



HAL
open science

**Avec Pascal, contre Wallis : démontrer
'géométriquement' l'arithmétique des infinis (circa
1690-1692)**

Sandra Bella

► **To cite this version:**

Sandra Bella. Avec Pascal, contre Wallis : démontrer 'géométriquement' l'arithmétique des infinis (circa 1690-1692). Revue d'Histoire des Sciences, A paraître. hal-03926861

HAL Id: hal-03926861

<https://hal.science/hal-03926861>

Submitted on 6 Jan 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sandra Bella

Laboratoire SPHERE – Université Paris-Cité

Bâtiment Condorcet

5 rue Thomas Mann

75013 Paris

bellusky@hotmail.com

Avec Pascal, contre Wallis : démontrer ‘géométriquement’ l’arithmétique des infinis (circa 1690-1692)

Résumé

Vers 1690, dans un manuscrit inédit, Guillaume de L’Hospital (1661-1704) soutient qu’il fournit une démonstration « géométrique » de tous les résultats de l’*Arithmetica infinitorum* (1655), célèbre ouvrage de John Wallis (1616-1703). Malgré le caractère novateur de ses méthodes calculatoires, ce dernier est accusé d’user de raisonnements « inductifs » qui ne garantissent pas la preuve rigoureuse des résultats. Wallis défend la position contraire.

Dans cet article, nous examinons particulièrement comment L’Hospital s’efforce de mettre en œuvre une pratique mathématique d’inspiration pascalienne pour suppléer à ce qu’il considère être une carence démonstrative de l’induction, et nous donnons des éléments pour comprendre son échec.

Mots clefs : Arithmétique des infinis, induction, transmutation, L’Hospital, Pascal, Wallis

Abstract

Around 1690, in an unpublished manuscript, Guillaume de L’Hospital (1661-1704) claims that he has provided a “geometric” proof of all the results in the *Arithmetica infinitorum* (1655), the well-known work by John Wallis (1616-1703). Despite the innovative character of his computational methods, Wallis was accused of using “inductive” reasoning that did not guarantee a rigorous proof of the results. Wallis defended the opposite position.

In this article, we examine in more detail how L’Hospital attempted to employ a Pascalian-inspired mathematical practice to remedy what he considered to be the demonstrative deficiencies of Wallis’s induction, and we give some elements to understand his failure.

Keywords : Arithmetic of infinites, induction, transmutation, L’Hospital, Pascal, Wallis

Démontrer « géométriquement » l'Arithmétique des infinis : contre Wallis et avec Pascal (*circa* 1690-1692)

Introduction

Une collection de manuscrits – recensés par André Robinet en 1960¹ et édités en partie par Pierre Costabel² – témoignent d'une activité mathématique d'un cercle d'individus regroupés autour du philosophe oratorien Nicolas Malebranche (1638-1715) entre 1690 et 1705. Ce collectif est composé en partie de membres de l'Oratoire et certains sont enseignants. Guillaume de L'Hospital (1661-1704) est l'un des plus avertis. Ce cercle a vu sa composition varier avec le temps, dans les années 1685-1695, mis à part L'Hospital, on compte Jean Prestet (1648-1690), Louis Byzance (1646-1722), François de Catelan (1650-1710), Claude Jaquemet (1651-1734), Charles Reyneau (1656-1728) et Louis Carré (1663-1711).

Au début des années 1690, ce collectif a pour dessein de s'approprier un ensemble de nouvelles méthodes analytiques, circulant en Europe, et de parvenir ainsi à une « voie moyenne entre l'analyse cartésienne et les méthodes nouvelles³ ». Costabel a désigné par « Réforme mathématique » ce projet fédérateur. Pierre de Fermat (1607-1665) et Blaise Pascal (1623-1662) sont, avec René Descartes (1596-1650), les principaux auteurs français dont se nourrit ce collectif. Parmi les écrits étrangers, un intérêt majeur est porté sur deux ouvrages : les *Lectiones geometricae*⁴ d'Isaac Barrow (1630-1677) et l'*Arithmetica infinitorum*⁵ de John Wallis (1616-1703)⁶.

Dans l'*Arithmetica infinitorum*, Wallis présente l'une des premières méthodes calculatoires pour trouver des quadratures des paraboles et hyperboles généralisées, et fournit une expression sous forme d'un produit infini de la quadrature du cercle. Cet écrit est diffusé dans les milieux savants européens et fait l'objet de commentaires et de critiques, parfois sévères. En France, Wallis est loin de faire l'unanimité. Plusieurs épisodes ont conduit à des

1 - André Robinet, Le groupe malebranchiste introducteur du calcul infinitésimal en France, *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs applications*, vol. 13, N°4, Paris, 1960, 287-308.

2 - Nicolas Malebranche, *Œuvres complètes, Mathematica*, tome XVII-2, éd. par Pierre Costabel (Paris : Vrin, 1968).

3 - Malebranche, *op. cit.* in n. 2.

4 - Isaac Barrow, *Lectiones geometricae, in quitus (presertim) generalia curvarum linearum symptomata declarantur* (Londres : Godbid, 1670).

5 - John Wallis, *Arithmetica infinitorum sive nova methodus inquirendi in curvilinearum Quadraturam, aliaq difficiliora Mathesos Problemata*, (Oxford : Leon Lichfield, 1655).

6 - Mise à part les deux articles cités in n. 1 et 2, on pourra consulter Sandra Bella, *La (Re)construction de l'analyse infinitésimale de Leibniz, 1690-1706* (Paris : Garnier, 2022), 86-105, 146-174.

rapports houleux entre lui et les mathématiciens français, en particulier Fermat et Pascal⁷. Avec d'autres, Fermat considère que Wallis ne justifie pas de manière rigoureuse ses résultats. Le raisonnement inductif, dont est coutumier le mathématicien anglais, n'a à ses yeux qu'une valeur heuristique et ne saurait constituer un argument apodictique.

À l'époque on entend tout simplement par mode « inductif » un raisonnement qui basé sur l'observation de quelques cas particuliers conduit à supputer une règle générale. La question qui fait débat est de savoir à quelles conditions le processus qui autorise le passage à une généralisation est démonstratif.

Les critiques adressées à Wallis circulent dans les milieux savants parisiens, en particulier celui qui s'est constitué autour du Duc de Roannez⁸, ami intime de Pascal⁹. C'est un milieu port-royaliste où l'on trouve des personnages comme Antoine Arnauld (1612-1694), Pierre Nicole (1625-1695), Pierre Carcavy et Gilles Filleau des Billettes, mais qui s'étend au-delà des pascalins, en nourrissant des contacts avec d'autres académies, des géomètres français (Fermat, Gilles Personne de Roberval) et étrangers (René-François de Sluse, Christiaan Huygens et François de Nonancourt). Dès 1669, Malebranche côtoie ce milieu, il y rencontre Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) pendant que celui-ci séjourne à Paris entre 1672 et 1676¹⁰. C'est aussi au cours de l'une de ces réunions que le jeune L'Hospital résout un problème mathématique difficile posé par Arnauld et acquiert ainsi la réputation d'exceller dans la matière¹¹.

Ce milieu intellectuel n'est pas à négliger lorsqu'on s'intéresse aux échanges et rapprochements qui ont eu lieu entre les proches de Malebranche et les pascalins. Ces réunions permettent aux participants de se tenir au courant des principales nouveautés scientifiques mais aussi d'être au fait des reproches que s'adressent les géomètres lors de leurs querelles. Wallis apparaît unanimement désapprouvé en raison du caractère jugé peu géométrique de ses méthodes.

7 - À ce sujet on pourra consulter Jacqueline Stedall, John Wallis and the French : his quarrels with Fermat, Pascal, Delaurens, and Descartes, *Historia Mathematica*, 3, 2012, 265-279.

8 - Jean Mesnard, *Pascal et les Roannez* (Paris : Desclée de Brouwer, 1965), 897. Après la mort de Pascal, son ami intime le Duc de Roannez continue à raviver « l'esprit pascalien ». Mesnard explique que « le duc apparaît en effet plus que jamais comme le chef d'un groupe dont l'esprit doit beaucoup à Pascal, où la dévotion selon la spiritualité de Port-Royal s'allie à des curiosités scientifiques et à un goût de la morale développé par l'expérience de la vie mondaine. Ce groupe, que nous avons vu se former à la fin de 1660 aux côtés de Pascal et sous l'impulsion du duc, demeure solidement constitué. Il acquiert de nouveaux membres, et surtout, parce que tous ne sont pas proprement des « pascalins », des amis nombreux, entre lesquels l'unité est surtout faite par la familiarité de tous avec le duc de Roannez », 872.

9 - Dominique Descotes, *Blaise Pascal, Littérature et Géométrie* (Clermont-Ferrand : Presses Universitaires Blaise Pascal, 2001), 50-51.

10 - Nicolas Malebranche, *Œuvres complètes*, t. XVIII, (Paris, Vrin, 1977), 57.

11 - Blaise Pascal, *Œuvres complètes de Pascal*, (Paris, Hachette, 1914), t. IX, 236-237 et Bernard Bouvier de Fontenelle, Éloge de .M. le Marquis de l'Hôpital, *Histoire de l'Académie royale des sciences*, 1704, 126.

Les membres du cercle autour de Malebranche sont des lecteurs de l'*Arithmetica infinitorum* comme en attestent plusieurs manuscrits¹². Jean Prestet puis à la suite L'Hospital, étudient particulièrement cet ouvrage qu'ils ne reçoivent pas telle quelle mais accompagné des critiques qui lui avaient été adressées. Chacun d'eux reconstitue les résultats établis dans l'*Arithmetica infinitorum* mais en proposant une nouvelle preuve, rigoureuse à leurs yeux, contrairement à celle de Wallis qu'ils jugent insuffisante.

Les écrits de Pascal dans lesquels il présente la manière d'utiliser sa « doctrine des indivisibles » et dans lesquels il énonce des résultats concernant la somme des puissances d'entiers sont publiés depuis quelques années au moment de la « Réforme¹³ ». Ils font partie des lectures de Prestet, L'Hospital et l'ensemble des individus de leur cercle. Bien que de manière différente chez ces deux auteurs, la référence à Pascal est constante.

En 1689, dans les *Nouveaux Elémens de mathématiques*¹⁴, Prestet présente une justification des résultats de Wallis par l'algèbre, et affirme que par-là, il contrecarre le manque de rigueur de Wallis.

Vers 1690, L'Hospital écrit un petit traité intitulé « L'Arithmétique des infinis de Wallis démontrée géométriquement avec toutes les interpolations du même auteur¹⁵ ». Comme son titre l'indique, il prétend démontrer toutes les tables que Wallis a obtenu dans son ouvrage. L'intérêt de ce manuscrit est double. Il illustre une pratique mathématique à l'œuvre, soutenue par L'Hospital et d'inspiration pascalienne. Il défend cette pratique contre celle qui apparaît dans les écrits de Wallis et qui ne serait pas « géométrique ».

Dans cet article, j'analyse comment, de manière relativement indépendante, Prestet et L'Hospital interprètent des écrits de Pascal pour défendre une pratique mathématique contre celle de Wallis dans l'*Arithmetica infinitorum*. J'examine particulièrement comment la pratique hospitalienne œuvre à suppléer à ce qu'il considère être une carence démonstrative de l'induction.

12 -Il existe au moins trois manuscrits: Charles Reyneau, « Proposition déduite de la méthode des tangentes, par laquelle on démontre l'Arithmétique des infinis ou des indivisibles », ms BNF Fonds français 25302, 125, Louis Carré, «Démonstration de l'Arithmétique des indivisibles », ms BNF Fonds français, 11r^o, Nicolas Malebranche, ms. BNF Fonds français 24237, 140-143r^o. Ils sont édités par Costabel dans Nicolas Malebranche, *op. cit.* in n. 2, 49-53, 55-60. Comme le relève Costabel, l'enseignant Jaquemet a pris connaissance de l'*Arithmetica infinitorum* en 1689 et l'étudie scrupuleusement en 1690, *ibid.*, 61.

¹³ *Lettres de A. Dettonville à Monsieur de Carcavy, en luy envoyant Une méthode générale pour trouver les centres de gravité de toutes sortes de grandeurs, un Traité des trilignes et de leurs onglets. Un Traité des Sinus d'un quart de Cercle. Un Traité des Arcs de Cercle. Un traité des Solides circulaires. Et enfin un Traité général de la Roulette, contenant la solution de tous les Problèmes touchant LA ROULETTE qu'il avait proposez publiquement au mois de juin 1658* (Paris, 1658) et *Traité du triangle arithmétique avec quelques autres petits traités sur la même matière* (Paris : Chez Guillaume Desprez, 1665).

¹⁴ Jean Prestet, *Nouveaux Elémens de mathématiques* (Paris : Pralard, 1689).

¹⁵ Guillaume de L'Hospital, L'Arithmétique des infinis de Wallis démontrée géométriquement avec toutes les interpolations du même auteur, ms. Fonds français 25306, (sans f.).

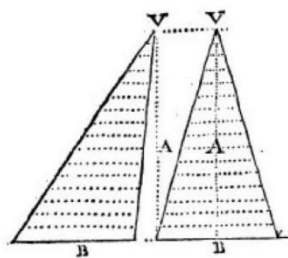
I. L'Arithmétique des infinis et le cercle autour de Malebranche

Le projet de l'Arithmetica infinitorum

Dans l'*Arithmetica infinitorum*, Wallis présente des méthodes de quadratures et de cubatures en reformulant ces problèmes géométriques en termes de recherche de somme de suites numériques. Bien que certains des résultats de quadratures qu'il fournit étaient déjà connus – sans qu'ils soient nécessairement publiés –, la manière de les présenter est nouvelle. En particulier, Wallis traite des quadratures des courbes dont l'équation en écriture moderne est $y = mx^p$ (où p est un entier ou une fraction). Il en déduit ensuite celles dont l'équation est $y = (1 - x^{\frac{1}{p}})^q$ (où p et q sont des entiers). Le but de la deuxième partie de son ouvrage est d'étudier la quadrature de la courbe lorsque $p = q = \frac{1}{2}$, puisqu'il s'agit dans ce cas de l'équation d'un demi-cercle.

Wallis use d'une méthode impliquant des indivisibles¹⁶ pour la première fois dans son traité *De Sectionibus conicis Tractatus*¹⁷. Ce traité est publié un an avant l'*Arithmetica infinitorum*. La première proposition est importante car il y développe ce qu'il considère être le principe de la méthode des indivisibles plus longuement que dans l'*Arithmetica infinitorum*. Il explique qu'une figure peut être vue comme constituée d'un nombre infini [*infinitis*] de lignes parallèles ou encore d'une infinité de parallélogrammes de même hauteur, égale à « $\frac{1}{\infty}$ », expression dans laquelle « ∞ » dénote « le nombre infini ». Ainsi désignée, la hauteur est une partie aliquote « infiniment petite¹⁸ » [*infinita parva*] et « toutes les hauteurs » ensemble font la hauteur de la figure ».

Pour illustrer sa méthode, il traite dans la proposition 3 le cas d'un triangle de base B et de hauteur A .



¹⁶ Il connaîtra l'ouvrage de Cavalieri bien plus tard, voir John Wallis, *The Arithmetic of infinitesimals*, tr. Jacqueline A. Stedall, (New York: Springer, 2004), ii.

¹⁷ John Wallis, *De Sectionibus Conicis, Nova Methodo Expositis, Tractatus* (Leon Lichfield: Oxford, 1655), 4.

¹⁸ « *Suppono in limine (justâ Bonaventurae Cavallerii Geometria Indivisibilium) Planum quodlibet quasi ex infinitis lineis parallelis conflari : Vel potiùs (quod ego malle) ex infinitis Parallelogrammis aequè altis ; quorum quidem singulorum altitudo sit totius altitudinis $\frac{1}{\infty}$, sive aliquota pars infinite parva ; (esto enim ∞ nota numeri infinitis) adeoq ; omnium simul altitudo aequalis altitudini figurae.* », *ibid.*, 4. Wallis ne distingue pas le vocable « infiniment petit » de celui de « nul ». Il exclut ces deux notions du domaine de la « quantité ».

Il suppose que le triangle est composé d'une infinité de lignes ou de parallélogrammes parallèles à la base du triangle, les aires de ces derniers suivent une progression arithmétique qui commence par zéro, qu'il identifie au point V , jusqu'au dernier terme qui correspond à la base du triangle. Il applique le résultat correspondant à la somme finie d'une suite arithmétique mais en considérant qu'il y a un nombre infini de termes. Ainsi, en supposant qu'il y ait un nombre « ∞ » de termes, le premier étant nul et le dernier terme étant l'aire du dernier parallélogramme – qu'il exprime par $\frac{A}{\infty}B$ – il obtient que l'aire du triangle entier est égale à $\frac{1}{\infty}A \times \frac{\infty}{2}B$ expression que Wallis simplifie abruptement en $\frac{AB}{2}$.

L'aire du triangle a été calculée par le biais de la sommation des termes d'une suite à progression arithmétique. De façon analogue, l'aire d'un rectangle correspond à la somme d'une suite à termes constants, l'aire de la parabole à la somme de la suite de carrés d'entiers. Cette idée façonne l'*Arithmetica infinitorum* : trouver la valeur des sommes des termes d'une suite qu'il interprète comme une somme d'indivisibles, puis utiliser ce résultat pour quarrer une courbe.

La première partie de l'*Arithmetica infinitorum* est consacrée au calcul du rapport entre une série des puissances des nombres entiers et le produit du nombre de termes avec le plus grand d'entre eux, ce qui s'écrit en écriture moderne $\frac{\sum_{k=0}^{k=n} k^p}{(n+1)n^p}$ (où p est un entier et n un nombre entier supérieur à 1). Wallis explique qu'il procède par *per modum inductionis*. Ainsi, pour la somme des carrés il examine la somme de deux, trois et jusqu'à six termes (en commençant par 0) et remarque, en notations modernes, que

$$\frac{\sum_{k=0}^{k=n} k^2}{(n+1)n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}.$$

L'excès à un tiers est toujours égal au rapport de 1 au produit de six par la racine carrée du dernier terme, c'est-à-dire ici n . Or, Wallis remarque qu'il est manifeste que ce terme s'évanouit [*evaniturus*] à l'infini. Il peut ainsi en déduire le résultat lorsque le nombre de termes est infini. Le même type de raisonnement est proposé pour la somme des cubes. Chacune de ces propositions est suivie d'applications géométriques guidées par un raisonnement par indivisibles¹⁹. La plupart de ces résultats sont connus, certains par les Anciens. Wallis l'admet volontiers d'autant plus qu'en cela il pense légitimer sa méthode. Cependant, il considère par conséquent que son application ne nécessite pas d'être suivie d'une démonstration *more geometrico*.

19 - De la formule de la somme des carrés, il énonce entre autres, que le rapport du volume du cône ou de la pyramide est au cylindre ou au prisme (de même hauteur et de même base) comme 1 est à 3.

Wallis déclare que le même type de raisonnement inductif est reproductible pour n'importe quelle valeur de la puissance p . De ce fait, il s'autorise à conclure (proposition 54) ce qui en notations modernes s'écrit

$$\frac{\sum_{k=0}^{k=\infty} k^p}{(n+1)n^p} = \frac{1}{p+1}$$

qu'il résume sous forme d'une table²⁰.

Ensuite, il explique comment il généralise les formules qu'il a obtenues pour p entier, à tout rationnel de la forme $\frac{p}{q}$ en interpolant les valeurs précédentes²¹. L'argument de Wallis est que la racine carrée étant la moyenne géométrique entre la constante et la racine, le rapport correspondant aux racines carrées est obtenu par la moyenne arithmétique entre 1 et 2, c'est-à-dire $1 + \frac{1}{2}$ et vaut donc son inverse $\frac{2}{3}$. Ce seul exemple lui sert à justifier la généralisation à toute n-ième racine d'une puissance. Ainsi, en notations modernes, le résultat (proposition 59) s'écrit

$$\frac{\sum_{k=0}^{k=n} k^{\frac{p}{q}}}{(n+1)n^{\frac{p}{q}}} = \frac{q}{p+q}$$

qu'il le résume sous forme d'une table :

| | | Serièl | | | | | | | | | | |
|---------|------------|-----------|------------------|----------|---------|---------|---------|----------|----------|---------|-------|---------|
| | | Aequalium | Primum | Secundum | Tertium | Quartum | Quintum | Sexantum | Septimum | Octavum | Nonum | Decimum |
| Radices | Quadraticæ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| | Cubicæ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| | Biquadrat. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| | Surdefolte | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| | Sextanz | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| | Septimanz | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| | Octavanz | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| | Nonanz | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| | Decimanz | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| | | | Et sic deinceps. | | | | | | | | | |

20 - Wallis, *op. cit.*, 34.

21 - Wallis, *op. cit.*, 43. À ce propos, on peut consulter Antoni Malet et Marco Panza, *op. cit.*, 323-324 ou Arilès Remaki, « L'art combinatoire en tant qu'art d'inventer chez Leibniz, sur la période 1672-1680 », thèse de doctorat troisième cycle (Université de Paris, 2021), 322-323.

Pour des raisons que je développerai plus en avant, dans la deuxième partie de l'ouvrage destinée à la recherche d'une expression pour la quadrature du cercle, Wallis aura besoin dans un premier temps d'obtenir la valeur de ce qui s'écrit en notations modernes $\sum_{k=0}^{k=n} (R^q - (ka)^q)^p$ où p et q sont des entiers positifs, R est le rayon d'un cercle et $na = R^{22}$.

Des critiques

Wallis anticipe les critiques qu'on pourrait lui adresser concernant sa manière de justifier les résultats²³. Certes, il est toujours possible de démontrer ses résultats à la manière des Anciens mais lui s'y oppose. Son refus est péremptoire. Il a la certitude que, comme lui, les Anciens possédaient des méthodes de découverte. Cependant, il est convaincu que les Anciens les ont volontairement cachées, et ce dans le seul but d'éblouir leurs successeurs avec la perfection de leurs démonstrations. Il souligne que l'argument qu'il avance est partagé par d'autres mathématiciens contemporains – il cite Viète, Oughtred, Harriot, Cavalieri, Torricelli, Descartes – qui considèrent nécessaire une nouvelle analyse non seulement pour découvrir des nouveaux résultats mais aussi pour « ressusciter » ceux des Anciens en montrant leur voie de découverte.

C'est en effet une idée partagée par des contemporains de Wallis que de considérer qu'un résultat est prouvé par la seule application de la méthode de découverte, et qu'il n'est nullement nécessaire de justifier le résultat *more geometrico*. Dans son *Traité du sinus*, Pascal avance le même type d'argument lorsqu'il défend sa « doctrine des indivisibles²⁴ ». J'y reviendrai.

Cependant, la manière originale de procéder dans l'*Arithmetica infinitorum* ne fait pas l'unanimité parmi les mathématiciens. Fermat est l'un de ceux qui se montre le plus critique. Dans une lettre du 15 août 1657²⁵, il explique à son ami mathématicien Digby qu'il avait déjà quarrer des paraboles et des hyperboles « infinies », mais qu'il n'est pas convaincu par la manière de faire de Wallis car elle est fondée « sur induction plutôt que sur un raisonnement à la mode d'Archimède ». Le raisonnement par induction peut être utile à l'heuristique mais ne

²² On divise le rayon R d'un demi-cercle en n parties de longueur $\frac{R}{n} = a$. Sur une quelconque des divisions, on a de part et d'autre un segment de longueur $R - ka$ et un autre de longueur $R + ka$. L'ordonnée correspondante à cette division est la moyenne proportionnelle de ces deux segments dont est égale à $\sqrt{R^2 - (ka)^2} =$

$(R^2 - (ka)^2)^{\frac{1}{2}}$. En « sommant » ces lignes, on obtient l'aire du demi-cercle.

²³ Scholie de la proposition 107, Wallis, *op. cit.*, 83.

²⁴ Pascal, *op. cit.* in n. 13.

²⁵ Lettre de Fermat à Digby du 15 août 1657 in Pierre de Fermat, *Œuvres de Fermat*, publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry sous les auspices du Ministère de l'instruction publiques (Paris :Gauthier-Villars et fils, Imprimeurs-Libraires, 1891-1912), t. II, 342:

peut servir « pour fondement de quelque science, ce qu'on en aura déduit, comme fait le sieur Wallis ».

C'est le statut du raisonnement par induction, en particulier sa valeur démonstrative qui seront au cœur de la défense de Wallis contre les attaques de Fermat et d'autres contemporains²⁶. Ces aspects sont repris par le cercle autour de Malebranche.

Prestet et son interprétation de l'Arithmétique des infinis

La congrégation de l'Oratoire possède une approche moderne de l'enseignement qui s'accompagne de publications d'ouvrages²⁷. Dans cet esprit, Malebranche souhaite le développement de publications liées à l'enseignement. Dans les années 1670, il confie à Prestet la rédaction d'un ouvrage traitant d'arithmétique et d'algèbre qui est publié en 1678 sous le titre *Éléments de mathématiques*²⁸.

Leibniz a été lecteur des *Éléments de mathématiques*. Bien qu'il trouve que les choses soient traitées avec ordre et clarté, il juge l'ouvrage incomplet. Il manque des résultats récents importants, notamment la question des « sommes des progressions », car, affirme Leibniz, c'est de leur connaissance qu'on obtient « les quadratures, les centres de gravité et une infinité de problèmes très importants dans les mécaniques²⁹ ». En effet, dans les *Éléments*, Prestet destine une section aux « Proportions et progressions arithmétiques³⁰ » dans lequel un paragraphe est consacré à la résolution du « dixième problème » qui énonce le procédé pour obtenir la somme simplement finie des puissances des termes d'une suite arithmétique de premier terme a et de différence b ³¹. Dans son traité *Potestatum numericarum summa*³², Pascal avait obtenu le résultat pour une somme infinie des puissances des nombres entiers sans la démontrer. Il affirmait que pour peu que l'on soit familier avec la « doctrine des indivisibles », on peut en déduire la dimension d'espaces curvilignes, en particulier celui des paraboles de tout degré³³.

²⁶ On pourra consulter à ce sujet Sandra Bella, *op. cit.* in n. 6, 142-145, Arilès Remaki, *op. cit.* in n. 20, 398-402.

²⁷ - Pierre Costabel, L'Oratoire de France et ses collègues in *Enseignement et diffusion des sciences en France*, ouvrage collectif dirigé par René Taton (Paris : Hermann, 1964).

²⁸ - Jean Prestet, *Éléments de Mathématiques* (Paris : Pralard, 1675).

²⁹ - André Robinet, *Malebranche et Leibniz, Relations personnelles* (Paris, Vrin, 1955), 57.

³⁰ - Prestet, *op. cit.* in n. 27##, 168.

³¹ - *Ibid.*, p. 178.

³² Blaise Pascal, *Traité des ordres numériques* in *Traité du triangle arithmétique avec quelques autres petits traités sur la même matière*, *op. cit.* in n. 13, 34-41.

³³ « La somme d'un certain nombre de lignes est au carré du plus grand comme 1 à 2, La somme des carrés est au cube du plus grand comme 1 à 3, La somme des cubes est à la puissance quatrième comme 1 à 4. Le canon général concernant la progression naturelle en commençant par l'unité. La somme de toutes les lignes d'une même puissance est à la puissance suivante du plus grand comme l'unité est à l'exposant de cette dernière puissance » (traduction du latin par nos soins).

Prestet énonce la formule uniquement pour une somme finie tout en précisant qu'il tient ces résultats de Pascal et que celui-ci « les juge fort utiles dans la Géométrie des indivisibles pour mesurer l'aire de toutes sortes de paraboles, & d'une infinité d'autres figures³⁴ ». Cependant, il semble que ce genre d'application ne soit pas une priorité pour Prestet et que ce commentaire ait une fonction uniquement informative.

Prestet compose une nouvelle version des *Éléments*³⁵ qui voit le jour en 1689 sous le titre *Nouveaux Éléments de mathématiques*. Dans la Préface, il explique qu'il a l'intention au Livre XII de montrer qu'« on découvre un principe naturel & tres clair qui sert de fondement à l'Arithmétique des infinis », et « qu'on en déduit même démonstrativement les propositions principales de Monsieur Wallis, qu'il n'établit & ne trouve que par induction³⁶. » Dans le Livre XII, Prestet s'occupe en effet de « certaines propriétés des nombres qui servent en géométrie », et il destine un paragraphe qu'il intitule « Arithmétique des infinis ». Il explique que le principe de « L'arithmétique nommée des infinis et le système de la géométrie des indivisibles » est de considérer qu'une grandeur comme étant divisée « sans jamais s'arrêter jusques à l'infini » par des parties infiniment petites et « presque insensible à la raison » mais qui n'est pas à un « zéro absolu ». D'après lui, ce genre de considérations sont à « la mode » des géomètres car elles sont plus rapides mais elles peuvent mener à des paralogismes³⁷ ». Il dénonce Wallis car il « ne prouve que par induction, quoi-qu'il soit aisé de les tirer [les propositions] avec Monsieur Paschal. »

Les mêmes critiques que Fermat avait adressées à Wallis sont ravivées, Prestet l'évoque expressément à la fin des preuves car il « a fort bien reconnu le défaut de la méthode de M^r Wallis pour les conclusions que l'on vient de former³⁸ »

Quelle est donc la preuve que propose Prestet qui découlerait des résultats pascaliens ?

Il s'agit de trouver l'expression du rapport entre la somme des puissances d'entiers commençant par 0 et le produit du plus grand des entiers élevés à cette puissance par le nombre de termes. Il note $1d$ la différence ou le deuxième terme de la suite et zd le dernier terme.

Auparavant, dans le Livre VII, Prestet avait fourni la formule de la somme finie des puissances des termes de la suite arithmétique des nombres naturels connaissant la somme de la suite et le nombre de termes. Pour cela il avait fait appel à la table des puissances, c'est-à-

34 - Prestet, *op. cit.* in n. 27##, 181.

35 - Jean Prestet, *Nouveaux Eléments de mathématiques*, *op. cit* in n. 13.

36 - *Ibid.*, Préface.

37 - *Ibid.*, 406.

38 - *Ibid.*, 408.

dire au triangle arithmétique de Pascal dont il avait expliqué la construction au Livre III³⁹. C'est là le seul endroit de sa démonstration dans lequel l'appel au résultat de Pascal est nécessaire. Les résultats pour les sommes finies des puissances sont démontrés algébriquement pour les quatre premières puissances. Pour chaque puissance, Prestet considère une suite qui a un nombre déterminé (quatre) de termes mais n'explique pas comment le résultat pourrait se généraliser à un nombre quelconque de termes. Il semble que l'écriture algébrique soit favorable à ses yeux à s'autoriser une généralisation.

Pour trouver le rapport entre la somme des puissances d'entiers commençant par 0 et le produit du plus grand des entiers élevés à cette puissance par le nombre de termes, Prestet use du problème VIII qui précède ce paragraphe⁴⁰ et qu'il a déduit grâce aux résultats du Livre VII. Il déduit que la somme des termes est $\frac{dzz + 1dz}{2}$, puis que la somme des carrés est $\frac{zzdd + 1zzdd}{3} + \frac{z^3dd + zzdd}{6zd}$. En divisant par le produit de z^2 (le plus grand au carré) et de $z + 1$ (le nombre de termes), il obtient $\frac{1}{3} + \frac{1}{6zd}$. Il raisonne de manière analogue pour obtenir les formules de la somme des autres puissances et s'arrête à la somme des puissances sixièmes d'entiers.

Pour conclure, il explique que la fraction $\frac{1}{6zd}$ est plus petite que tout autre fraction proposée donc « de valeur nulle⁴¹ ».

Pour parvenir à la formule pour une somme infinie de carrés, il argumente en faisant appel à des considérations infinitésimales semblables à celles qu'avance Wallis. Pour les cas de la somme des cubes, « un raisonnement semblable » est mis en œuvre et de même pour la somme des puissances de quatre⁴². Le raisonnement par induction est donc à l'œuvre tout autant qu'il l'était chez Wallis.

Prestet ne présente aucune des propositions géométriques qui découlent des propositions arithmétiques, il renvoie à Wallis pour cela. Rien dans la suite de l'exposé de Prestet ne permet au lecteur de savoir de quelle manière une somme infinie de termes peut

39 - *Ibid.*, 81-83.

40 - « Connoissant la somme entière d'une progression arithmétique, & le premier terme, & la différence ou l'excédent dont le second surpasse le premier, pour trouver la somme des quarez, ou des cubes, ou de telles autres puissances qu'on voudra des termes », *ibid.*, 405.

41 - *Ibid.*, 407-408.

42 - Pour les cubes, il reste le terme $\frac{1}{4zd}$ qui s'ajoute à $\frac{1}{4}$. Prestet l'estime pour différentes valeurs croissantes de z . De l'observation de sa décroissance (d'ordre géométrique par un facteur $\frac{1}{4}$), il déduit que la somme infinie est égale à $\frac{1}{4}$. Il effectue un raisonnement analogue pour la somme des puissances de 4, le reste des termes qui s'ajoutent à $\frac{1}{5}$, c'est-à-dire $\frac{3}{10zd} + \frac{1}{30zzdd} - \frac{1}{30z^2dd} - \frac{1}{30z^3d^3}$, est « infiniment petit ou de nulle valeur ».

représenter une somme infinie d'indivisibles, pas plus que de savoir comment une somme infinie d'indivisibles représente une aire.

Bien que Prestet se réfère à Pascal, les démonstrations de Prestet s'appuient presque exclusivement sur des développements algébriques. Il s'agit donc de partir de Pascal mais pour l'interpréter dans un style d'écriture que le clermontais aurait probablement désapprouvé⁴³. Les résultats ainsi trouvés sont ensuite généralisés par un raisonnement inductif sans que cela soit implicitement admis.

Le projet manuscrit de L'Hospital

Entre 1690 et 1692, L'Hospital se charge de l'élaboration d'un ouvrage qui ne sera pas publié mais dont on conserve le manuscrit. Il s'agit d'un volume d'environ 400 pages composé de quatre traités paginés de façon indépendante⁴⁴. Il est de la main de Carré qui à cette époque est chargé de nombreuses copies. De nombreux *marginalia* ponctuent le texte. Ils sont principalement de la main de Byzance mais quelques-uns sont de Malebranche.

Le troisième traité s'intitule « L'Arithmétique des infinis de Wallis démontrée géométriquement avec toutes les interpolations du même auteur⁴⁵ ». Il est long de 58 pages sans figures comme les autres trois traités, des pages blanches leur étaient réservées. Certaines figures qui suivent sont donc des reconstitutions réalisées à partir du texte.

L'Hospital fait part à Malebranche de son dessein une lettre datée du 23 octobre 1690, au début de la « Réforme » :

« Mon dessein est de changer entièrement l'Arithmétique des infinis. Il me semble que j'ai une manière plus générale et plus facile, de démontrer toutes ces propositions qui, je m'assure, ne vous déplaira pas⁴⁶ ».

Ainsi, le contenu du traité était bien avancé fin 1690 et d'après une lettre de Jaquemet, achevé en 1692⁴⁷.

D'après L'Hospital, toutes les tables de l'*Arithmetica infinitorum* ont été démontrées dans son traité alors que Wallis « n'a prouvé que par induction⁴⁸ ». Les quadratures des paraboles et hyperboles avaient été démontrées auparavant, notamment par Fermat.

43 - Blaise Pascal, Fragment Divertissement n° 4 / 7 : « Ainsi les autres suent dans leur cabinet pour montrer aux savants qu'ils ont résolu une question d'algèbre qu'on n'aurait pu trouver jusqu'ici. »

44 - Le premier traité est sur les sections coniques, e deuxième sur une méthode des tangentes, le troisième sur l'arithmétique des infinis et le dernier sur la dimension des solides et de leurs surfaces convexes. Pur une description plus détaillée, on pourra consulter Malebranche, *op. cit.* in n. 2, 103-106.

45 - Guillaume de L'Hospital, *op. cit.* in n. 13.

46 - Nicolas Malebranche, *Œuvres complètes*, t. XX (Paris : Vrin, 1977), 559.

47 Lettre de Jaquemet à Reyneau du 27 avril 1692, Malebranche, *op. cit.* in n. ###, 61 et Pierre Costabel, L'introduction en France du calcul différentiel et intégral par Jean I Bernoulli, ???, 4.

48 - *Ibid.*, 53.

Cependant, L'Hospital souligne que personne n'avait encore justifié correctement les interpolations à l'œuvre dans certaines des tables, ce qu'il prétend avoir fait⁴⁹.

Le but ici n'est pas d'insister sur les aspects techniques de ce manuscrit même s'il sera inévitable d'en montrer quelques aspects. Il s'agit surtout de montrer comment L'Hospital défend une manière de faire des mathématiques qui serait « géométrique » et l'oppose à celle de Wallis. L'utilisation de l'adverbe « géométriquement » n'est pas anodine, l'allusion à l'esprit géométrique est pour le moins indirecte. Pascal distingue, dans l'étude de la vérité, la découverte – qui se nomme analyse – de la démonstration qui est la « méthode de prouver la vérité » – et qui comprend le fait de distinguer le vrai du faux –. La géométrie est emblématiquement la discipline qui excelle dans ces deux modes d'aborder la recherche de la vérité⁵⁰. Si L'Hospital considère qu'il démontre géométriquement les résultats de l'Arithmétique des infinis, c'est qu'il juge certes que Wallis ne l'a pas fait correctement, mais ce jugement est d'autant plus sévère qu'il conduit à affirmer que Wallis n'est pas géomètre.

II. L'Arithmétique des infinis démontrée géométriquement

La manière de présenter « dans le meilleur ordre » les propositions démontrées fait partie de la démonstration elle-même, elle constitue ce que Pascal nomme « l'ordre géométrique ». Cette idée est reprise dans *La Logique ou l'art de penser* d'Antoine Arnauld et Pierre Nicole. Il s'agit de l'art dont usent les géomètres pour exposer « une connaissance claire et distincte de la vérité⁵¹ ». L'Hospital n'est pas indifférent à ce réquisit et il semble que ce soit dans ce souci qu'il structure son traité en agençant des lemmes, des corollaires et des théorèmes. Le tout est cadencé par quatre avertissements à la manière des traités pascaliens.

La mise en place d'une rhétorique justifiée

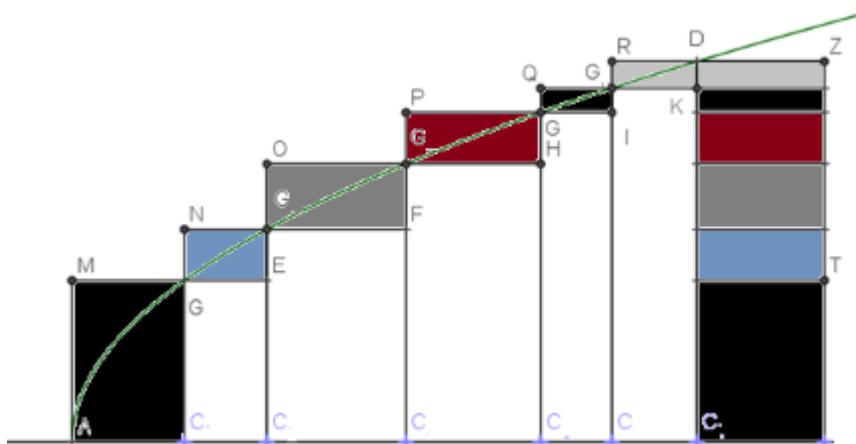
Le traité commence par l'énoncé d'un lemme qui est considéré comme celui « qui sert de fondement à la mesure des surfaces » :

Soit un espace mixtiligne quelconque ABD compris par les droites AB et BD , et la courbe AD , que l'on divise AB en un nombre infini de parties infiniment petites égales ou inégales aux points C de chacune d'elles on élève les ordonnées parallèles à BD coupant la courbe aux

49 - Dans la p. 54, L'Hospital fait référence à une remarque (p. 287) de la recension du traité d'algèbre de Wallis dans les *Acta Eruditorum* de juin 1689. Cette recension a été effectuée par Leibniz qui explique que Wallis n'a pas démontré ces tables puisqu'il le fait par interpolation. Certaines de tables sont démontrées puisque les quadratures des paraboles et hyperboles ont été démontrées, mais non pas les tables obtenues par interpolation : « Sed quod demonstrandum in Wallisiana Methodo potissimum superest, sunt interpolationes. »

⁵⁰ Blaise Pascal, *De l'esprit géométrique, écrits sur la grâce et autres textes* (Paris, GF-Flammarion, 1985), 67.
51 - Antoine Arnauld et Pierre Nicole, *La logique ou l'art de parler* (Paris :Gallimard, 1992), 281-282, 288-289. Cet ordre doit être « naturel », c'est-à-dire qu'il doit progresser du simple au complexe et du général au particulier.

points G , je dis que la somme des parallélogrammes fait par chacune des ordonnées, et chacune des petites parties CC soit en commençant par BD , ce qui fait la figure circonscrite $BDRGQPGOGNGMA$, soit en commençant par la plus petite des ordonnées CG , ce qui fait la figure inscrite $CGEGFGHGIGKC$ est égale à l'espace mixtiligne ABD ⁵².



Ce lemme exprime l'idée que pour quarrer une courbe on peut la considérer comme un polygone d'une infinité de côtés, cela ne changera pas la valeur de la quadrature. La figure qui accompagne ce lemme est assez facile à restituer car on retrouve des énoncés très similaires chez d'autres auteurs, notamment Evangelista Torricelli, James Gregory, Isaac Newton et Barrow. De fait, le lemme est presque identique à l'énoncé de l'appendice de la leçon XI des *Lectiones Geometricae* de Barrow⁵³, ce qui n'est pas étonnant car L'Hospital en est un lecteur assidu.

Quelques points méritent d'être relevés.

L'égalité des divisions est supposée par Barrow, elle est un élément essentiel de sa démonstration que L'Hospital reprend. Ainsi, ce dernier ne démontre donc pas son lemme dans sa généralité puisque celui-ci affirme que les divisions peuvent être inégales⁵⁴.

Par ailleurs, au niveau diagrammatique, les notations utilisées par L'Hospital sont celles dont use Pascal en répétant la même lettre – G ou C – pour un point indéterminé sur la courbe ou sur l'axe⁵⁵.

Ce premier lemme est suivi de deux corollaires et surtout de l'avertissement suivant :

Lorsqu'on trouvera dans la suite ce genre d'expression la somme des droites GC ou GE , l'on a toujours regard à une ligne droite telle que AB que l'on suppose divisé[e] en un nombre infini

52- *Ibid.*, 1.

53 - Barrow, *op. cit.* in n. 4 , 85.

54 - *Ibid.*, 2.

55 - Pour démontrer ce résultat, L'Hospital procède comme Barrow en supposant par l'absurde l'existence d'une différence entre la figure circonscrite et la figure inscrite figurée par le rectangle $BDZX$. La démonstration consiste à faire correspondre à chacune des portions rectangulaires d'un découpage de la différence (les rectangles $RDKG$, $QGIG$, ...) une des portions d'un découpage du rectangle $BDZX$, chacun des premiers étant inférieur à son correspondant, on arrive à une absurdité car la différence peut être rendue inférieure à elle-même donc elle est nulle.

de petites parties égales aux points C et ce n'est pour abréger cette autre expression, la somme des parallélogrammes faits par chaque GC et chacune des parties égales CC , laquelle somme comme nous venons de faire voir est égale à l'espace même dont les droites GC peuvent être considérées comme les ordonnées⁵⁶.

L'Hospital reprend de toute évidence l'avertissement que Pascal avait introduit à la *Lettre de Dettonville à Carcavy*, en ayant eu soin de le justifier auparavant, ce que Pascal ne fera pas. Pour rappel, le clermontais explique que par « somme des ordonnées » ou par « somme d'une multitude de lignes », il faut comprendre des rectangles dont les bases sont des « portions égales et indéfinies » d'une certaine droite⁵⁷. Pascal assure que ce genre de compendium ne saurait conduire à l'inexactitude. Il affirme que tous les résultats démontrés à l'aide de méthode par indivisibles peuvent être démontrés « à la rigueur et à la manière des anciens⁵⁸ », et ce parce que la somme d'un nombre indéfini de rectangles multipliés chacun par une des « petites portions » égales ne diffère de l'espace que d'une quantité moindre qu'aucune donnée. Par cet avertissement, Pascal instaure une rhétorique démonstrative dont L'Hospital se sert. Comme il a été dit plus haut, Pascal affirme l'équivalence démonstrative entre la « doctrine des indivisibles » et la méthode des Anciens mais ne s'astreint pas à en développer une justification⁵⁹.

Des quadratures des paraboles à la table

Muni de cette rhétorique des indivisibles empruntée à Pascal, L'Hospital souhaite retrouver les résultats concernant les quadratures des paraboles généralisées, puis en déduire les premières tables de Wallis⁶⁰.

Pour ce faire, L'Hospital utilise une méthode de transmutation qu'il reprend aux *Lectiones geometricae* de Barrow⁶¹, usuelle à l'époque, qui consiste, lorsqu'on veut quarrer une courbe, à lui faire subir une « transmutation » pour obtenir une autre courbe qu'il est plus aisé de quarrer. Plus précisément, ici, L'Hospital transforme une courbe ABD en sa « courbe des sous-tangentes » de la façon suivante. Sur un point quelconque E de la courbe ABD d'ordonnée EC , il trace la tangente qui coupe l'axe AB en T . TC est la sous-tangente au point E . Il trace ensuite le segment perpendiculaire à EC qui coupe BD en F de sorte que $FG = TC$.

56 - *Ibid.*, 7.

57 - Pascal, *Lettres de A. Dettonville*, *op. cit.* in n. 13, 10.

58 - *Ibid.*

59 - On pourra consulter le développement à ce sujet dans João Cortese, « L'infini en poids, nombre et mesure : La comparaison des incomparables dans l'œuvre de Blaise Pascal », thèse de doctorat troisième cycle (Universidade de São Paulo, 2017), 391-412.

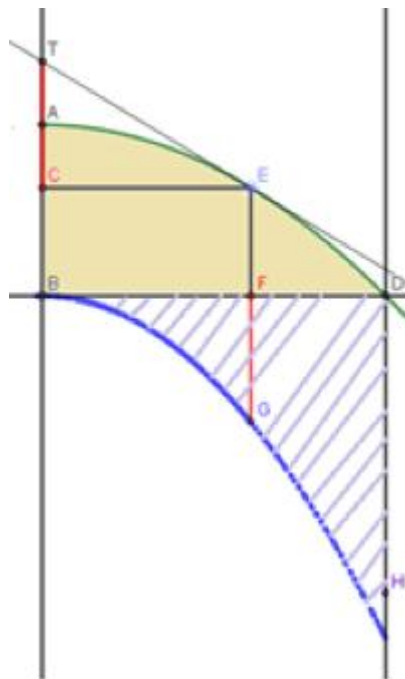
60 - Par paraboles généralisées, on entend les courbes d'équation $y^p = x^q d^{p-q}$ (où p et q sont des entiers positifs). Ici, je ne montrerai la démonstration pour les paraboles généralisées. Pour les hyperboles, la démonstration est plus technique mais n'apporte rien de plus le propos de cet article.

61 - Barrow, *op. cit.* in n. 5, 88

La courbe obtenue en faisant varier E sur ABD est la courbe des sous-tangentes. Dans ces conditions, il montre

« Lemme 2^{ème}

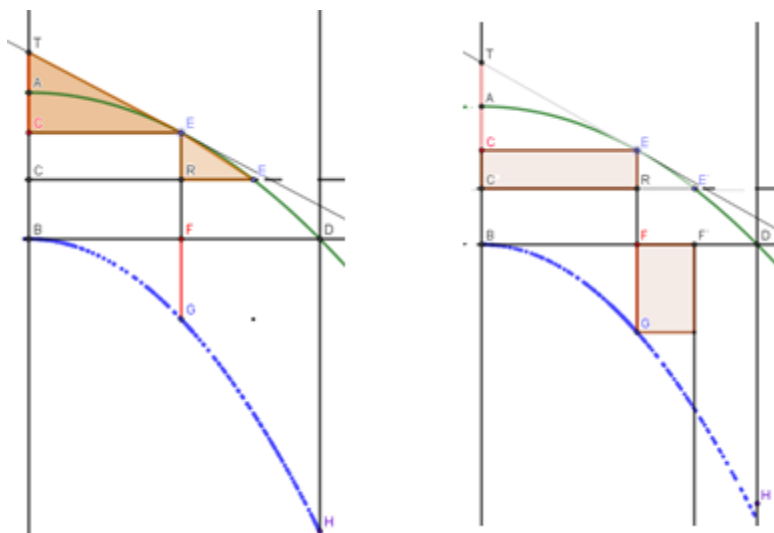
L'espace ABD [foncé] est égal à l'espace BDH [hachuré] formé par les segments $FG = TC$ [courbe des sous-tangentes]⁶² »



Bien que la démonstration de L'Hospital calque la structure de celle de Barrow, l'intérêt réside ici dans la reformulation par l'usage de la rhétorique pascalienne.

Pour démontrer ce résultat, L'Hospital considère un arc EE infiniment petit de sorte qu'implicitement ERE peut être considéré comme un triangle rectiligne et les triangles ERE et ERC semblables.

62 - L'Hospital, *op. cit.*, 8.



Ainsi TC ou FG est à CE ce que CC est à RE ou FF donc le parallélogramme fait de EC par CC est égal à celui fait de GF par FF ⁶³. Ainsi, si l'on suppose la courbe AD divisée en un nombre infini de petits arcs EE , la somme des chacun des parallélogrammes fait de chaque ordonnée EC et chacune des « petites parties » CC c'est-à-dire ABD est égal à la somme des chacun des parallélogrammes fait de chaque ordonnée FG et chacune des petites parties FF c'est-à-dire BDH .

Ce n'est qu'à la dixième page de son traité que L'Hospital introduit des notations analytiques. Le précédent lemme va être appliqué aux paraboles généralisées – c'est-à-dire des courbes d'équation $y^p = x^q d^{p-q}$ ou $y = \sqrt[p]{x^q d^{p-q}}$ (où p et q sont des entiers positifs) – puisqu'il connaît la valeur des sous-tangentes $t = \frac{p}{q} x$. Pour ce faire, il considère la parabole AED encadrée par le parallélogramme $ABDK$ avec $AC = x$, $EC = y$ et $y^p = x^q d^{p-q}$. En utilisant le lemme, il démontre que l'aire de ABD est au rectangle $ABDK$ comme p est à $p + q$ ⁶⁴.

63 - En notations modernes : $\frac{TC \text{ ou } FG}{CE} = \frac{CC}{RE \text{ ou } FF}$ et $EC \times CC = GF \times FF$.

64 - L'idée repose sur le fait que TC ou FG est à AC ou LE comme p est à q de sorte qu'en sommant les FG d'une part et les LE d'autre part, on obtient que l'espace ADB est à AKD comme p est à q .

parabolique est au parallélogramme comme p est à $p + q$. Or $p . p + q :: 1 . 1 + \frac{q}{p}$ ce qu'on peut énoncer de cette manière. Soit une progression arithmétique infinie $0 . e . 2e . 3e . 4e . 5e . \&c$ dont le dernier terme que j'appelle b est connu, et soit une suite infinie de quantitez qui se suivent selon l'ordre de telle puissance, ou de telle racine que l'on voudra de termes de cette progression. Je dis que la somme de toutes les quantitez sera à la plus grande de toutes prise autant de fois qu'il y a de quantitez comme 1 est à l'exposant de cette puissance ou de cette racine augmentée de l'unité⁶⁶. »

Pour justifier ce résultat, L'Hospital divise infiniment le segment de longueur b pour produire les portions infiniment petites et égales CC dont la longueur est notée par la lettre « e »⁶⁷. Ainsi $0, e, 2e, 3e$ etc forment une suite arithmétique. Il est possible d'interpréter que L'Hospital met en correspondance les abscisses en progression arithmétique et les ordonnées de la parabole $y = \sqrt[p]{x^q d^{p-q}}$ avec une suite de nombres en progression arithmétique et la suite des puissances racines p -ièmes des puissances q -ièmes des termes de cette suite.

D'après le résultat sur la quadrature des paraboles (« la somme des ordonnées y sera à la plus grande de toutes à savoir BD prise autant de fois qu'il y a d'ordonnées », c'est-à-dire le parallélogramme $ABDK$) et la précédente correspondance, il déduit:

« Soit une progression arithmétique infinie $0 . e . 2e . 3e . 4e . 5e . \&c$ dont le dernier terme que j'appelle b est connu, et soit une suite infinie de quantitez qui se suivent selon l'ordre de telle puissance, ou de telle racine que l'on voudra de termes de cette progression. Je dis que la somme de toutes les quantitez sera à la plus grande de toutes prise autant de fois qu'il y a de quantitez comme 1 est à l'exposant de cette puissance ou de cette racine augmentée de l'unité. »

Or le résultat de la quadrature de la parabole affirme que le rapport de « la somme des ordonnées y » par la plus grande des ordonnées prise autant de fois qu'il y a d'ordonnées est le même que le rapport de l'aire de la parabole par le rectangle $ABDK$, c'est-à-dire le même que celui de p à $p + q$. Le résultat géométrique sur la quadrature des paraboles lui a permis, grâce au lemme démontré par une induction inavouée, de déduire de manière générale le résultat sur la somme infinie des puissances des termes d'une progression arithmétique infinie. En utilisant des résultats géométriques, il a donc expliqué une des tables obtenues dans l'*Arithmetica infinitorum*⁶⁸.

66 - *Ibid*, 12-13.

67 - Wallis avait introduit la notation $\frac{1}{\infty}$.

68 - Propositions 44, 54 et 59 de l'*Arithmetica infinitorum*.

*Table des rapports pour la
Somme d'une suite infinie de
quantitez qui se suivent
selon l'ordre des racines.*

| | 1 ^{er} | 2 ^{es} | 3 ^{es} | 4 ^{es} | 5 ^{es} | 6 ^{es} | 7 ^{es} |
|--|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| <i>Des termes de la progression.</i> | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{6}{7}$ | $\frac{7}{8}$ |
| <i>De leurs quarres</i> | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{4}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{4}{6}$ | $\frac{5}{7}$ | $\frac{6}{8}$ | $\frac{7}{9}$ |
| <i>De leurs Cubes.</i> | $\frac{1}{4}$ | $\frac{12}{5}$ | $\frac{3}{6}$ | $\frac{4}{7}$ | $\frac{5}{8}$ | $\frac{6}{9}$ | $\frac{7}{10}$ |
| <i>De leurs 4^{es} puiss^{es}</i> | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{6}$ | $\frac{3}{7}$ | $\frac{4}{8}$ | $\frac{5}{9}$ | $\frac{6}{10}$ | $\frac{7}{11}$ |
| <i>De leurs 5^{es} puiss^{es}.</i> | $\frac{1}{6}$ | $\frac{2}{7}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{5}{10}$ | $\frac{6}{11}$ | $\frac{7}{12}$ |
| <i>De leurs 6^{es} puiss^{es}.</i> | $\frac{1}{7}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{9}$ | $\frac{4}{10}$ | $\frac{5}{11}$ | $\frac{6}{12}$ | $\frac{7}{13}$ |
| <i>De leurs 7^{es} puiss^{es}.</i> | $\frac{1}{8}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{4}{11}$ | $\frac{5}{12}$ | $\frac{6}{13}$ | $\frac{7}{14}$ |

Wallis qui n'éclaire ni ne convainc

Les quadratures des hyperboles⁶⁹ lui permettent de façon analogue d'obtenir les résultats pour la somme des puissances négatives des termes d'une suite arithmétique. Il appelle cette suite, comme Wallis, réciproque de la directe, la directe étant celle de la somme des puissances positives. Ceci conduit au « corollaire général » :

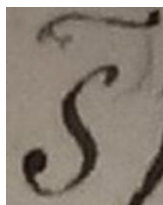
69 - Lorsque cela est possible, c'est-à-dire $p > q$. L'Hospital distingue les différents cas, nous ne rentrons pas dans ces détails, L'Hospital, *op. cit.*, 18-19.

« La somme directe d'une suite infinie de quantitez soit directe, soit réciproque est à la dernière de toutes prises autant de fois qu'il y a de quantitez comme est à l'exposant de cette série augmenté de l'unité⁷⁰. »

Aucun signe pour désigner l'expression « somme de lignes » ou celle de la « somme d'ordonnées » n'avait été introduit par L'Hospital jusqu'au folio 23. Dans celui-ci, il en introduit un au moyen d'un « avertissement » :

Lorsqu'on trouvera dans la suite ses sortes d'expressions $\int x$, $\int \sqrt{b-x^p}$, $\int \sqrt[q]{b-\sqrt[q]{x}^p}$, ce n'est que pour abrégier celles-cy, la somme d'une suite infinie de quantitez qui se suivent selon l'ordre des x , des $\sqrt{b-x^p}$, des $\sqrt[q]{b-\sqrt[q]{x}^p}$ en supposant toujours que les x fassent une progression arithmétique infinie, dont le 1^{er} terme est un point ou zéro, et le dernier terme b^{71} .

Comme on peut le voir dans la reproduction ci-dessus, le signe pour « somme de lignes » est un S majuscule tildé dont L'Hospital fait amplement usage dans la suite du manuscrit dans le but d'abrégier.



Il convient maintenant de revenir au texte de Wallis. Pour rappel, un des objectifs du mathématicien anglais est d'obtenir la valeur du rapport entre une somme – qui s'écrit en notations modernes $\sum_{k=0}^{k=n} (R^q - (ka)^q)^p$ où p et q sont des entiers positifs – et le produit du nombre de termes par le plus grand des termes.

À cette fin, Wallis traite les premiers cas de p et de q en développant le binôme $(R^q - (ka)^q)^p$ ⁷². À chaque fois, cela conduit à additionner des sommes de puissances dont on connaît pour chacune la valeur par la précédente table (fig. 7). Par exemple, si $q = 3$,

- pour $p = 1$, on a on a à additionner deux sommes et l'on obtient $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$,
- pour $p = 2$, le développement du binôme conduit à additionner trois sommes pour obtenir $1 - \frac{2}{4} + \frac{1}{7}$ qu'il écrit $\frac{3 \times 6}{4 \times 7}$
- et enfin pour $p = 3$, il obtient $1 - \frac{3}{4} + \frac{3}{7} - \frac{1}{10}$ qu'il écrit $\frac{3 \times 6 \times 9}{4 \times 7 \times 10}$

Il entreprend le même type de calcul pour $q = 4$ et $q = 5$ et pour p allant de 1 à 3. Il suppose que l'expression du rapport est $\frac{q \times 2q \times \dots \times qp}{(q+1)(2q+1)\dots(qp+1)}$ (en écriture moderne) dans laquelle le

70 - *Ibid.*, 22.

71 - *Ibid.*, 23-24.

72 - Propositions 117, 118, 125 et 126, Wallis, *op. cit.* in n. 5, 88-89, 95-97.

numérateur et le dénominateur ont un nombre entier p de facteurs. Les autres valeurs, avance Wallis, sont déduites par induction⁷³. Sa démarche est résumée par le tableau ci-dessous⁷⁴.

| | $q = 1$ | $q = 2$ | $q = 3$ | $q = 4$ | $q = 5$ |
|---------|---|---|--|---|---|
| $p = 1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{5}{6}$ |
| $p = 2$ | $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ | $\frac{3}{4} \times \frac{6}{7}$ | $\frac{4}{5} \times \frac{8}{9}$ | $\frac{5}{6} \times \frac{10}{11}$ |
| $p = 3$ | $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ | $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7}$ | $\frac{3}{4} \times \frac{6}{7} \times \frac{9}{10}$ | $\frac{4}{5} \times \frac{8}{9} \times \frac{12}{13}$ | $\frac{5}{6} \times \frac{10}{11} \times \frac{15}{16}$ |
| $p = 4$ | $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5}$ | $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{9}$ | $\frac{3}{4} \times \frac{6}{7} \times \frac{9}{10} \times \frac{12}{13}$ | $\frac{4}{5} \times \frac{8}{9} \times \frac{12}{13} \times \frac{16}{17}$ | $\frac{5}{6} \times \frac{10}{11} \times \frac{15}{16} \times \frac{20}{21}$ |
| $p = 5$ | $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6}$ | $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{9} \times \frac{10}{11}$ | $\frac{3}{4} \times \frac{6}{7} \times \frac{9}{10} \times \frac{12}{13} \times \frac{15}{16}$ | $\frac{4}{5} \times \frac{8}{9} \times \frac{12}{13} \times \frac{16}{17} \times \frac{20}{21}$ | $\frac{5}{6} \times \frac{10}{11} \times \frac{15}{16} \times \frac{20}{21} \times \frac{25}{26}$ |

Wallis cherche ensuite⁷⁵ l'expression du rapport entre la somme $\sum_{k=0}^{k=n} (R^{\frac{1}{q}} - (ka)^{\frac{1}{q}})^p$ et le produit du nombre de termes par le plus grand des termes. Dans ce but, après quelques manipulations sur des premières valeurs, il déduit, toujours par induction, que les valeurs correspondent aux inverses des nombres figurés qu'il représente par la table de sa proposition 132⁷⁶ :

73 - *Ibid.*, 97 : « Prout inductione patebit ».

74 - Les cellules encadrées sont celles que Wallis a calculé, les autres sont déduites par induction.

75 - Pour obtenir la quadrature du cercle, Wallis nécessiterait interpoler la table pour $p = \frac{1}{2}$ mais cela n'est pas possible puisque p est nécessairement un nombre entier dans cette formule puisqu'il représente le nombre de facteurs. Sa stratégie devient donc celle de chercher l'expression de ces quantités pour ensuite obtenir par interpolation la quadrature du cercle lorsque $p = q = \frac{1}{2}$.

76 - En changeant q en $\frac{1}{q}$ dans la formule $\frac{q \times 2q \times \dots \times qp}{(q+1)(2q+1)\dots(qp+1)}$, on obtient $\frac{1 \times 2 \times \dots \times q}{q^p} \times \frac{q^p}{(1+q)(2+q)\dots(p+q)} = \frac{q! p!}{(q+p)!} = \frac{1}{\binom{p+q}{q}}$

| p \ q | | | | | | | | | | | |
|----------------|---------|----------|-----------|-------|------------|-----------|----------|-----------|-----------|---------|-----------|
| | Æqualia | Relidua. | Quadrata. | Cubi. | Biquadrat. | Surdefol. | Sextana. | Septimana | Octavana. | Nonana. | Decimana. |
| Nulla | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| Subprimanorum | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | |
| Subsecundarorū | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 | 55 | 66 |
| Subtertianorum | 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 | 84 | 120 | 165 | 220 | 286 |
| Subquartanorum | 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | 126 | 210 | 330 | 495 | 715 | 1001 |
| Subquintanorum | 1 | 6 | 21 | 56 | 126 | 252 | 462 | 792 | 1287 | 2002 | 3003 |
| Subsextanorum | 1 | 7 | 28 | 84 | 210 | 462 | 924 | 1716 | 3003 | 5005 | 8008 |
| Subseptimanorū | 1 | 8 | 36 | 120 | 330 | 792 | 1716 | 3432 | 6435 | 11440 | 19448 |
| Suboctavanorum | 1 | 9 | 45 | 165 | 495 | 1287 | 3003 | 6435 | 12870 | 24310 | 43758 |
| Subnonanorum | 1 | 10 | 55 | 220 | 715 | 2002 | 5005 | 11440 | 24310 | 48620 | 92378 |
| Subdecimanorum | 1 | 11 | 66 | 286 | 1001 | 3003 | 8008 | 19448 | 43758 | 92378 | 184756 |

Et sic deinceps.

Le reste de l'ouvrage consistera à chercher à interpoler cette table afin d'obtenir une expression de la quadrature du cercle, ce qui n'est pas développé ici.

Pour (re)démontrer les précédents résultats, la démarche de L'Hospital est la même que dans les précédentes démonstrations lorsqu'il applique le « lemme 3^{ème} » (voir *supra*). Elle consiste à mettre en correspondance une somme de lignes d'une courbe « en supposant que les x fassent un progression arithmétique » avec une suite infinie de quantités proportionnelles⁷⁷. Il considère pour cela une courbe d'axe $AB = b$ dont les ordonnées $y = \sqrt[q]{b} - \sqrt[q]{x}$. AB est divisé en parties égales aux points C de sorte que les AC sont en progression arithmétique.

Il s'agit d'évaluer la somme d'une « suite infinie de quantités égales » auxquelles on retranche « par ordre » une suite de quantités qui se suivent selon l'ordre des $\sqrt[q]{x}$ et que l'on prenne une puissance quelconque (entière positive), autrement dit, en écriture hospitalienne, il s'agit de calculer $\int \sqrt[q]{b} - \sqrt[q]{x}^p$. L'Hospital formule le résultat général par le « Théorème 4^{ème} » :

« Si on retranche par ordre d'une suite infinie de quantitez égales une pareille suite de quantitez qui se suivent selon l'ordre des $\sqrt[q]{x}$, et que l'on prenne telle puissance qu'on voudra de chaque terme de cette nouvelle suite, je dis 1° que la somme des quantitez qui se suivent selon l'ordre de ces puissances est à la plus grande de toutes prises autant de fois comme 1 est aux nombres

77 - L'Hospital, *op. cit.*, 23 : « Il faut remarquer que lorsqu'on connaît par exp. Le rapport de la somme $\int \sqrt[q]{b} - \sqrt[q]{x}^p$ avec la plus grande de toutes, savoir $\sqrt[q]{b}$ prise autant de fois qu'il y a de quantitez, l'on connoit aussi le rapport de la somme d'une suite infinie de quantitez qui se suivent selon l'ordre des $\sqrt[q]{b} - \sqrt[q]{x}^p$, avec la plus grande de toutes prises autant de fois, car par le lemme 3^e ces deux rapports sont les mêmes. »

qui sont marquez dans cette table [fig. 11]. 2° que cette table étant continuée à l'infini, renferme par ordre, et de suite tous les nombres figurez⁷⁸ »

L'Hospital illustre le théorème en cherchant les valeurs pour p allant de 1 à 3 et q fixé. Pour ce faire, il décompose la somme en plusieurs sommes dont il connaît la valeur. C'est la même démarche que pratiquait Wallis avant d'en déduire la table de sa proposition 132, sauf que L'Hospital raisonne de manière plus générale sans donner de valeur à q . Il cherche le rapport entre $\int \sqrt[q]{b} - \sqrt[q]{x}^p$ et la plus grande des ordonnées $\sqrt[q]{b}^p$ prise autant de fois qu'il y a de quantités c'est-à-dire b . Pour $p = 1$:

$$\int \sqrt[q]{b} - \sqrt[q]{x} = \int \sqrt[q]{b} - \int \sqrt[q]{x} = b \sqrt[q]{b} - \frac{q}{q+1} b \sqrt[q]{b} = \frac{1}{q+1} b \sqrt[q]{b},$$

donc le rapport est $\frac{1}{q+1}$,

pour $p = 2$,

$$\int \sqrt[q]{b} - \sqrt[q]{x}^2 = \int \sqrt[q]{b}^2 - 2 \int \sqrt[q]{b} \sqrt[q]{x} + \int \sqrt[q]{x}^2 = b \sqrt[q]{b}^2 - \frac{2q}{q+1} b \sqrt[q]{b}^2 + \frac{q}{q+2} b \sqrt[q]{b}^2,$$

donc le rapport est $1 - \frac{2q}{q+1} + \frac{q}{q+2} = \frac{2}{(q+1)(q+2)}$,

pour $p = 3$,

$$\begin{aligned} \int \sqrt[q]{b} - \sqrt[q]{x}^3 &= \int \sqrt[q]{b}^3 - 3 \int \sqrt[q]{b} \sqrt[q]{x}^2 + 3 \int \sqrt[q]{b} \sqrt[q]{x} - \int \sqrt[q]{x}^3 \\ &= b \sqrt[q]{b}^3 - \frac{3q}{q+1} b \sqrt[q]{b}^3 + \frac{3q}{q+2} b \sqrt[q]{b}^3 - \frac{q}{q+3} b \sqrt[q]{b}^3 \end{aligned}$$

78 - *Ibid.*, 28-29.

donc le rapport est $1 - \frac{3q}{q+1} + \frac{3q}{q+2} - \frac{q}{q+3} = \frac{6}{(q+1)(q+2)(q+3)}$

L'Hospital vérifie que, pour p valant 2, 3 puis 4, les résultats sont cohérents avec la table et que chacune des lignes est celle d'une des familles des nombres figurés. Cependant cette vérification n'a aucunement valeur de preuve :

« d'où l'on peut conclure par induction que cette table étant continuée à l'infini, renferme par ordre tous les nombres figurez, mais cette sorte de preuve n'éclaire pas l'esprit ni même ne convainc pas (...)»⁷⁹.

La référence aux préceptes de Port-Royal est manifeste. Dans *La Logique ou l'art de penser*, Arnauld et Nicole expliquent que la « méthode de doctrine⁸⁰ », dont se servent les géomètres pour exposer leurs découvertes, est susceptible de pâtir de quelques défauts dont le premier est d'« avoir plus de soin de la certitude que de l'évidence, et de convaincre l'esprit plutôt que de l'éclairer⁸¹ ». Pour atteindre la vérité, des arguments convaincants ne suffisent pas à l'esprit qui « cherche encore une connaissance que celle qu'il a ». Pour être satisfait l'esprit nécessite connaître la vérité « par des raisons de la nature de la chose même ». Si Arnauld et Nicole critiquaient les démonstrations qui convainquent plutôt qu'elles n'éclairent, que dire de celui qui fournit une preuve qui ne parvient même pas à convaincre ?

L'Hospital fournit quant à lui une preuve dont il estime qu'elle « n'a point ce défaut, et qui pénètre jusqu'à l'infini⁸² ». Ici, en est reconstituée les principales étapes.

L'Hospital considère la courbe AED d'axe $AB = b$, $BD = c$,

$$x = BC \text{ et } y = CE = c \times 1 - \sqrt[q]{\frac{x}{b}} \text{ ou } x = BC = b \times 1 - \sqrt[p]{\frac{y}{c}}.$$

En faisant remarquer que $\frac{c \times 1 - \sqrt[q]{\frac{x}{b}}}{bc} = \frac{\sqrt[q]{b - \sqrt[q]{x}}}{b \sqrt[q]{b^p}}$, L'Hospital explique qu'en trouvant la

somme du premier membre, il trouvera celui du second donc il montrera le résultat souhaité.

Pour calculer cette somme, il considère, comme à son habitude, la courbe des sous-tangentes associée à AED . Il calcule la valeur de la sous-tangente $CT = FG$:

$$CT = FG = \frac{q}{p} b \times 1 - \sqrt[p]{\frac{y}{c}}^{q-1} - \frac{q}{p} x.$$

[fig. 12]

79 - *Ibid.*, 32.

80 - Arnauld et Nicole, *op. cit.* in n. 50, 281-282.

81 - *Ibid.*, 307.

82 - L'Hospital, *op. cit.*, 32.

Dès lors, en supposant les y en progression géométrique, L'Hospital déduit que la somme des FG ou CT qui est égal à $ABDE$ (d'après le lemme 2^{ème}) est égal à la somme des

$\frac{q}{p} b \times 1 - \sqrt[p]{\frac{y}{c}}^{q-1}$ moins la somme des x multipliée par $\frac{q}{p}$. Or la somme des x est aussi égale à

l'espace $ABDE$, de sorte qu'il obtient l'égalité suivante :

$$ABDE = \frac{q}{p+q} b \int 1 - \sqrt[p]{\frac{y}{c}}^{q-1}$$

Or en prenant $q = 2$, $ABDE = \frac{2}{p+2} b \int (1 - \sqrt[p]{\frac{y}{c}}) = \frac{2}{2+p} b \frac{1}{p+1} c = \frac{2}{(1+p)(2+p)} bc$

Puis en prenant $q = 3$, $ABDE = \frac{3}{p+3} b \int 1 - \sqrt[p]{\frac{y}{c}}^2$. Or lorsque $q = 2$, $\int 1 - \sqrt[p]{\frac{y}{c}}^2$ correspondait

à la somme des FE qui vient juste d'être calculée, d'où :

$$ABDE = \frac{6}{(1+p)(2+p)(3+p)} bc.$$

L'Hospital continue pour $q = 4$ et s'arrête car

« il est évident que si $q = 5$ il faudra multiplier l'espace que nous venons de mesurer par $\frac{5}{(5+p)}$ et ainsi de suite à l'infini, or en divisant l'unité par ces expressions nous aurons les formules des nombres figurez à l'infini, dont les côtes sont $p + 1$ comme M^r Paschal et d'autres ont démontré⁸³. »

L'Hospital perçoit un phénomène de récurrence et en déduit une formule. L'argument qu'il met en avant pour instituer cette dernière reste un argument d'évidence qui s'appuie sur les calculs qu'il vient d'effectuer et sur le support diagrammatique (fig. 11). Cependant, ce dernier raisonnement n'est-il pas lui aussi inductif ?

83 - *Ibid.*, 35-36. Plus en avant, en utilisant une transmutation, il montre les propriétés de symétrie du triangle arithmétique, *ibid.*, 38-39

Remarques conclusives

C'est ainsi que L'Hospital achève sa démonstration d'une des propositions clefs de l'*Arithmetica infinitorum*. Il soutient qu'il a démontré « géométriquement » la table des nombres figurés ou le triangle arithmétique de Pascal, c'est-à-dire qu'il a montré que le rapport (inverse) entre la somme des $\sqrt[q]{b} - \sqrt[q]{x}^p$ et $b\sqrt[q]{b}^p$ se lit directement dans une des cellules de cette table. Il est convaincu que sa démonstration est géométrique, et ce, contre les développements wallisiens basés sur des raisonnements inductifs qui ne sauraient être apodictiques.

Une remarque est toutefois nécessaire. L'Hospital a établi les tables en s'appuyant sur des résultats concernant les quadratures. Il procède donc à l'inverse du mathématicien anglais qui par l'obtention des tables a déduit certains résultats géométriques, dont les quadratures des paraboles et hyperboles. Pour cela, L'Hospital a besoin de mettre en correspondance deux paires de suites, la première exprime des « indivisibles » – des lignes dont les épaisseurs sont en progression arithmétique – la deuxième exprime des quantités. Par cette correspondance il privilégie un sens : de ce qui peut être dit pour les lignes, on en déduit ce qui peut être dit sur les quantités. Wallis prend le chemin inverse.

Mais cela n'est pas tout, « le corollaire 3^{ème} », sur lequel repose une telle correspondance, s'appuie sur un raisonnement inductif.

Dès lors, on pourrait juger le raisonnement de L'Hospital fallacieux d'autant plus qu'il accuse le mathématicien anglais de ce que lui-même finalement n'arrive finalement pas à éviter : l'induction.

Mais plutôt que d'émettre un tel jugement, il est utile de constater au moins deux aspects de la pratique mathématique des acteurs de ce récit. Le premier est que tous pensent que leur démonstration est géométrique. Par géométrique, ils entendent un raisonnement exact et rigoureux. La question est donc de savoir sur quels critères chacun juge que son raisonnement est géométrique. La manière des Anciens est certes reconnue de tous comme un modèle de rigueur. On lui attribue cependant le défaut de ne pas laisser apercevoir la voie qui a conduit à la découverte. Les méthodes d'invention pallient au moins à ce défaut mais pour certains des géomètres, elles apportent davantage : un processus de découverte pourrait être apodictique. Toutefois, un tel basculement ne saurait être affirmé et reconnu sans fournir des arguments qui, au sein de la communauté des géomètres, ont davantage pour but de persuader que de convaincre.

En observant la pratique de ces géomètres, on est conduit à relever un autre aspect : tous usent du raisonnement inductif, et tous ont une position vis-à-vis du caractère apodictique d'un tel raisonnement. Sur ce point, Wallis est catégorique. Le raisonnement inductif prend un nouveau statut. Non seulement il est fécond, mais il jouit de légitimité pour être exposé dans un traité sans qu'il soit nécessaire de recourir à des démonstrations à l'ancienne. Il estime donc qu'il a valeur de preuve.

Dans son *Treatise of Algebra*⁸⁴, Wallis destine le chapitre 79 aux critiques adressées par Fermat. Il revient sur celle concernant la méthode d'induction à laquelle Fermat ne reconnaît d'utilité que pour l'investigation. Pour Wallis, l'induction ne permet pas seulement de découvrir une règle générale. En sus, lorsque le résultat de l'investigation s'offre à la vue comme évident [*obvious*], une démonstration supplémentaire n'a pas lieu d'être. Il considère que l'on peut juger de la sorte lorsque l'observation des cas particuliers conduit à la reconnaissance d'un processus régulier et ordonné, et qu'aucun fondement d'une quelconque suspicion invalidant la généralisation du processus n'existe⁸⁵. Il montre par un exemple comment l'évidence « qui apparaît à notre vue » joue un rôle déterminant pour conclure⁸⁶. Pour obtenir les formules des sommes des puissances, des considérations du même type sont émises. Ce dernier exemple lui suffit pour affirmer que la méthode d'induction constitue non seulement une voie de découverte mais aussi une voie pour démontrer :

De cette façon, ma règle générale étant acceptée (comme suffisamment démontrée) [la règle de la somme des puissances] (...) : les conséquences ayant été régulièrement déduites, sont donc démontrées ; en dépit des dérogations de Monsieur Fermat au procédé par induction ; qui est, par d'autres géomètres aisément admis, et fréquemment utilisé⁸⁷.

Pour conclure à la généralité d'une observation, Wallis est attentif à ce que « les conséquences soient régulièrement déduites ». Il invite donc l'entendement à juger de son propre processus de déduction et à conclure s'il y a évidence ou pas.

Les positions de Prestet ou de L'Hospital par rapport au raisonnement inductif sont bien plus nuancées que celle de Wallis. Elles n'en sont pas moins intéressantes pour comprendre leurs pratiques. Tous les deux prétendent qu'ils n'en usent pas pour démontrer.

84 - John Wallis, *A Treatise of Algebra, both historical and practical*, (London: John Caswell), 1685, 305-309.

85 - « *And so it is, when we find the Result of such Inquiry, to put into a regular orderly Progression (of what nature soever) which is observable to proceed according to one and the same general Process ; and where there is no ground of suspicion why it should fail, or of any case which might happen to alter the course of the Process* », *ibid.*, 305.

86 - *Ibid.*, 307.

87 - « *In like manner, my general Rule being agreed (as sufficiently demonstrated,) (...) : All such consequences as are from hence regularly deduced, are accordingly well demonstrated ; notwithstanding Mos.Fermat's exceptions to a Process by Induction ; which is, by other Geometers readily admitted, and is of frequent use.* », *ibid.*, 307.

Or, j'espère avoir mis au jour une pratique démonstrative non assumée de l'induction. Ce qui est intéressant ici n'est pas tellement le fait qu'ils ne concèdent pas un tel aveu mais la manière dont chacun a usé d'arguments pour l'occulter. Pour Prestet, l'écriture algébrique a été décisive. L'Hospital construit « géométriquement » des objets qui conduisent à des relations dont celle des rapports qu'il a été question de justifier. Le caractère géométrique de sa démarche fait référence au référent qui est Pascal.

Ces témoignages ont lieu dans des contextes dans lesquels il n'est pas possible de justifier par un argument unanime les critères qui feraient que l'induction soit démonstrative, bien que cette question soit indubitablement posée. Dès lors, les réponses et les échanges qui en découlent font partie sans aucun doute, de ce que c'est que faire des mathématiques.