



**HAL**  
open science

# L'INVENTION DE LEIBNIZ : UN CALCUL POUR L'INTELLIGENCE DES LIGNES COURBES

Sandra Bella

► **To cite this version:**

Sandra Bella. L'INVENTION DE LEIBNIZ : UN CALCUL POUR L'INTELLIGENCE DES LIGNES COURBES. Guillaume Moussard. Histoires de calcul infinitésimal - De l'étude des courbes aux dérivées et aux intégrales, Ellipses, pp.61-83, 2022, 9782340073159. hal-03958687

**HAL Id: hal-03958687**

**<https://hal.science/hal-03958687>**

Submitted on 26 Jan 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Chapitre III

# L'INVENTION DE LEIBNIZ : UN CALCUL POUR L'INTELLIGENCE DES LIGNES COURBES

En octobre 1684, dans le journal savant *Acta Eruditorum*, Leibniz publie une « Nouvelle méthode pour chercher les *Maxima* et les *Minima*, ainsi que les tangentes, méthode que n'entravent pas les quantités fractionnaires ou irrationnelles, accompagnée d'un genre singulier de calcul qui s'y applique » [7]. Dans cet article, il présente son calcul en introduisant les toutes nouvelles notations  $dx$ ,  $dy$ ,  $dv$ , etc. pour les différentielles des quantités représentées par les lettres  $x$ ,  $y$ ,  $v$ , ..., puis fournit les règles de différentiation sans les justifier. Leibniz avance que sa méthode surpasse les autres méthodes calculatoires de tangentes. Parmi celles-ci, les plus connues sont celles d'abord de Pierre de Fermat (1601-1665) et de René Descartes (1596-1650), puis René-François de Sluse (1622-1685), Johan Hudde (1628-1704) et Christiaan Huygens (1629-1695). Dans un article publié en 1686, Leibniz montre comment son calcul peut aussi s'appliquer aux quadratures de figures géométriques [8]. Il introduit le symbole intégral que nous connaissons de nos jours.

Les années suivantes, l'application du calcul apparaît dans de nombreuses publications, non seulement par Leibniz mais aussi par d'autres mathématiciens européens, Jakob Bernoulli (1655-1705), Johann Bernoulli (1667-1748), Guillaume de L'Hospital (1661-1704), Pierre Varignon (1654-1722), Jakob Hermann (1678-1733), pour citer les plus actifs. Pour ces mathématiciens, le calcul de Leibniz est une méthode sans pareil pour étudier une courbe, c'est-à-dire déterminer ses tangentes, ses *extrema*, ses points singuliers, sa courbure, sa quadrature ou encore son centre de gravité. La connaissance de toutes ces propriétés constitue « l'intelligence » de la courbe. Le calcul s'applique également à l'étude des solides et de leurs propriétés, et apparaît comme un outil remarquable pour résoudre les problèmes de physique, de mécanique ou d'optique.

D'emblée, le calcul différentiel et intégral rivalise avec d'autres méthodes qui ont été vues au chapitre I. Un de nos buts est de montrer comment l'introduction d'un symbolisme, en étroite adéquation avec l'introduction de notions de plus en plus fines pour l'étude des courbes, a permis au calcul de Leibniz de s'imposer. Nous insistons sur les manières dont son développement est solidaire de la confrontation à des problèmes nouveaux ou qui n'avaient pas été résolus auparavant.

Le calcul différentiel et intégral tel qu'il est pratiqué par la génération contemporaine de Leibniz prendra au siècle suivant une nouvelle forme qui perdure *grosso modo* aujourd'hui dans notre enseignement. Dans cette dernière, l'introduction du concept de fonction conduit à privilégier une des variables au détriment de toutes les autres, ce qui n'est absolument pas le cas dans le calcul de Leibniz. Pour cette raison, nous nous attacherons ici à souligner les idées qui, malgré les changements introduits par la notion de fonction, demeurent fondamentales pour comprendre et faire comprendre les enjeux épistémologiques du calcul différentiel d'aujourd'hui.

Pour ce faire, dans une première partie nous analysons la manière dont la notion de différentielle est introduite par Leibniz dans son article inaugural d'octobre 1684, en insistant sur ce qui est nouveau mais aussi sur ce qui reste dans une continuité conceptuelle avec ses prédécesseurs. Nous montrons ensuite comment la confrontation au problème de déterminer les enveloppes de courbes a permis de faire émerger la notion clef de « quantité variable ». Aussi, la notion de « différentielle de différentielle », intimement liée à la détermination de la courbure, est une avancée conceptuelle. Nous analysons son introduction.

À l'aide des leçons reçues par Johann Bernoulli en 1692, L'Hospital expose, pour la première fois dans un traité, le calcul différentiel. Ce traité est publié en 1696 sous le titre *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* [14]. Il nous semble important de voir comment est organisée la présentation du nouveau calcul dans un traité destiné à l'enseignement.

Enfin, nous destinons un paragraphe aux leçons de calcul intégral de Johann Bernoulli. Nous montrons que l'introduction du symbolisme différentiel a conduit à un changement conceptuel à propos des indivisibles (chap. I).

## L'ARTICLE INAUGURAL (OCTOBRE 1684)

Il est intéressant de suivre de quelle manière Leibniz expose son algorithme dans l'article d'octobre 1684. En effet, bien que ce dernier ait été jugé confus ou laconique par les contemporains, Leibniz s'efforce d'introduire la notion de différentielle dans un cadre euclidien, dans lequel il la définit en s'appuyant sur la théorie des proportions. Ainsi, il se place dans une continuité conceptuelle avec ses prédécesseurs. Cependant, il s'agit ensuite de montrer que l'invention de son

écriture symbolique permet d'énoncer simplement les règles de différentiation et de les appliquer efficacement – « en trois lignes » – à la résolution de problèmes mathématiques ou physiques. À titre d'exemple, Leibniz applique son algorithme à la résolution du célèbre problème d'incidence et de réfraction d'un rayon entre deux milieux de densités différentes.

Leibniz a conçu sa méthode des tangentes au moins depuis 1675 comme peuvent en attester certains manuscrits [22]. Il est au fait des principales méthodes de tangentes – celles de Fermat, Descartes, Hudde ou Sluse – avec leurs qualités et leurs défauts. Dans ces méthodes algébriques, avant d'appliquer l'algorithme, il est nécessaire de transformer les égalités comportant des quantités fractionnaires ou irrationnelles en des égalités où n'apparaissent que des expressions algébriques. Or, ces transformations sont coûteuses en calcul [21]. Leibniz assure que sa méthode dispense de cet inconfort car les règles de différentiation s'appliquent directement aux expressions. C'est l'un des principaux apports de sa méthode.

Pour exposer sa méthode, il considère plusieurs courbes qu'il nomme  $VV$ ,  $WW$ ,  $YY$ ,  $ZZ$  d'axe commun  $AX$ . Les ordonnées sont  $VX$ ,  $WX$ ,  $YX$ ,  $ZX$ , qu'il note respectivement  $v$ ,  $w$ ,  $y$ ,  $z$  et  $AX$ , leur abscisse commune est notée  $x$ . Les tangentes à chacune des courbes au point d'abscisse  $x$  coupent l'axe respectivement en  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ .

Leibniz choisit arbitrairement un segment de droite qu'il note  $dx$  et qu'il représente en haut à droite du diagramme. Ce segment apparaît a priori comme une quantité finie. Il peut donc définir la différence de  $v$ , qu'il note  $dv$ , par l'égalité :  $\frac{dv}{dx} = \frac{v}{XB}$  et faire apparaître  $dv$  comme la quatrième proportionnelle de trois grandeurs, susceptible ainsi d'être construite à l'aide de la règle et du compas, mais qu'il ne représente pas dans le diagramme.

Les différences  $dw$ ,  $dy$ ,  $dz$  sont définies de manière analogue. Le « d » signifie « différence » ou « différentielle », ces deux termes étant utilisés l'un pour l'autre. Leibniz considère qu'une différence est une quantité finie mais qui cependant peut être rendue plus petite que toute donnée. Il n'ignore pas que cette propriété peut être interprétée comme contradictoire. Ainsi, lorsque son calcul est attaqué sur ses fondements, il avance qu'il faut considérer les différentielles comme des « fictions utiles » qui permettent de démontrer directement et sans détours, et qu'il est par ailleurs toujours possible de démontrer un résultat obtenu par son calcul à la manière des Anciens, c'est-à-dire par une démonstration *ad absurdum* (chap. 1) dans laquelle on utilise des quantités finies que l'on peut rendre aussi petites que l'on veut.

Leibniz énonce ensuite les règles de différentiation sans les démontrer ici. Les quantités sont implicitement supposées positives. Si  $a$  est constante,  $da$  est nulle et  $dax$  est égal à  $adx$ , puis si  $v = z - y + w + x$  alors :

$$dv = \overline{dz - y + w + x} = dz - dy + dw + dx$$

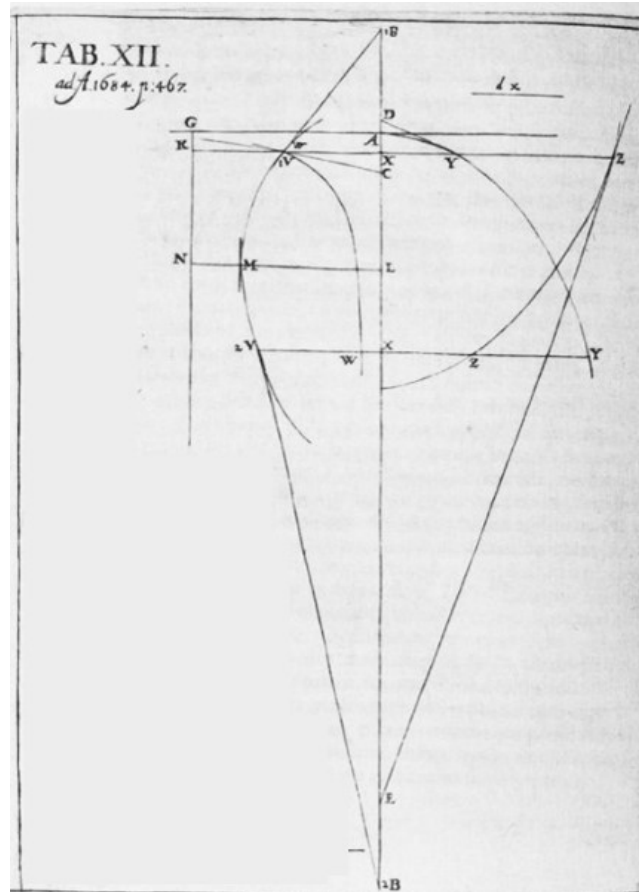


Fig. 1 : Courbes  $VV$ ,  $WW$ ,  $YY$ ,  $ZZ$  et la différence  $dx$  [8, p. 467]

si  $y = xv$  alors :

$$dy = d\bar{xv} = vdx + xdv$$

si  $z = \frac{v}{y}$  alors :

$$dz = \frac{\pm vdy \mp ydv}{yy}$$

et enfin, il donne la formule pour les racines de puissances, c'est-à-dire une expression du type  $\sqrt[q]{x^p}$  dans laquelle  $p$  et  $q$  sont des entiers :

$$d(\sqrt[q]{x^p}) = \frac{p}{q} \sqrt[q]{x^{p-q}} dx$$

Ces règles opératoires s'appliquent donc directement aux expressions et évitent la considération de l'équation dans sa globalité, ce qui résout l'inconfort des méthodes antérieures. Pour illustrer son efficacité opératoire, il choisit d'appliquer l'algorithme non pas sur un exemple « simple » mais au contraire sur

un exemple d'équation de courbe où sont mêlées des constantes  $a, b, c$ , etc. et les indéterminées  $x$  et  $y$ , et des quantités fractionnaires et irrationnelles :

$$\frac{x}{y} + \frac{(a + bx)(c - xx)}{(ex + fxx)^2} + ax\sqrt{gg + yy} + \frac{yy}{\sqrt{hh + lx + mxx}} = 0$$

Il pose :

$a + bx = n$ ,  $c - xx = p$ ,  $ex + fxx = q$ ,  $gg + yy = r$ ,  $hh + lx + mxx = s$ ,  
pour obtenir l'équation :

$$\frac{x}{y} + \frac{np}{qq} + ax\sqrt{r} + \frac{yy}{\sqrt{s}}$$

Il prend la différence de chacun des termes de l'équation précédente :

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{xdy + ydx}{y^2}, \quad d\left(\frac{np}{qq}\right) = \frac{ndp + pdn}{n^2}, \quad d(ax\sqrt{r}) = \frac{axdr}{2\sqrt{r}} + a\sqrt{r}dx, \quad \text{et enfin}$$

$$d\left(\frac{yy}{\sqrt{s}}\right) = \frac{yyds + 4ysdy}{2s\sqrt{s}}$$

En tenant compte du fait que :  $dn = bdx$ ,  $dp = -2xdx$ ,  $dq = edx + 2fxdx$ ,  $dr = 2ydy$ , et  $ds = ldx + 2mxdx$ , il obtient l'équation dans laquelle n'apparaissent plus que les différentielles  $dx$  et  $dy$ . Par cet exemple, il montre qu'il n'a pas besoin de transformer les équations comme le faisaient ses prédécesseurs, chaque terme étant traité indépendamment, puis additionné aux autres<sup>1</sup>. L'algorithme permet ainsi de manière universelle d'associer à toute courbe, dont l'équation est connue, une autre équation impliquant des différentielles, que Leibniz appelle « équation différentielle ».

Une fois les règles de calcul énoncées, Leibniz avance que sa méthode permet de trouver les tangentes et les *extrema* de tous les types de courbes, celles dont l'équation peut se ramener à une équation polynomiale – sans que cette transformation soit désormais nécessaire – et les autres, qu'il nomme « transcendantes ». En effet, il suffit pour cela d'associer à la courbe son équation différentielle obtenue grâce aux règles de différentiation, puis de considérer que trouver la tangente à une courbe revient à tracer un segment entre deux points infiniment proches. Expliquons.

---

<sup>1</sup> Cela aurait nécessité ici de mettre les deux derniers termes de l'équation proposée dans un seul membre puis d'effectuer plusieurs élévations au carré et des réductions au même dénominateur afin d'obtenir une équation algébrique sur laquelle appliquer l'algorithme d'une quelconque méthode calculatoire contemporaine.

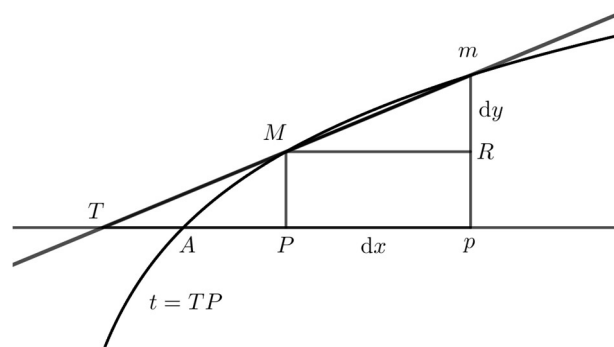


Fig. 2 : Triangle caractéristique  $MmR$  semblable au triangle fini  $MTP$

L'égalité  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{t}$ , dans laquelle  $y = PM$  est l'ordonnée de la courbe et  $t$  la sous-tangente correspondante, exprime la similitude entre le triangle fini  $MTP$  et le triangle  $MmR$  (Fig. 2). Lorsque  $M$  et  $m$  sont infiniment proches,  $dy$  et  $dx$  sont des infiniment petits. Dans ce cas, Leibniz assure que trouver la tangente revient à tracer le segment  $Mm$ . Il suppose implicitement que la similitude entre  $MTP$  et  $MmR$  est conservée même lorsque ce dernier – baptisé « triangle caractéristique » – devient infiniment petit. Leibniz affirme que le segment  $Mm$  constitue un côté d'un « polygone infinitangulaire », ce dernier étant à ses yeux équivalent à la courbe. Cette considération n'est pas une idée nouvelle et nous reviendrons sur cette supposition plus en avant.

Leibniz souligne que son calcul permet de déterminer la tangente à des courbes transcendentes comme la cycloïde, et de manière générale celles dont l'ordonnée  $z$  est transcendante et s'exprime par une relation avec l'ordonnée  $y$  d'une autre courbe dont on connaît la tangente, par exemple lorsque l'ordonnée s'exprime par une relation avec les portions d'une autre courbe (abscisse curviligne). Il explique qu'il suffit d'exprimer  $dz$  à l'aide de  $dy$  [8, p. 470-471]. Cependant, il ne développe aucun exemple, contrairement à ce que fait L'Hospital dans son traité. En effet, ce dernier traite ce cas dans la proposition 2 de la section II de son traité qui énonce la manière de trouver la tangente lorsque les abscisses sont des « portions d'une ligne courbe » [14, p. 17]. Un de ses premiers exemples est celui de la cycloïde.

Pour rappel, la cycloïde est la trajectoire d'un point fixe  $A$  sur un cercle qui roule sans glisser sur une droite  $BC$ . L'ordonnée d'un quelconque de ses points dépend de la portion de cercle qui a roulé, autrement dit l'ordonnée  $z$  est égale à l'arc de cercle  $y$  correspondant.

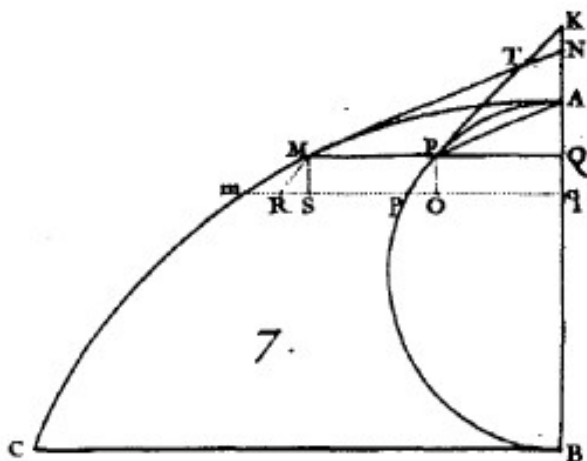


Fig. 3 : Tangente à la cycloïde par L'Hospital [14, planche 1]

$MP = z$  est égal à l'arc  $AP = y$  (fig. 3), la sous-tangente  $t = \frac{zdy}{dz} = NQ$  est donc égale tout simplement à  $y$ , ce qui permet une construction aisée de la tangente que L'Hospital décrit : il suffit de mener la parallèle à la corde  $AP$  passant par  $M$  qui coupera la tangente connue au cercle  $PK$  en  $T$ . Il démontre que cette construction est valable par des arguments de géométrie élémentaire.

#### LE PROBLÈME DES ENVELOPPES DES COURBES ET LA NOTION DE VARIABLE

La confrontation au problème de la détermination des enveloppes de courbes possède un intérêt épistémologique notable puisque, comme on va le voir, son traitement nécessite d'introduire la notion essentielle de quantité variable.

En décembre 1692, animé par la lecture d'un article de Leibniz paru aux *Acta Eruditorum* en avril de la même année, L'Hospital se confronte à un problème inédit : il s'agit de trouver une courbe tangente à une famille de paraboles dont les sommets passent par une courbe donnée  $ABC$ , par exemple une ellipse. Leibniz a publié deux articles, celui d'avril 1692 et un autre en juillet 1694, dans lesquels il présente une méthode qui, à l'aide de son calcul, permet la construction d'une courbe tangente à une infinité d'autres lignes rangées par ordre. Il s'agit, en langage moderne, de trouver une enveloppe de courbes [10, p. 168-171], [11, p. 311-316], [12, p. 210-221, 268-281]. Le premier article ne contient aucun calcul, Leibniz présente les nouvelles notions accompagnées d'une terminologie propre<sup>2</sup>. Le deuxième article est le pendant calculatoire du premier. Ce type de

<sup>2</sup> Pour une étude détaillée de ces deux articles, on pourra consulter [17] et [20].



problème a déjà été résolu dans des cas particuliers. En effet, Tschirnhaus a résolu celui de la caustique qui constitue l'enveloppe des rayons lumineux subissant une réflexion ou une réfraction pour certaines courbes, alors que Huygens a traité celui de la développée qui est l'enveloppe des droites perpendiculaires issues de la développante.

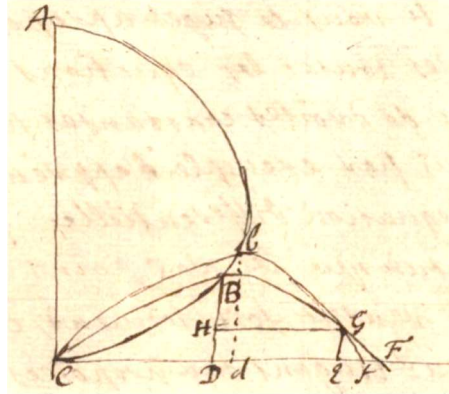


Fig. 4 : Lettre de L'Hospital à Leibniz du 24 février 1693, [Ms LBr 560, f° 23v°, Gottfried Wilhelm Leibniz Bibliothek Hannover]

Leibniz souhaite proposer une méthode générale qui traiterait non seulement tous ces cas particuliers, mais bien d'autres encore. À cette fin, il généralise la notion « d'ordonnées » à toutes sortes de lignes – droites ou courbes. Pour rappel, le terme « ordonnée » est introduit pour désigner la construction « ordonnée » de droites, c'est-à-dire de segments. Cet ordre est exprimé par l'équation de la courbe qui est chez Descartes une équation algébrique. Dans le cas du problème sur lequel échangent Leibniz et L'Hospital, les paraboles sont les « lignes ordonnées » et cet ordre peut être décrit par une équation.

Pour trouver une enveloppe de « lignes ordonnées », Leibniz part de l'idée selon laquelle lorsque celles-ci sont situées à une distance infiniment petite, elles peuvent être considérées comme concourantes. Grâce à cette considération, il est facile d'obtenir l'enveloppe en prenant « dans l'ordre » ces points d'intersection. Il peut être montré qu'en chacun de ses points la courbe ainsi formée est tangente à chacune des lignes ordonnées. Cet ordre est exprimé par une équation commune dans laquelle apparaissent des « constantes absolues » – qui ne changent pas d'une courbe à l'autre – et des « paramètres » – qui au contraire varient et sont différentiables. Leibniz explique que pour trouver une enveloppe, il est nécessaire de transformer les données pour qu'un seul paramètre variable reste dans l'équation commune. Ainsi, le procédé de génération ordonnée demeure parfaitement « déterminé ». Il compare, pour les distinguer, le problème ordinaire des tangentes avec celui de l'enveloppe des courbes. Dans le premier cas, ce sont les coordonnées des points qui varient et leurs différentielles permettent d'obtenir la valeur de la sous-tangente.

Dans l'article de 1694, Leibniz met à l'épreuve les nouvelles notions introduites en traitant calculatoirement la recherche d'une enveloppe de cercles. Il considère une famille de cercles de centres  $P$  et de rayons  $PC$ . Ces cercles sont liés par une relation faisant intervenir un paramètre qui varie lorsqu'on passe d'un cercle à l'autre. Plus précisément, Leibniz considère que le rayon  $PC = c$  de chacun des cercles est l'ordonnée d'un point d'abscisse  $AP = b$  d'une parabole  $AEE$  de côté droit  $a$  de sorte que  $a \times AP = PE^2$ , ou encore :

$$ab = cc$$

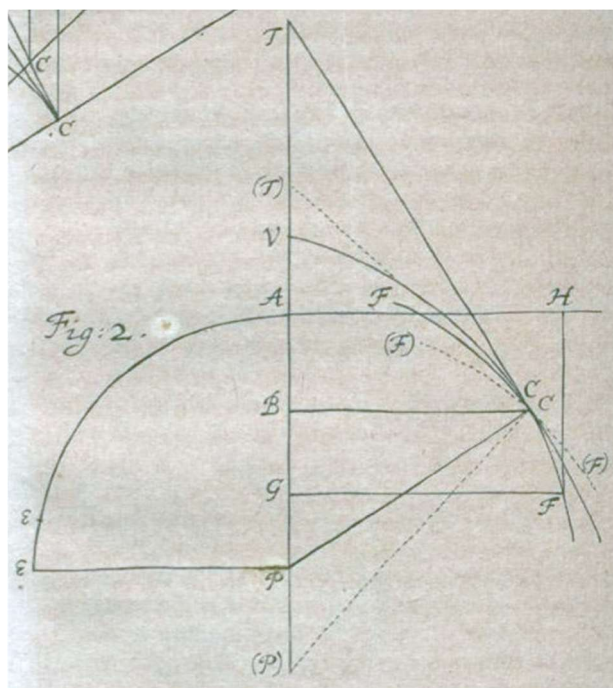


Fig. 5 : Enveloppe d'une famille de cercles [10, table VII]

Leibniz remarque que  $a$  est une constante commune à tous les cercles, elle est donc une constante absolue. En notant les coordonnées d'un point quelconque  $F$  d'un des cercles par  $FG = y$ ,  $FH = x$ , l'équation du cercle de centre  $P$  et de rayon  $PC$  est :

$$x^2 + y^2 + b^2 = 2bx + c^2 \quad (1)$$

En éliminant  $c$  de (1), il trouve l'équation :

$$x^2 + y^2 + b^2 = 2bx + ab \quad (2)$$

Dans cette dernière équation, le passage d'un cercle à un autre s'obtient en faisant varier  $b$ , de sorte que cette équation correspond à l'équation commune à tous les cercles dans laquelle seul un paramètre varie. Pour trouver l'enveloppe des cercles, il suffit donc de différentier l'équation (2) par rapport à  $b$  :

$$2bdb = 2xdb + adb \text{ ou } 2b = 2x + a \text{ soit } b = x + \frac{a}{2}$$

En remplaçant  $b$  dans l'équation commune on obtient :

$$y^2 = ax + \frac{a^2}{4}$$

L'enveloppe de cette famille ordonnée de cercles est donc une parabole.

La recherche d'enveloppes de courbes a conduit Leibniz à introduire des vocables pour désigner des notions nouvelles, notamment celle de « variable » dont il souligne le caractère relatif. Il montre que le calcul différentiel est le plus propre à résoudre de manière générale la détermination d'enveloppes car il dispose de l'outil calculatoire qui permet de discriminer ce qui est variable de ce qui ne l'est pas, idée sur laquelle repose la résolution du problème fondamental de la recherche d'enveloppe des courbes. Aussi, dans les problèmes où sont impliquées des différentielles d'ordre deux, il est aussi essentiel de choisir quelle variable varie uniformément, c'est-à-dire pour laquelle la différentielle est constante car ce choix induit des simplifications notoires. Cet aspect, qui caractérise le calcul différentiel à ses débuts, disparaîtra avec l'introduction de la notion de fonction et le caractère privilégié d'une des variables [18].

## DIFFÉRENTIELLE DE DIFFÉRENTIELLE POUR MESURER LE COURBE

La notion de convexité et celles qui l'accompagnent – courbure, inflexion – sont des notions qualitatives avant l'invention du calcul différentiel, qui va apporter un traitement quantitatif. C'est une des principales avancées du calcul différentiel.

### CONTACT ET OSCULATION

La notion de point d'inflexion apparaît dans le cas particulier de la conchoïde de Nicomède. Les géomètres du XVII<sup>e</sup> siècle redécouvrent cette courbe, connue depuis l'Antiquité, en y appliquant leurs méthodes de détermination des tangentes. La conchoïde est obtenue en faisant tourner une tige autour d'un point fixe (fig. 6). La tige ( $IA$ ) intercepte une droite fixe ( $KG$ ). La courbe est le lieu des points qui sont à une distance fixe du point d'intersection avec la droite fixe, par exemple ici  $LN = MB$ .

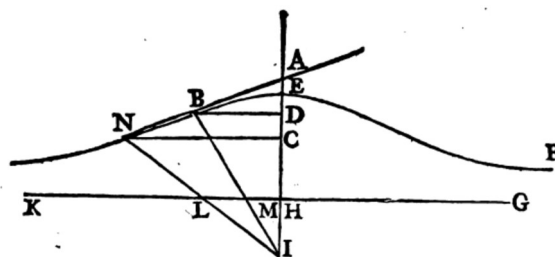


Fig. 6 : Tangente et point d'inflexion de la conchoïde [5, p. 70]

Dans une lettre à Fermat, Roberval explique qu'en cherchant les tangentes à la conchoïde, il a observé deux points pour lesquels « on ne peut pas mener de tangentes »<sup>3</sup>. Fermat use du terme *punctum inflexionis* dans un écrit qui daterait probablement de 1640 [5, p. 73] et dans lequel il fournit une méthode pour trouver un point d'inflexion de la conchoïde en considérant que ce dernier réalise un *extremum* de l'angle entre la tangente et l'axe des abscisses [15, p. 67].

Dans son article inaugural d'octobre 1684, Leibniz présente très rapidement le lien entre les « différences des différences [*differentiae differentiatum*] » et la convexité par le fait que si, quand les ordonnées croissent, leurs différences croissent aussi alors la courbe est convexe<sup>4</sup>. En particulier, il fournit la condition nécessaire pour trouver les points d'inflexion [*puncta flexus contrarii*] mais sans l'illustrer.

Pendant la première moitié du XVII<sup>e</sup> siècle, la notion de courbure apparaît souvent en lien avec des problèmes techniques. Par exemple, Descartes, cherchant à résoudre des problèmes de taille de verre, est amené à examiner les différentes courbures de roues et opte pour la forme hyperbolique<sup>5</sup>. De même, dans des problèmes d'optique, lorsqu'il s'agit d'expliquer pourquoi un système de dioptries ne permet pas de réaliser la lentille capable de donner l'image d'un objet étendu, Descartes l'interprète par « l'inégalité de courbure » [4, t. 6, p. 186] d'un point à un autre dans l'ellipse ou l'hyperbole alors qu'elle demeure constante pour le cercle ou la droite. Comme l'écrit justement Pierre Costabel, il s'agit d'un début de « quantification de la qualité du courbe » mais qui reste tenue [19, p 159-166].

En juin 1686, Leibniz publie l'article intitulé « Réflexions originales sur la nature de l'angle de contact et celui d'osculation et sur leur emploi en mathématique pratique, pour remplacer des figures compliquées par d'autres plus

<sup>3</sup> Lettre de Roberval à Fermat du 11 octobre 1636 [6, t. II, p. 82].

<sup>4</sup> Règle valable, comme le fait remarquer Parmentier, seulement lorsque l'on considère les valeurs absolues des accroissements [12, p. 108].

<sup>5</sup> Pour la description de l'appareil de taille de verre : lettre du 26 octobre 1629 de Ferrier à Descartes et pour les précisions techniques apportées par Descartes : lettre du 13 novembre 1629 [4, t. 1, p 38-69].

simples qui en tiennent lieu » [9, p. 122-125]. Dans cet article ne figure aucune expression différentielle. Il s'agit de fournir des notions qui vont permettre d'une part d'estimer la « courbure » d'une courbe – la notion de tangence n'y suffisant pas – et d'autre part, de distinguer les différents types de contact entre deux courbes.

Leibniz rappelle que la considération « de parties infiniment petites » d'une courbe fournit la tangente et permet d'étudier sa direction, car la tangente est la droite « la plus simple ayant même direction en un point donné ». L'angle que fait la tangente avec la courbe est appelé l'angle de contact. Il est le plus petit des angles entre une courbe et une droite. Pour étudier « les variations de la direction », autrement dit, *la courbure* » [12, p. 122], il explique qu'il faut considérer parmi les cercles tangents celui qui va « embrasser [*osculari*] » le mieux la courbe. Chacun de ces cercles a son centre sur la normale et forme un angle curviligne avec la tangente. Comment savoir lequel embrasse au mieux la courbe ?

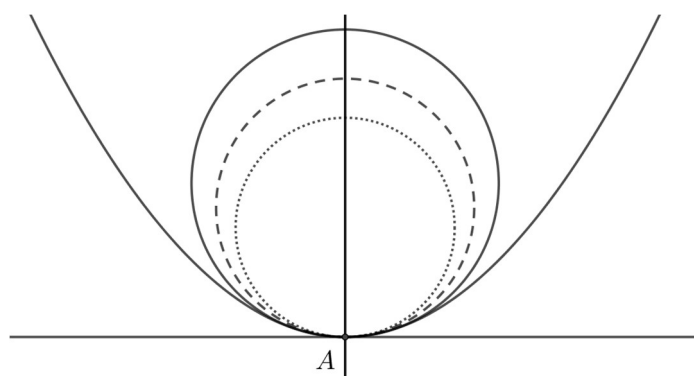


Fig. 7 : Cercles tangents au point A, cercle osculateur et angle d'osculation

Pour cela, Leibniz explique qu'il faut considérer celui dont l'angle entre la courbe et le cercle est minimal. Il introduit ainsi une nouvelle notion d'angle : de la même manière que l'angle de contact, « l'angle d'osculation » est le plus petit des angles entre une courbe et ses cercles tangents. Aussi, de la même manière qu'aucune droite ne peut être intercalée entre le cercle et la tangente, aucun arc de cercle ne peut passer entre le cercle d'osculation et la courbe. Le rayon du cercle osculateur permet de fournir une mesure de la courbure.

Leibniz s'efforce de respecter le cadre euclidien lorsqu'il introduit ces nouvelles notions afin qu'elles apparaissent comme pouvant être traitées comme des grandeurs. Cependant, il définit l'angle d'osculation comme étant un plus petit sans fournir le moyen de comparer, en tant que grandeurs homogènes, les angles entre un cercle et une courbe.

L'introduction de la notion d'osculation permet à Leibniz de présenter distinctement les différents degrés de contact entre deux courbes et de les estimer par ordre. Lorsqu'elles se croisent, il estime qu'on peut considérer qu'elles

forment le même angle que celui formé par leurs tangentes puisque la différence réside dans un angle de contact qui est infiniment petit au regard de l'angle rectiligne. De même, lorsque deux courbes sont tangentes, on peut considérer qu'elles forment le même angle que l'angle de contact circulaire de leurs cercles osculateurs, puisque la différence réside dans un angle d'osculution qui est infiniment petit par rapport à un angle de contact. Comme le souligne Leibniz, les degrés d'osculution peuvent varier à l'infini. À chaque degré d'osculution correspondra une formule dans laquelle les différentielles impliquées auront un degré inférieur ou égal au degré d'osculution.

Leibniz assure que ses réflexions conduisent à des applications utiles et pratiques, notamment celle de remplacer un arc d'une courbe « compliquée » – par exemple dont le tracé est difficilement réalisable par un appareil – par un arc du cercle osculateur. Ainsi, en catoptrique ou dioptrique, un arc de cercle « tient lieu de parabole, d'hyperbole ou d'ellipse » [12, p. 124].

Dans les articles de 1686 et 1692, Leibniz ne fournit aucune formule permettant de calculer le rayon de courbure, et pour cause, il ne les connaît pas.

#### REPRÉSENTER LES DIFFÉRENTIELLES POUR DÉMONTRER

En juin 1694, Jakob Bernoulli publie un article concernant la « courbe élastique » dont la particularité est qu'en tout point la courbure est proportionnelle à la distance à une droite fixe [1, 262-270]. Avant de traiter la courbe elle-même, il fournit, sous le nom de « théorèmes dorés », six formules pour le rayon de courbure  $r$  (trois en coordonnées cartésiennes et trois en coordonnées polaires). Ainsi, l'expression du rayon de courbure change selon le choix de la variable à variation constante :  $ds$ ,  $dx$  ou  $dy$  constante,  $x$  désignant l'abscisse,  $y$  l'ordonnée et  $s$  l'abscisse curviligne. Pour les formules en coordonnées cartésiennes, il obtient :

$$r = \frac{dxds}{dy} (dds = 0), r = \frac{ds^3}{dx dy} (ddx = 0) \text{ et } r = \frac{ds^3}{dy dx} (ddy = 0)$$

Seules les formules en coordonnées cartésiennes sont démontrées. Dans chacune des démonstrations, la figure joue un rôle qui n'est pas purement illustratif. De fait, le statut de la figure en relation au processus démonstratif est un aspect important de la pratique du calcul leibnizien à ses débuts comme la démonstration suivante de la première formule le montre.

Jakob Bernoulli considère une courbe  $abc$  dont  $ab$  et  $bc$  sont des éléments de courbe infiniment petits qu'il prend de longueurs égales et qu'il note  $ds$ . Ainsi  $dds = 0$ .  $bg$  est le prolongement du segment  $ab$  – supposé confondu avec l'arc  $ab$  – il est donc supposé être tangent à la courbe en  $a$  et  $b$  étant infiniment proches, ils sont supposés être sur le même cercle d'osculution dont le rayon, perpendiculaire à  $ab$  et de longueur  $r$ , est  $fa$  ou  $fb$ . Sur sa figure, les axes ne sont pas représentés mais les coordonnées étant cartésiennes,  $bl$  et  $nc$  sont des

différentielles des  $y$  et le segment  $ho = bl - nc = hm - nc$  représente la différentielle seconde  $ddy$ . Ainsi Jakob Bernoulli « marque » sur la figure les « différences secondes », ce qui lui est précieux pour la démonstration qu'il veut mener. Il considère les deux paires de triangles semblables  $hcb$  et  $abf$  et  $bmc$  et  $hoc$  ( $ds$  constant). Ainsi :

$$\frac{ho}{bc} = \frac{ho}{hc} \times \frac{hc}{bc} = \frac{bm}{bh} \times \frac{ab}{bf} = \frac{al}{ab} \times \frac{ab}{bf} = \frac{al}{bf} = \frac{dx}{r}$$

Donc :

$$\frac{ddy}{ds} = \frac{dx}{r}$$

On a :

$$mn = ddx, ho = ddy \text{ et } ds \text{ est constant}$$

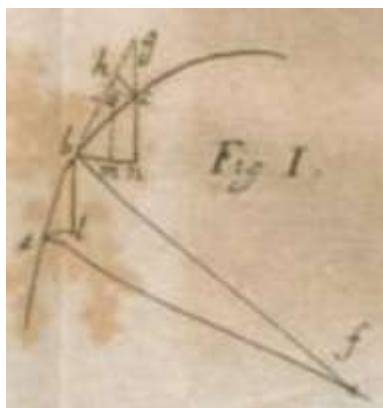


Fig. 8 : Recherche du rayon de courbure en coordonnées cartésiennes [1, planche VI]

Ce dernier exemple montre que le calcul différentiel à ses débuts possède un fort ancrage géométrique et est loin d'être, pour les mathématiciens contemporains, un pur calcul formel. Les différentielles figurées sont utiles à la démonstration.

Dans son traité, L'Hospital consacre trois pages à décrire les différents « marquages » des différentielles secondes sur la figure. Cela lui semble important de fournir une représentation géométrique des différentielles. Comme on le verra, il prend soin aussi de le faire avant pour les différences premières.

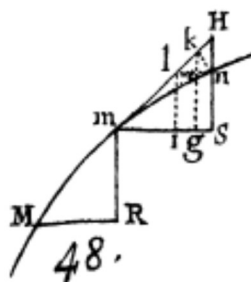


Fig. 10 : Marquage des différences secondes, avec  $dx$  constant [14, planche 4]

En coordonnées cartésiennes, L'Hospital considère trois points infiniment proches  $M, m$  et  $n$ .  $H$  est l'intersection de la droite  $nS$ , parallèle à  $mR$ ,  $k$  est l'intersection de  $Mm$  et de l'arc de centre  $m$  et de rayon  $mn$ . La droite  $nl$  est parallèle à  $mS$ ,  $li$  et  $kcg$  sont parallèles à  $Sn$ . La section I avait montré comment lire sur la figure, entre autres, les différences de l'abscisse :  $dx = MR$  ou  $mS$ , de l'ordonnée :  $dy = mR$  ou  $nS$  et de l'arc :  $du = Mm$  ou  $mn$ . Pour pouvoir « marquer » les différences secondes, L'Hospital explique qu'il faut supposer qu'une des trois différences est constante par rapport aux deux autres. Il traite chacun des trois cas. Si par exemple la variable  $dx$  est constante alors  $MR = mS$  et les triangles  $MRm$  et  $mSH$  sont « égaux », de sorte que la différence seconde des ordonnées est marquée par le segment  $Hn$  puisque  $Hn = Rm - Sn$ , et celle de l'arc  $ddu$  par  $Hk$  puisque  $Hk = Hm - Mm$ . Les deux autres marquages sont obtenus par une démarche similaire.

## LES ÉLÉMENTS DU CALCUL DANS LE TRAITÉ DE L'HOSPITAL

Leibniz considère que les premiers articles parus dans les *Acta Eruditorum* décrivant le nouveau calcul ne sont pas suffisants pour exposer l'ampleur de sa nouvelle analyse qui traite les infiniment petits. Il forme le projet d'un ouvrage collectif – il sollicite les frères Bernoulli et L'Hospital entre autres – qu'il intitule par avance *Scientia infiniti*. Ce projet ne verra pas le jour, cependant, par son traité *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, L'Hospital l'accomplit en partie. Il s'agit du premier ouvrage qui traite d'analyse leibnizienne, il est écrit en français. Sa structuration s'inspire de la tradition de Port-Royal qui préconise de suivre un ordre naturel lorsqu'il s'agit de composer un ouvrage d'enseignement. En particulier, L'Hospital s'attache, dans la première section [14, p. 1], à fournir explicitement les définitions et les postulats sur lesquels le calcul différentiel s'appuie. Cette section est donc dédiée aux « éléments » du calcul différentiel. Mise à part celle-ci, chaque section prend la forme d'énoncés de méthodes pour traiter des problèmes généraux. Chaque problème est illustré par de nombreux exemples. La plupart – sauf pour les deux dernières – ont un intitulé qui commence par « Usage du calcul des différences



pour ». Ainsi l'ouvrage est clairement structuré selon la complexité croissante de problèmes généraux résolubles à l'aide du calcul différentiel. Le problème de la recherche des enveloppes des courbes est à la fois le plus complexe et le plus général, et sa résolution occupe donc une des dernières sections intitulée « Usage du calcul des différences pour trouver les points des lignes courbes qui touchent une infinité de lignes données de position, droites ou courbes » [14, p. 131-144]. La notion de « quantité variable », cruciale pour la résolution de ce dernier, est donc une notion fondamentale que le calcul différentiel capture. Il fallait la consacrer, c'est ce que L'Hospital repère et effectue pour la première fois dans la première section de son traité :

*On appelle quantités variables celles qui augmentent ou diminuent continuellement ; & au contraire quantités constantes celles qui demeurent les mêmes pendant que les autres changent. Ainsi dans une parabole les appliquées et les coupées<sup>6</sup> sont des quantités variables, au lieu que le paramètre<sup>7</sup> est une quantité constante. [14, p. 1]*

L'accent mis sur le caractère continu de la variation lui sert immédiatement après à définir le terme « différence » :

*La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement, en est appelée la Différence. [14, p. 2]*

Cette définition est immédiatement illustrée par une figure sur laquelle sont représentées les différences utiles à l'étude d'une courbe quelconque  $AMB$ . Sur la figure, les points  $M$  et  $m$  sont supposés infiniment proches. Les différences sont construites par des moyens de géométrie élémentaire. Cette manière de présenter les différences est à souligner car elle fait apparaître les différences comme des objets géométriques au même titre que les grandeurs ordinaires. Par exemple, il trace une perpendiculaire à  $PM$  passant par  $M$  qui coupe  $pm$  en  $R$  :  $Rm$  figure la différence des ordonnées alors que  $Pp$  figure la différence de  $AP$ . De même, en traçant un « petit » arc de cercle de centre  $A$  et de rayon  $AM$  qui coupe  $Am$  en  $S$ , il figure la différence  $Sm$  de  $AM$ <sup>8</sup>. La représentation des différences résulte de gestes du géomètre maniant la règle et le compas. Bien que figurées et prenant ainsi une connotation statique, elles proviennent de la variation de position entre le point  $M$  et le point  $m$ , dont découlent les variations infiniment petites d'ordonnée, ou d'abscisse, ou d'arc, ou encore d'aires.

<sup>6</sup> Le terme « appliquée » est synonyme au sens courant d'ordonnée et le terme « coupée » est la traduction du terme latin *abscissa*, participe passé de *abscidere* [couper].

<sup>7</sup> Le terme « paramètre » a ici son sens le plus usuel : il s'agit d'une quantité constante qui permet la construction de la courbe comme l'excentricité d'une ellipse.

<sup>8</sup> D'autres lectures sont possibles : le « triangle »  $MAM$  de base l'arc  $Mm$  est la différence de l'espace curviligne  $AM$  et  $MPpm$  est la différence de l'espace mixtiligne compris entre les droites  $AP$ ,  $PM$ , et l'arc  $AM$ .

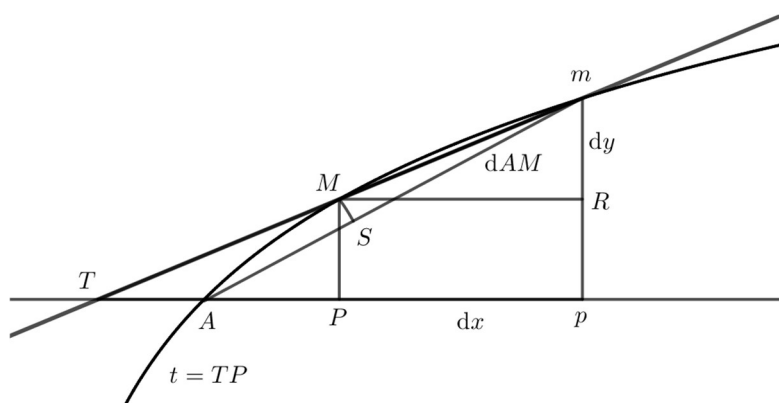


Fig. 9 : Différentielles figurées, réalisée à partir de [14, planche 1]

Les deux définitions sont immédiatement suivies de « demandes ou suppositions ». Au nombre de deux, elles constituent les seules sur lesquelles s'appuie l'analyse des courbes au moyen du calcul différentiel.

La première demande énonce que l'on puisse prendre l'une pour l'autre deux quantités lorsqu'elles ne diffèrent que d'une quantité infiniment petite [14, p. 2]. Cette demande définit un nouveau type d'égalité entre deux quantités en usant de l'expression « quantité infiniment petite ». Aucun critère n'est fourni pour décider ce qui est infiniment petit. Il est important cependant de remarquer que cette demande est essentielle pour justifier certaines des règles de différentiation sur lesquelles justement est fondée la pratique de l'algorithme. Dans ce sens, il est utile d'observer comment L'Hospital justifie celle du produit [14, p. 4]. Lorsque les quantités variables  $x$  et  $y$  deviennent respectivement  $x + dx$  et  $y + dy$ , le produit  $xy$  devient :

$$(x + dx)(y + dy) = xy + xdy + ydx + dx dy.$$

Comment rendre compte de ce que  $dx dy$  est une « quantité infiniment petite par rapport aux autres » ? L'Hospital compare  $dx dy$  à  $ydx$  en comparant chacune de ces quantités à la différence  $dx$  :

*si l'on divise  $ydx$  &  $dx dy$ , par  $dx$  on trouve d'une part  $y$ , & de l'autre  $dy$  qui en est la différence, & par conséquent infiniment moindre qu'elle. [14, p. 4]*

L'observation des rapports de chacune des deux quantités au tiers  $dx$  montre que l'une  $\frac{dx dy}{dy} = dx$  est la différence de l'autre  $\frac{y dx}{dx} = y$ . Or, par la définition de différence énoncée plus haut,  $\frac{dx dy}{dy}$  est donc « infiniment moindre » que  $\frac{y dx}{dx}$ . Ainsi, on peut prendre  $xdy + ydx$  pour  $xdy + ydx + dx dy$ .

La deuxième demande concerne le fait de supposer une courbe « comme un polygone d'un nombre infini de côtés infiniment petits ». Les angles que forment les côtés entre eux déterminent la courbure de la courbe [14, p. 3]. Cette supposition appliquée au cercle est explicite au moins à partir de la Renaissance. Par exemple, certains auteurs de cette époque – dont Christopher Clavius (1538-1612) et François Viète (1540-1603) – interprètent ainsi la proposition 2 du livre XII des *Éléments* d'Euclide. Pour rappel, cette proposition énonce que les aires de deux cercles donnés sont dans le même rapport que les carrés de leurs diamètres [3, t. 4, p. 263-268]. Euclide fait un double raisonnement par l'absurde en construisant un polygone inscrit puis un circonscrit, chacun à  $2^n$  côtés. La différence d'aires entre le disque et chacun des polygones peut être rendue aussi petite que souhaitée. Cependant, il ne considère en aucun cas que le cercle est un polygone à une infinité de côtés. Cette supposition, appliquée à d'autres courbes, devient l'apanage des géomètres du XVII<sup>e</sup> siècle [16]. Ainsi, la deuxième demande perpétuerait en quelque sorte une pratique mathématique en usage, mais pas seulement. Même si L'Hospital n'utilise pas le qualificatif « infinitangulaire » comme le fait Leibniz, le polygone qui feint la courbe est plus riche. L'Hospital a précisé que les côtés du « polygone » forment des angles qui vont déterminer la courbure de la courbe. Ces angles, même si L'Hospital ne les désigne pas, sont les angles de contact et ils sont liés aux différentielles d'ordre deux<sup>9</sup>.

## LA MÉTHODE INTÉGRALE POUR QUARRER

Le traité de L'Hospital ne traite que du calcul différentiel et les premiers ouvrages de calcul intégral sont publiés au siècle suivant. Néanmoins, le calcul intégral leibnizien commence à circuler sous forme d'enseignement privé. En 1692, Johann Bernoulli donne des leçons de calcul intégral à L'Hospital, publiées bien plus tardivement en 1742 [2].

La première leçon fournit l'énoncé général : «  $ax^p dx$  est la différentielle de la quantité  $\frac{a}{p+1}x^{p+1}$  » où  $p$  est un rationnel différent de  $-1$ . Cette formule est suivie d'exemples, croissant en complexité, dans lesquels il s'agit de trouver ce qui de nos jours est appelé primitives en se ramenant à cette formule. Ces exercices calculatoires n'ont pour but que de préparer la quadrature d'espaces. En effet, la méthode intégrale pour quarrer les espaces suppose que ces derniers soient :

---

<sup>9</sup> Bos pose la question de l'égalité des côtés du polygone. Seul dans le cas où l'abscisse curviligne est de progression constante et en considérant qu'il a un nombre très grand de côtés mais fini, il serait possible de considérer que le polygone a ses côtés de même longueur mais rien ne dit que cette propriété subsiste pour le polygone infinitangulaire : « This means that the concept of 'infinitangular polygon' involves an indeterminacy » [18, p. 89].

*Divisés en parties infinies [divisa in infinitas partes] dont chacune est tenue pour une différentielle d'espace [differentiali spatii], de sorte que si l'intégrale de telle différentielle, soit encore la somme de ces parties, est obtenue, de là la quadrature demandée devient connue. [18, p. 394]<sup>10</sup>*

Ces « *infinitas partes* » peuvent être considérées de différentes manières pour faciliter la quadrature [18, p. 394]<sup>11</sup>. Les divisions les plus communes sont celles effectuées par des « lignes parallèles » ou par des « lignes » qui concourent en un point. Johann Bernoulli fournit la quadrature d'une parabole d'équation  $ax = yy$  qu'il divise en parallélogrammes infiniment petits. À chacun de ces infimes parallélogrammes est associée l'expression commune  $ydx = dx\sqrt{ax}$ . L'espace cherché est l'intégrale de la différentielle d'espace soit  $\frac{2}{3}x\sqrt{ax} = \frac{2}{3}xy$ .

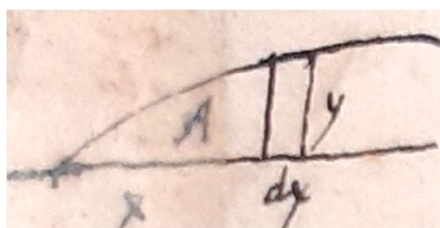


Fig. 10 : *De Methodo Integralium* [ms UB Basel, L Ia8, fol. 6]

D'autres types de divisions sont présentées : par des tangentes ou par des normales. Selon la forme ou l'engendrement de la figure, un type de division convient mieux qu'un autre. La division par des lignes parallèles convient à la parabole alors qu'elle ne convient pas à la spirale. Inversement, la division par des lignes concourantes convient mieux à la spirale qu'à la parabole. Par « lignes », Johann Bernoulli entend des éléments homogènes, c'est-à-dire selon le type de division, des parallélogrammes, des trapèzes, des triangles ou d'autres éléments obtenus par infinie division, tous infiniment petits. Plusieurs exemples sont présentés dans ce qui suit (fig. 11).

Ces « différentielles d'espace » permettent la quadrature de l'espace par l'intégration de leur formule. Ainsi, à une différentielle d'espace est associée une formule ou expression différentielle qui permet de considérer un élément de manière générique. C'est un représentant qui vaut pour tous et qui est susceptible de faire l'objet d'un procédé calculatoire. Le calcul d'une quadrature dépend désormais de l'intégration de l'expression de la différentielle d'espace, c'est-à-dire d'un calcul qui n'est plus nécessairement assujéti à une figure.

<sup>10</sup> « *divisa in infinitas partes quarum unaquaeque pro differentiali spatii haberi potest, ita ut si integrale hujus differentialis, id est summa harum partium habeatur, ex inde quoque innotescat quadratura quaesita* ».

<sup>11</sup> « *Partes istae infinitae in spatiis planis considerari possunt diversis modis prout commodissime permittunt omnes circumstantiae planorum* ».

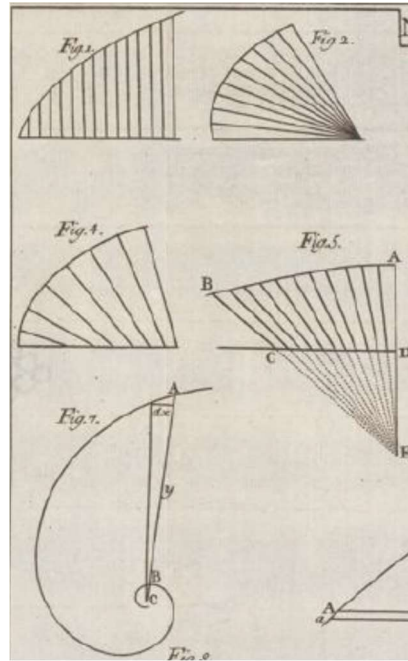


Fig. 11 : Divisions de figures en éléments infiniment petits [2, planche LII]

La méthode intégrale permet donc de quarrer des figures au moyen de l'intégration de différentielles. Certaines sont intégrables directement par la règle générale «  $\frac{a}{p+1}x^{p+1}$  est l'intégrale de  $ax^p dx$  » mais ce n'est pas toujours le cas<sup>12</sup>.

Par exemple, l'expression des différentielles de l'hyperbole ou celles du cercle ne sont pas réductibles à la formule générale ci-dessus. Cependant, elles deviennent des étalons dans le sens suivant. Certaines différentielles d'espace, autres que celles du cercle et de l'hyperbole, ne se réduisent pas non plus à la formule générale ci-dessus mais peuvent s'exprimer à l'aide des différentielles de l'espace hyperbolique ou circulaire. Dans ce cas, Johann Bernoulli écrit que leur quadrature « dépend » de celle du cercle ou de celle de l'hyperbole :

*Si, donc, la différentielle d'espace peut être ramenée à l'une des formules, l'espace en question pourra être égal à un cercle, ainsi qu'à une hyperbole, ou à un segment de cercle, ainsi qu'à celui d'une hyperbole. Mais tous ces espaces dont la différentielle s'exprime par une quantité rationnelle multipliée ou divisée par l'appliquée du cercle ou de l'hyperbole, c'est-à-dire  $\sqrt{aa - xx}$ , ou  $\sqrt{ax - xx}$ , ou  $\sqrt{aa + xx}$ , tous ces*

<sup>12</sup> Bernoulli avait traité sans succès le cas  $p = -1$  : «  $\frac{dx}{x} = \frac{1}{0}x^0 = \frac{1}{0}x1 = 0$ . » [référence ?](#)

*espaces, dis-je, peuvent se quarrer à l'aide du cercle ou de l'hyperbole. [2, p. 396-397]<sup>13</sup>*

Autrement dit, cela signifie que si l'on suppose données les quadratures du cercle et de l'hyperbole, certaines aires de figures seront connues car mesurables non seulement par des carrés unité mais aussi par des portions de disques ou d'hyperboles.

Pour le calcul de l'intégrale d'une expression différentielle, il peut donc être utile d'examiner si elle peut être écrite à l'aide des différentielles du cercle ou de l'hyperbole. Or, l'expression de celles-ci diffère selon le choix des coordonnées. Bernoulli considère le demi-cercle  $ADC$  de diamètre  $AC = 2a$  (fig. 14). Lorsque  $x = AB$ , comme  $DB^2 = AB \times BC$ , il vient  $DB = \sqrt{2ax - xx}$ . Les paires de points  $D, d$  et  $B, b$  sont supposées être infiniment proches, ainsi  $Bb = dx$  et à la différentielle de l'espace  $BDdb$  est associée l'expression  $dx\sqrt{2ax - xx}$  dont l'intégrale est l'espace  $ABD$ . De même, l'élément curviligne  $dD$  est  $\frac{adx}{\sqrt{2ax-x}}$ <sup>14</sup>, et l'espace différentiel  $DEd$  est donc égal à  $\frac{aa}{2\sqrt{2ax-x}}dx$  dont l'intégrale correspond au secteur  $AED$ . Dans le cas où l'on prend  $x = BE$  donc  $BD = \sqrt{aa - xx}$ , à la différentielle de l'espace  $BDdb$  est associée la formule  $dx\sqrt{aa - xx}$ . De même  $DEd$  est égal à  $\frac{aadx}{2\sqrt{aa-xx}}$ . Ces différentes expressions, une fois démontrées, permettent d'évaluer d'autres expressions analytiques représentant des différentielles d'espace et d'ainsi quarrer les espaces concernés au moyen de portions de disques ou d'hyperboles.

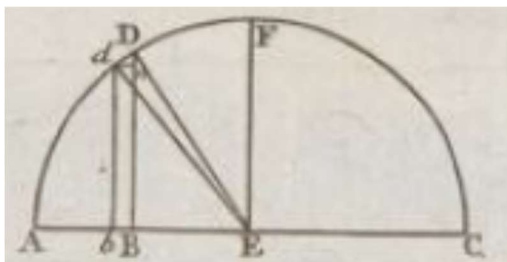


Fig. 14 : Différentielles d'espaces du cercle [2, table LII]

À titre d'exemple, Johann Bernoulli propose de trouver l'intégrale de la différentielle de l'espace dont l'expression est  $(2ax - xx)dx\sqrt{2ax - xx}$ . À

<sup>13</sup>« *Omnia autem ista spatia quorum differentiale exprimitur per quantitatem rationalem multiplicatam vel divisam per applicatam circuli vel hyperbolae, id est per  $\sqrt{aa - xx}$ , vel per  $\sqrt{ax - xx}$ , vel  $\sqrt{aa + xx}$  vel  $\sqrt{xx - aa}$ . Omnia inquam ista spatia aut quadrantur aut circulo vel hyperbolae aequantur, quod ita fit* ».

<sup>14</sup> Bernoulli n'explique pas ces calculs mais cette expression peut s'obtenir en considérant que  $Dd^2 = dx^2 + d^2(d(DB))$ .

l'aide de transformations qu'il a décrites dans la leçon précédente, il écrit que

$$\begin{aligned} (2axx - xx)dx\sqrt{2ax - xx} &= \frac{4aaxx - 4ax^3 + x^4}{\sqrt{2ax - x}} dx \\ &= \frac{(x^7 - \frac{7}{4}ax^6)dx}{\sqrt{2ax^7 - x^8}} + \frac{(-\frac{9}{4}ax^5 + \frac{15}{4}a^2x^4)dx}{\sqrt{2ax^5 - x^6}} + \frac{(\frac{1}{4}aax^3 - \frac{3}{4}a^3x^2)dx}{\sqrt{2ax^3 - x^4}} \\ &\quad + \frac{(\frac{3}{8}a^3x - \frac{3}{8}a^4)dx}{\sqrt{2ax - xx}} + \frac{\frac{3}{8}a^4dx}{\sqrt{2ax - xx}} \end{aligned}$$

Les quatre premiers termes de cette décomposition sont intégrables par la formule générale puisque pour chacun d'eux, le numérateur est, à une constante près, la différentielle du dénominateur, le dernier dépend de la quadrature du cercle puisqu'il est proportionnel à l'expression de l'élément différentiel  $dDE$  lorsque  $x = BE$ . L'espace dont l'expression différentielle est

$$(2axx - xx)dx\sqrt{2ax - xx}$$

se mesure, entre autres, grâce à une portion de cercle.

## CONCLUSION

Ce chapitre a montré comment l'émergence du calcul de Leibniz doit être appréciée à la lumière d'une tension qui travaille la pensée mathématique à partir du XVII<sup>e</sup> siècle. Elle concerne le calcul et la géométrie et comment ils sont capables de s'éclairer mutuellement. Dans de nombreux écrits, Leibniz en prend acte :

*Je ne crois pas que l'on ait accoutumé d'expliquer suffisamment la manière assurée de traduire la géométrie en calcul, ou inversement de revenir du calcul aux constructions.* [13, p. 122]

Les géomètres du XVII<sup>e</sup> siècle inventent des méthodes calculatoires pour traiter certains problèmes sur les courbes. Pour ce faire, ils cherchent à traduire des problèmes géométriques par des égalités impliquant des symboles algébriques. Les contemporains de Leibniz reconnaissent que Descartes fournit une méthode qui est générale mais qu'elle ne s'applique qu'aux courbes algébriques (chap. I). À l'origine de l'invention du calcul différentiel se trouve l'ambition de traiter toutes les courbes par un calcul général et dans lequel les notions impliquées et le symbolisme inventé soient les plus propres à étudier le courbe.

Résoudre le cas particulier du problème des caustiques ou celui des développées ne nécessitait pas d'introduire de nouveaux outils, ni de nouvelles notions. Le génie volontaire de Leibniz est de percevoir, à partir des cas particuliers, la possibilité d'une généralisation. Cependant, cette saisie a lieu car

il a en main un calcul symbolique suffisamment riche pour capturer analytiquement le phénomène de variabilité. Dans ce sens, l'invention de la caractéristique « d », qui ne marquait au début que la différence d'une indéterminée, en vient à se dépasser elle-même.

La puissance de l'écriture symbolique a été également illustrée dans l'effort effectué pour fournir des expressions analytiques interprétant les phénomènes de contact et d'osculation, ou pour étiqueter les espaces différentiels.

L'affinement des notions géométriques liées à l'appréciation des courbes et leur représentation symbolique avancent donc intimement intriquées. Ce mouvement conduira à la prédominance de l'analyse comme pratique d'écriture mathématique universelle dont le développement au siècle suivant fera s'estomper le style euclidien.

Sandra BELLA



## BIBLIOGRAPHIE

## SOURCES PRIMAIRES

- [1] Bernoulli, Jakob, « Curvatura laminae elasticae. Ejus identitas cum curvatura lintei a pondere inclusi fluidi expnsi. Radii circulorum osculantim in terminis simplicissimis exhibitis, una cum novis quibusdam theorematibus huc ertinentibus, &c. », *Acta Eruditorum*, juin 1694, p. 262-270.
- [2] Bernoulli, Johann, *Opera omnia tam autea sparsim edita quam hactenus inedita, tomus tertius, accedunt Lectiones mathematicae de calculo integralium in usum illust. Marc. Hospitalii conscriptate*, Lausanne et Genève : Marci-Michaelis Bousquet & sociorum, 1742.
- [3] Euclide, *Les Éléments*, trad. et commentaires par Bernard Vitrac, Paris : PUF, 1990.
- [4] Descartes, René, *Œuvres de Descartes*, publiées par C. Adam et P. Tannery, 11 vol., nouvelle présentation en coédition avec le CNRS, Paris : Vrin, 1964-1974.
- [5] Fermat, Pierre, *Varia opera mathematica*, Toulouse : Joannis Pech, 1679.
- [6] Fermat, Pierre, *Œuvres de Fermat*, publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry sous les auspices du Ministère de l'instruction publiques, Paris : Gauthier-Villars et fils, Imprimeurs-Libraires, 1891-1912.
- [7] Leibniz, G. W., « Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculis genus », *Acta Eruditorum*, octobre 1684, p. 467-473.
- [8] Leibniz, G. W., « De Geometria recondita et Analyysi indivisilium atque infinitorum », *Acta Eruditorum*, juin 1686, p. 292-299. Traduit par Marc Parmentier dans G. W. Leibniz, *Naissance du calcul différentiel, 26 articles des Acta Eruditorum*, Paris : Vrin, 1989, p. 126-143.
- [9] Leibniz, G. W., « Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi, horumque usu in practica mathesi ad figuras faciliores succedaneas difficilioribus substituendas », *Acta Eruditorum*, juin 1686, p. 289-292.
- [10] Leibniz, G. W., « De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis inter se concurrentibus formata easque omnes tangente. Ac de novo in ea re analyseos infinitorum usu », *Acta Eruditorum*, avril 1692, p. 168-171.

- [11] Leibniz, G. W., « Nova calculi differentialis applicatio et usus ad multiplicem linearum constructionem ex data tangentium conditione », *Acta Eruditorum*, juillet 1694, p. 311-316.
- [12] Leibniz, G. W., *Naissance du calcul différentiel, 26 articles des Acta Eruditorum*, trad. Marc Parmentier, Paris : Vrin, 1989.
- [13] Leibniz, G. W., *Mathesis universalis écrits sur la mathématique universelle*, textes introduits, traduits et annotés sous la direction de David Rabouin, Paris : Vrin, 2018.
- [14] L'Hospital (de), Guillaume, *Analyse des infiniment petits pour l'intelligences des lignes courbes*, Paris : Imprimerie royale, 1696.
- [15] Malebranche, Nicolas, *Œuvres complètes*, t. XVII-2.

## SOURCES SECONDAIRES

- [16] Bella, Sandra, *La (Re)construction française de l'analyse infinitésimale de Leibniz (1690-1706)*, éditions Garnier, collection Histoire et Philosophie des Sciences, à paraître (2022).
- [17] Blanco Abellan, Mónica, « La correspondencia entre Leibniz y el Marqués de L'Hospital : sobre la envolvente de una familia de curvas », *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, volum XVI, Barcelona, 2018, p. 143-165.
- [18] Bos, Henk, « The Fundamental Concepts of the Leibnizian Calculus », *Lectures in the History of mathematics*, vol. 7, American Mathematical Society, London Mathematical Society, USA, 1991, p. 83-97.
- [19] Costabel, Pierre, *Démarches originales de Descartes savant*, Paris : Vrin, 1982, p. 159-166.
- [20] Engelsman, Steven B., *Families of Curves and the origins of Partial differentiation*, Amsterdam : North Holland, 1984.
- [21] Giusti, Enrico, « Le problème des tangentes de Descartes à Leibniz », *Studia Leibnitiana*, 14 (1), 1986.
- [22] Hess, Heinz, Jürgen, « Zur Vorgeschichte der "Nova Methodus" (1676-1684) » dans « 300 Jahre Nova Methodus », *Studia Leibnitiana*, Sonderheft, 14, 1984, p. 64-102.