



**HAL**  
open science

## Etude du graphe divisoriel 5

Éric Saiias

► **To cite this version:**

| Éric Saiias. Etude du graphe divisoriel 5. 2021. hal-03941429

**HAL Id: hal-03941429**

**<https://hal.science/hal-03941429>**

Preprint submitted on 16 Jan 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Etude du graphe divisoriel 5

Eric Saias

Pour Michel Balazard,  
à l'occasion de son soixante et unième anniversaire

RÉSUMÉ. Le graphe divisoriel est le graphe non orienté dont les sommets sont les entiers strictement positifs et deux entiers sont reliés par une arête quand le petit divise le grand. On note  $f(x)$  le nombre maximum de sommets d'un chemin injectif dans la restriction du graphe divisoriel aux entiers  $\leq x$ . En s'inspirant de la structure conjecturalement fractale de ces chemins optimaux, Tenenbaum a donné une construction d'un chemin injectif dont on sait maintenant qu'elle fournit la minoration  $f(x) \geq (c + o(1))x/\log x$  avec  $c = 0,07$  quand  $x \rightarrow +\infty$ . En améliorant sa construction, on obtient  $c = 0,37$ . On donne également une minoration d'une variante de la fonction  $f(x)$ , qui permettra de répondre à une question d'Erdős dans un travail ultérieur.

Eric Saias  
Sorbonne Université  
LPSM  
4, place Jussieu  
75252 Paris Cedex 05 (France)  
eric.saias@upmc.fr

## TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction
2. Opérations sur les chaînes
3. Preuve du théorème 1.1
4. La fonction  $A(x, y, z, t)$
5. Lemme de Grönwall Bidimensionnel Discret Arithmétique
6. Un lemme combinatoire
7. Définition de l'ensemble  $\mathcal{A}^*(x, y)$  et de la fonction  $h_a^*(x, y)$
8. Construction d'une chaîne d'entiers de  $\mathcal{A}^*(x, y)$
9. Etude de la fonction  $h_a^*(x, y)$  ; fin de la preuve du théorème 1.4

# 1 Introduction

## 1a) Structure fractale des chaînes de longueur maximum

On appelle graphe divisoriel le graphe non orienté dont les sommets sont les entiers strictement positifs et deux entiers sont reliés par une arête quand le petit divise le grand. On appelle chaîne de longueur  $k$  toute suite finie d'entiers strictement positifs  $a_1, a_2, \dots, a_k$  deux à deux distincts tels que  $a_i$  est un diviseur ou un multiple de  $a_{i+1}$  pour tout entier  $i$  vérifiant  $1 \leq i \leq k-1$ . On note  $f(x)$  la longueur maximum d'une chaîne de la restriction du graphe divisoriel aux entiers  $\leq x$ .

La structure fractale conjecturale des chaînes de longueur maximum n'a jamais été évoquée jusqu'à présent. Nous le faisons ici pour deux raisons. D'abord parce que c'est beau. Ensuite car cela éclaire les travaux passés, présents et peut-être futurs sur le comportement asymptotique de la fonction  $f(x)$ . Commençons par un petit historique.

C'est en lien avec le travail [4] d'Erdős, Freud et Hegyvári que Pomerance [9] introduit la fonction  $f(x)$  et résout une conjecture de Hegyvári en montrant que  $f(x) = o(x)$ . Avec la minoration de Pollington [8], on sait en 1983 qui est l'année de parution des trois articles [4], [9] et [8] que

$$\frac{x}{\exp\{(2 + o(1))\sqrt{\log x \log \log x}\}} \leq f(x) = o(x), \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Les travaux de Tenenbaum [21] et moi-même [12], [14] et [15] ont permis d'établir dix ans plus tard qu'il existe deux réels  $a$  et  $b$  avec  $b > a > 0$  tels que pour tout  $x \geq 2$

$$(1.1) \quad a \frac{x}{\log x} \leq f(x) \leq b \frac{x}{\log x}.$$

Des considérations théoriques et des calculs numériques amènent à émettre la

CONJECTURE E.

*Il existe un réel  $c$  vérifiant  $3 < c < 7$  tel que*

$$f(x) \sim c \frac{x}{\log x}, \quad (x \rightarrow +\infty).$$

Découpons la recherche de cette conjecture en trois questions distinctes : montrer que  $f(x)/(x/\log x)$  converge quand  $x \rightarrow +\infty$ ,

que  $\alpha := \liminf_{x \rightarrow +\infty} (f(x)/(x/\log x)) > 3$ ,

et que  $\beta := \limsup_{x \rightarrow +\infty} (f(x)/(x/\log x)) < 7$ .

Aucune minoration (respectivement majoration) effective de  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) n'avait été donnée jusqu'à présent. Nous allons nous focaliser ici sur la minoration de  $\alpha$ , que l'on peut aborder maintenant grâce au récent travail numérique de Weingartner sur les entiers à diviseurs denses [26].

Une question plus profonde est celle de la structure des chaînes d'entiers  $\leq x$  de longueur maximum  $f(x)$ . On va voir que dans l'exemple  $x = 100$ , l'une de ces chaînes (c'est probablement le cas de toutes) a une structure fractale.

Chadozeau [2] a montré que  $f(100) = 77$ . Donnons un exemple de chaîne d'entiers  $\leq 100$  formée de 77 entiers.

62 – 31 – 93 – 1 – 87 – 29 – 58 – 2 – 92 – 46 – 23 – 69 – 3 –  
57 – 19 – 38 – 76 – 4 – 68 – 34 – 17 – 85 – 5 – 65 – 13 – 52 – 26 – 78 –  
6 – 24 – 48 – 96 – 12 – 72 – 36 – 18 – 54 – 27 – 81 – 9 –  
63 – 21 – 42 – 84 – 28 – 56 – 14 – 98 – 49 – 7 – 35 – 70 –  
10 – 60 – 30 – 90 – 45 – 15 – 75 – 25 – 50 – 100 – 20 – 40 – 80 –  
16 – 32 – 64 – 8 – 88 – 44 – 22 – 66 – 33 – 99 – 11 – 55.

On constate que les entiers ayant le même plus grand facteur premier ont tendance à être regroupés en « sous-chaînes ». Cela signifie qu'ils forment un ensemble d'entiers consécutifs dans la chaîne. Par exemple ceux dont le plus grand facteur premier est 7 sont regroupés à la quatrième ligne. Pour faire apparaître cette structure, on récrit cette chaîne sous la forme suivante où on factorise une sous-chaîne à plus grand facteur premier constant par ce plus grand facteur premier.

$$\begin{array}{cccccc}
31(2-1-3) & 29(3-1-2) & 23(4-2-1-3) & 19(3-1-2-4) & 17(4-2-1-5) & 13(5-1-4-2-6) \\
\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \\ 2 \end{array} & \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \\ 3 \end{array} & \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \\ 4 \end{array} & \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \\ 5 \end{array} & \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \\ \end{array} \\
(1.2)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\cdots 3(2-8-16-32-4-24-12-6-18-9-27-3)-7(9-3-6-12-4-8-2-14-7-1-5-10) \\
-5(2-12-6-18-9-3-15-5-10-20-4-8-16)-2(8-16-32-4)-11(8-4-2-6-3-9-1-5)
\end{array}$$

On appellera composante extérieure de la chaîne (1.2) la sous-chaîne qui relie 62 à 78. On appellera composante intérieure celle qui relie 6 à 55.

Introduisons quelques notations. On utilisera les lettres  $n$  et  $p$  pour désigner respectivement un entier strictement positif générique et un nombre premier générique. On note classiquement  $P(n)$  le plus grand facteur premier de l'entier  $n \geq 2$  avec la convention  $P(1) = 1$ ; on note également  $\mathcal{S}(x, y) = \{n \leq x : P(n) \leq y\}$  et  $\Psi(x, y) = |\mathcal{S}(x, y)|$ . Notons ici  $\mathcal{C}(x, y)$  une chaîne générique d'entiers de  $\mathcal{S}(x, y)$ . On étend  $f(x)$  en la fonction  $f(x, y)$  de deux variables qui représente la longueur maximum d'une telle chaîne  $\mathcal{C}(x, y)$ . Quand  $y \geq x$ , on note plus simplement  $\mathcal{C}(x)$  à la place de  $\mathcal{C}(x, y)$ . Avec ces notations récrivons la chaîne (1.2) sous forme synthétique :

$$\begin{array}{cccccc}
31\mathcal{C}(3) & 29\mathcal{C}'(3) & 23\mathcal{C}(4) & 19\mathcal{C}(5) & 17\mathcal{C}'(5) & 13\mathcal{C}(6) \\
\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \\ 1 \end{array} & \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ 2 \end{array} & \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \\ 3 \end{array} & \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \\ 4 \end{array} & \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \\ 5 \end{array} & \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \\ \dots \end{array} \\
\mathcal{C}(100) & & & & & \left. \begin{array}{l} \text{comp.} \\ \text{ext.} \end{array} \right\} \\
\cdots 3\mathcal{C}(33, 3) - 7\mathcal{C}(14, 7) - 5\mathcal{C}(20, 5) - 2\mathcal{C}(50, 2) - 11\mathcal{C}(9) & & & & & \left. \begin{array}{l} \text{comp.} \\ \text{int.} \end{array} \right\}
\end{array}$$

Faisons à présent quelques observations sur cette chaîne (1.2). On note  $x = 100$ . D'abord, on l'a déjà observé, elle est formée d'une concaténation de sous-chaînes  $p\mathcal{C}(x/p, p)$  où  $p$  décrit les nombres premiers de l'intervalle  $[2, 31]$ . Dans la composante extérieure ces sous-chaînes  $p\mathcal{C}(x/p, p)$  sont reliées par un « connecteur extérieur », qui est suivant les cas 1, 2, 3, 4 ou 5. C'est obligatoire car ces nombres premiers  $p$  vérifient  $p > \sqrt{x}$ . A l'exception de ces

connecteurs extérieurs qui jouent un rôle spécifique, pour chaque  $p \leq 31$  les entiers  $n$  de la chaîne qui vérifient  $P(n) = p$  sont regroupés dans une seule sous-chaîne  $p\mathcal{C}(x/p, p)$ .

Pour la composante intérieure de (1.2), appelons connecteur intérieur un entier qui est simultanément extrémité d'une sous-chaîne  $p\mathcal{C}(x/p, p)$  et diviseur de l'extrémité d'une sous-chaîne  $\mathcal{C}(x/p', p')$  voisine avec  $p < p'$ . Ces connecteurs intérieurs sont 6, 9, 10, 16 et 8.

Au theorem 1 de [4], Erdős, Freud et Hegyvári ont introduit la fonction  $L(N)$  qui représente le minimum sur toutes les permutations  $\sigma$  de  $\{1, 2, \dots, N\}$  de la quantité  $\max_{1 \leq k < N} ppcm(\sigma(k), \sigma(k+1))$  et ont montré que  $L(N) \sim N^2/4 \log N$ . Pour la majoration, ils ont été amené à construire une permutation  $\sigma$  pour laquelle le  $N$ -uplet  $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(N))$  a une structure fortement apparentée à celle de la chaîne (1.2). En particulier, ils regroupent les entiers ayant le même plus grand facteur premier  $p$  en des intervalles qu'ils appellent blocs, et ils séparent ces blocs par des « séparateurs » quand  $p > \sqrt{N}$ . Leurs blocs sont nos sous-chaînes ; leurs séparateurs sont nos connecteurs extérieurs. L'analogie est naturelle car les deux problèmes sont apparentés. C'est d'ailleurs le travail [4] qui est à l'origine de tous les travaux sur le graphe divisoriel.

Il faudrait analyser des chaînes d'entiers  $\leq x$  de longueur maximum avec des  $x$  beaucoup plus grand pour bien voir le caractère fractal de ces chaînes. On le voit quand même apparaître dans (1.2), par exemple avec la sous-chaîne  $\mathcal{C}(14, 7)$ . En effet, comme dans (1.2), ses entiers  $y$  sont regroupés en sous-chaînes à facteur premier constant, toujours avec le partage composante extérieure/intérieure

$$(1.3) \quad \mathcal{C}(14, 7) : \underbrace{3(3 - 1 - 2 - 4) - 2(2 - 4 - 1) - 7(2 - 1)}_{\text{composante intérieure}} \quad \underbrace{5(1 - 2)}_{\text{composante extérieure}}$$

On constate que toutes les chaînes  $\mathcal{C}(x/p, p)$  (et  $\mathcal{C}'(3)$  et  $\mathcal{C}'(5)$ ) avec  $3 \leq p \leq 31$  de (1.2), ont aussi la même structure que (1.3) même si elle est souvent dégénérée, car  $x/p$ , ou  $p$ , est petit.

Dernière observation sur cette chaîne : les deux ordres de l'arithmétique,

l'ordre usuel  $\leq$  et l'ordre divisoriel, sont simultanément présents dans la chaîne (1.2). En effet les connecteurs extérieurs sont les entiers  $\leq 5$ , qui apparaissent par ordre croissant. Aussi toujours dans la composante extérieure, les nombres  $p$  des sous-chaînes  $p\mathcal{C}(x/p, p)$  apparaissent cette fois par ordre décroissant. L'ordre divisoriel est lui présent dans le fait que les entiers ayant le même plus grand facteur premier (à l'exception des entiers qui servent de connecteur extérieur dans la première partie) sont regroupés en une seule sous-chaîne.

Une question de fond est de chercher dans quelle mesure cette structure fractale de la chaîne  $\mathcal{C}(100)$  s'étend à tous les  $x$ . Faire cette recherche constitue une piste naturelle pour avancer vers une preuve de la conjecture E. C'est dans [12] qu'a été effectué le premier pas dans cette direction.

La construction d'une chaîne avec une composante extérieure est délicate. C'est dû au fait qu'il faut choisir des connecteurs extérieurs  $qa$  (avec  $q$  premier et  $P(a) \leq q$ ) dans l'ensemble  $q\mathcal{S}(x/q, q)$ . La difficulté est alors de pouvoir s'assurer que ces entiers  $qa$  ne seront pas utilisés dans les sous-chaînes  $q\mathcal{C}(x/q, q)$  de la composante intérieure.

C'est pourquoi on a construit dans [12] une chaîne réduite à sa composante intérieure. Les travaux ultérieurs ont montré qu'il suffisait de construire ce type de chaîne pour démontrer que  $f(x) \asymp x/\log x$ .

En réalité, on construit d'emblée des chaînes  $\mathcal{C}(x, y)$  d'entiers de  $\mathcal{S}(x, y)$  ayant donc la structure

$$(1.4) \quad \mathcal{C}(x, y) : \left| \begin{array}{l} p_1\mathcal{C}\left(\frac{x}{p_1}, p_1\right) - \cdots - p_j\mathcal{C}\left(\frac{x}{p_j}, p_j\right) - \\ p_{j+1}\mathcal{C}\left(\frac{x}{p_{j+1}}, p_{j+1}\right) - \cdots - p_k\mathcal{C}\left(\frac{x}{p_k}, p_k\right) \end{array} \right.$$

où  $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$  constitue un ensemble  $\mathcal{P}(x, y)$  de nombres premiers qui sont inférieurs ou égaux à  $\min(y, \sqrt{x})$ . La plupart des chaînes qui ont été construites à partir de 1992 pour minorer  $f(x, y)$  et ses variantes ont la structure (1.4) (voir [12], [21], [13], [17] et [7]).

L'objet de ce présent travail est de construire deux nouvelles chaînes d'entiers de  $\mathcal{S}(x, y)$  de la forme (1.4). La première est dans la lignée du travail de Tenenbaum [21] et permet d'améliorer la minoration de  $\alpha$  qu'il fournit. La construction de cette chaîne est directe et rapide. La seconde chaîne permet de répondre dans [18] à une question d'Erdős. La construction est plus longue car on est obligé cette fois d'y incorporer une composante extérieure. Voyons tout cela plus en détail.



Notons  $n = p_1 p_2 \cdots p_{\Omega(n)}$  la décomposition de l'entier  $n \geq 2$  en facteurs premiers avec

$$p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_{\Omega(n)}.$$

On définit la fonction de Schinzel–Szekeres [19] par

$$S(n) = \max_{1 \leq k \leq \Omega(n)} p_1 p_2 \cdots p_{k-1} p_k^2$$

et on note par convention  $S(1) = 1$ . On note

$$\mathcal{A}(x, y) = \{n : S(n) \leq x, P(n) \leq y\}.$$

On vérifie facilement que l'on a pour tous  $x \geq 1$  et  $y \geq 2$ , la formule fondamentale

$$(1.5) \quad \mathcal{A}(x, y) = \{1\} \bigsqcup_{p \leq \min(y, \sqrt{x})} p \mathcal{A}\left(\frac{x}{p}, p\right).$$

Or si on identifie une chaîne à l'ensemble de ses entiers, les chaînes  $\mathcal{C}(x, y)$  ayant la structure (1.4) vérifient

$$\mathcal{C}(x, y) = \bigsqcup_{p \in \mathcal{P}(x, y)} p \mathcal{C}(x/p, p)$$

où  $\mathcal{P}(x, y)$  est un ensemble de nombres premiers inférieurs ou égaux à  $\min(y, \sqrt{x})$ .

La formule (1.5) montre donc que les ensembles  $\mathcal{A}(x, y)$  ont une structure fractale fortement apparentée à la structure fractale conjecturée des chaînes  $\mathcal{C}(x, y)$  de longueur maximum  $f(x, y)$ . Il est donc naturel de chercher à utiliser les entiers de  $\mathcal{A}(x, y)$  en conservant la structure (1.5), pour construire de longues chaînes d'entiers de  $\mathcal{S}(x, y)$ .

Notons

$$\mathcal{S}'(x, y) = \{n \leq x : P(n) \leq y \text{ et } \mu^2(n) = 1\}$$

et

$$\mathcal{A}'(x, y) = \{n : S(n) \leq x, P(n) \leq y \text{ et } \mu^2(n) = 1\}$$

où  $\mu(n)$  désigne la fonction de Möbius. Concrètement, Tenenbaum [21] construit de manière récursive une famille de chaînes  $\mathcal{C}'(x, y)$  ayant la structure (1.4) et qui vérifie

$$\mathcal{A}'(x/2, y) \subset \mathcal{C}'(x, y) \subset \mathcal{S}'(x, y).$$

Notons  $A(x, y) = |\mathcal{A}(x, y)|$  et  $A'(x, y) = |\mathcal{A}'(x, y)|$ . Il obtient ainsi

$$(1.6) \quad f(x, y) \geq A'(x/2, y), \quad (x \geq 1, y \geq 2).$$

On poursuit ici ce travail de Tenenbaum en se libérant de la contrainte pour les entiers des chaînes d'être sans facteur carré. On établit le

**THÉORÈME 1.1.** *Soient  $x \geq 1$  et  $y \geq 2$ . Il existe alors une chaîne  $\mathcal{C}(x, y)$  vérifiant*

$$\mathcal{A}(x/2, y) \subset \mathcal{C}(x, y) \subset \mathcal{S}(x, y).$$

On a donc aussi

**COROLLAIRE** *On a pour tous  $x \geq 1$  et  $y \geq 2$*

$$f(x, y) \geq A\left(\frac{x}{2}, y\right).$$

La fonction de Schinzel–Szekeres  $S(n)$  est intimement liée aux entiers à diviseurs denses. Nous les évoquons ici car c'est la minoration de la fonction de répartition des entiers à diviseurs 2-denses qui va permettre de donner une minoration du réel  $\alpha$  du début de cette introduction.

Pour tout entier  $n \geq 2$ , on désigne par  $1 = d_1(n) < d_2(n) < \dots < d_{\tau(n)}(n) = n$  la suite croissante de ses diviseurs. On dit que l'entier  $n$  est à diviseurs  $t$ -denses quand il vérifie

$$\max_{1 \leq i < \tau(n)} \frac{d_{i+1}(n)}{d_i(n)} \leq t.$$

C'est Erdős [3] qui s'est le premier intéressé à ce type d'entiers en 1948. Ils ont été ensuite étudiés notamment par Tenenbaum et moi-même, entre 1986 et 1999 ([20], [21], [14], [16]). Les remarquables travaux de Weingartner depuis 2001, dont un avec Pomerance, et un avec Pomerance et Thompson, ont énormément amélioré la connaissance que nous avons de ces entiers ([22], [23], [24] [25], [10], [26], [11], [27], [28] et [29]).

Par convention, on écrira que pour  $n = 1$

$$\max_{1 \leq i < \tau(n)} \frac{d_{i+1}(n)}{d_i(n)} = 1.$$

Notons

$$D(x, t) = \left| \left\{ n \leq x : \max_{1 \leq i < \tau(n)} \frac{d_{i+1}(n)}{d_i(n)} \leq t \right\} \right|$$

et

$$D'(x, t) = \left| \left\{ n \leq x : \max_{1 \leq i < \tau(n)} \frac{d_{i+1}(n)}{d_i(n)} \leq t \text{ et } \mu^2(n) = 1 \right\} \right|.$$

En 2014, Weingartner (Corollary 1.1 de [25]) a montré que pour tout réel  $t \geq 2$  fixé, il existe un nombre réel  $c_t > 0$  tel que

$$(1.7) \quad D(x, t) = c_t \frac{x}{\log x} \left( 1 + O_t \left( \frac{1}{\log x} \right) \right), \quad (x \geq 2).$$

Deux ans plus tard, Pomerance, Thompson et Weingartner ont établi un résultat analogue pour  $D'(x, t)$  (cela découle du theorem 3.1 de [10]) : il existe un nombre réel  $c'_t > 0$  tel que

$$(1.8) \quad D'(x, t) = c'_t \frac{x}{\log x} \left( 1 + O_t \left( \frac{1}{\log x} \right) \right), \quad (x \geq 2).$$

De plus, Weingartner a démontré récemment un encadrement pour certains de ces réels  $c_t$  et  $c'_t$  ([26] Corollary 2 et Corollary 7). Il obtient en particulier

$$(1.9) \quad c_2 = 1,2248 \dots$$

et

$$(1.10) \quad c'_2 = 0,0686 \dots$$

Le lien entre la fonction de Schinzel–Szekeres et les entiers à diviseurs denses est matérialisé par la formule

$$(1.11) \quad S(n) = n \max_{1 \leq i < \tau(n)} \frac{d_{i+1}}{d_i}$$

qui a été établie par Tenenbaum (lemme 2.2 de [20]).

Rappelons que l'on note

$$\alpha = \liminf_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x / \log x}.$$

Avec (1.8) et (1.10), il est facile de montrer (voir l'Annexe 1) que le résultat de Tenenbaum (1.6) fournit la minoration  $JB$

$$\alpha > 0,07.$$

Si on utilise à la place le Corollaire combiné avec (1.7), (1.9) et l'étude de Weingartner de la répartition des entiers à diviseurs 2-denses dans les classes de congruence modulo 12 (voir [27]), on obtient cette fois (voir l'Annexe 2) la minoration  $CG$

$$(1.12) \quad \alpha > 0,37.$$

Étudions à présent le cas où  $y$  est petit devant  $x$ . En 2008, Mazet (théorème 3.0.2 de [5]) a montré que pour tout  $y \geq 2$  fixé, dès que  $x$  est suffisamment grand relativement à  $y$ , la restriction du graphe divisoriel à  $S(x, y)$  est un graphe Hamiltonien. Je pense que l'on a la forme effective suivante du résultat de Mazet.

**CONJECTURE P.** *On a pour  $2 \leq y \leq \log x$*

$$f(x, y) = \Psi(x, y).$$

Le résultat suivant constitue un premier jalon vers cette conjecture.

**THÉORÈME 1.2.** *On a uniformément pour*

$$(1.13) \quad 2 \leq y \leq \log x$$

$$\frac{\Psi(x, y)}{1 + \frac{y}{\log x}} \left( 1 + O\left( \frac{\log y}{y} + \frac{y}{\log x \cdot \log y} \right) \right) \leq f(x, y) \leq \Psi(x, y).$$

Remarquons que l'on a en particulier  $f(x, y) \sim \Psi(x, y)$  dès que  $x$  et  $y$  tendent vers  $+\infty$  de telle sorte que  $y = o(\log x)$ .

Notons que la minoration (1.6) ne permet pas d'établir le théorème 1.2. En effet si on fixe  $y \geq 2$ , on a  $A'(x, y) \leq |\mathcal{S}'(x, y)| = O(1)$ , alors que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Psi(x, y) = +\infty$ .

Cet encadrement de  $f(x, y)$  est de même nature que celui du théorème 1.1 du très récent travail de Mehdizadeh [6] sur la question du problème de la table de multiplication d'Erdős pour les entiers sans grand facteur premier. D'ailleurs on reprend une partie de son argumentation.

Donnons la preuve de la minoration du théorème 1.2, qui se découpe en trois étapes. La première est d'utiliser la minoration du Corollaire

$$f(x, y) \geq A\left(\frac{x}{2}, y\right).$$

La seconde consiste à utiliser la minoration immédiate

$$A\left(\frac{x}{2}, y\right) \geq \Psi\left(\frac{x}{2y}, y\right).$$

La troisième et dernière est de procéder comme dans la preuve du Corollary 2.3 de [6], en montrant que l'on a

$$\Psi\left(\frac{x}{2y}, y\right) = \frac{\Psi(x, y)}{1 + \frac{y}{\log x}} \left(1 + O\left(\frac{\log y}{y} + \frac{y}{\log x \cdot \log y}\right)\right)$$

dans le domaine (1.13).

Dans la suite de cet article, on utilise les notations suivantes. Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions définies sur une partie  $D$  de  $\mathbb{R}^{+d}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^{+*}$ . On note  $u(X) \ll v(X)$  (respectivement  $u(X) \gg v(X)$ ) pour signifier qu'il existe un réel positif  $K$  tel que pour tout élément  $X$  de  $D$ , on a  $u(X) \leq Kv(X)$  (resp.  $u(X) \geq Kv(X)$ ). On écrit  $u(X) \asymp v(X)$  quand on a simultanément  $u(X) \ll v(X)$  et  $u(X) \gg v(X)$ . Quand la constante  $K$  dépend d'un paramètre  $\eta$ , c'est à dire est une fonction de  $\eta$ , on écrira par exemple  $u(X) \ll_{\eta} v(X)$  à la place de  $u(X) \ll v(X)$ .

### 1b) Longues chaînes d'entiers de $\mathcal{A}(x, y)$

On s'intéresse à présent à une autre question relative aux longues chaînes d'entiers. Notons  $R(x, z)$  le cardinal maximum de l'union de chaînes d'entiers  $\leq x$  deux à deux disjointes et toutes de longueur  $z$ . Dans [18] on démontre l'encadrement

$$(1.14) \quad R(x, z) \asymp \frac{x}{\log z}, \quad (2 \leq z \leq f(x)),$$

qui sera utilisé pour répondre à une question d'Erdős.

Notons

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= \mathcal{A}(x, x) = \{n : S(n) \leq x\}, \\ A(x) &= |\mathcal{A}(x)| \end{aligned}$$

et désignons par  $f_a(x)$  la longueur maximum d'une chaîne d'entiers de  $\mathcal{A}(x)$ . Pour établir (1.14) on met en lumière une équation fonctionnelle approchée

de  $R(x, z)$  qui fait intervenir la fonction  $f_a(x)$ . Pour itérer cette équation fonctionnelle, on a besoin de la minoration

$$(1.15) \quad f_a(x) \gg x/\log x.$$

Pour démontrer cette minoration, ma première idée était ambitieuse : il s'agissait de montrer que  $f_a(x)$  prend pour tout  $x$  la plus grande valeur possible, i.e.  $f_a(x) = A(x)$  et on a (1.15) par l'estimation  $A(x) \asymp x/\log x$  (voir le lemme 4.2 ci-dessous). Autrement dit, il s'agissait de confirmer l'

**HYPOTHÈSE A.** *Pour tout  $N \geq 1$ , on peut ordonner l'ensemble  $\mathcal{A}(N)$  en une chaîne.*

Il serait à désirer, sans doute, que l'on eût une démonstration rigoureuse de cette proposition ; néanmoins j'ai laissé cette recherche de côté pour le moment après quelques rapides essais infructueux car elle paraît superflue pour le but immédiat de mon étude.

En effet, j'ai pris conscience que l'on pouvait réutiliser la méthode de minoration du chapitre 8 de [13]. Je me contente donc de montrer ici (1.15).

**THÉORÈME 1.3.** *Il existe deux réels  $c$  et  $K$  avec  $K > c > 0$  tels que pour tout  $x \geq 2$ , on a*

$$c \frac{x}{\log x} \leq f_a(x) \leq K \frac{x}{\log x}.$$

La majoration découle immédiatement de (1.1). Pour la minoration on note  $S^*(x, y) = \{n : \sqrt{x} < n \leq x, P(n) \leq y\}$ . Notons  $f_a(x, y)$  (respectivement  $f_a^*(x, y)$ ) la longueur maximum d'une chaîne d'entiers de  $\mathcal{A}(x) \cap \mathcal{S}(x, y)$  (resp.  $\mathcal{A}(x) \cap S^*(x, y)$ ). On désigne par  $P^-(n)$  le plus petit facteur premier de l'entier  $n \geq 2$  avec la convention  $P^-(1) = +\infty$ . Notons également  $A(x, y, z) = |\{n : S(n) \leq x : P(n) \leq y \text{ et } P^-(n) > z\}|$ . On montre en fait le

**THÉORÈME 1.4.** *Il existe un réel  $M \geq 1$  tel que pour tous  $x \geq 8$  et  $y \geq 2$ , on a*

$$f_a(x, y) \geq f_a^*(x, y) \geq A\left(\frac{x}{M}, y, 2\right).$$

On sait que  $A(x, x, 2) \asymp x/\log x$  (voir le lemme 4.2). Donc la minoration  $f_a(x) \gg x/\log x$  du théorème 1.3 résulte immédiatement du théorème 1.4.

La structure générale de la preuve du théorème 1.4 est identique à toutes celles des minoration de variantes de la fonction  $f(x, y)$  : on construit une

longue chaîne d'entiers de  $\mathcal{A}(x) \cap \mathcal{S}^*(x, y)$  en juxtaposant de longues sous-chaînes à plus grand facteur premier constant. La preuve est cependant sensiblement plus longue. C'est dû au fait que cette fois on est obligé, quand  $y \asymp \sqrt{x}$  par exemple, d'introduire une composante extérieure. En effet supposons que  $pa$  (avec  $P(a) \leq p$ ) et  $p'a'$  (avec  $P(a') \leq p'$ ) sont deux entiers de  $\mathcal{A}(x)$  tels que  $pa$  est le connecteur intérieur entre les deux sous-chaînes  $p\mathcal{C}(x/p, p)$  et  $p'\mathcal{C}(x/p', p')$  d'extrémités voisines  $pa$  et  $p'a'$ . Alors  $p'a'$  est un multiple de  $pa$ . Donc il existe  $a''$  tel que  $p'a' = p'pa''$  avec  $P(a'') \leq p$ . La condition  $p'pa'' \in \mathcal{A}(x)$  entraîne alors l'inégalité  $p'p^2 \leq x$ , qui ne peut pas être vérifiée quand  $p' > p > x^{1/3}$ . Cela amène à regrouper toutes les sous-chaînes  $p\mathcal{C}(x/p, p)$  avec  $p > x^{1/3}$  dans une composante extérieure.

Or comme on l'a déjà évoqué, cela crée une difficulté. En effet, il faut s'assurer, non seulement qu'il y a suffisamment de connecteurs extérieurs  $qa$  (avec  $P(a) \leq q$ ) à notre disposition, mais aussi que ces entiers  $qa$  ne sont pas présents dans les sous-chaînes  $q\mathcal{C}(x/q, q)$  de la composante intérieure. Le premier point sera vérifié au paragraphe 8.4. Pour le second, voir la remarque du paragraphe 8.7.

### 1c) Utilisation d'inégalités de Buchstab en théorie multiplicative et additive des nombres.

L'itération d'identités ou d'inéquations de Buchstab est un outil important de la théorie analytique des nombres. Suivant les cas on est amené à cribler par les petits ou les grands facteurs premiers. Notons  $\pi(x, k) = |\{n \leq x : \omega(n) = k\}|$ . Dans [1], Balazard crible par les petits facteurs premiers en prolongeant  $\pi(x, k)$  par

$$\pi(x, z, k) := |\{n \leq x : P^-(n) > z \text{ et } \omega(n) = k\}|.$$

C'est en itérant l'identité de Buchstab que cette dernière fonction vérifie, qu'il a prouvé la conjecture d'Erdős suivante : pour tout  $x$  suffisamment grand, la suite  $(\pi(x, k))_{k \geq 1}$  est unimodale.

L'itération d'identités de Buchstab a été également utilisée plusieurs fois dans le cadre de l'estimation de la fonction de comptage des entiers à diviseurs denses : dans [21], [16] et pour le Lemme 3 de [11], on itère l'identité de Buchstab obtenue en classant les entiers par leur plus petit facteur premier après avoir criblé par les petits facteurs premiers. Dans [13], [14] et [15], c'est avec les grands facteurs premiers. Pomerance et Weingartner ont montré très récemment que le nombre de nombres premiers  $p \leq x$  tels que  $p - 1$  est un nombre pratique, est  $\ll x/\log^2 x$ , ce qui est l'ordre de grandeur

attendu (Theorem 1 de [11]). Pour cela, ils réutilisent la méthode d'itération d'inégalité de Buchstab de [14].

Le travail [12] a permis de dégager une méthode générale pour minorer la longueur maximum d'une chaîne d'entiers vérifiant au moins la propriété d'appartenir à  $\mathcal{S}(x, y)$ . Il s'agit de combiner la construction d'une chaîne d'entiers ayant la structure (1.4) avec l'itération d'une inégalité de Buchstab. Cette méthode a donc été utilisée dans [12], mais aussi dans [13], aux lemmes 5 et 6 de [17] et dans [7]. C'est encore comme cela que l'on travaille ici pour établir le théorème 1.4.

## 2 Opérations sur les chaînes

Les constructions de longues chaînes s'obtiennent en effectuant diverses opérations sur des sous-chaînes (voir [12], [21], etc).

Plutôt que de donner une définition formelle, on rappelle la nature de ces opérations sur des exemples. Soit  $\mathcal{C}_1 = 2 - 6 - 3$ . La chaîne  $3 - 6 - 2$  est l'inverse de  $\mathcal{C}_1$ , et est notée  $\text{inv } \mathcal{C}_1$ . La chaîne  $14 - 42 - 21$  est le produit de  $\mathcal{C}_1$  par 7. On la note  $7\mathcal{C}_1$ . Il y a maintenant trois variantes de « collage » de deux chaînes.

Si  $\mathcal{C}_2 = 12 - 24 - 8$ ,

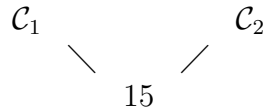
on appellera concaténation de  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  et on notera  $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2$  la chaîne  $2 - 6 - 3 - 12 - 24 - 8$ .

Si  $\mathcal{C}_2 = 3 - 12 - 24$ ,

on appellera collage de  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  et on notera encore  $\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2$  la chaîne  $2 - 6 - 3 - 12 - 24$ .

Si  $\mathcal{C}_2 = 5 - 40 - 20$ ,

on appellera juxtaposition de  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  par le connecteur extérieur 15, la chaîne  $2 - 6 - 3 - 15 - 5 - 40 - 20$ . On la notera



Signalons que l'on procèdera parfois en deux temps. Dans un premier temps on considèrera le résultat de ces opérations de collage comme une suite finie d'entiers et ce n'est que dans un deuxième temps que l'on établira que cette suite est en réalité une chaîne. On conviendra enfin que  $\emptyset$  est une chaîne.



### 3 Preuve du théorème 1.1

Notons  $p_1 < p_2 < \dots$  la suite croissante des nombres premiers. On pose par convention  $p_0 = 2$  et  $p_{-1} = 1/2$ . On note

$$j = j(x, y) = \pi(\min(y, x/2))$$

et

$$k = k(x, y) = \pi(\min(y, \sqrt{x/2})).$$

On démontre le théorème 1.1 sous la forme plus précise suivante :

**PROPOSITION 3.1.** *Soient  $x \geq 2$  et  $y \geq 2$ .*

*Il existe une chaîne  $\mathcal{C}(x, y)$  d'entiers de  $\mathcal{S}(x, y)$  qui commence en  $2p_{j(x,y)-1}$ , s'achève en 2 et contient  $\mathcal{A}(x/2, y)$ .*

**Démonstration.** On construit la chaîne  $\mathcal{C}(x, y)$  par récurrence sur  $r \geq 1$  avec

$$(3.1) \quad 2^r \leq x < 2^{r+1} \quad \text{et} \quad y \geq 2.$$

On choisit la chaîne

$$\mathcal{C}(x, y) = \begin{cases} 1 - 2 & \text{si } r = 1 \\ 4 - 1 - 2 & \text{si } r = 2 \end{cases}$$

et on vérifie qu'elle convient quand  $x < 8$ . On suppose maintenant que  $r \geq 3$ , que toutes les chaînes  $\mathcal{C}(x, y)$  avec  $2 \leq x < 2^r$  et  $y \geq 2$  ont été construites et que (3.1) est vérifiée. On a en particulier  $j \geq k \geq 1$ .

Pour tout  $x \geq 4$  on définit  $\mathcal{C}^*(x, p_1)$  comme étant la chaîne constituée de tous les entiers  $2^m$  vérifiant  $2 \leq 2^m \leq x$ , par ordre décroissant.

On définit les deux suites finies d'entiers de  $\mathcal{S}(x, y)$  suivantes :

$$\mathcal{D} = p_1 \mathcal{C}^*\left(\frac{x}{p_1}, p_1\right) - p_2 \mathcal{C}\left(\frac{x}{p_2}, p_2\right) - p_3 \mathcal{C}\left(\frac{x}{p_3}, p_3\right) - \dots - p_{k-1} \mathcal{C}\left(\frac{x}{p_{k-1}}, p_{k-1}\right)$$

et

$$\mathcal{E} = \begin{cases} p_k \mathcal{C}\left(\frac{x}{p_k}, p_k\right) & \text{si } k \geq 2 \\ \emptyset & \text{si } k = 1. \end{cases}$$

(Si  $k \leq 2$ , on a donc  $\mathcal{D} = p_1 \mathcal{C}^*(x/p_1, p_1)$ ).

Si  $k = 1$ ,  $\mathcal{D}$  est une chaîne.

Supposons à présent  $k \geq 2$ . On a alors  $x \geq 18$  d'où

$$j(x/p_2, p_2) = j(x/3, 3) = \pi(3) = 2.$$

Le premier entier de  $p_2 \mathcal{C}(x/p_2, p_2)$  est donc égal à 12, qui est un multiple de 4, qui est le dernier entier de  $p_1 \mathcal{C}^*(x/p_1, p_1)$ . De même pour  $3 \leq \ell \leq k$ , en utilisant que  $p_\ell \leq p_k \leq \sqrt{x/2}$ , on a

$$j(x/p_\ell, p_\ell) = \pi(\min(p_\ell, x/2p_\ell)) = \pi(p_\ell) = \ell.$$

Le premier entier de  $p_\ell \mathcal{C}(x/p_\ell, p_\ell)$  est donc égal à  $2p_{\ell-1}p_\ell$ , qui est un multiple de  $2p_{\ell-1}$ , qui est le dernier entier de  $p_{\ell-1} \mathcal{C}(x/p_{\ell-1}, p_{\ell-1})$ . Enfin par hypothèse de récurrence, tous les  $p_\ell \mathcal{C}(x/p_\ell, p_\ell)$  sont des chaînes.

Tout cela prouve que

$$(3.2) \quad \mathcal{D}, \mathcal{E} \text{ et } \mathcal{D} - \mathcal{E} \text{ sont des chaînes d'entiers de } \mathcal{S}(x, y).$$

On définit maintenant l'inverse de  $\mathcal{C}(x, y)$  par

$$\text{inv}\mathcal{C}(x, y) : \begin{cases} 2 - \mathcal{E} - 1 - \mathcal{D} & \text{si } j = k \\ 2 - 1 - \mathcal{D} - \mathcal{E} & \text{si } j = k + 1 \\ 2 - \mathcal{D} - \mathcal{E} - 1 - 2p_{j-1} & \text{si } j \geq k + 2. \end{cases}$$

On voit facilement que  $\mathcal{C}(x, y)$  est une suite finie d'entiers de  $\mathcal{S}(x, y)$  qui s'achève en 2. En utilisant (3.2) et en discutant suivant les différents cas, on vérifie que  $\mathcal{C}(x, y)$  est également une chaîne qui commence en  $2p_{j-1}$ . En utilisant la formule fondamentale (1.5) et en réutilisant l'hypothèse de récurrence on voit donc que  $\mathcal{C}(x, y) \supset \mathcal{A}(x/2, y)$ . Cela achève la preuve de la proposition 3.1, et partant celle du théorème 1.1.

## 4 La fonction $A(x, y, z, t)$

Pour  $x, y, z$  et  $t$  des réels positifs, on note  $\mathcal{A}(x, y, z, t) := \{n \leq x : P(n) \leq y, P^-(n) > z \text{ et } S(n) \leq xt\}$  et  $A(x, y, z, t) = |\mathcal{A}(x, y, z, t)|$ . On a (voir la formule (2.7) de [20]).

**LEMME 4.1.** *Pour tout  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^{+*} \times [1, +\infty[^3$ , on a*

$$A(x, y, z, t) = \mathbf{1}_{[1, +\infty[}(x) + \sum_{z < p \leq \min(y, \sqrt{xt})} A(x/p, p, z, t).$$

Par ailleurs on a le

**LEMME 4.2.** Soient  $z_0 \geq 1$  et  $0 < \varepsilon < 1/2$ . Sous les conditions

$$(4.1) \quad x \geq y \geq x^{1/2+\varepsilon} \geq 2, \quad 1 \leq t \leq x \text{ et } 1 \leq z \leq z_0$$

on a

$$(4.2) \quad A(x, y, z, t) \asymp_{z_0, \varepsilon} x \frac{\log 2t}{\log x}.$$

*Démonstration :* La majoration résulte de celle du théorème 1 de [14]. Pour la minoration, on a pour tout  $t_0 \geq 1$

$$A(x, y, z, t) \geq A(x/t_0, y, z, tt_0).$$

Il suffit donc de prouver la minoration de (4.2) avec la condition supplémentaire  $t \geq t_0$  où  $t_0$  est une constante fixée. Or justement il résulte du lemme 1 de [16] qu'il existe une constante  $t_0 \geq 2$  telle que

$$(4.3) \quad \left[ \begin{array}{l} A(x, +\infty, z, t) \gg_{z_0} x \frac{\log t}{\log x} \\ \text{sous les conditions} \\ x \geq t \geq t_0 \text{ et } 1 \leq z \leq z_0. \end{array} \right.$$

On supposera donc dorénavant  $t \geq t_0 \geq 2$ . Si  $y > \sqrt{xt}$ , on a en utilisant le lemme 4.1 et (4.3) que sous les conditions (4.1)

$$A(x, y, z, t) = A(x, +\infty, z, t) \gg_{z_0} x \frac{\log t}{\log x}.$$

Si  $y \leq \sqrt{xt}$ , il suffit de montrer la minoration de (4.2) pour  $y = x^{1/2+\varepsilon}$ . Or en utilisant le lemme 4.1 et (4.3), il existe une constante  $x_0(\varepsilon)$  telle que sous (4.1) et la condition supplémentaire  $x \geq x_0(\varepsilon)$ , on a

$$\begin{aligned} A(x, x^{1/2+\varepsilon}, z, t) &\geq A(x, x^{1/2+\varepsilon}, z, t) - A(x, \sqrt{x}, z, t) \\ &= \sum_{\sqrt{x} < p \leq x^{1/2+\varepsilon}} A(x/p, p, z, t) = \sum_{\sqrt{x} < p \leq x^{1/2+\varepsilon}} A(x/p, +\infty, z, t) \\ &\gg_{z_0} x \frac{\log t}{\log x} \sum_{\sqrt{x} < p \leq x^{1/2+\varepsilon}} \frac{1}{p} \asymp_{\varepsilon} x \frac{\log t}{\log x}. \end{aligned}$$

On conclut la preuve de la minoration en remarquant qu'elle est banale si  $x < x_0(\varepsilon)$ .

**LEMME 4.3.** *Il existe un entier positif  $\gamma$  et un réel positif  $x_1$  tels que pour tous réels  $x$  et  $q$  vérifiant*

$$(4.4) \quad x \geq x_1 \quad \text{et} \quad x^{1/5} < q \leq x^{1/4},$$

on a

$$\left| \left\{ a > \frac{\sqrt{x}}{q} : P(a) \leq q \text{ et } S(a) \leq \frac{2^\gamma \sqrt{x}}{q} \right\} \right| \geq \frac{\sqrt{x}}{q \log x}.$$

**Démonstration.** D'après le lemme 4.2, il existe un réel  $E \geq 2$  tel que

$$(4.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tous } X, q \text{ et } \alpha \text{ vérifiant} \\ X \geq 2, X^{4/7} < q \leq X, 1 \leq 2^\alpha \leq X, \text{ on a} \\ \frac{1}{E} \leq \frac{|\{a \leq X : P(a) \leq q \text{ et } S(a) \leq 2^\alpha X\}|}{X(1 + \alpha)/\log X} \leq E \end{array} \right.$$

On choisit un tel réel  $E$ . On choisit alors aussi un entier positif  $\gamma$  tel que

$$(4.6) \quad 2^\gamma \geq 4E^2(1 + \gamma).$$

On a pour  $x$  suffisamment grand, en utilisant (4.5) d'abord pour sa majoration, puis pour sa minoration,

$$\begin{aligned} & \left| \left\{ a \leq \frac{\sqrt{x}}{q} : P(a) \leq q \text{ et } S(a) \leq \frac{2^\gamma \sqrt{x}}{q} \right\} \right| \\ & \leq E(1 + \gamma) \frac{\sqrt{x}/q}{\log(\sqrt{x}/q)} \\ & \leq \frac{2E^2(1 + \gamma)}{2^\gamma} \frac{1}{E} \frac{2^\gamma \sqrt{x}/q}{\log(2^\gamma \sqrt{x}/q)} \\ & \leq \frac{2E^2(1 + \gamma)}{2^\gamma} \left| \left\{ a \leq \frac{2^\gamma \sqrt{x}}{q} : P(a) \leq q \text{ et } S(a) \leq \frac{2^\gamma \sqrt{x}}{q} \right\} \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \left| \left\{ a \leq \frac{2^\gamma \sqrt{x}}{q} : P(a) \leq q \text{ et } S(a) \leq \frac{2^\gamma \sqrt{x}}{q} \right\} \right| \end{aligned}$$

d'après (4.6). Donc, en réutilisant successivement la minoration de (4.5), et (4.6), on a

$$\begin{aligned}
& \left| \left\{ a > \frac{\sqrt{x}}{q}, P(a) \leq q \text{ et } S(a) \leq \frac{2^\gamma \sqrt{x}}{q} \right\} \right| \\
&= \left| \left\{ \frac{\sqrt{x}}{q} < a \leq \frac{2^\gamma \sqrt{x}}{q} : P(a) \leq q \text{ et } S(a) \leq \frac{2^\gamma \sqrt{x}}{q} \right\} \right| \\
&\geq \frac{1}{2} \left| \left\{ a \leq \frac{2^\gamma \sqrt{x}}{q} : P(a) \leq q \text{ et } S(a) \leq \frac{2^\gamma \sqrt{x}}{q} \right\} \right| \\
&\geq \frac{1}{2E} \frac{2^\gamma \sqrt{x}/q}{\log(2^\gamma \sqrt{x}/q)} \geq \frac{\sqrt{x}}{q \log x}.
\end{aligned}$$

## 5 Lemme de Grönwall Bidimensionnel Discret Arithmétique

Rappelons que l'on note

$$A(x, y, z) = A(x, y, z, 1).$$

**LEMME 5.1.** (*lemme GBDA*)

Soient  $h : ]0, +\infty[ \times [2, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction,  $z \geq 1$  et  $M \geq 1$  des réels tels que l'on a pour tous  $x > 0$  et  $y \geq 2$

$$(5.1) \quad h(x, y) \geq \mathbb{1}_{[1, +\infty[}(x) + \sum_{z < p \leq \min(y, \sqrt{x/M})} h(x/p, p).$$

On a alors pour tous  $x > 0$  et  $y \geq 2$

$$(5.2) \quad h(x, y) \geq A(x/M, y, z).$$

**Démonstration.** Par le lemme 4.1 avec  $t = 1$ , on a l'identité de Buchstab

$$(5.3) \quad A(x, y, z) = \mathbb{1}_{[1, +\infty[}(x) + \sum_{z < p \leq \min(y, \sqrt{x})} A(x/p, p, z)$$

pour tous  $x > 0$ ,  $y \geq 2$  et  $z \geq 1$ .

Pour  $0 < x < M$ , la somme en  $p$  dans (5.1) est vide. On a donc  $h(x, y) \geq 0 = A(x/M, y, z)$  et (5.2) est vérifiée.

On procède à présent par récurrence sur  $k \geq 0$  en prouvant que l'inégalité (5.2) est vérifiée pour tous les couples  $(x, y)$  tels que  $y \geq 2$  et

$$(I_k) \quad 0 < x < M2^k.$$

On l'a montrée quand  $k = 0$ . On suppose à présent l'assertion vraie pour  $k \geq 0$  et l'encadrement  $(I_{k+1})$  vérifié.

En utilisant successivement (5.1), la minoration  $M \geq 1$  et l'hypothèse de récurrence, et enfin (5.3), on obtient

$$\begin{aligned} h(x, y) &\geq \mathbb{1}_{[1, +\infty[}(x) + \sum_{z < p \leq \min(y, \sqrt{x/M})} h(x/p, p) \\ &\geq \mathbb{1}_{[1, +\infty[}(x/M) + \sum_{z < p \leq \min(y, \sqrt{x/M})} A(x/Mp, p, z) \\ &= A(x/M, y, z), \end{aligned}$$

et (5.2) est vérifiée.

## 6 Un lemme combinatoire

Le lemme suivant est élémentaire. Il est déjà présent en [13] comme le Lemme 5.

**LEMME 6.1.** *Soit  $\mathcal{E}$  un ensemble non vide partitionné en  $\mathcal{E} = \bigsqcup_{j=1}^k \mathcal{E}_j$ . On note  $n = |\mathcal{E}|$ .*

*Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *On peut ordonner les éléments de  $\mathcal{E}$  sous la forme  $e_1, e_2, \dots, e_n$  avec  $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$  quand  $e_i \in \mathcal{E}_{\alpha_i}$  pour tout  $i$  tel que  $1 \leq i < n$ .*

(ii)  $\max_{1 \leq j \leq k} |\mathcal{E}_j| \leq (n+1)/2$ .

Nous donnons cette fois-ci la

**Preuve.** On suppose que

$$(6.1) \quad |\mathcal{E}_1| \geq |\mathcal{E}_2| \geq \dots \geq |\mathcal{E}_k|.$$

(i)  $\Rightarrow$  (ii)

Notons  $p$  et  $q$  tels que

$$p = |\mathcal{E}_1| \quad \text{et} \quad p + q = n.$$

On suppose (i). Alors l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_1 \setminus \{e_n\} & \longrightarrow & \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_1 \\ e_i & \longmapsto & e_{i+1} \end{array}$$

est une injection. Donc

$$p - 1 \leq |\mathcal{E}_1 \setminus \{e_n\}| \leq |\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_1| = q.$$

D'où en rappelant que  $q = n - p$ ,  $p \leq (n + 1)/2$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i)

On procède par récurrence sur  $n \geq 1$ .

Les cas  $n = 1$  et  $n = 2$  sont faciles. Supposons  $n \geq 3$  et l'implication vérifiée pour  $n - 2$ . Comme  $(n + 1)/2 < n$ , on a  $k \geq 2$ . Choisissons  $f \in \mathcal{E}_1$  et  $g \in \mathcal{E}_2$ . On a  $|\mathcal{E}_3| \leq n/3 \leq (n - 1)/2$  car  $n \geq 3$ . On a donc avec l'hypothèse (ii) et (6.1),

$$\max(|\mathcal{E}_1| - 1, |\mathcal{E}_2| - 1, \max_{3 \leq j \leq k} |\mathcal{E}_j|) \leq (n - 1)/2.$$

D'après l'hypothèse de récurrence pour  $n - 2$ , on peut ordonner  $\mathcal{E} \setminus \{f, g\}$  en une suite  $e_3, e_4, \dots, e_n$  avec  $\alpha_i \neq \alpha_{i+1}$  quand  $e_i \in \mathcal{E}_{\alpha_i}$ . En complétant avec  $e_1$  et  $e_2$  qui sont  $f$  et  $g$  tels que  $e_2$  et  $e_3$  ne sont pas dans le même  $\mathcal{E}_j$ , on obtient une suite  $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$  qui convient.

## 7 Définition de l'ensemble $\mathcal{A}^*(x, y)$ et de la fonction $h_a^*(x, y)$

Désignons par  $f^*(x, y)$  la longueur maximum d'une chaîne d'entiers de  $\{n : \sqrt{x} < n \leq x \text{ et } P(n) \leq y\}$  et posons  $f^*(x) = f^*(x, x)$ . L'objet du chapitre 8 de [13] a été d'établir une minoration de  $f^*(x)$  par une fonction de comptage d'entiers à diviseurs denses, minoration qui s'est révélée par la suite donner le bon ordre de grandeur de  $f^*(x)$  (on a  $f^*(x) \asymp f(x) \asymp x/\log x$ , cf. le théorème 2 de [15]). On a construit pour cela des chaînes d'entiers de

$\{\sqrt{x} < n \leq x : P(n) \leq y\}$  qui ont la structure (1.4), ce qui a permis d'établir une inéquation de Buchstab pour une fonction  $h^*(x, y)$  qui minore  $f^*(x, y)$ , que l'on a itérée.

Pour montrer que

$$f_a^*(x) \gg x/\log x$$

on suit la même procédure. C'est la fonction  $h_a^*(x, y)$  qui sera introduite à la formule (8.5), qui va jouer le rôle de  $h^*(x, y)$  dans [13]. On va en fait suivre de très près la démarche de [13], en donnant plus de détails.

Définir cette fonction  $h_a^*(x, y)$  nécessite de faire quelques remarques préliminaires que l'on donne sous forme de lemmes. Ceux-ci seront également utilisés aux chapitres 8 et 9. Toutes les chaînes que l'on va construire seront formées d'entiers de l'ensemble  $\mathcal{A}^*(x, y)$  que l'on définit par

$$\mathcal{A}^*(x, y) := \{n > \sqrt{x} : P(n) \leq \min(y, \sqrt{x}/27), S(n) \leq x\}$$

**Notation.** Dans tout ce chapitre, conformément aux notations du chapitre 2, le schéma «  $m - n$  » à l'intérieur d'une chaîne représentera la sous-chaîne formée des deux entiers  $m$  et  $n$  si  $m \neq n$ , ou la sous-chaîne réduite à l'entier  $n$  si  $m = n$ .

**LEMME 7.1.** Soient  $q \in \{2, 3\}$ ,  $x$  et  $y$  deux réels tels que  $x \geq 3^{10}$  et  $y \geq 3$ . Soit  $A$  un entier de  $\mathcal{A}^*(x, y)$  tel que  $P^-(A) \geq q$  et  $P(A) > q$ .

Il existe alors une chaîne  $\mathcal{C}(x, y) : A = a_1 - a_2 - \dots - a_s$  d'entiers de  $\mathcal{A}^*(x, y)$  telle que

$$\begin{aligned} P(a_j) &= P(A) \text{ pour tout } j \text{ vérifiant } 1 \leq j < s, \\ P(a_s) &= q, \\ P^-(a_j) &\geq q \text{ pour tout } j \text{ vérifiant } 1 \leq j \leq s, \\ a_s &\text{ divise } a_{s-1} \end{aligned}$$

et

$$(7.1) \quad \left[ \begin{array}{l} a_{s-1} > \sqrt{xP(a_{s-1})}, \\ P(a_{s-1}/P(a_{s-1})) \leq \sqrt{x/P(a_{s-1})}/27 \\ \text{et} \\ a_s > 3\sqrt{x} \end{array} \right.$$

**Remarque.** Quand  $q = 2$ , les minoration de l'énoncé de la forme  $P^-(n) \geq q$  sont vides.



**Démonstration.** On écrit la décomposition de  $A$  en produit de facteurs premiers sous la forme

$$A = p_k p_{k-1} \cdots p_1 q^\alpha$$

avec  $P(A) = p_k \geq p_{k-1} \geq \cdots \geq p_1 > q$  et  $\alpha \geq 0$ . Comme  $S(A) \leq x$  et  $P^-(A) \geq q$ , on a  $A \leq x/q$ . On définit successivement les entiers  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$  par les inégalités

$$\frac{x}{q^2} < d_j := p_k p_{k-1} \cdots p_j q^{\alpha + \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_j} \leq \frac{x}{q}$$

pour tout  $j$  vérifiant  $1 \leq j \leq k$ . On définit également

$$c_j = p_k p_{k-1} \cdots p_j q^{\alpha + \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_{j-1}} \quad (1 \leq j \leq k)$$

et

$$c_{k+1} = q^{\alpha + \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_k}.$$

On choisit alors la chaîne

$$\mathcal{C}(x, y) : A = c_1 - d_1 - c_2 - d_2 - \cdots - c_k - d_k - c_{k+1}.$$

On a donc

$$a_s = q^{\alpha + \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_k} \quad \text{et} \quad a_{s-1} = d_k = p_k q^{\alpha + \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_k}.$$

On vérifie facilement que  $\mathcal{C}(x, y)$  est une chaîne d'entiers de  $\mathcal{A}^*(x, y)$  qui vérifie les quatre premières propriétés demandées.

Montrons à présent les propriétés (7.1). On a

$$(7.2) \quad a_{s-1} > x/9,$$

$$(7.3) \quad P(a_{s-1}) \leq \sqrt{x}/27$$

et

$$(7.4) \quad x \geq 3^{10}.$$

On a donc  $a_s = a_{s-1}/P(a_{s-1}) > 3\sqrt{x}$  d'après (7.2) et (7.3). On a  $P(a_{s-1}/P(a_{s-1})) = q \leq 3$  et  $3 \leq \sqrt{x/P(a_{s-1})}/27$  d'après (7.3) et (7.4). Enfin l'inégalité  $a_{s-1} > \sqrt{xP(a_{s-1})}$  découle de (7.2), (7.4) et (7.3).

**LEMME 7.2.** *Pour tous réels  $x \geq 3^{10}$  et  $y \geq 5$  et tout entier  $A$  de  $\mathcal{A}^*(x, y)$  tel que  $P(A) > 3$ , il existe une chaîne  $A = a_1 - a_2 - \dots - a_s$  d'éléments de  $\mathcal{A}^*(x, y)$  telle que  $P(a_j) = P(A)$  pour tout  $j$  vérifiant  $1 \leq j < s$  et  $P(a_s) = P^-(a_s) = 3$ .*

**Démonstration.** Si  $P^-(A) \geq 3$  on pose  $r = 1$ . Si  $P^-(A) = 2$ , on commence par construire une chaîne  $A = a_1 - a_2 - \dots - a_r$  d'entiers de  $\mathcal{A}^*(x, y)$  avec  $r \geq 2$  telle que

- \* Pour tout  $j$  vérifiant  $2 \leq j \leq r$ ,  $a_j/a_{j-1}$  vaut 3 ou  $1/2$
- \* Pour tout  $j$  vérifiant  $1 \leq j \leq r - 1$ ,  $P^-(a_j) = 2$
- \*  $P^-(a_r) = 3$ .

Comme  $P(a_r) = P(A)$  et  $A \in \mathcal{A}^*(x, y)$ , on a

$$3 < P(a_r) \leq \sqrt{x}/27.$$

On peut donc appliquer le lemme 7.1 avec  $q = 3$ , ce qui fournit une chaîne  $\mathcal{C}(x, y)$  d'entiers de  $\mathcal{A}^*(x, y)$

$$\mathcal{C}(x, y) : a_r - a_{r+1} - \dots - a_s, \text{ avec}$$

$$P(a_j) = P(a_r) \text{ pour } r \leq j < s$$

$$P(a_s) = 3$$

$$P^-(a_j) \geq 3 \text{ pour } r \leq j \leq s.$$

Cela permet d'achever la preuve que la suite finie

$$A = a_1 - a_2 - \dots - a_r - a_{r+1} - \dots - a_s$$

est une chaîne qui répond à la question.

**LEMME 7.3.** *Pour tous réels  $x \geq 3^{10}$  et  $y \geq 3$ , pour tous  $A$  et  $B$  éléments de  $\mathcal{A}^*(x, y)$  tels que  $P(A) < P(B)$ , il existe une chaîne formée d'entiers de  $\mathcal{A}^*(x, y)$  qui relie  $A$  à  $B$ .*

**Démonstration.** Si  $P(A) = 2$  on choisit  $\mathcal{C}_1(x, y)$  réduit au singleton  $A$ . Sinon on choisit la chaîne  $\mathcal{C}_1(x, y)$  comme la chaîne  $\mathcal{C}(x, y)$  du lemme 7.1 pour  $q = 2$ , qui commence par  $A$ . Par ailleurs on choisit  $\mathcal{C}_2(x, y)$  également comme la chaîne  $\mathcal{C}(x, y)$  du lemme 7.1 pour  $q = 2$ , mais qui commence cette fois par  $B$ . On obtient finalement une chaîne qui convient en concaténant ou en collant  $\mathcal{C}_1(x, y)$  à l'inverse de  $\mathcal{C}_2(x, y)$

**LEMME 7.4.** *Soit  $x \geq 3^8$ .*

*Il existe alors deux entiers  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{A}^*(x, 3)$  tels que  $P(A) = 2$  et  $P(B) = 3$ .*

**Démonstration.** On choisit  $A$  comme la plus grande puissance de 2 qui est  $\leq x/6$  et  $B = 3A$ . Comme  $x \geq 12$ ,  $A \neq 1$  et  $S(B) = 2B$ . Plus précisément  $S(A) = 2A < 6A = S(B) \leq x$ . Comme  $x \geq 3^8$ , on a aussi

$$2 = P(A) < P(B) = 3 \leq \sqrt{x}/27.$$

Le lemme 7.3 nous permet de définir  $f_{a,A,B}^*(x, y)$  comme la longueur maximum d'une chaîne d'entiers de  $\mathcal{A}^*(x, y)$  reliant  $A$  à  $B$ , dès que  $(A, B) \in \mathcal{A}^*(x, y)^2$ ,  $P(A) < P(B)$ ,  $x \geq 3^{10}$  et  $y \geq 3$ . Avec le lemme 7.4, cela permet de définir également la fonction  $h_a^*$  de  $\mathbb{R}^{+*} \times [2, +\infty[$  dans  $\mathbb{N}$  par

$$(7.5) \quad h_a^*(x, y) = \begin{cases} \mathbb{1}_{[1, +\infty[}(x) & \text{si } [0 < x < 3^{10} \text{ ou } 2 \leq y < 3] \\ \min_{(A,B) \in \mathcal{A}^{*2}(x,y), P(A) < P(B)} f_{a,A,B}^*(x, y), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dorénavant, on désigne par  $\mathcal{C}_{C,D}^*$  une chaîne générique qui relie  $C$  à  $D$ .

**LEMME 7.5.** *Soit  $x \geq 3^{11}$ .*

*Soient  $A$  et  $B$  deux entiers de  $\mathcal{A}^*(x, 3)$  avec  $P(A) = 2$  et  $P(B) = 3$ . Il existe alors une chaîne  $\mathcal{C}_{A,B}^*$  d'entiers de  $\mathcal{A}^*(x, 3)$  qui relie  $A$  à  $B$  avec*

$$\text{longueur } \mathcal{C}_{A,B}^* \geq 1 + h_a^*(x/3, 3).$$

**Démonstration.** On choisit

$$B' = \begin{cases} B & \text{si } B > \sqrt{3x} \\ 2B & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si  $B' = 2B$ , on a  $S(B') = 4B \leq 4\sqrt{3x} \leq x$ . On a de plus  $P(B') = 3 \leq \sqrt{x}/27$ . Donc  $B' \in \mathcal{A}^*(x, 3)$ . On note

$$\mathcal{C}_{B',B}^* : B' - B.$$

Par ailleurs on note  $r$  l'entier défini par  $\sqrt{x} < 2^r \leq 2\sqrt{x}$ . On choisit alors un entier  $A'$  et une chaîne de la forme

$$\mathcal{C}_{A,A'}^* : A - 2^r - 2^r 3^{1+\varepsilon} := A'$$

avec  $\varepsilon \in \{0, 1\}$  choisi de telle sorte que  $P(A'/3) \neq P(B'/3)$ . On a  $S(A') = 2A' \leq 2^2 \cdot 3^2 \sqrt{x} \leq x$ . On a toujours  $3 \leq \sqrt{x}/27$ . Donc  $\mathcal{C}_{A,A'}^*$  est une chaîne d'entiers de  $\mathcal{A}^*(x, y)$ .

On a  $A'/3 > \sqrt{x/3}$ ,  $B'/3 > \sqrt{x/3}$ . On a donc  $(A'/3, B'/3) \in (\mathcal{A}^*(x/3, 3))^2$ ,  $3 \leq \sqrt{x/3}/27$ ,  $S(A'/3) \leq x/3$ ,  $S(B'/3) \leq x/3$  et  $P(A'/3) \neq P(B'/3)$ . On a de plus  $x/3 \geq 3^{10}$  d'après l'hypothèse  $x \geq 3^{11}$ . D'après la définition de  $h_a^*$  à la formule (8.5), il existe une chaîne  $\mathcal{C}_{A'/3, B'/3}^*$  d'entiers de  $\mathcal{A}^*(x/3, 3)$  et de longueur  $f_{a, A', B'}^*(x/3, 3) \geq h_a^*(x/3, 3)$ . De plus la chaîne  $\mathcal{C}_{A, A'}^*$  n'est pas réduite à l'entier  $A'$ . Cela permet de conclure que

$$\mathcal{C}_{A, B}^* = \mathcal{C}_{A, A'}^* - 3\mathcal{C}_{A'/3, B'/3}^* - \mathcal{C}_{B', B}^*$$

est une chaîne d'entiers de  $\mathcal{A}^*(x, 3)$  qui relie  $A$  à  $B$  et dont la longueur est supérieure ou égale à  $1 + h_a^*(x/3, 3)$ .

## 8 Construction d'une chaîne $\mathcal{C}_{A, B}^*$ d'entiers de $\mathcal{A}^*(x, y)$

### 8.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est d'établir le résultat suivant :

**LEMME 8.1.** *Il existe un entier  $\gamma \geq 0$  et un réel positif  $x_2$  tels que pour tous réels  $x$  et  $y$  vérifiant*

$$0 \leq y \leq \sqrt{x}/2^{\gamma+13} \quad \text{et} \quad x \geq x_2,$$

*pour tous entiers  $A$  et  $B$  éléments de  $\mathcal{A}^*(x, y)$  vérifiant  $P(A) < P(B)$ , il existe une chaîne  $\mathcal{C}_{A, B}^*$  d'entier de  $\mathcal{A}^*(x, y)$  qui relie  $A$  et  $B$  avec*

$$\text{longueur} \mathcal{C}_{A, B}^* \geq 1 + \sum_{2 < p \leq y} h_a^*(x/p, p).$$

**Démonstration.** On supposera toujours implicitement le réel  $x$  suffisamment grand. Comme au chapitre 8 de [13], on construit cette chaîne sous la forme

$$\mathcal{C}_{A, B}^* : \mathcal{C}_{A, A'}^* - \mathcal{C}_{A', B'}^* - \mathcal{C}_{B', B}^*$$

avec  $\mathcal{C}_{A',B'}^*$  ayant la structure suivante

$$(8.1) \quad \begin{array}{ccccccc} p_0 \mathcal{C}^*\left(\frac{x}{p_0}, p_0\right) & & p_1 \mathcal{C}^*\left(\frac{x}{p_1}, p_1\right) & & \cdots & & p \mathcal{C}^*\left(\frac{x}{p}, p\right) \\ & \searrow & / \quad \searrow & & / & \cdots & \searrow & / \quad \searrow \\ & & q_0 a_0 & & q_1 a_1 & & q(p^-) a(p^-) & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ p^+ \mathcal{C}^*\left(\frac{x}{p^+}, p^+\right) & & p_k \mathcal{C}^*\left(\frac{x}{p_k}, p_k\right) & & & & p_\infty \mathcal{C}^*\left(\frac{x}{p_\infty}, p_\infty\right) \\ & / \quad \searrow & / \quad \searrow & & / & & / \\ & & \cdots & & & & \\ qa = q(p)a(p) & & & & & & q_k a_k \end{array}$$

avec  $\{p_j : 0 \leq j \leq k \text{ ou } j = \infty\} = \{p : 3 \leq p \leq y\}$ .

On note également pour  $p = p_j$ ,  $p^- := p_{j-1}$  quand  $1 \leq j \leq k$ , et  $p^+ :=$   
 $\left| \begin{array}{l} p_{j+1} \quad (0 \leq j < k) \\ p_\infty \quad (j = k). \end{array} \right.$

Dans la notation  $qa$  (ou  $q_j a_j$  ou  $q(p)a(p), \dots$ ) pour désigner les entiers de la ligne du bas de (8.1), la lettre  $q$  désigne un nombre premier et la lettre  $a$  un entier vérifiant  $P(a) \leq q$ . Quand  $p \leq (x/2^{13})^{1/3}$ , l'entier  $qa$  associé à  $p$  est un connecteur intérieur. Quand  $p > (x/2^{13})^{1/3}$ , c'est un connecteur extérieur.

## 8.2 Construction des chaînes $\mathcal{C}_{A,A'}^*$ et $\mathcal{C}_{B',B}^*$

On va choisir ici deux entiers  $A'$  et  $B'$  et construire deux chaînes disjointes  $\mathcal{C}_{A,A'}^*$  et  $\mathcal{C}_{B',B}^*$  d'entiers de  $\mathcal{A}^*(x, y)$  d'extrémités respectives  $A$  et  $A'$ , et  $B$  et  $B'$ , et vérifiant

$$(8.2) \quad \text{il y a au plus une puissance de 2 dans } \mathcal{C}_{A,A'}^* \cap ]\sqrt{x}, 2^4 \sqrt{x}]$$

$$(8.3) \quad \text{il y a au plus une puissance de 2 dans } \mathcal{C}_{B',B}^* \cap ]\sqrt{x}, 2^4 \sqrt{x}]$$

$$(8.4) \quad P(A') \neq P(B')$$

$$(8.5) \quad n \in \mathcal{C}_{A,A'} \sqcup \mathcal{C}_{B',B} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} P(n) \in \{2, P(A'), P(B')\} \\ \text{ou } P(n) > \sqrt{x}/2^{\gamma+13} \end{array} \right.$$

$$(8.6) \quad \left| \begin{array}{l} \text{les entiers } A' \text{ et } B' \text{ sont les seuls entiers } n \\ \text{de } \mathcal{C}_{A,A'}^* \sqcup \mathcal{C}_{B,B'}^* \text{ qui vérifient} \\ \text{simultanément les trois propriétés suivantes :} \\ n > \sqrt{xP(n)} \\ P(n/P(n)) \leq \sqrt{x/P(n)}/27 \\ 3 \leq P(n) \leq \sqrt{x}/2^{\gamma+13}. \end{array} \right.$$

**Remarques.** La chaîne  $\mathcal{C}_{B',B}^*$  sera alors l'inverse de la chaîne  $\mathcal{C}_{B,B'}^*$ . On se contente ici de construire  $\mathcal{C}_{A,A'}^*$  et  $\mathcal{C}_{B,B'}^*$ . On omet la vérification facile que ces chaînes satisfont les propriétés demandées.

On note de plus

$$p_o := P(A') \text{ et } p_\infty := P(B').$$

**Construction de  $\mathcal{C}_{A,A'}^*$**

**1<sup>er</sup> cas**  $P(A) = 2$

On choisit  $p_o \in \{3, 5\}$  tel que  $p_o \neq P(B)$ . On définit l'entier  $\alpha$  par

$$x/2^5 < 2^\alpha \leq x/2^4$$

et on choisit

$$\mathcal{C}_{A,A'}^* : A - 2^\alpha - 2^\alpha p_o := A'$$

**2<sup>ième</sup> cas**

$$A > \sqrt{xP(A)}, P(A/P(A)) \leq \sqrt{x/P(A)}/27 \text{ et } 3 \leq P(A) \leq \sqrt{x}/2^{\gamma+13}.$$

On choisit  $A' = A$  et donc  $\mathcal{C}_{A,A'}^*$  réduite au seul entier  $A$ .

**3<sup>ième</sup> cas**

$$[A \leq \sqrt{xP(A)} \text{ ou } P(A/P(A)) > \sqrt{x/P(A)}/27] \text{ et } 3 \leq P(A) \leq \sqrt{x}/2^{\gamma+13}.$$

On note  $A = a_1 - a_2 - \dots - a_s = 2^{\alpha'}$  la chaîne construite au lemme 7.1 avec  $q = 2$ . On choisit  $\ell$  l'entier minimum  $\geq 2$  tel que

$$a_\ell > \sqrt{xP(a_\ell)} \text{ et } P(a_\ell/P(a_\ell)) \leq \sqrt{x/P(a_\ell)}/27.$$

On sait qu'il en existe car l'entier  $s - 1$  vérifie ces conditions d'après les deux premières propriétés de (7.1). On choisit alors

$$\mathcal{C}_{A,A'}^* : A = a_1 - a_2 - \dots - a_\ell = A'.$$

**4<sup>ième</sup> cas**  $P(A) > \sqrt{x}/2^{\gamma+13}$

On note  $\mathcal{C}_{A,2^\alpha}^*$  la chaîne construite au lemme 7.1 avec  $q = 2$ . On définit comme au 1<sup>er</sup> cas l'entier  $\alpha$  par

$$x/2^5 < 2^\alpha \leq x/2^4.$$

On choisit  $p_o \in \{3, 5\}$  tel que  $p_o \neq P(B)$ . On choisit enfin la chaîne

$$\mathcal{C}_{A,A'}^* : \mathcal{C}_{A,2^\alpha}^* - 2^\alpha - 2^\alpha p_o := A'.$$

### Construction de $\mathcal{C}_{B,B'}^*$

On construit la chaîne  $\mathcal{C}_{B,B'}^*$  de manière analogue. Notons que comme  $P(B) \geq 3$ , on n'est jamais dans le 1<sup>er</sup> cas pour  $B$ . Dans les 2<sup>ième</sup> et 3<sup>ième</sup> cas pour  $B$ , on procède comme dans les 2<sup>ième</sup> et 3<sup>ième</sup> cas pour  $A$ , avec l'utilisation du lemme 7.1 avec  $q = 2$  dans le 3<sup>ième</sup> cas.

Il y a une petite variante dans le 4<sup>ième</sup> cas car il faut s'assurer que la chaîne  $\mathcal{C}_{B,B'}^*$  est disjointe de  $\mathcal{C}_{A,A'}^*$ ; voyons cela. On note  $\mathcal{C}_{B,2^{\beta'}}^*$  la chaîne construite au lemme 7.1 avec  $q = 2$ . On a alors  $2^{\beta'} > 2\sqrt{x}$  d'après la dernière propriété de (7.1). On a alors  $2^{\beta'}$  qui divise l'avant dernier entier de  $\mathcal{C}_{B,2^{\beta'}}^*$ , que l'on note  $m$ . Avec (8.2) il en découle d'abord qu'il existe un entier  $2^\beta \notin \mathcal{C}_{A,A'}^*$  avec  $2^\beta > \sqrt{x}$  et  $\beta \leq \beta'$ , et ensuite que  $2^\beta$  divise aussi  $m$ . On choisit enfin  $p_\infty \in \{3, 5\}$  tel que  $p_\infty \neq p_o$ . Tout cela permet de vérifier qu'en notant  $\mathcal{C}_{B,m}^*$  la chaîne obtenue à partir de  $\mathcal{C}_{B,2^{\beta'}}^*$  en supprimant le dernier entier  $2^{\beta'}$ , la suite d'entiers

$$\mathcal{C}_{B,B'}^* : \mathcal{C}_{B,m}^* - 2^\beta - 2^\beta p_\infty := B'$$

constitue une chaîne d'entiers de  $\mathcal{A}^*(x, y)$  qui a les propriétés requises.

### 8.3 Choix des $p_j$ pour $0 \leq j \leq k$ et $j = \infty$

On choisit  $p_0 = P(A')$  et  $p_\infty = P(B')$  ce qui correspond aux notations du paragraphe 8.2. On a  $p_0 \neq p_\infty$  d'après (8.4).

On note  $p_j$ ,  $1 \leq j \leq k$ , les autres  $p \in [3, y]$  avec  $1 \leq j < j' \leq k \Rightarrow p_j < p_{j'}$ .

### 8.4 Choix des connecteurs $q_a$ de $\mathcal{C}_{A',B'}^*$

Les propriétés (8.2) et (8.3) permettent de choisir  $q_0 a_0$  et  $q_k a_k$  comme des puissances de deux distinctes, appartenant à l'intervalle  $]\sqrt{x}, 2^4 \sqrt{x}$ , et qui n'apparaissent pas dans  $\mathcal{C}_{A,A'}^*$  et  $\mathcal{C}_{B',B}^*$ .

On va maintenant choisir  $k - 1$  entiers deux à deux distincts  $qa = q_j a_j$  associés aux  $p = p_j$  ( $1 \leq j \leq k - 1$ ) (voir (8.1)) de telle sorte que

$$(8.7) \quad \left[ \begin{array}{l} q \text{ est premier, } P(a) \leq q, \ q \notin \{p_0, p_\infty\}, \ 3 \leq q \leq p \\ \sqrt{x}/q < a \leq \sqrt{x/q}, \ 8pq \ S(a) \leq x, \end{array} \right.$$

$$(8.8) \quad 2^{13} p q^2 \leq x$$

et

$$(8.9) \quad q_j \neq q_{j+1} \text{ pour } 1 \leq j \leq k - 2.$$

Donnons dès à présent deux propriétés des entiers  $qa$  provenant des conditions (8.7). On a d'une part

$$qa > \sqrt{x}, \ q \leq p \leq y \leq \sqrt{x}/2^{\gamma+13} \leq \sqrt{x}/27$$

et  $S(qa) = \max(q^2, qS(a)) \leq \max(p^2, qS(a)) \leq x$ . Donc  $qa \in \mathcal{A}^*(x, y)$ .

Et d'autre part en combinant (8.7) et (8.5), on observe que  $qa \notin \mathcal{C}_{A, A'}^* \sqcup \mathcal{C}_{B', B}^*$ .

Choisissons à présent les entiers  $qa$  en distinguant deux cas, qui correspondent à la dichotomie connecteur intérieur/extérieur.

Quand  $3 \leq p \leq \min(y, (x/2^{13})^{1/3})$ , on choisit  $q = p$ . On choisit également un entier  $a$  tel que

$$(8.10) \quad \frac{\sqrt{x}}{q} < a \leq \sqrt{\frac{x}{q}}$$

où  $a$  est une puissance de 2 quand  $q \geq 5$  et  $a$  est de la forme  $2^\alpha 3^\beta$  quand  $q = 3$ . On vérifie facilement que ce choix des  $qa$  satisfait aux conditions demandées (8.7), (8.8) et (8.9). Notons

$$(8.11) \quad a_q \text{ l'entier } a \text{ que l'on vient de choisir qui vérifie (8.10).}$$

On suppose à présent

$$(x/2^{13})^{1/3} < p \leq y \leq \sqrt{x}/2^{\gamma+13}.$$

On note  $R = R(x)$  l'entier maximum tel que

$$(x/2^{13})^{1/3} < \sqrt{x}/2^{\gamma+13+R}.$$



Soit  $r \in [0, R]$ . Sans les choisir explicitement, on va montrer ici qu'il existe suffisamment d'entiers  $qa$  associés aux nombres premiers  $p$  de l'intervalle

$$I_r = \left] \frac{\sqrt{x}}{2^{\gamma+13+r+1}}, \frac{\sqrt{x}}{2^{\gamma+13+r}} \right],$$

de telle manière à vérifier les conditions (8.7), (8.8) et (8.9).

On note

$$h_r(x) := x^{\frac{1}{4}(1-\frac{1}{9}\sum_{j=1}^r \frac{1}{j^2})}.$$

On désigne par  $q'$  un nombre premier générique différent de  $p_0$  et  $p_\infty$ . En utilisant une forme forte du théorème des nombres premiers, on a pour tout  $r \in [0, R]$

$$\begin{aligned} 2 \sum_{h_{r+1} < q' \leq h_r} \frac{1}{q'} &\geq \log \left( \frac{\log h_r}{\log h_{r+1}} \right) \\ &= \log \left( 1 - \frac{1}{9} \sum_{j=1}^r \frac{1}{j^2} \right) - \log \left( 1 - \frac{1}{9} \sum_{j=1}^{r+1} \frac{1}{j^2} \right) \\ &\geq \frac{1}{9(r+1)^2}. \end{aligned}$$

On en déduit avec le lemme 4.3 qu'avec maintenant un entier  $\gamma$  positif ad hoc, on a

$$\begin{aligned} &\sum_{h_{r+1} < q' \leq h_r} \left| \left\{ \frac{\sqrt{x}}{q'} < a \leq \sqrt{x} : P(a) \leq q', S(a) \leq \frac{2^\gamma \sqrt{x}}{q'}, a \neq a_{q'} \right\} \right| \\ &= \sum_{h_{r+1} < q' \leq h_r} \left| \left\{ a > \frac{\sqrt{x}}{q'} : P(a) \leq q', S(a) \leq \frac{2^\gamma \sqrt{x}}{q'}, a \neq a_{q'} \right\} \right| \\ &\geq \frac{\sqrt{x}}{2 \log x} \sum_{h_{r+1} < q' \leq h_r} \frac{1}{q'} \geq \frac{1}{36(r+1)^2} \frac{\sqrt{x}}{\log x} \\ &\geq \frac{1}{2^{\gamma+12+r}} \frac{\sqrt{x}}{\log x} \\ &\geq \pi \left( \frac{\sqrt{x}}{2^{\gamma+13+r}} \right) - \pi \left( \frac{\sqrt{x}}{2^{\gamma+13+r+1}} \right) \end{aligned}$$

par le théorème des nombres premiers.

On a de plus  $2^r \leq 2^R \leq x^{1/6}$  et  $h_{r+1} > x^{1/5}$ . On en déduit que pour tout  $q' \in ]h_{r+1}, h_r]$ , on a

$$\begin{aligned} & \left| \left\{ \frac{\sqrt{x}}{q'} < a \leq \sqrt{\frac{x}{q'}} : P(a) \leq q', S(a) \leq \frac{2^\gamma \sqrt{x}}{q'}, a \neq a_{q'} \right\} \right| \\ & \leq \frac{2^\gamma \sqrt{x}}{q'} \\ & \leq \frac{1}{2} \left( \pi \left( \frac{\sqrt{x}}{2^{\gamma+13+r}} \right) - \pi \left( \frac{\sqrt{x}}{2^{\gamma+13+r+1}} + 1 \right) \right) + 1 \end{aligned}$$

de nouveau par le théorème des nombres premiers.

En utilisant le lemme 6.1, tout cela permet de choisir pour tout  $r \in [0, R]$  une application injective

$$\begin{aligned} \varphi_r : \mathcal{P} \cap I_r & \longrightarrow \{n \geq 1 : h_{r+1} < P(n) \leq h_r, n \neq qa_q\} \\ p & \longmapsto qa = q(p)a(p) \end{aligned}$$

de telle manière que les conditions (8.7) et (8.9) sont vérifiées. La condition  $n \neq qa_q$  assure que les  $qa$  choisis ici sont différents de ceux choisis quand  $p \leq (x/2^{13})^{1/3}$ .

On a de plus  $p \leq \sqrt{x}/2^{\gamma+13} \leq \sqrt{x}/2^{13}$  et  $q \leq x^{1/4}$ . Cela entraîne (8.8).

## 8.5 Choix des extrémités des chaînes $\mathcal{C}^*(x/p, p)$

L'objet ici est de choisir pour tout  $p \in [3, y]$  deux entiers  $e^-(p)$  et  $e^+(p)$ , qui seront respectivement les extrémités gauche et droite de la chaîne  $\mathcal{C}^*(x/p, p)$  de (8.1).

Les extrémités de la chaîne  $\mathcal{C}_{A', B'}^*$  sont  $A'$  et  $B'$ . D'après (8.1), on n'a donc pas le choix pour l'extrémité gauche de  $\mathcal{C}^*(x/p_o, p_o)$  et l'extrémité droite de  $\mathcal{C}^*(x/p_\infty, p_\infty)$  : on pose

$$e^-(p_o) = A'/p_o \text{ et } e^+(p_\infty) = B'/p_\infty.$$

On choisit à présent  $e^+(p_o)$  de la forme

$$e^+(p_o) = d_o a_o q_o$$

avec  $d_o \in \{1, 3\}$  de telle sorte que

$$P(e^+(p_o)) \neq P(e^-(p_o)).$$

On choisit de même  $e^-(p_\infty)$  de la forme

$$e^-(p_\infty) = d_\infty a_k q_k$$

avec  $d_\infty \in \{1, 3\}$  de telle sorte que

$$P(e^-(p_\infty)) \neq P(e^+(p_\infty)).$$

On choisit enfin pour les autres  $p$

$$e^-(p) = q(p^-)a(p^-) \text{ et } e^+(p) = q(p)a(p).$$

## 8.6 Choix des chaînes $\mathcal{C}^*(x/p, p)$

Supposons que  $p = p_j$  avec  $1 \leq j \leq k-1$ . Il y a au plus deux nombres premiers ( $p_0$  et/ou  $p_\infty$ ) entre  $p$  et  $p^+$ , d'où avec le postulat de Bertrand  $p^+ < 8p$ . On en déduit que  $27^2 p^+ q^2 < 3^6 \cdot 2^3 p q^2 < 2^{13} p q^2 \leq x$  d'après (8.8). En utilisant alors les propriétés (8.7), on en déduit que

$$(8.12) \quad q \in \mathcal{A}^*(x/p, p) \cap \mathcal{A}^*(x/p^+, p^+).$$

La propriété (8.9) entraîne elle que

$$(8.13) \quad P(e^-(p)) \neq P(e^+(p)).$$

On vérifie facilement que les propriétés (8.12) et (8.13) sont également satisfaites dans les cas particulier où  $p \in \{p_0, p_k, p_\infty\}$ .

En utilisant la définition (7.5) de  $h_a^*(x, y)$  les propriétés (8.12) et (8.13) permettent de choisir pour tout  $p \in [3, y]$  une chaîne  $\mathcal{C}^*(\frac{x}{p}, p)$  d'entiers de  $\mathcal{A}^*(x/p, p)$ , dont les extrémités sont  $e^-(p)$  et  $e^+(p)$ , et qui vérifie

$$\text{longueur}(\mathcal{C}^*(x/p, p)) \geq h_a^*(x/p, p).$$

On a donc

$$(8.14) \quad \text{longueur } \mathcal{C}_{A,B}^* \geq \text{longueur } \mathcal{C}_{A',B'}^* \geq 1 + \sum_{2 < p \leq y} h_a^*(x/p, p)$$

car  $k \geq 0$ .

## 8.7 Conclusion de la preuve du lemme 8.1

La propriété  $a \leq \sqrt{x/q}$  de (8.7) entraîne l'inégalité

$$qa \leq \sqrt{xP(qa)}.$$

Par ailleurs pour  $m \in \mathcal{C}^*(x/p, p) \subset \mathcal{A}^*(x/p, p)$ , on a

$$pm > \sqrt{xP(pm)}.$$

Cela montre que les connecteurs  $qa$  de l'étage du bas de (8.1) sont différents des entiers de  $p\mathcal{C}^*(x/p, p)$  de l'étage du haut.

**Remarque.** C'est pour établir la propriété ci-dessus que l'on a été amené à imposer aux entiers  $n$  de la chaîne d'entiers de  $\mathcal{A}(x)$  que l'on construit pour établir la minoration du théorème 1.3, de vérifier également  $n > \sqrt{x}$ .

C'est par ailleurs la propriété (8.6) que assure que, à l'exception de  $A'$  et  $P'$ , les entiers  $pm$  des sous-chaînes  $p\mathcal{C}^*(x/p, p)$  de l'étage du haut de (8.1) n'apparaissent pas dans les chaînes  $\mathcal{C}_{A,A'}^*$  et  $\mathcal{C}_{B',B}^*$ .

Cela achève la vérification que la suite finie d'entiers  $\mathcal{C}_{A,B}^*$  que l'on a construite forme une chaîne d'entiers de  $\mathcal{A}^*(x, y)$  qui relie  $A$  et  $B$ . La minoration (8.14) permet alors de conclure la preuve du lemme 8.1.

## 9 Etude de la fonction $h_a^*(x, y)$ ; fin de la preuve du théorème 1.4

### 9a) La fonction $h_a^*(x, y)$

**LEMME 9.1.** *Pour tout  $x \geq 3^{10}$  fixé, l'application*

$$\begin{array}{ccc} [3, +\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ y & \longmapsto & h_a^*(x, y) \end{array}$$

*est croissante*

**Démonstration.** Supposons  $3 \leq y < z$ .

Soit  $(A, B) \in \mathcal{A}^*(x, z)^2$  avec  $P(A) < P(B)$ . Si  $(A, B) \in \mathcal{A}^*(x, y)^2$ , alors on a immédiatement

$$f_{a,A,B}^*(x, z) \geq f_{a,A,B}^*(x, y)$$

Si  $A \notin \mathcal{A}^*(x, y)$ , alors  $y < P(A) < P(B) \leq z$ . En appliquant le lemme 7.1 avec  $q = 2$ , on obtient une chaîne  $\mathcal{C}_{A, 2^\alpha}^*$  d'entiers  $A = a_1 - a_2 - \dots - a_{a_s} = 2^\alpha$  avec  $P(a_j) = P(A)$  pour tout  $j$  vérifiant  $1 \leq j < s$ .

En appliquant le lemme 7.2 avec  $z$  à la place de  $y$  et  $B$  à la place de  $A$ , on obtient une chaîne  $\mathcal{C}_{3^\beta, B}$  d'entiers  $3^\beta = b_1 - b_2 - \dots - b_{s'} = B$  avec  $P(b_j) = P(B)$  pour tout  $j$  vérifiant  $2 \leq j < s'$ . On choisit alors une chaîne  $\mathcal{C}_{2^\alpha, 3^\beta}^*$  d'entiers de  $\mathcal{A}^*(x, y)$  et de longueur  $f_{a, 2^\alpha, 3^\beta}^*(x, y)$ . Alors

$$\mathcal{C}_{A, 2^\alpha}^* - \mathcal{C}_{2^\alpha, 3^\beta}^* - \mathcal{C}_{3^\beta, B}^*$$

forme une chaîne d'entiers de  $\mathcal{A}^*(x, z)$  de longueur  $> f_{a, 2^\alpha, 3^\beta}^*(x, y)$ . D'où

$$f_{a, A, B}^*(x, z) > f_{a, 2^\alpha, 3^\beta}^*(x, y).$$

Si enfin  $P(A) \leq y < P(B) \leq z$ , c'est avec une chaîne  $\mathcal{C}_{A, 2^\alpha}^* - \mathcal{C}_{2^\alpha, B}^*$  que l'on montre que  $f_{a, A, B}^*(x, z) > f_{a, A, 2^\alpha}^*(x, y)$ . Tout cela montre que  $h_a^*(x, z) \geq h_a^*(x, y)$ .

**LEMME 9.2.** *Il existe un réel positif  $x_2$  et un entier positif  $\gamma$  tels que pour tous réels  $x$  et  $y$  vérifiant*

$$x \geq x_2 \quad \text{et} \quad y \geq 3$$

on a

$$h_a^*(x, y) \geq 1 + \sum_{2 < p \leq \min(y, \sqrt{x}/2^{\gamma+13})} h_a^*(x/p, p).$$

**Démonstration.** En combinant les lemmes 7.5 et 8.1, on sait qu'il existe un entier positif  $\gamma$  et un réel positif  $x_2$  tels que pour  $3 \leq y \leq \sqrt{x}/2^{\gamma+13}$  et  $x \geq x_2$ , on a

$$h_a^*(x, y) \geq 1 + \sum_{2 < p \leq y} h_a^*(x/p, p).$$

En utilisant le lemme 9.1, on en déduit que pour  $x \geq x_2$  et  $y \geq 3$ , on a

$$\begin{aligned} h_a^*(x, y) &\geq h_a^*(x, \min(y, \sqrt{x}/2^{\gamma+13})) \\ &\geq 1 + \sum_{2 < p \leq \min(y, \sqrt{x}/2^{\gamma+13})} h_a^*(x/p, p). \end{aligned}$$

Cela achève la preuve du lemme 9.2.

**9b) Fin de la preuve du théorème 1.4**

Soient  $x$  et  $y$  des réels vérifiant  $x > 0$  et  $y \geq 2$ . Posons

$$M = \max(2^{2(\gamma+13)}, x_2/9)$$

où  $\gamma$  et  $x_2$  sont convenables pour le lemme 9.2. D'après le lemme 9.2, on a

$$(9.1) \quad h_a^*(x, y) \geq \mathbb{1}_{[1, +\infty[}(x) + \sum_{2 < p \leq \min(y, \sqrt{x/M})} h_a^*(x/p, p)$$

sous les conditions

$$x \geq x_2 \quad \text{et} \quad y \geq 3.$$

Si ces conditions ne sont pas vérifiées, alors la somme en  $p$  dans (9.1) est vide et l'inégalité (9.1) est immédiate. Elle est donc satisfaite dès que  $x > 0$  et  $y \geq 2$ . En appliquant le lemme 5.1, on a donc pour tous réels  $x$  et  $y$  vérifiant  $x \geq 8$  et  $y \geq 2$ ,

$$f_a(x, y) \geq f_a^*(x, y) \geq h_a^*(x, y) \geq A(x/M, y, 2).$$

Cela achève la preuve du théorème 1.4.

## ANNEXE 1

Notons  $A'(x) = A'(x, x)$ .

**LEMME A1.** *On a pour  $x \geq 2$*

$$A'(x) \geq \frac{32}{7} D'\left(\frac{x}{2}, 2\right) - O(1)$$

**Démonstration.** Soit  $x$  un réel suffisamment grand. Notons  $\mathcal{D}'$  l'ensemble des entiers  $n$  à diviseurs 2-denses, sans facteur carré et vérifiant  $7 \leq n \leq x/2$ .

Notons  $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_{\tau(n)} = n$  la suite croissante de ses diviseurs. Comme  $d_{\tau(n)}/d_1 = n \geq 7 > 2$ , il y a nécessairement des diviseurs intermédiaires, en particulier un diviseur  $d_2$ . On a  $d_2 = d_2/d_1 \leq 2$ , donc  $d_2 = 2$  et  $n$  est pair. Comme de nouveau  $d_{\tau(n)}/d_2 = n/2 \geq 7/2 > 2$ , il existe un diviseur  $d_3$ . On a  $d_3/2 = d_3/d_2 \leq 2$ , donc  $d_3 \leq 4$ . Comme  $n$  est sans facteur carré, on a en fait  $d_3 = 3$  et  $n$  est un multiple de 6. Soit  $a \in \{1, 2, 3, 6\}$ . On a donc  $n/a$  qui est entier et on vérifie facilement que  $S(n/a) \leq x$ . De plus comme  $n$  est sans facteur carré, les entiers  $n, n/2, n/3$  et  $n/6$  sont tous différents modulo 6. Les quatre ensembles  $\{n/a : n \in \mathcal{D}'\}$  sont donc deux à deux disjoints et on en déduit déjà que  $A'(x) \geq 4|\mathcal{D}'| = 4D'(x/2, 2) - 16$ .

Continuons dans la même veine en montrant que

$$(10.1) \quad n \in \mathcal{D}' \Rightarrow n \text{ est divisible par } 5 \text{ ou } 7 \text{ ou } 11.$$

Pour cela, supposons que  $n \in \mathcal{D}'$  et que  $n$  n'est pas divisible par 5. On a déjà vu alors que  $n$  est divisible par 6. Comme  $n$  est lui-même un diviseur de  $n$  et  $n > 6$ , on a  $\tau(n) \geq 5$ . Comme  $n$  n'est pas divisible par 5, on a  $d_4 = 6$ . Comme  $n$  est à diviseur 2-denses, il suit  $d_5/6 = d_5/d_4 \leq 2$  d'où  $d_5 \leq 12$ . Comme  $n$  est sans facteur carré, cela entraîne que  $n$  est divisible par 7 ou 11, ce qui conclut.

Soit  $a \in \{1, 2, 3, 6\}$  et  $\varphi_a$  l'application

$$\begin{aligned} \varphi_a : \mathcal{D}'/a &\longrightarrow \mathbb{N}^* \\ n/a &\longmapsto \frac{n}{a \operatorname{pgcd}(n, 5 \cdot 7 \cdot 11)}. \end{aligned}$$

Soit  $m \in \operatorname{im} \varphi_a$ . L'entier  $m$  est alors sans facteur carré et vérifie  $S(m) \leq x$ ; cet entier est donc compté dans  $A'(x)$ . De plus  $m$  est premier à  $5 \cdot 7 \cdot 11$ , d'où

$m \notin \mathcal{D}'$  d'après (10.1). Enfin l'entier  $m$  a au plus 7 préimages par  $\varphi_a$ ; cela permet de conclure que

$$\begin{aligned} A'(x) &\geq 4\left(1 + \frac{1}{7}\right)|\mathcal{D}'| \\ &= \frac{32}{7}D'\left(\frac{x}{2}, 2\right) - \frac{32 \times 4}{7}. \end{aligned}$$

Avec (1.8) et (1.10), le résultat de Tenenbaum (1.6) fournit donc la minoration

$$\begin{aligned} f(x) &\geq A'(x/2) \geq (32/7)D'(x/4, 2) - O(1) \\ &= (8c'_2/7 + o(1))x/\log x \\ &\geq (8/7) \cdot 0,068 \cdot x/\log x \text{ pour } x \text{ suffisamment grand.} \end{aligned}$$

On a donc finalement

$$\alpha > 0,07.$$

## ANNEXE 2

Rappelons que l'on note  $A(x) = |\{n : S(n) \leq x\}|$ . On note de plus

$$D_{12,6}(x, 2) = |\{n \leq x : n \equiv 6(12) \text{ et } n \text{ est à diviseurs 2-denses}\}|.$$

**LEMME A2.** *On a pour tout  $x \geq 12$*

$$A(x) \geq D(x/2, 2) + D_{12,6}(x/2, 2).$$

**Démonstration.** Soit  $n \leq x/2$  avec  $\max_{1 \leq i < \tau(n)} d_{i+1}/d_i \leq 2$ . Comme

$$\max_{1 \leq i < \tau(n)} \frac{d_{i+1}(n)}{d_i(n)} = \frac{S(n)}{n}$$

$n$  est compté dans  $A(x)$  et on a déjà  $A(x) \geq D(x/2, 2)$ . Si de plus  $n \equiv 6(12)$  on a aussi  $S(n/2) \leq x$ . Comme  $n/2$  est impair, il n'est pas lui à diviseur 2-denses. Le lemme A2 en découle.

Dans le très récent travail [27], Weingartner étudie la répartition dans les différentes classes de congruence de toute une famille d'ensembles d'entiers,



dont les nombres pratiques et les entiers à diviseurs  $t$ -denses sont les deux exemples emblématiques. Il étudie plus en profondeur la répartition des entiers à diviseurs 2-denses modulo 12. Il montre en particulier qu'il existe un réel  $\gamma \in ]0, 1[$  tel que

$$D_{12,6}(x, 2) = (\gamma c_2 + o(1))x / \log x, \quad (x \rightarrow +\infty).$$

En utilisant aussi successivement le Corollaire, le lemme A2 et (1.7), on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &\geq A(x/2) \geq D(x/4, 2) + D_{12,6}(x/4, 2) \\ &= [(1/4)(1 + \gamma)c_2 + o(1)]x / \log x \quad \text{quand } x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Weingartner (fin du chapitre 1 de [27]) montre que

$$\gamma = 0,214\dots$$

Avec (1.9), cela permet de conclure que

$$\alpha > 0,37.$$

## Références

- [1] M. BALAZARD.— *Unimodalité de la distribution du nombre des diviseurs premiers d'un entier*, Ann. Inst. Fourier, 40, 2, (1990), 255–270.
- [2] A. CHADOZEAU.— Communication personnelle.
- [3] P. ERDÖS.— *On the density of some sequences of integers*, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), 685–692.
- [4] P. ERDÖS, R. FREUD et N. HEGYVÁRI.— *Arithmetical properties of permutations of integers*, Acta Math. Hungarica 41 (1983), 169–176.
- [5] P. MAZET.— *Recouvrements Hamiltoniens de certains graphes*, Eur. J. Combin. 27 (2006), 739–749.
- [6] M. MEHDIZADEH.— *The multiplication table for smooth integers*, J. Number Theory 219 (2021), 172–197.
- [7] P. MELOTTI et E. SAIAS.— *On path partitions of the divisor graph*, Acta Arith. 192 (2020), 329–339.
- [8] A.D. POLLINGTON.— *There is a long path in the divisor graph*, Ars Combin. 16-B (1983), 303–304.
- [9] C. POMERANCE.— *On the longest path in the divisor graph*, Congr. Numer. 40 (1983), 291–304.
- [10] C. POMERANCE, L. THOMPSON et A. WEINGARTNER.— *On integers  $n$  for which  $x^n - 1$  has a divisor of every degree*, Acta Arith. 175 (2013), 225–244.
- [11] C. POMERANCE and A. WEINGARTNER.— *On primes and practical numbers*, arXiv 2007–11062.
- [12] E. SAIAS.— *Longueur maximale d'un chemin élémentaire du graphe divisoriel*, C.R. Acad. Sci. Paris, Vol. 315, Série I, (1992), 507–509.
- [13] E. SAIAS.— *Sur l'utilisation de l'identité de Buchstab*, Séminaire de Théorie des Nombres de Paris 1991–92, S. David (ed.), Birkhäuser, (1993), 217–245.
- [14] E. SAIAS.— *Entiers à diviseurs denses 1*, J. Number Theory 62 (1997), 163–191.
- [15] E. SAIAS.— *Applications des entiers à diviseurs denses*, Acta Arith. 83 (1998), 225–240.
- [16] E. SAIAS.— *Entiers à diviseurs denses 2*, J. Number Theory 86 (2001), 39–49.

- [17] E. SAIAS.— *Etude du graphe divisoriel 2*, Monatsch. Math. 137 (2002), n° 4, 301–312.
- [18] E. SAIAS.— *Etude du graphe divisoriel 6*, en préparation.
- [19] A. SCHINZEL et G. SZEKERES.— *Sur un problème de M. Paul Erdős*, Acta Sci. Math. (Szeged) 20 (1959), 221–229.
- [20] G. TENENBAUM.— *Sur un problème de crible et ses applications*, Ann. Sci. Ecole Normale Sup. (4) 19 (1986), 1–30.
- [21] G. TENENBAUM.— *Sur un problème de crible et ses applications, 2. Corrigendum et étude du graphe divisoriel*, Ann. Sci. Ecole Normale Sup. 28 (1995), 115–127.
- [22] A. WEINGARTNER.— *Integers with dense divisors*, J. Number Theory 108 (2004), 1–17.
- [23] A. WEINGARTNER.— *Integers with dense divisors 2*, J. Number Theory 108 (2004), 18–28.
- [24] A. WEINGARTNER.— *Integers with dense divisors 3*, J. Number Theory 142 (2014), 211–222.
- [25] A. WEINGARTNER.— *Practical numbers and the distribution of divisors*, Q. J. Math. 66 (2015), N° 2, 743–758.
- [26] A. WEINGARTNER.— *On the constant factor in several related asymptotic estimates*, Math. Comp. 88 (2019), n° 318, 1883–1902.
- [27] A. WEINGARTNER.— *An extension of the Siegel–Walfisz theorem*, arXiv : 2011.06627.
- [28] A. WEINGARTNER.— *The number of prime factors of integers with dense divisors*, prépublication.
- [29] A. WEINGARTNER.— *The mean number of divisors for rough, dense and practical numbers*, prépublication.

Eric Saias  
 Sorbonne Université  
 LPSM  
 4, place Jussieu  
 75252 Paris Cedex 05 (France)  
 eric.saias@upmc.fr