. DOI : 10.1002/j.1538-7305.1961.tb03976.x. URL : <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/j.1538-7305.1961.tb03976.x/abstract>.
- [12] H. J. LANDAU et H. O. POLLAK. “Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis and Uncertainty — II”. eng. In : *Bell System Technical Journal* (1961). URL : <http://archive.org/details/bstj40-1-65>.

- [13] D. SLEPIAN. “Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier Analysis and Uncertainty — V : the discrete case”. en. In : *Bell System Technical Journal* 57.5 (1978). URL : <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/j.1538-7305.1961.tb03976.x/abstract>.
- [14] D. J. THOMSON. “Jackknifing Multitaper Spectrum Estimates”. In : *IEEE Signal Processing Magazine* 24.4 (juill. 2007), p. 20-30. ISSN : 1053-5888. DOI : 10.1109/MSP.2007.4286561.
- [15] Germán A. PRIETO. “The *Multitaper* Spectrum Analysis Package in Python”. en. In : *Seismological Research Letters* 93.3 (mai 2022), p. 1922-1929. ISSN : 0895-0695, 1938-2057. DOI : 10.1785/0220210332. URL : <https://pubs.geoscienceworld.org/srl/article/93/3/1922/612834/The-Multitaper-Spectrum-Analysis-Package-in-Python>.
- [16] William H. PRESS et al. “multitaper methods and slepian functions”. In : *Numerical recipes*. 13.4.3. Cambridge University Press, 2007. URL : <http://numerical.recipes/book/book.html>.
- [17] L. WANG. “A Review of Prolate Spheroidal Wave Functions from the Perspective of Spectral Methods”. en. In : *Journal of Mathematical Study* 50.2 (juin 2017), p. 101-143. ISSN : 1006-6837, 2617-8702. DOI : 10.4208/jms.v50n2.17.01. URL : [http://global-sci.org/intro/article\\_detail/jms/10005.html](http://global-sci.org/intro/article_detail/jms/10005.html).
- [18] James BREMER. “On the numerical evaluation of the prolate spheroidal wave functions of order zero”. en. In : *arXiv :2111.07509 [cs, math]* (nov. 2021). arXiv : 2111.07509. URL : <http://arxiv.org/abs/2111.07509>.
- [19] *How to measure accurately using the agilent combination analysers*. Rapp. tech. Agilent Note 4395/96-1. 1996. URL : <https://xdevs.com/doc/HP/pub/5966-2292E.pdf>.
- [20] *Measuring with modern spectrum analyzers*. Rapp. tech. Rohde & Schwartz Educational Note 1MA201\_09e. 2013. URL : [https://scdn.rohde-schwarz.com/ur/pws/dl\\_downloads/dl\\_application/application\\_notes/1ma201\\_1/1MA201\\_9e\\_spectrum\\_analyzers\\_meas.pdf](https://scdn.rohde-schwarz.com/ur/pws/dl_downloads/dl_application/application_notes/1ma201_1/1MA201_9e_spectrum_analyzers_meas.pdf).
- [21] *International vocabulary of metrology - fourth edition / draft*. Jan. 2021. URL : [https://www.bipm.org/documents/20126/54295284/VIM4\\_CD\\_210111c.pdf](https://www.bipm.org/documents/20126/54295284/VIM4_CD_210111c.pdf).
- [22] LIGO SCIENTIFIC COLLABORATION AND VIRGO COLLABORATION et al. “Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger”. In : *Physical Review Letters* 116.6 (fév. 2016), p. 061102. DOI : 10.1103/PhysRevLett.116.061102. URL : <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.061102>.
- [23] Frédéric de COULON. *Théorie et traitement des signaux*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes. Traité d’électricité VI. École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1996. ISBN : 2-88074-319-2.
- [24] S. J. ORFANIDIS. *Electromagnetic Waves and Antennas*. chapter 12. 2004. URL : <http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa/>.
- [25] Murat KUNT. *Traitement Numérique des Signaux*. T. XX. Traité d’électricité. École Polytechnique Fédérale de Lausanne : Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1996. ISBN : 2-88074-352-4.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Définition d'un bruit gaussien stationnaire</b>	<b>1</b>
1.1	Grandeurs continues . . . . .	1
1.2	Grandeurs numériques ou échantillonnées . . . . .	3
1.3	Bruit blanc et colorés . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Estimateurs de densités spectrale de bruit</b>	<b>4</b>
2.1	Largeur de bruit d'un filtre . . . . .	4
2.2	À partir de la fonction d'auto-corrélation . . . . .	4
2.2.1	Théorème d'Einstein-Wiener-Khintchine . . . . .	4
2.2.2	Utilisation . . . . .	5
2.3	Périodogramme . . . . .	5
2.4	Méthode de Welch . . . . .	6
2.4.1	Définition . . . . .	6
2.4.2	Utilisation avec des données échantillonnées . . . . .	7
2.4.3	Fenêtres et fuites spectrales . . . . .	8
2.5	Méthode de Thomson . . . . .	10
2.6	Comparaison des estimateurs de Welch et Thomson . . . . .	12
2.7	Spectres mixtes . . . . .	13
2.8	Analyseurs de spectres électriques . . . . .	13
2.9	Cohérence . . . . .	13
2.9.1	Définition . . . . .	13
2.9.2	Cross-corrélateurs . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Bruits dans les systèmes linéaires indépendants du temps</b>	<b>14</b>
3.1	Variables indépendantes . . . . .	14
3.2	Systèmes linéaires invariants dans le temps . . . . .	14
3.3	Bilan de bruit d'un instrument . . . . .	15
3.4	Gamme dynamique d'un capteur . . . . .	16
3.5	Bruits dans les boucles d'asservissement . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Rapport signal à bruit</b>	<b>18</b>
4.1	Signaux d'énergie finie . . . . .	18
4.1.1	Définition . . . . .	18
4.1.2	Rapport signal à bruit et filtrage . . . . .	19
4.1.3	Filtre adapté . . . . .	19
4.2	Signaux de puissance finie . . . . .	20
4.2.1	Contexte . . . . .	20
4.2.2	Définition . . . . .	20
4.2.3	Bruits planchers de référence . . . . .	20
4.2.4	Facteur de bruit d'un élément d'un système . . . . .	21
4.2.5	Formule de Friis . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Synthèse de bruit à densité spectrale donnée</b>	<b>23</b>
5.1	Moteur de Langevin . . . . .	23
5.2	Densités spectrales linéaires quelconques . . . . .	24