

Analyse Numérique de Modèles de Matériaux Poreux

Simon Lucas, Romain Pacanowski, Pascal Barla

▶ **To cite this version:**

Simon Lucas, Romain Pacanowski, Pascal Barla. Analyse Numérique de Modèles de Matériaux Poreux. JFIG 2022 - Journées Françaises de l'Informatique Graphique, Nov 2022, Bordeaux (France), France. hal-03952096

HAL Id: hal-03952096
https://hal.science/hal-03952096

Submitted on 23 Jan 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Journées Françaises de l'Informatique Graphique 2022 / J. Martínez Bayona and R.Vergne.
(Paper Chairs)

Analyse Numérique de Modèles de Matériaux Poreux

Simon Lucas[1,2], Romain Pacanowski[2], Pascal Barla[2]

[1] Université de Bordeaux
[2] Inria Bordeaux Sud-Ouest

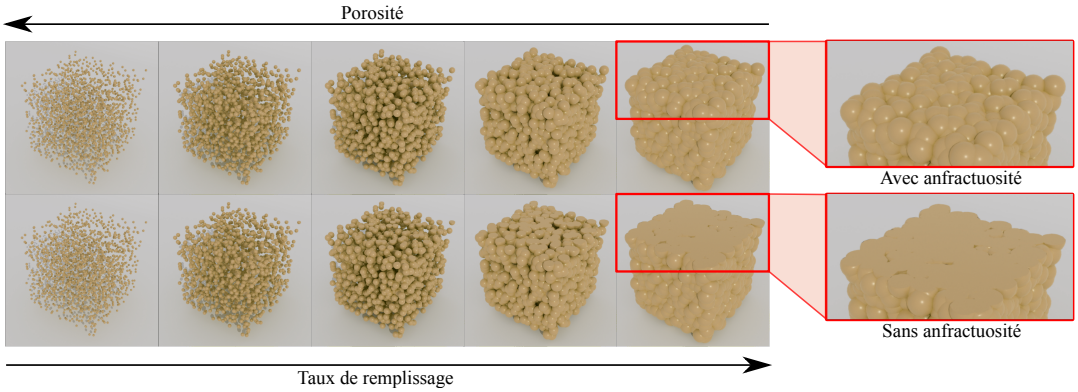


Figure 1: Visualisation des structures de matériaux poreux considérées dans notre analyse. Ces structures sont composées d'amas de sphères mono-disperses, pour plusieurs valeurs de porosité, avec anfractuosité et sans anfractuosité.

Abstract

L'apparence des objets est impactée par leur structure microscopique. Ici nous nous intéressons à l'apparence de matériaux poreux. La présence de pores a été modélisée de deux manières dans les travaux existants: en modifiant l'état de surface d'un matériau, ou en modifiant ses propriétés volumiques. Il n'existe cependant pas de modèle de matériaux poreux suffisamment générique pour tenir compte à la fois des effets surfaciques et volumiques. Nous proposons dans cet article une étude de ces effets à l'aide de simulations du transport de la lumière. Cette approche permet de révéler les limitations des modèles existants, ainsi que des pistes prometteuses pour le développement futur d'un modèle de matériau suffisamment général pour tenir compte de variations de porosités et d'état de surface.

1. Introduction

La porosité est présente dans un grand nombre de matériaux. Les matériaux naturels comme les sols ou les roches présentent des porosités de différentes natures, allant d'agrégats formés par la cohésion de particules, à des pores tubulaires créés par le passage de l'eau ou par des êtres vivants, ou des fissures créées par l'action de forces diverses. D'autres matériaux non naturels présentent également des pores, comme par exemple les cavités présentes à la surface de céramiques. Nous nous restreignons ici à l'étude de pores structurées sous la forme d'agrégats opaques.

Les structures poreuses peuvent se retrouver à différentes échelles. Les plus petites porosités sont de l'ordre du nanomètre. Elles sont trop petites pour être étudiées dans un contexte d'optique géométrique, mais peuvent être prises en compte dans les (micro) matériaux des agrégats. Notre travail porte sur les échelles comprises entre le micron et le millimètre, et se focalise donc sur la BRDF (Bidirectional Reflectance Distribution Function). Au dessus du millimètre, les pores sont suffisamment grands pour être visibles à l'oeil nu, et peuvent donc être directement modélisés par des détails géométriques.

Notre objectif principal est de caractériser les effets présents dans des matériaux poreux formés d'agrégats opaques, que ce soit des effets de surface ou de volume. Pour cela, nous nous appuyons sur des simulations de tracer de chemins lumineux dans des structures composées d'amas de sphères opaques (distribution monodisperse). Les amas de sphères sont paramétrés par leur porosité, ou la proportion de vide dans le matériau ; et par leur anfractuosité qui détermine s'ils sont compactés en surface (cf. Figure 1).

Nos simulations permettent d'évaluer la pertinence de modèles de matériaux poreux existants. Nous montrons que ces modèles ne permettent d'approcher les simulations que pour des structures restreintes: l'espace d'apparence des matériaux poreux reste encore largement non couvert. Notre travail met en avant les effets qu'un modèle de BRDF général devrait reproduire, ce qui aura des applications non seulement en informatique graphique, mais également en télédétection pour l'astronomie ou l'écologie.

2. Travaux précédents

Nous considérons deux approches pour la modélisation de l'apparence de matériaux: surfacique et volumique.

Parmi les modèles surfaciques, les plus employés sont les modèles spéculaires à microfacettes [TS67] [WMLT07]. Ces modèles permettent de représenter l'apparence de divers matériaux: des métaux ou des plastiques (en combinaison avec une composante Lambertienne), à la rugosité plus ou moins prononcée. Dans les simulations que nous avons effectuées, ces modèles sont utilisés pour définir l'apparence des agrégats. La plupart des modèles surfaciques ne sont pas adaptés aux matériaux poreux car la surface est modélisée comme ininterrompue, sans trou ni pore. La méthode de Merillou et al. [MDG00] fait figure d'exception: un modèle surfacique y est modifié en post-traitement pour simuler l'inclusion de pores cylindriques dans une surface. La méthode demeure empirique et limitée à des effets de surface: elle ne s'applique donc pas à des structures composée d'agrégats.

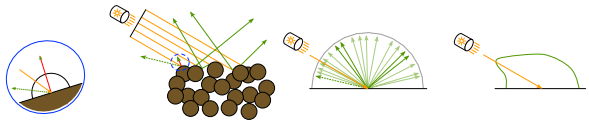
Parmi les modèles approchant les matériaux poreux par une approche volumique, nous retiendrons ceux de Hapke [Hap81], et de d'Eon [d'E21], tous deux basés sur les travaux de Chandrasekhar [Cha60]. La structure d'agregats est modélisée comme un milieu volumique semi-infini. Hapke a décliné plusieurs versions de son modèle depuis quatre décennies; nous nous intéresserons principalement à deux d'entre elles [Hap86, Hap12].

Une alternative aux modèles analytiques de matériaux est d'obtenir une BRDF par simulation (e.g., [WAT92]). Le résultat d'une simulation de BRDF peut être soit tabulé (e.g., [BRMS20]), soit utilisé à la volée lors du rendu comme il a été proposé pour les matériaux multi-couches (e.g. [GHZ18]). Parmi les travaux existants, l'analyse de Ciarnello et al. [CCF14] se rapproche le plus de notre objectif: ils étudient les approximations faites par différentes versions du modèle de Hapke. Cependant, leurs simulations se limitent à des configurations qui sont favorables aux modèles de Hapke, alors que nous cherchons au contraire à déterminer les limites des modèles existants, et donc d'évaluer les conditions dans lesquelles ils peuvent être mis en échec.

3. Simulations de BRDF

La simulation d'une BRDF consiste à tracer des chemins lumineux dans une scène décrivant la structure du matériau à l'échelle microscopique. Le cas d'une structure d'agrégats est illustré en Figure 2. Les chemins qui sortent de la structure sont collectés dans un hémisphère, ce qui produit une coupe de BRDF suite à une intégration par angle solide. Une BRDF est obtenue en répétant ce processus pour de nombreuses directions d'incidence.

Les géométries utilisées pour les simulations ont été générées procéduralement, le rayon des sphères étant modifié pour faire varier le taux de remplissage (voir Figure 1) . Chaque géométrie fait partie d'un groupe composé de 8 réalisations ayant les mêmes paramètres d'anfractuosité et de porosité. La micro-BRDF assignée aux sphères est constante dans la scène, tout comme le rayon des sphères (structure mono-disperse). Comme présenté dans la section 5, plusieurs combinaisons de porosités, d'anfractuosité et de micro-BRDF ont été simulées.



(a) (b) (c) (d)

Figure 2: Simulation de BRDF. (a) Un rayon incident (en orange) est réfléchi à la surface d'une sphère selon sa micro-BRDF. (b) Un ensemble de rayons collimatés (en orange) se propage par tracer de chemins dans la structure avant d'en sortir (en vert). Les contributions des rayons sortants sont (c) accumulées dans un hémisphère, puis (d) normalisées en fonction de l'énergie totale émise par la source lumineuse pour obtenir une coupe de BRDF simulée (en vert) pour une direction incidente donnée (en orange).

La source lumineuse utilisée pour la simulation correspond a un faisceau collimaté (voir Figure 2). Elle est configurée de sorte à produire une empreinte d'aire constante sur la géométrie quelle que soit son inclinaison, ce qui permet d'éviter d'utiliser des géométries de plus en plus grandes avec l'augmentation de l'angle d'incidence.

Lors de la simulation du transport de la lumière, les rayons sortant de la géométrie vers l'hémisphère inférieur et les rayons ayant atteint le nombre maximal de rebonds sont considérés comme ayant une contribution nulle (e.g., comme absorbés).

Familles de chemins Pour chaque chemin lumineux, nous stockons plusieurs informations : sa contribution et sa direction de sortie, ainsi que le nombre de rebonds effectué et la profondeur maximale atteinte. Ces informations sont utiles pour la reconstruction de la BRDF mais aussi pour partitionner les chemins en différentes familles qui permettent d'affiner l'analyse du matériau. Le nombre de rebonds nous permet par exemple de séparer les chemins contribuant à la diffusion simple de ceux contribuant à la diffusion multiple (cf. Figures 4 et 5). La profondeur maximale permet de distinguer les chemins ayant interagi uniquement en surface de ceux qui ont pénétré le volume (cf. Figure 6).

4. Modèles de BRDF considérés

À l'issue de leur analyse, Ciarniello et al. [CCF14] ont identifié deux versions pertinentes du modèle de Hapke: le modèle dit Isotropic Multiple Scattering Approximation [Hap86] (IMSA), qui permet de représenter l'apparence de matériaux fortement poreux malgré sa simplicité; et le modèle de 2012 [Hap12] (H2012) qui permet de prendre en compte diverses porosités.

Le modèle IMSA caractérise la réflectance issue d'un milieu semi-infini en s'appuyant sur une approximation du transfert radiatif. Il définit la BRDF f_r pour des directions entrantes et sortantes ω_i et ω_o comme la somme de deux termes, dûs respectivement aux diffusions simple et multiple :

$$f_r(\omega_i,\omega_o) = f_r^{SS}(\omega_i,\omega_o) + f_r^{MS}(\omega_i,\omega_o). \quad (1)$$

Le terme de diffusion simple f_r^{SS} repose sur la fonction de phase P du milieu et l'effet d'opposition B (voir plus bas):

$$f_r^{SS}(\omega_i,\omega_o) = \frac{w}{4\pi}\frac{1}{\cos\theta_i+\cos\theta_o}P(\cos\theta_g)B(\theta_g), \quad (2)$$

où $\theta_g = \cos^{-1}(\omega_i \cdot \omega_o)$ est appelé l'angle de phase, et w est l'albédo de diffusion simple qui décrit la proportion d'énergie repropagée à chaque évènement de diffusion dans le milieu.

Le terme f_r^{MS} représentant la diffusion multiple est donné par :

$$f_r^{MS}(\omega_i, \omega_o) = \frac{w}{4\pi} \frac{1}{\cos\theta_i + \cos\theta_o} \left[H(\cos\theta_i) H(\cos\theta_o) - 1 \right], \quad (3)$$

avec H une approximation précise de la fonction de Chandrasekhar [Cha60], qui fait l'hypothèse de diffusion multiple isotrope dans le milieu.

Le modèle H2012 introduit un paramètre supplémentaire τ, le taux de remplissage (complément de la porosité, voir Figure 1), qui modifie à la fois l'intensité globale et la formule de f_r^{MS} [Hap12].

Fonctions de phase Un avantage des modèles de Hapke est qu'ils peuvent s'adapter à diverses fonctions de phase. Des formes analytiques existent pour des cas particuliers (e.g., sphères Lambertiennes [Lam60]). Dans le cas contraire, nous exploitons à nouveau notre moteur de tracer de chemins pour calculer et tabuler la section efficace différentielle de diffusion, à partir de laquelle l'albedo w et la fonction de phase P peuvent être directement obtenus. Une simple table 1D suffit étant donné que nos agrégats sont sphériques.

Variante de d'Eon Un modèle plus précis est proposé par d'Eon [d'E21] dans le cas d'un matériau fortement poreux ($\tau = 0.07$) composé de sphères Lambertiennes. La différence principale réside dans le terme de diffusion multiple f_r^{MS}, plus juste (cf., Figure 5). Le modèle est cependant moins général que ceux de Hapke et n'inclut pas l'effet d'opposition dans le terme de diffusion simple. Ce dernier problème peut être trivialement corrigé en utilisant le terme f_r^{SS} de Hapke (Equation 2) dans le modèle de d'Eon.

Effet d'opposition Lorsque les directions d'éclairement ω_i et d'observation ω_o tendent à s'aligner, la portion d'ombre visible diminue engendrant une augmentation de la réflectance, comme illustré en Figure 3. Cet effet d'opposition est modélisé empiriquement par Hapke [Hap86] en considérant les masquages et ombrages volumiques. L'effet apparait uniquement dans le terme de diffusion simple (Équation 2) comme une fonction de l'angle de phase :

$$B(\theta_g) = 1 + \frac{B_0}{1 + \frac{1}{h(\tau)} \tan\left(\frac{\theta_g}{2}\right)}, \quad (4)$$

avec τ le taux de remplissage, h une fonction de la porosité qui dépend de la version du modèle de Hapke, et $B_0 = \frac{1}{wP(0)}$ l'amplitude du lobe de rétro-réflexion. Plus la porosité est élevée, plus l'effet d'opposition est fin (voir Section 5).

5. Résultats & analyse

Pour notre étude, nous avons réalisé des simulations sur différentes structures d'agrégats variant selon leur taux de remplissage ($\tau \in \{0.0175, 0.035, 0.07, 0.135, 0.26, 0.47, 0.75, 0.95, 0.99\}$), les micro-BRDF utilisées (Lambertien avec $\rho_d = 0.5$, GGX microfacettes avec $\alpha = 0.02$, $\eta + i\kappa = 1.0152 + 6.6273i$), et avec ou sans anfractuosité. Dans ce dernier cas, les sphères en surface sont aplanies. Les micro-BRDFs utilisées représentent des cas extrêmes.

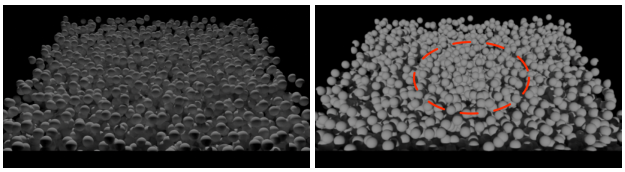


Figure 3: Rendu d'un amas de sphères par une caméra perspective. La lumière est soit dans la direction miroir (à gauche), soit alignée avec la vue (à droite). L'effet d'opposition est le plus marqué lorsque les ombres portées sont masquées (ellipse rouge).

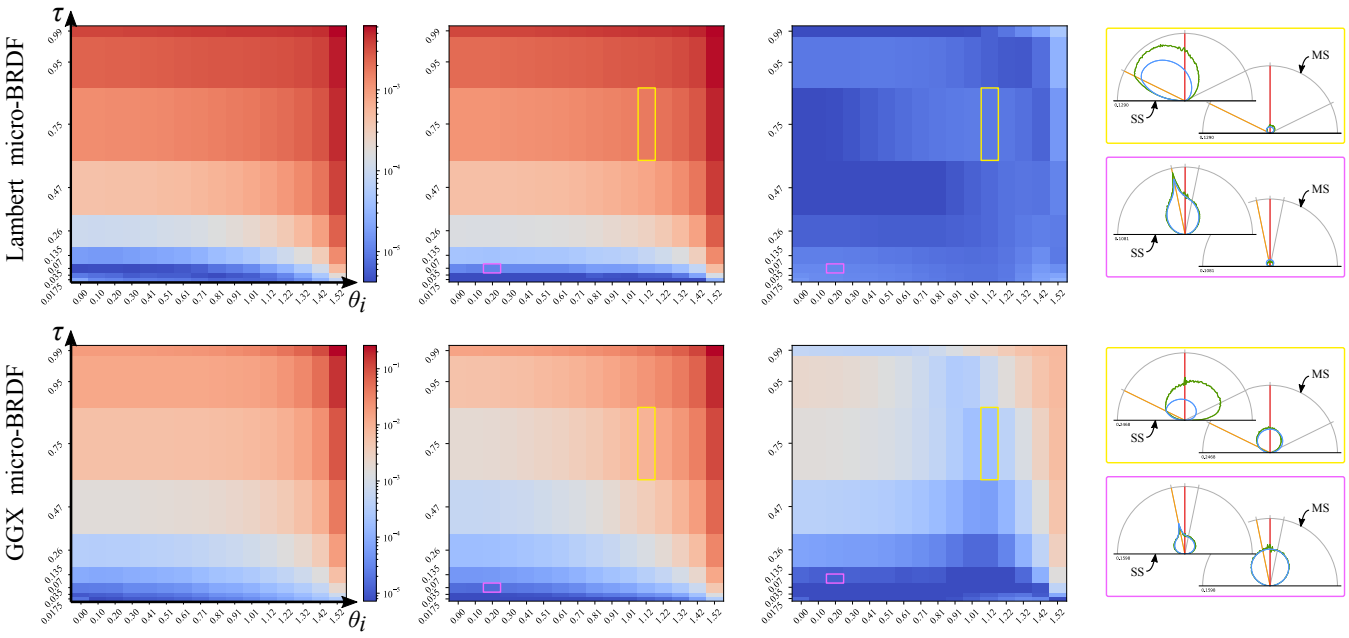
La Figure 4 présente les comparaisons entre nos simulations (avec anfractuosités) et le modèle IMSA de Hapke, résumées par des cartes d'erreur entre des coupes 2D de BRDF pour plusieurs incidences θ_i et taux de remplissage τ. Chaque coupe de BRDF $f_r(\omega_i, \omega_o)\cos\theta_o$ avec ω_i fixé, est calculée à partir de $384\text{x}10^6$ chemins. Ces résultats montrent clairement que le modèle IMSA de Hapke n'est adéquat que pour des valeurs très faibles de τ (les sphères, pour la plupart, ne se touchant pas). Comme détaillé en annexe et contrairement à nos attentes, le modèle H2012 a donné comparativement de moins bons résultats, bien qu'il tienne compte explicitement du taux de remplissage. Des comparaisons séparées des termes de diffusion simple et multiple montrent que l'essentiel de l'erreur est dû à la diffusion simple, notamment aux angles rasants. Le modèle IMSA permet cependant d'approcher très précisément des distributions de sphères métalliques dans le cas poreux.

Le modèle de d'Eon ne possède pas cette généralité, et présente des cartes d'erreurs sensiblement similaires à celles du modèle IMSA, comme montré en annexe. Bien que le terme de diffusion multiple de d'Eon soit plus précis – en particulier à incidence normale (cf. Figure 5) – l'amélioration apportée demeure faible.

Les configurations sans anfractuosité présentent des cartes d'erreur qui diffèrent de celles de la Figure 4 essentiellement aux angles rasants, hormis lorsque le taux de remplissage est maximal, comme détaillé en annexe. Il est à noter que dans ce dernier cas, la BRDF tend logiquement vers la micro-BRDF des agrégats aplanis en surface. Afin d'étudier plus finement les effets de surface, nous présentons en Figure 6 le ratio de la contribution des chemins lumineux ayant uniquement interagi avec les sphères en surface sur l'ensemble des chemins, avec ou sans anfractuosités (pour une micro-BRDF GGX). Nous retrouvons les motifs d'erreurs observés auparavant, suggérant qu'une partie significative de l'erreur du modèle IMSA de Hapke est due aux effets de surface. Une comparaison des Figures 4 et 6 suggère de plus que l'effet d'opposition dépend de l'importance de la composante volumique, et tend donc à disparaître lorsque le taux de remplissage augmente.

6. Discussion & travaux futurs

Les simulations que nous avons effectuées sur les matériaux poreux structurés en agrégats montrent que seules les configurations extrêmes sont reproductibles par des modèles de BRDF existants: structures à très forte porosité via le modèle IMSA de Hapke, et structures très denses sans anfractuosités via le même modèle que celui des agrégats sphériques. Un modèle unique qui permet-



(a) Full BRDF (b) Single scattering (SS) (c) Multiple scattering (MS) (d) BRDF plots

Figure 4: Comparaisons entre des BRDFs simulées et le modèle IMSA de Hapke pour des micro-BRDF Lambertiennes (en haut) et GGX (en bas). Les cartes d'erreur (a) reportent la moyenne des carrés des différences (MSE) entre des coupes 2D de BRDF obtenues par modèle et simulation, pour plusieurs angles d'incidence θ_i et taux de remplissage τ (les échelles de couleur sont logarithmiques et diffèrent par micro-BRDF). Des cartes d'erreur pour les termes de diffusion simple (b) et multiple (c) sont également présentées, montrant la prépondérance de la diffusion simple dans l'erreur totale, en particulier dans le cas de micro-BRDF Lambertienne. Des diagrammes de BRDF (d) permettent de visualiser les sources d'erreur pour deux configurations choisies de θ_i et τ dans le plan d'incidence (les intensités sont normalisées différemment pour chaque configuration, les simulations sont en vert et le modèle en bleu). Bien que le terme MS du modèle IMSA de Hapke soit constant le long de τ, son erreur demeure faible. Au contraire, le terme SS ne donne une bonne approximation qu'aux faibles τ.

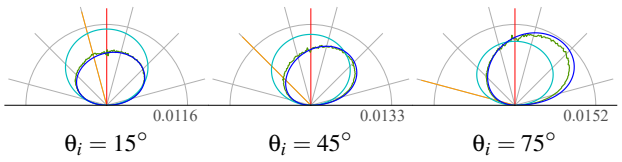


Figure 5: Comparaison du terme de diffusion multiple f_r^{MS} à trois angles d'incidence. La solution de référence calculée par simulation est en vert, le modèle IMSA de Hapke en cyan, et la variante de d'Eon en bleu (ici $w = 0.5$, $\tau = 0.07$).

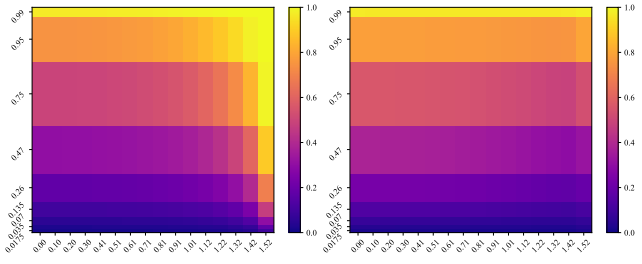


Figure 6: Ratio d'albedo directionel entre une BRDF réduite aux chemins ayant uniquement intéragi en surface et la BRDF totale. La présence d'anfractuosités augmente l'erreur aux angles rasants.

trait de reproduire non seulement ces cas extrêmes mais également d'approcher tous les cas de porosité et anfractuosité intermédiaires reste à trouver. Bien que le modèle de Hapke demeure limité, il pourrait servir de point de départ dans un modèle hybride général de matériau poreux, du moment que les agrégats restent opaques. En effet, Skurathov [SKK*12] a montré que le modèle IMSA et ses extensions ne sont pertinents que lorsque la fonction de phase a une asymétrie négative; or cela est souvent le cas pour des agrégats opaques. Une autre piste prometteuse est l'utilisation de modèles de micro-écailles, qui pourraient permettre d'établir un lien entre effets surfaciques et volumiques [DHd16].

Une autre direction de recherche concerne la structuration du matériau: nous aimerions conduire des simulations avec des agrégats de taille, forme et micro-matériaux variables (i.e., des configurations polydisperses), et ce afin d'évaluer l'impact de ces variations sur les différentes composantes de la BRDF. D'autres types de porosité pourraient être étudiées avec cette approche: pores tubulaires,matériaux spongieux, etc. La présence d'eau, en surface et/ou dans les pores, serait également un sujet d'étude pertinent.

References

[BRMS20] BRINGIER B., RIBARDIÈRE M., MENEVEAUX D., SIMONOT L.: Design of rough microgeometries for numerical simulation of material appearance. *Appl. Opt. 59*, 16 (Jun 2020), 4856–4864. 2

[CCF14] CIARNIELLO M., CAPACCIONI F., FILACCHIONE G.: A test of Hapke's model by means of Monte Carlo ray-tracing. *Icarus 237* (2014), 293–305. 2

[Cha60] CHANDRASEKHAR S.: *Radiative Transfer*. Dover Books on Intermediate and Advanced Mathematics. Dover Publications, 1960. 2, 3

[d'E21] D'EON E.: An analytic brdf for materials with spherical lambertian scatterers. *Computer Graphics Forum 40*, 4 (2021), 153–161. 2, 3

[DHd16] DUPUY J., HEITZ E., D'EON E.: Additional progress towards the unification of microfacet and microflake theories. In *Proceedings of the Eurographics Symposium on Rendering: Experimental Ideas & Implementations* (2016), EGSR '16, p. 55–63. 4

[GHZ18] GUO Y., HAŠAN M., ZHAO S.: Position-free monte carlo simulation for arbitrary layered bsdfs. *ACM Trans. Graph. 37*, 6 (2018). 2

[Hap81] HAPKE B.: Bidirectional reflectance spectroscopy: 1. theory. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth 86*, B4 (1981), 3039–3054. 2

[Hap86] HAPKE B.: Bidirectional reflectance spectroscopy: 4. The extinction coefficient and the opposition effect. *Icarus 67*, 2 (1986), 264–280. 2, 3

[Hap12] HAPKE B.: *Theory of Reflectance and Emittance Spectroscopy*, 2 ed. Cambridge University Press, 2012. 2, 3

[Lam60] LAMBERT J.: *J. H. Lambert,... Photometria, sive de Mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae*. sumptibus viduae E. Klett, 1760. 3

[MDG00] MERILLOU S., DISCHLER J.-M., GHAZANFARPOUR D.: A brdf postprocess to integrate porosity on rendered surfaces. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics 6*, 4 (2000), 306–318. 2

[SKK*12] SHKURATOV Y., KAYDASH V., KOROKHIN V., VELIKODSKY Y., PETROV D., ZUBKO E., STANKEVICH D., VIDEEN G.: A critical assessment of the Hapke photometric model. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer 113*, 18 (Dec. 2012), 2431–2456. 4

[TS67] TORRANCE K. E., SPARROW E. M.: Theory for off-specular reflection from roughened surfaces*. *J. Opt. Soc. Am. 57*, 9 (Sep 1967), 1105–1114. 2

[WAT92] WESTIN S. H., ARVO J. R., TORRANCE K. E.: Predicting reflectance functions from complex surfaces. In *Proceedings of the 19th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques* (1992), SIGGRAPH '92, p. 255–264. 2

[WMLT07] WALTER B., MARSCHNER S. R., LI H., TORRANCE K. E.: Microfacet models for refraction through rough surfaces. In *Proceedings of the 18th Eurographics Conference on Rendering Techniques* (2007), EGSR'07, p. 195–206. 2

Appendix A: Résultats supplémentaires

Comparaisons supplémentaires La Figure 7 montre la comparaison entre nos simulations et les modèles H2012 de Hapke, ainsi que celui de d'Eon auquel nous avons incorporé l'effet d'opposition. Nous utilisons la même métrique d'erreur, appliquée sur la totalité chemins. Dans le cas de sphères Lambertiennes, les erreurs sont légèrement moindres avec le modèle de d'Eon qu'avec le modèle IMSA de Hapke. Le modèle H2012 de Hapke produit des erreurs plus grandes quel que soit le micro-matériau considéré.

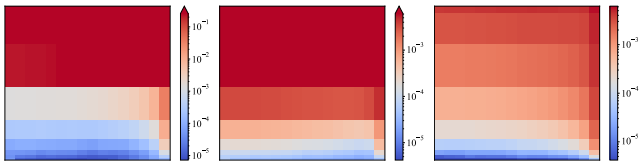


Figure 7: Cartes d'erreur pour des structures avec anfractuosité, pour les modèles H2012 de Hapke ainsi que celui de d'Eon.

Absence d'anfractuosité La métrique MSE est inadaptée à l'évalutation du modèle IMSA de Hapke dans le cas d'une structure sans anfractuosité. En effet, le pic spéculaire produit par les portions de surface planes produit de très fortes erreurs même à de faibles valeurs de τ. Dans la Figure 8, nous appliquons une transformation sur les données ($\sqrt[3]{f_r \cos\theta_o}$) préalablement au calcul de la métrique MSE, et nous comparons les cartes obtenues pour des structures avec et sans anfractuosité. Pour les deux types de micro-BRDFs, deux différences sont observables dans le cas sans anfractuosité: l'erreur augmente plus rapidement le long de l'axe τ, mais plus doucement le long de l'axe θ_i. Notons également une légère diminution de l'erreur aux angles rasants et faibles τ dans le cas GGX, attribuable à l'atténuation du pic spéculaire par le terme $\cos\theta_o$.

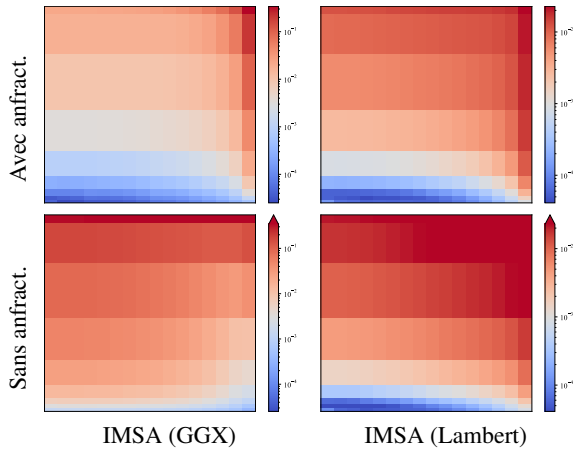


Figure 8: Cartes d'erreur (avec tone mapping préalable) pour des structures avec et sans anfractuosité. L'absence d'anfractuosités entraîne des variations plus douces aux angles rasants.

Lorsque le taux de remplissage augmente, la BRDF simulée converge logiquement vers la micro-BRDF des agrégats, comme montré en Figure 9 pour le cas d'une micro-BRDF GGX.

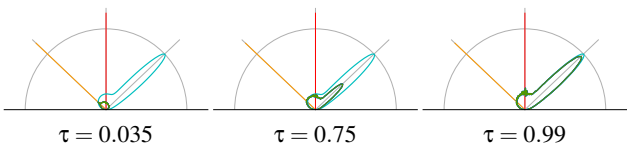


Figure 9: Convergence de la BRDF simulée (en vert) vers la micro-BRDF (en cyan) pour des valeurs croissantes de τ.