



**HAL**  
open science

**De l'intraitable à l'indéterminé : entre calcul et  
géométrie, réflexions leibniziennes autour de 0/0  
(1700-1706)**

Sandra Bella

► **To cite this version:**

Sandra Bella. De l'intraitable à l'indéterminé : entre calcul et géométrie, réflexions leibniziennes autour de 0/0 (1700-1706). *Philosophia Scientiae*, 2021, Mathématique et philosophie leibniziennes à la lumière des manuscrits inédits, 25 (2), pp.21-45. 10.4000/philosophiascientiae.3028 . hal-03926634

**HAL Id: hal-03926634**

**<https://hal.science/hal-03926634>**

Submitted on 6 Jan 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

De l'intraversable à l'indéterminé :  
entre calcul et géométrie, réflexions leibniziennes autour de  $\frac{0}{0}$   
(1700-1706)

From the Intractable to the Undetermined :  
between Calculus and Geometry, Leibnizian reflexions on  $\frac{0}{0}$   
(1700-1706)

Sandra Bella, Post-doctorante, Laboratoire SPHERE, Université Paris-Diderot

Résumé

Leibniz introduit l'expression «  $\frac{0}{0}$  » en 1672 dans un écrit mathématique sur les séries numériques pour exprimer la somme des unités. Il s'agit très probablement d'une des premières apparitions de cette expression dans l'histoire des mathématiques. Leibniz cependant l'abandonne aussitôt. Elle apparaît à nouveau dans le contexte du calcul différentiel au moment où celui-ci fait débat à l'Académie royale des sciences. Une des questions les plus saillantes soulevées par l'introduction du nouveau calcul est de savoir si la notion de différentielle doit être distinguée, dans la pratique, du zéro absolu.

Cet article examine les efforts effectués, dans le cadre d'une nouvelle pratique mathématique, pour donner un sens à l'expression «  $\frac{0}{0}$  ». On verra comment cette expression cesse de représenter une impossibilité algébrique, à condition de ne plus penser « 0 » comme un zéro absolu. Désormais, elle est le signe de l'existence d'une singularité d'une courbe. L'analyse de cette construction de sens met en évidence combien la représentation diagrammatique des caractères impliqués dans le calcul était importante pour les premiers pratiquants du calcul différentiel.

Abstract

In 1672, in a mathematical text dealing with number series, Leibniz introduced the expression " $\frac{0}{0}$ " to express the sum of units. It probably is one of the first appearances of this expression in the history of mathematics. Nonetheless, Leibniz shortly abandoned it. The expression reappeared in the context of differential calculus, at the time in which it was being hotly disputed within the Académie royale des sciences. One of the prominent issues raised by the introduction of the new calculus was whether the notion of differential is to be distinguished, in practice, from that of absolute zero.

This article examines the efforts made in the context of a new mathematical practice to make sense of the expression " $\frac{0}{0}$ ". We will show how the expression was lent new meaning, away from that of an algebraic impossibility, as the idea was introduced that "0" be no longer thought an absolute zero. Henceforth the expression would indicate the existence of a singularity of a curve. The analysis of this attempt to make sense of an algebraic expression highlights how important the diagrammatic representation of the characters involved in calculus was for the early practitioners of differential calculus.

## 1. Introduction

Dès le début de sa diffusion, l'algorithme leibnizien est accompagné de critiques publiques, formulées par le hollandais Bernard Nieuwentijt (1654-1718), ou privées, lorsque Leibniz échange épistolairement avec Christiaan Huygens (1629-1695), John Wallis (1616-1703) ou encore Jean Bernoulli (1667-1748). Ces critiques portent sur le statut existentiel des différentielles et sur leur mode de fonctionnement, sujets sur lesquels Leibniz est conduit à apporter des éclaircissements. Ces derniers ont fait l'objet de nombreuses études philosophiques et historiques [Beeley 2008], [Jesseph 2015], [Mancosu 1992], [Pasini 1985 ; 1988], [Vermij 1989]. Dans le contexte de la querelle des infiniment petits à l'Académie royale des sciences qui débute en juillet 1700, Michel Rolle (1652-1719) reprend et reformule ces critiques. Il affirme que dans le cadre de la recherche des tangentes, la méthode du calcul différentiel n'est qu'un « déguisement » de la méthode de Fermat ou de celle de Barrow et qu'ainsi les différentielles ont la même signification qu'un *zéro absolu*. Étant redondantes, il serait donc inutile de les introduire.

En France, le calcul a été introduit par Jean Bernoulli et un groupe de savants regroupés autour du philosophe Nicolas Malebranche (1638-1715) [Bella 2018], [Shank 2018]. Parmi les membres de ce groupe, Guillaume de l'Hospital (1661-1704) et Pierre Varignon (1654-1722) sont les plus actifs. Tous deux font partie de l'Académie royale des sciences. Leur position institutionnelle leur permet de diffuser le nouveau calcul auprès de leurs pairs par la lecture de mémoires l'utilisant.

Pour défendre le nouveau calcul, ces mathématiciens comprennent qu'il est essentiel d'exposer des arguments qui montreraient les distinctions notables entre le zéro absolu et les différentielles. Par ce biais, ils espèrent asseoir le bien-fondé et l'utilité de ces dernières. Au sein de l'Académie royale des sciences, Varignon défend le statut des différentielles en invoquant l'autorité de Newton. Leibniz explique d'abord les différentielles par les incomparables puis, par sa formule bien connue « de fictions bien fondées ». Mais ces interventions ne réussissent pas à convaincre les opposants au calcul. Le débat autour des différentielles dégénère en un dialogue de sourds : aucune des parties adverses ne reconnaît la pertinence des arguments de l'autre.

Pendant les séances académiques, Rolle expose des exemples de courbes sur lesquelles il applique le calcul différentiel afin de montrer que celui-ci aboutit à des résultats insatisfaisants. Ces exemples font apparaître des points singuliers – des *extrema*, des points de rebroussement ou encore des points doubles – qui amènent à des discussions non seulement

au sein de l'Académie, mais aussi en privé, entre Varignon, Jean Bernoulli et Leibniz. Parmi ces exemples, le cas d'une quartique<sup>1</sup> possédant un point double avec deux tangentes attire particulièrement leur attention, car la recherche des tangentes en ce point par l'application du calcul différentiel conduit à se confronter au quotient  $\frac{0}{0}$ . Alors que cette expression renvoie à un non-sens pour l'algèbre ordinaire<sup>2</sup>, cette contribution montre comment Leibniz s'efforce de l'interroger et de l'interpréter au moyen du langage différentiel, encore en voie de construction, tout en s'appuyant sur des ancrages géométriques. L'analyse de cet épisode devrait pouvoir contribuer à éclaircir les modalités de la pratique du nouveau calcul à ses débuts.

## 2. Hésitations de sens autour de $\frac{0}{0}$

### 2.1 Autour du calcul des séries numériques

À ma connaissance, l'expression  $\frac{0}{0}$  apparaît pour la première fois dans les écrits mathématiques de Leibniz, entre 1672 et 1674, lorsqu'il l'introduit dans un contexte de recherche autour des séries des inverses des nombres figurés [Hofmann 1974, 12-20]. Dans l'*Accessio ad arithmetica infinitorum* qu'il destine à Jean Gallois (1632-1707) fin 1672 [AIII 1, 1-20], Leibniz restitue ses résultats sur ces séries sous forme d'une table (*Figure 1*). Il connaît les résultats pour les séries correspondant aux exposants supérieurs ou égaux à 3 – somme des inverses des nombres triangulaires, carrés, etc. – qu'il écrit à la dernière ligne « *summa* », destinée à cet effet<sup>3</sup>. Pour la troisième colonne ( $n = 2$ ), correspondant à la série des inverses des nombres entiers (c'est-à-dire la série harmonique), Leibniz raisonne par analogie avec les résultats précédents. Comme pour  $n \geq 3$ , la somme de la série est  $\frac{n-1}{n-2}$ , Leibniz l'applique au cas  $n = 2$  et écrit en bas de la colonne «  $\frac{1}{0}$  ». Suivre cette analogie pour  $n = 0$  ou  $n = 1$  ferait apparaître des nombres négatifs, Leibniz choisit, sans justifier, d'inscrire  $\frac{0}{0}$  à la place.

<sup>1</sup> Une quartique est une courbe qui possède une équation algébrique de degré quatre.

<sup>2</sup> Cajori constate l'apparition de l'expression  $\frac{0}{0}$  en 1704 dans un article de Jean Bernoulli, mais il n'en donne pas l'origine, ni une interprétation [Cajori 1928, 260-261].

<sup>3</sup> Leibniz ne fournit pas dans cet écrit la démonstration de ces résultats dont il assure la difficulté [Hofmann 1974, 21].

Leibniz sait que la série des unités ( $1 + 1 + 1 + \dots$ ) est infinie. Il lui octroie la valeur nulle puisque le « nombre infini » est nécessairement nul<sup>4</sup>. Comme à cette série est associée l'expression «  $\frac{0}{0}$  », il en déduit que

$$1 + 1 + 1 + \dots = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \dots = \frac{0}{0} = 0 \text{ [AIII 1, 11-12]}^5.$$

Leibniz associe la série harmonique à l'expression  $\frac{1}{0}$  et sachant que sa valeur est infinie, il lui fait également correspondre 0.

	0	1	2	3	4	5	6	7	etc.	Exponentes
0		$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	
1/0		$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$		
1/1		$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{28}$		
1/2		$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{1}{84}$		
1/3		$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{70}$	$\frac{1}{126}$	$\frac{1}{210}$		
1/4		$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{105}$	$\frac{1}{168}$	$\frac{1}{280}$		
1/5		$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{70}$	$\frac{1}{175}$	$\frac{1}{336}$	$\frac{1}{630}$		
1/6		$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{280}$	$\frac{1}{504}$	$\frac{1}{840}$		
1/7		$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{45}$	$\frac{1}{135}$	$\frac{1}{315}$	$\frac{1}{567}$	$\frac{1}{924}$		
Summa	0	0	1	2	3	4	5	6	etc.	Summa

Figure 1 : LH 35, 3A 32, fol. 2v°

Des modifications significatives apparaissent dans deux autres écrits contemporains de ce premier<sup>6</sup>. La même table se retrouve dans un écrit de 1676 intitulé *Scheda exigua* [AVII 3, p.712-714] (Figure 2) et dans une lettre à Weigel de 1679 [AIII 2, 838]. Dans les deux cas, la première colonne, correspondant à la suite d'exposant 0, a disparu ainsi que l'expression  $\frac{0}{0}$  associée à la somme des unités. Dans *Scheda exigua*, Leibniz est plus prudent : la somme des unités ne peut être que conjecturée [*conjecturata*], elle n'est plus associée à  $\frac{0}{0}$  mais à une expression qu'il invente : «  $\frac{0}{\dots}$  ». Dans la lettre à Weigel, ayant expliqué que la série harmonique est un infini inférieur à celui de la somme des unités, il écrit tout simplement « *infinis* » pour la somme des entiers [AIII 2, 838-839]<sup>7</sup>.

<sup>4</sup> « Ego vero arbitror, si ullus sit numerus iste infinitus, eum esse zero seu nullum, vel quod idem est dicere, numerum istum infinitum esse nullum, seu = 0 » [AIII 1, 11].

<sup>5</sup> Dans un texte contemporain intitulé « *Mathematica* », il explique que  $\frac{0}{0}$  ne peut pas être égal à 1 car cela conduit à une absurdité. En revanche, il égalise ce rapport à 0 car « Et 0. Alteri 0 ; neque aequale est neque inaequale » [AVII 1, 656].

<sup>6</sup> Je remercie David Rabouin et Arilès Remaki de me les avoir indiqués.

<sup>7</sup> « At summa seriei hujus infinitae  $\frac{1}{2} \frac{1}{3} \frac{1}{4} \frac{1}{5}$  etc. est  $\frac{1}{0}$  quae quantitas est infinita, major scilicet quovis numero assignabili, quemadmodam etiam demonstrare possum interim multo imo infinities minor est quam summa seriei hujus  $\frac{1}{1} \frac{1}{1} \frac{1}{1}$  etc. » [AIII 2, 838-839].

A	B	C	D
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{15}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{35}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{70}$
etc	etc	etc	etc
Summa			
$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$
conjectura		certa	

Figure 2 : LH 35, 8, 27 fol. 1

Dans le cadre de ces recherches sur les séries numériques, l'interprétation de l'expression  $\frac{0}{0}$  renvoie à une interprétation en termes de rapport de nombres. Mais le rien n'est pas une grandeur, car il ne vérifie pas l'axiome du tout et de la partie. Amorcer une telle interprétation est donc vouée à l'échec. Ainsi, après avoir introduit de son propre chef l'expression  $\frac{0}{0}$ , Leibniz ne la retient pas, jugeant que le jeu combinatoire a échoué en produisant une expression sans capacité représentative et nullement utile à l'art d'inventer<sup>8</sup>.

## 2.2 $\frac{0}{0}$ et le calcul différentiel

Leibniz use à nouveau de l'expression  $\frac{0}{0}$  en 1702, dans un cadre très différent de celui de ses recherches sur les séries. Il s'agit de deux écrits, *Justification du calcul des infinitesimales par celui de l'Algèbre ordinaire* [LBr 951, 15-16], [GM IV, 104-106] et *Defense du calcul des Differences* [LH 35 VI 22, 1-2], [Pasini 1988, 705-708]. Leur dessein est de justifier l'utilisation du calcul différentiel. Le premier texte a été transmis à Varignon par l'intermédiaire de François Pinson (1645-1707) pour une publication au *Journal de Trévoux*. Cependant, l'un et l'autre textes restent inédits du vivant de Leibniz. Leurs éditions de nos jours ont fait l'objet d'analyses [Jesseph, 2015], [Pasini, 1993]. Les deux textes sont proches en partie car ils contiennent un développement qui s'appuie sur une configuration géométrique identique<sup>9</sup>.

*Defense du Calcul des Differences*, contrairement à l'autre texte, contient un préambule dans lequel Leibniz annonce son intention de montrer que dans son calcul les élisions des

<sup>8</sup> Cette expression n'atteint pas ici le statut de caractère au sens leibnizien, car elle n'en a pas la capacité représentative [Leibniz 1995, 145-149 ; 2018, 80-81].

<sup>9</sup> Une présentation de ces deux textes et une transcription de *Justification* sont accessibles à l'adresse <http://mathesis.altervista.org/justification-of-the-differential-calculus/>, consultée le 17/09/2020.

quantités infiniment petites ne se font pas de manière arbitraire comme le soutiennent « des personnes habiles » qui « s’opposent au Calcul des Differences », mais suivant des règles qui peuvent être justifiées « à la manière d’Archimède ». Ces règles s’appuient sur son célèbre lemme des incomparables [Leibniz 1689] dont l’application permet de « connoître ce qu’on peut négliger impunément sans qu’il en puisse naître aucune erreur ». En invoquant les « personnes habiles » qui « s’opposent au calcul », Leibniz s’adresse surtout aux académiciens, comme Rolle et Gallois, qui n’acceptent pas de reconnaître l’exactitude du calcul différentiel. En effet, à peine un an auparavant, dans un court article au *Journal de Trévoux* [Leibniz 1701], Leibniz explique que la pratique de son calcul n’exige pas de prendre les infiniment petits de manière « rigoureuse » mais seulement comme des quantités aussi petites qu’il faut. Cette manière de procéder ne diffère de la manière des Anciens, avance-t-il, que dans les « expressions ». Reprenant des exemples qui illustraient son Lemme des incomparables [Leibniz 1689], il maintient qu’il est possible de considérer que le rapport entre une boule et le diamètre de la Terre ou celui entre la Terre et la distance des fixes est un infiniment petit. De la même manière, il s’en suit à ses yeux que le rapport entre la boule et la distance des fixes est un infiniment infiniment petit. Son développement, s’appuyant cependant sur des comparaisons avec des grandeurs finies, crée la confusion entre les membres de l’Académie royale des sciences, qu’ils s’opposent ou défendent le calcul. Quelques mois plus tard, dans un article au *Journal des Sçavans* [Leibniz 1702]<sup>10</sup>, il éclaire ce qu’il a voulu dire par « expliquer l’infini par l’incomparable » et comment les différentielles peuvent être considérées comme « des idées propres à abrégé les raisonnemens, & fondées en realitez ». Aux dires de Varignon, cette dernière publication apaise les attaquants du calcul, mais Leibniz, qui l’a écrite à la hâte, juge probablement qu’elle n’est pas suffisante puisqu’il rédige *Justification du calcul des infinitesimales par celui de l’Algèbre ordinaire* quelques semaines après.

Dans le préambule de *Defense du calcul des Differences*, Leibniz annonce qu’il proposera une justification de « notre manière de calculer par le calcul ordinaire de l’Algèbre ». Il avance que ceux qui pratiquent le calcul ordinaire de l’algèbre pratiquent déjà sans le savoir le calcul des infinitésimales. Par-là, il entend qu’ils usent de quantités infiniment petites même si certains d’entre eux prétendent que ce sont des riens. Il est utile de signaler que cette justification est formulée en ayant comme toile de fond une réflexion autour de la *mathesis universalis*. Entre 1698-1699, la *mathesis universalis*, qu’il définit comme la

---

<sup>10</sup> Leibniz envoie des éclaircissements à Varignon le 2 février 1702. Une partie de cette lettre est publiée au *Journal des Sçavans* le 20 mars 1702.

« science de la quantité considérée universellement », est distinguée en deux parties. L'Algèbre s'occupe de la quantité finie au moyen de quantités finies et une autre partie, la transcendante, traite aussi de la quantité finie mais avec l'intervention des infinis qui s'évanouissent (c'est-à-dire son calcul différentiel) [LH 35 I 30, 1r<sup>o</sup>], [Leibniz 2018, 127]. Aux yeux de Leibniz, l'algèbre ordinaire procède donc de manière analogue à son calcul, pourtant si critiqué par les algébristes, puisqu'elle applique un calcul général à un cas particulier en usant de quantités infiniment petites. Cet argument est à la base de la nouvelle stratégie de justification qu'adopte Leibniz et qui est autre que celle qu'il développe auprès des savants parisiens, par exemple dans le *Journal de Trévoux* juste quelques mois plus tôt.

Son propos est illustré par un exemple à l'appui d'une figure. Cet exemple, aux notations près, est commun aux deux textes. Leibniz considère une droite fixe  $AE$  sur laquelle sont menées deux perpendiculaires  $IA$  et  $VE$ , également fixes. Une droite  $LM$  coupe  $AE$  en  $H$  selon un angle que Leibniz prend le soin de considérer différent de 45 degrés. Cette droite coulisse de  $H$  vers  $A$  parallèlement à elle-même en formant des triangles semblables  $ABH$ ,  $HEC$  ou  $Abh$ ,  $hEc$ .

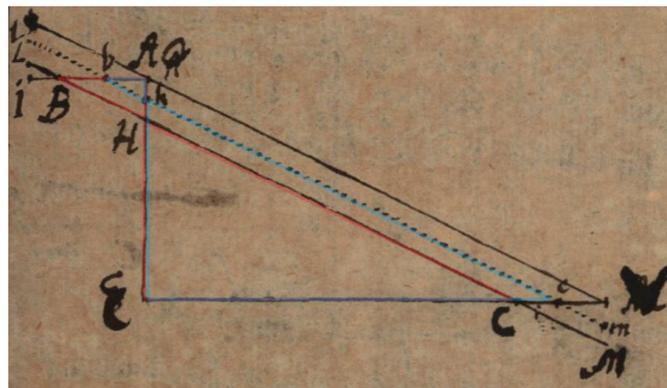


Figure 3 : Défense du calcul des différences, LH 35, 6, 22 fol. 1v  
(traits en couleurs ajoutés par nous)

En notant  $AB = Ab = x$ ,  $AH = Ah = z$ ,  $EC = Ec = y$  et  $AE = f$ , la similitude des triangles permet d'écrire que, quelle que soit la position de la droite  $LM$  avant d'arriver en  $A$  :

$$\frac{f - z}{y} = \frac{z}{x}$$

Leibniz explique que lorsque la droite arrive en  $A$ , il est manifeste que les points  $b$  et  $h$  tombent en  $A$ . Les grandeurs  $z$  et  $x$  s'évanouissant,  $f - z$  devient alors  $f - 0$ . Pour comprendre cette situation géométrique à l'aide du calcul et dans toute sa généralité, c'est-à-dire jusqu'à l'évanouissement du triangle, Leibniz affirme qu'il faut admettre que les longueurs des côtés du triangle ne deviennent jamais absolument nulles mais qu'« au dernier instant » elles doivent

être considérées comme des « grandeurs évanouissantes<sup>11</sup> ». Il soutient que bien que les grandeurs  $x$  et  $z$  ne soient plus comparables à  $f$ , elles sont comparables entre elles. Il n'est donc pas permis de les remplacer par des riens et d'écrire l'égalité  $\frac{f-0}{y} = \frac{0}{0}$ . Pour valider cette affirmation, Leibniz raisonne par l'absurde en supposant que  $z$  et  $x$  sont des riens. Dans ce cas, le rapport  $\frac{z}{x}$  des côtés du *dernier* triangle serait égale à  $\frac{0}{0}$ .

Que vaut  $\frac{0}{0}$  ? Les deux textes diffèrent sur ce point. Dans *Defense*, le raisonnement a de quoi surprendre : Leibniz écrit d'abord que  $\frac{0}{0}$  est nul d'où il déduit que  $f$  est à  $y$  comme 0 à 0 et que  $f = y$ . Dans *Justification*, il explique que comme « un rien vaut l'autre »,  $z$  et  $x$  sont égaux, donc  $\frac{0}{0} = 1$  d'où  $f = y$ . Même si les arguments diffèrent entre les deux versions, Leibniz aboutit à l'égalité  $f = y$  qui constitue l'absurdité souhaitée, puisque si elle était vérifiée, le triangle rectangle  $AEV$  serait isocèle en  $E$  et l'angle  $\widehat{EAV}$  vaudrait alors 45 degrés, contrairement à l'hypothèse de départ. Ainsi  $z$  et  $x$  ne sont pas des riens absolus.

Dans les deux versions, déterminer la valeur de  $\frac{0}{0}$  est décisif pour conclure que  $f = y$ . En effet, sans ce résultat, on n'aboutit pas à une absurdité<sup>12</sup>. Leibniz traite le rapport  $\frac{0}{0}$  en appliquant, selon le texte, soit la règle «  $\frac{a}{a} = 1$  », soit la règle «  $\frac{0}{a} = 0$  », valable pour les rapports de grandeurs non nulles. Or ce traitement est ici complètement injustifié et son raisonnement par l'absurde n'est donc pas valable. Certain d'avoir justifié qu'il est absurde de considérer  $z$  et  $x$  comme des riens, Leibniz semble affirmer que le contraire de « être des riens » est « être des évanouissants ». Ces « évanouissants » sont homogènes entre eux. En effet, bien que  $z$  soit considéré être un « rien » par rapport à  $f$ , il est « quelque chose par rapport à son homogène qui est  $x$  ». Dans *Justification*, Leibniz est plus catégorique en affirmant que  $z$  et  $x$  représentent des quantités qui sont l'affaire d'un « calcul d'Algèbre » : elles « ne sont prises pour des riens que comparativement [à  $f$  et à  $y$ ] » mais cependant « ont du rapport l'une à l'autre ». Il convient de souligner que Leibniz tire cette dernière affirmation en appliquant le principe de continuité qu'il évoque plus avant. En effet, pendant le mouvement de la droite  $LM$  jusqu'à l'évanouissement de  $z$  et  $x$ , l'égalité des rapports entre les deux côtés de la paire de triangles est conservée, mais aussi l'existence de tels rapports (ce qui implique l'homogénéité des quantités).

<sup>11</sup> Dans *Justification*, Leibniz préfère écrire « infinitesimales ».

<sup>12</sup> La difficulté ne vient pas du fait qu'il ait à être égal à un, car s'il était établi qu'il est égal à tout autre nombre, il suffirait dans ce cas de changer l'hypothèse initiale de l'angle pour aboutir à une absurdité. La difficulté vient de que ce « rapport » n'est pas défini.

Leibniz soutient que l'intégration « d'évanouissants » dans le calcul de l'algèbre permet de rendre plus général le traitement des problèmes. Il affirme que, de fait, ceux qui pratiquent la Spécieuse ordinaire ont nécessairement profité de cette considération pour « rendre leur calculs et constructions générales » [GM IV, 105]. Ici, il ranime une idée qu'il avait mise au point dès 1674 dans *Méthode de l'universalité* [AVII 7, 18-84]<sup>13</sup>. L'argument est crucial, puisque ces textes s'adressent à des algébristes qui refusent d'introduire des quantités infiniment petites dans leur calcul. Pourtant, force est de constater qu'en dernière instance, pour légitimer l'appel aux évanouissants, Leibniz est contraint de faire appel au principe métaphysique de continuité. Or l'adhésion à ce principe ne va pas de soi pour ceux qui considèrent que la pratique calculatoire ne nécessite pas d'admettre des hypothèses audacieuses, autres que celle de supposer simplement que certaines quantités deviennent absolument nulles.

### 3. De l'utilité de la géométrie pour décrypter $\frac{0}{0}$

Pendant la querelle des infiniment petits à l'Académie royale des sciences, Rolle propose plusieurs exemples de courbes pour lesquelles, selon lui, l'application du calcul leibnizien aboutit à des résultats insatisfaisants. Cependant, bien que Rolle commette plusieurs maladresses faciles à déceler, et qui rendent inopérante son intervention, ses exemples donnent lieu à des échanges entre Varignon, Jean Bernoulli et Leibniz concernant le comportement des différentielles en des points singuliers. Une des courbes qui les intéresse particulièrement est celle dont l'équation est

$$y - b = \frac{(xx - 2ax + aa - bb)^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}$$

(où  $a$  et  $b$  sont des constantes).

---

<sup>13</sup> « Cavalieri, M<sup>r</sup> Fermat, M<sup>r</sup> Wallis, et autres supposent des certaines lettres, ou lignes infiniment petites ou egales a rien. J'ay mis la mesme chose en usage, et j'ay adjousté des lettres qui representent une grandeur infinie, ou des lignes egales à des rectangles, comme sont les asymptotes de l'Hyperbole » [AVII 7, 50]. Il met en œuvre cette méthode pour obtenir une équation générale de « la » conique qui comprend les cas de l'ellipse, l'hyperbole, la parabole et le triangle.

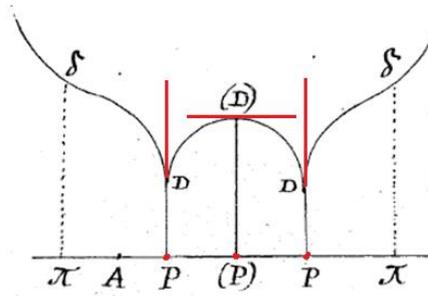


Figure 4 : Procès-verbaux de l'Académie royale des sciences, 9 juillet 1701, fol. 237 r°  
(traits en couleurs ajoutés par nous)

Pendant la séance académique du 9 juillet 1701, Varignon montre que la courbe présente une tangente horizontale (déterminée par  $dy = 0$ ) et deux tangentes verticales (déterminées par  $dx = 0$ ), alors que Rolle a avancé, en utilisant la méthode algébrique de Hudde, qu'elle possède trois tangentes horizontales, fournissant ainsi une forme erronée de la courbe [Varignon, 1701]. La réponse de Varignon devant ses pairs constitue une victoire pour le calcul différentiel. Le nouveau calcul se montre effectivement plus propre à l'intelligence des lignes courbes que la méthode algébrique puisqu'il permet de préciser « les positions des tangentes » « par le moyen des  $dy$  et  $dx$  alternativement égales à zéro ». La méthode algébrique discerne les *extrema*, mais non la position relative des tangentes. Par conséquent le traitement des courbes par le calcul différentiel est davantage en adéquation avec leur nature [Blay 1992, 49-55].

Dans la lettre à Bernoulli du 19 avril 1701 [AIII 8, 619], Leibniz commente cet exemple. Il s'intéresse en particulier à un quelconque des points de rebroussement  $D$  (où la tangente est verticale). En posant  $z = x - a$  et  $v = y - b$  dans l'égalité

$$a(y - b)^3 = (xx - 2ax + aa - bb)^2,$$

elle devient

$$av^3 = (zz - bb)^2 \text{ ou } v^3\sqrt{a} = (zz - bb)^{\frac{2}{3}}.$$

En différentiant, il vient

$$dv = \frac{4zdz}{3^{\frac{2}{3}}\sqrt{azz - abb}}$$

Leibniz fait remarquer que pour satisfaire à  $dv = 0$  (i.e.  $dy = 0$ ) il y a deux possibilités. La première est  $z = 0$  (i.e.  $x = a$ ) – qui correspond au maximum  $(D)$  et qui a déjà été trouvé ; la deuxième se produit pour  $dz = 0$ . Leibniz affirme que ce dernier cas correspond aux *minima* de la courbe, c'est-à-dire à l'un des deux points  $D$ . Ainsi, dans le cas des *minima*, alors que la

tangente est perpendiculaire à l'axe, il y aurait simultanément  $dv = 0$  et  $dz = 0$ <sup>14</sup>. À ces évidences calculatoires, Leibniz ajoute une interprétation géométrique.

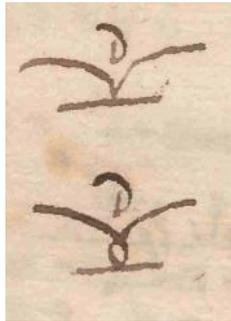


Figure 5 : Lettre de Leibniz à Jean Bernoulli du 19 juillet 1701, LK-MOW Bernoulli20, Bl. A47

Il explique que le point  $D$  est le résultat de la déformation d'une courbe recourbée qui possède une tangente parallèle à l'axe des abscisses en un de ses points (en bas sur la Figure 5).

Lorsque la « sinuosité de la recourbure » de la courbe « s'évanouit » – c'est-à-dire lorsque la courbe ne revient plus sur elle-même –, Leibniz affirme que la propriété de tangence (parallèle à l'axe des abscisses) est conservée, de sorte qu'« en quelque sens il est vrai que la droite parallèle à l'axe  $AP$ , qui passe par  $D$  touche la courbe ». Dans ce cas, non seulement  $dz = 0$  mais aussi  $dv = 0$ .

Il est notable qu'ici Leibniz s'efforce de fournir une représentation géométrique à la double égalité  $dv = dz = 0$  qui conduit à faire apparaître le cas du point de rebroussement comme un cas dégénéré d'un cas plus général. Cette explication s'appuie sur la mise en œuvre du principe de continuité, même si Leibniz n'y fait pas explicitement appel.

Dans sa lettre de réponse du 7 mai 1701 [AIII 8, 632], Jean Bernoulli explique à Leibniz que la nullité simultanée des deux différentielles en un point est caractéristique d'un certain type de point, qu'il nomme de « *décussation* », car il est au croisement d'un nœud<sup>15</sup>. Il a rencontré un exemple de ce type, en échangeant avec Varignon, à propos d'une courbe quartique d'équation

$$y^4 - 8y^3 + 16y^2 - 12xy^2 + 48xy + 4x^2 - 64x = 0 \quad (1)$$

Cette quartique possède deux branches qui se croisent au point de coordonnées  $x = 2$  et  $y = 2$ .

<sup>14</sup> Leibniz n'écrit pas qu'aux *minima*  $z = \pm b$ , le dénominateur  $3\sqrt{azz - abb}$  de l'expression de  $dv$  s'annule aussi et qu'ainsi  $dv$  apparaît sous la forme  $\frac{0}{0}$ .

<sup>15</sup> Ce terme provient du latin *decussatus* qui signifie « croisé ».

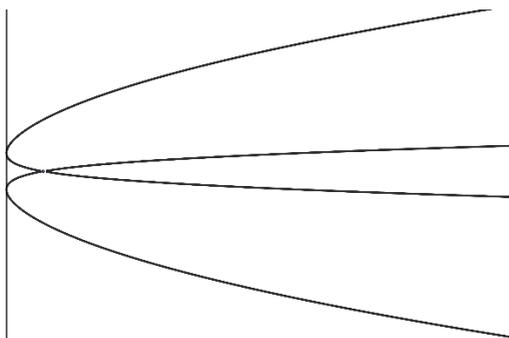


Figure 6 : Quartique d'équation  $y^4 - 8y^3 + 16y^2 - 12xy^2 + 48xy + 4x^2 - 64x = 0$

La décussation implique ici l'existence de deux sous-tangentes.

Le 13 avril 1702, Rolle publie un article « Règles et Remarques, pour le problème général des tangentes » [Rolle 1702], dans lequel il explique que les « méthodes ordinaires » – sans préciser lesquelles – ne conviennent pas pour trouver l'une quelconque des sous-tangentes à ce type de courbe. Il fournit un algorithme algébrique qui permet de trouver les valeurs des deux sous-tangentes cherchées, sans cependant fournir l'origine de cet algorithme<sup>16</sup>.

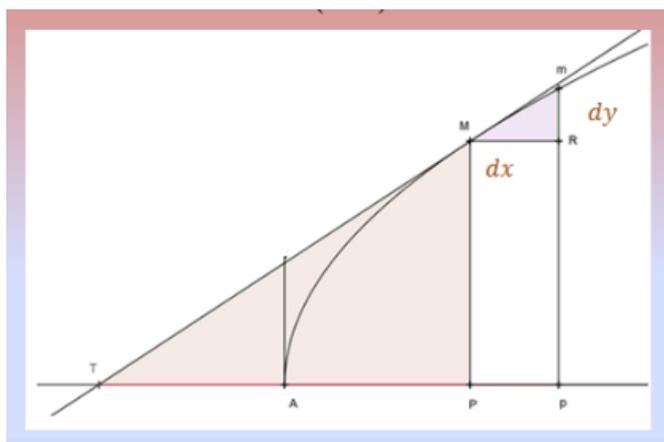


Figure 7 : Triangle caractéristique de côtés  $dx$  et  $dy$  semblable à  $TMP$

Dans l'art. 9 de la section II du traité *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* [L'Hospital 1696, 11] L'Hospital présente la résolution générale de la

<sup>16</sup> L'idée sur laquelle s'appuie l'algorithme est de remplacer  $y$  par  $y + nz$  et  $x$  par  $x + nv$  dans l'équation de la quartique. L'algorithme permet de calculer « par tranches » les termes de la nouvelle égalité. La première tranche (qui correspond à la détermination des tangentes en un point non singulier) se forme à partir des termes de l'équation de la courbe en multipliant chacun des termes en  $y$  par leur exposant puis en remplaçant par  $z$  un seul des  $y$  dans le produit. Par exemple  $y^4$  est transformé en  $4y^3z$ . Le même type de procédé est appliqué aux termes en  $x$  mais en remplaçant par  $v$ . Puis tous ces produits sont multipliés par  $n$ . Pour le deuxième bloc, on procède de manière similaire à partir du premier bloc, obtenu lors de la première étape, sauf que cette fois-ci, les produits sont multipliés par  $n^2$ . Ainsi, l'algorithme permet de calculer un bloc à partir du précédent par ordre rétrograde. Rolle présente la nouvelle égalité rangée par ordre. Dans le cas de la quartique, en remplaçant  $x$  et  $y$  par 2, la première partie de l'égalité ainsi rangée s'annule, il faut donc passer au bloc suivant qui cette fois-ci ne s'annule pas et fournit les valeurs des deux sous-tangentes.

recherche de la sous-tangente  $t$  en un point  $M$  en fournissant la formule  $t = y \frac{dy}{dx}$ . L'obtention de cette formule s'appuie sur des considérations géométriques (*Figure 7*) : au voisinage du point  $M$ , il est possible de considérer un point  $m$  infiniment proche de  $M$  de sorte que l'arc  $Mm$  puisse être supposé rectiligne. Le triangle curviligne  $MmR$  est ainsi supposé rectiligne et semblable à  $TMP$ . La figure garantit l'existence de ce qui est désigné par  $\frac{dy}{dx}$ . Il suffit ensuite de faire confiance à l'algorithme qui, à partir de l'équation de la courbe, permet de trouver la valeur de  $\frac{dy}{dx}$ .

Dans le cas du point de décussation, la précédente configuration infinitésimale n'est pas reproductible, parce que l'existence de deux tangentes annule la détermination d'un triangle caractéristique. Comment le calcul en rend-t-il compte? En différentiant l'égalité

$$y^4 - 8y^3 + 16y^2 - 12xy^2 + 48xy + 4x^2 - 64x = 0 \quad (1)$$

il suit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - 12y - 2x + 16}{y^3 - 6y^2 + 8y - 6xy + 12x} \quad (2)$$

et pour  $x = 2$  et  $y = 2$ , le numérateur et le dénominateur s'annulent. Dans ce cas, obtenir la valeur de  $\frac{dy}{dx}$  implique de savoir traiter  $\frac{0}{0}$ .

Les lettres échangées entre Jean Bernoulli et L'Hospital entre 1693 et 1694 montrent que L'Hospital avait buté autrefois sur l'obtention de la valeur d'une expression dont le numérateur et le dénominateur s'annulent simultanément. Il avait demandé de l'aide à plusieurs reprises à Jean Bernoulli qui enfin, le 22 juillet 1694, lui dévoila une règle qui permet de sortir de cette impasse [Bernoulli 1955, 235]. Elle est énoncée dans l'article 163 de *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* en considérant que ce quotient exprime l'équation d'une courbe. Son énoncé et sa démonstration méritent de s'y attarder.

Soit une ligne courbe  $AMB$  ( $AP = x, PM = y, AB = a$ ) telle que la valeur de l'appliquée  $y$  soit exprimée par une fraction, dont le numérateur et dénominateur deviennent chacun zero lorsque  $x = a$ , c'est-à-dire lorsque le point  $P$  tombe sur le point  $B$ . On demande quelle doit être la valeur de l'appliquée  $BD$ . (...) si l'on prend la différence du numérateur, & qu'on la divise par la différence du dénominateur, après avoir fait  $x = a = Ab$  ou  $AB$ , l'on aura la valeur de l'appliquée  $BD$  ou  $bd$  [L'Hospital 1696, 145].

Pour la preuve<sup>17</sup>, L'Hospital considère deux courbes  $AN$  et  $CO$  de même axe  $AB$  que la courbe  $AND$  et telles que l'ordonnée  $PN$  (respectivement  $PO$ ) exprime le numérateur (respectivement le dénominateur) de  $PM$ . Il peut alors écrire :  $PM = \frac{AB \times PN}{PO}$  où  $AB$  est une

<sup>17</sup> L'Hospital reprend presque intégralement celle que Jean Bernoulli lui a transmise en 1694.

constante et représente l'abscisse du point  $B$ <sup>18</sup>. Ainsi, quand  $AP = x = a$ , les ordonnées  $PN$  et  $PO$  sont nulles par hypothèse et les deux courbes  $AN$  et  $CO$  se coupent donc sur l'axe au point  $B$ .

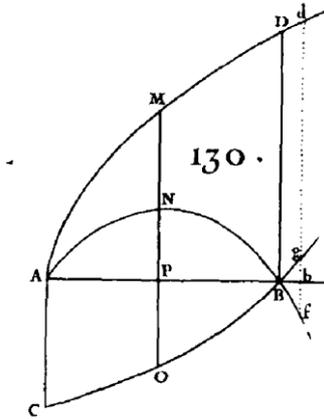


Figure 8 : Figure 130 de l'Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes de L'Hospital

L'Hospital « imagine » une ordonnée  $bd$  infiniment proche de  $BD$  qui coupe chacune des courbes en  $f$  et  $g$  respectivement, ce qui lui permet d'écrire  $bd = \frac{AB \times bf}{bg}$ . Comme  $bd$  et  $BD$  sont infiniment proches, les suppositions de l'analyse des infinis assurent que la valeur de l'une peut être prise pour l'autre [L'Hospital 1696, 2-3]. Pour justifier que  $bf$  est la différentielle de  $PN$  et que  $bg$  est la différentielle de  $PO$ , L'Hospital explique qu'il est « visible » que lorsque  $AP$  devient  $AB$ , les ordonnées  $PN$  et  $PO$  deviennent nulles et que lorsque  $AP$  devient  $Ab$ , les ordonnées deviennent égales à  $bf$  et à  $bg$ , et que celles-ci sont en fait les différentielles des ordonnées en  $B$  et  $b$  par rapport aux courbes  $AN$  et  $CO$ . Le fait que « lorsque  $AP$  devient  $Ab$ , les ordonnées deviennent égales à  $bf$  et à  $bg$  » est non seulement « visible » mais tient à la définition des deux courbes. En revanche il est important de constater que L'Hospital s'appuie fortement sur le diagramme pour justifier que  $bf$  et  $bg$  sont les différentielles des deux ordonnées. Dans le cadre de l'Analyse des infiniment petits, serait-il possible de fournir une autre explication ? Si  $bf$  ne différait de 0 que par une différentielle, on conclurait alors qu'elle est égale à cette différentielle, mais c'est justement ce qui est en jeu<sup>19</sup>.

À la fin de son article, Rolle fait allusion à l'insuffisance des « méthodes ordinaires » pour trouver les valeurs des tangentes en un point de décussation [Rolle 1702]. Varignon et ses amis interprètent cette allusion comme une offensive contre la méthode différentielle. Ils

<sup>18</sup> L'Hospital fait intervenir la quantité  $AB$  au numérateur par souci d'homogénéité mais cette quantité ne joue aucun rôle dans la preuve.

<sup>19</sup> Une théorie des développements limités n'a pas encore été explicitée.

souhaitent relever ce défi et ainsi illustrer la fécondité de l’algorithme en l’appliquant à plusieurs exemples, en particulier à la quartique d’équation (1). Pour ce faire, l’application de l’article 163 est précieux. Alors qu’il a été publié en 1696, il n’existe, à ma connaissance, aucune application avant celle-ci. Pour trouver la valeur de  $\frac{dy}{dx}$  lorsque  $x$  et  $y$  sont égaux à 2, il convient de différentier le numérateur et le dénominateur de  $\frac{dy}{dx}$ . Or

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - 12y - 2x + 16}{y^3 - 6yy + 8y - 6xy + 12x} \quad (2)$$

d’où<sup>20</sup>

$$\frac{6ydy - 12dy - 2dx}{3yydy - 12ydy + 8dy - 6xdy - 6ydx + 12dx} = \frac{dy}{dx} \quad (3)$$

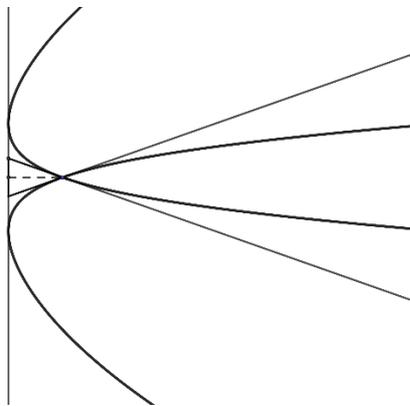


Figure 9 : Le deux sous-tangentes au point de décussation

Et en substituant  $x$  par 2 et  $y$  par 2, il vient  $\frac{dx}{8dy} = \frac{dy}{dx}$  soit  $(\frac{dy}{dx})^2 = \frac{1}{8}$ . Comme  $x = 2$ ,

$$(\frac{xdy}{dx})^2 = \frac{4}{8}. \text{ ou encore } \frac{xdy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ce résultat est publié le 3 août 1702 dans un article du *Journal des Sçavans* comme réponse à Rolle [Saurin 1702]<sup>21</sup>.

La traduction analytique de la configuration de la double-tangente se trouvait réduite à l’expression aride  $\frac{0}{0}$ . L’application de l’art. 163 permet de lui fournir une expression adéquate qui est celle d’une équation du second degré admettant deux solutions positives. L’expression  $\frac{0}{0}$  ne renvoie plus nécessairement à une impossibilité.

<sup>20</sup> Ces égalités ne sont vraies que lorsque  $x$  et  $y$  sont égaux à 2.

<sup>21</sup> Bien que cet article soit signé par le mathématicien Joseph Saurin (1659-1737), il est notable que Varignon a collaboré à sa rédaction [Bella 2018]. La querelle des infiniment petits devenant trop longue, elle est à l’encontre des règles de bienséance de l’Académie des sciences. Celle-ci impose le silence de sorte qu’aucun des adversaires ne doit publier de mémoire provocateur. Varignon ne peut donc pas signer cet article sans que cela contrevienne à cette résolution.

#### 4. Une synthèse argumentative de Leibniz

La manière de procéder des défenseurs du calcul conduit encore à des critiques de la part de Rolle. Il explique qu'« on a fait concourir deux Methodes de cette Analyse, l'une de l'art. 9 l'autre de l'art. 163 » [Rolle 1703, 131]. Or, il indique que, dans ces deux articles, il n'est nullement question de recherche de tangentes doubles, ni d'ailleurs à aucun endroit de l'*Analyse des infiniment petits*, de sorte que des changements ont été nécessaires pour « y faire un supplément particulier des tangentes ». D'après lui, ces ajouts ont été effectués dans le but de déguiser sa propre méthode algébrique décrite dans l'article du 13 avril 1702 [Rolle 1702, 240-242].

Saurin ne publie une défense à ces accusations que trois ans plus tard, le 23 avril 1705 [Saurin 1705]. Dans une lettre du 10 mai 1705, Varignon sollicite Leibniz pour intervenir et soutenir la cause du calcul différentiel auprès des membres de l'Académie. Il lui prie cependant de faire attention à ne pas raviver les anciennes discussions sur le statut des différentielles au moment de la publication au *Journal de Trévoux* :

Nous vous prions donc instamment M. Saurin et moy de nous envoyer non seulement votre attestation, mais aussi celles de tout ce que vous connoissez de gens qui entendent votre calcul. Il ne faut toucher, s'il vous plaist, qu'au point traité dans le *Journal* du 23 avril dernier, sans parler d'infinis, de peur de fournir occasion à M. Rolle de s'accrocher ailleurs. Les points sur lesquels vous et ces M<sup>rs</sup> êtes priés de prononcer, se trouvent de suite à la fin de ce *Journal*, et dans le Mémoire que voici : ce secours nous est absolument nécessaire pour le triomphe de la vérité et de votre calcul en ce pays-ci. [AIII 9, 549]

Leibniz accepte et rédige un écrit pour contrecarrer les propos de Rolle et défendre ses amis. Deux versions en existent : une version latine holographe [Gotha FB A 448-449, 41-42] et une version abrégée en français, de la main d'un copiste [LH 35 VII 9, 1-2]. Celle-là est sûrement celle que Leibniz prévoyait pour un envoi aux savants parisiens, la première étant probablement réservée pour être publiée dans un journal savant européen. Seule la version latine de cet écrit est publiée sous le titre « Sentiment de Monsieur Leibnitz » chez un imprimeur hollandais [Leibniz 1706]<sup>22</sup>.

Les textes se structurent en deux parties bien distinctes. La première s'attache à élucider quelques aspects techniques des critiques de Rolle. Leibniz ajoute ensuite un commentaire pour éclaircir l'article 163, qui est l'objet de la deuxième partie et l'intérêt des textes.

Leibniz note par  $v$ ,  $3y^2 - 12y - 2x + 16$ , et par  $z$ ,  $y^3 - 6yy + 8y - 6xy + 12x$ , de sorte que  $\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - 12y - 2x + 16}{y^3 - 6yy + 8y - 6xy + 12x} = \frac{v}{z}$ . Il est question de justifier pourquoi  $v$  et  $z$  ne sont pas

---

<sup>22</sup> Une présentation et une transcription de ces deux manuscrits sont accessibles à l'adresse <http://mathesis.altervista.org/justification-of-the-differential-calculus/>, consulté le 17/09/2020.

pris pour des riens mais pour des « évanescents ». Leibniz commence par montrer pourquoi  $\frac{0}{0}$  est indéterminable si on « demeure en ces termes », c'est-à-dire si on demeure dans le cadre de l'algèbre dans lequel 0 a des propriétés caractéristiques, en particulier pour la multiplication. Il explique que chacune des égalités

$$\frac{0}{0} = 1 ; \frac{0}{0} = 2 ; \dots \frac{0}{0} = b$$

n'a pas plus de raison d'être vraie qu'une des autres, car multipliant chacun des membres de l'équation par 0, elles deviennent

$$0 = 1 \times 0, 0 = 2 \times 0, \dots 0 = b \times 0$$

qui sont toutes algébriquement vraies en raison de la caractérisation algébrique de 0 :

« quelque grandeur ou nombre qu'on puisse multiplier par 0, il provient toujours 0 ». Ainsi, il n'est pas possible de décider si la fraction est égale à 1, 2 ou plus généralement à  $b$  [Gotha FB A 448-449, 42 r<sup>o</sup>], [Leibniz 1706, 38], [Leibniz 1705, 2]. Ce développement conduit à plusieurs remarques.

Tout d'abord, il convient de contextualiser cette observation concernant 0. Leibniz s'est penché, aux alentours de 1700, sur les propriétés élémentaires de l'algèbre en rédigeant des textes sur son axiomatisation [Rabouin 2019, 277-296]. En particulier, il formule des propriétés et des caractérisations algébriques de zéro pour l'addition<sup>23</sup> et pour la multiplication<sup>24</sup>, que pour la plupart il démontre [LH 35 IV 12, 1-2], [LH 35 IV 12, 7r<sup>o</sup>-8v<sup>o</sup>]. Comme le montre son développement, ce travail lui a permis de ne plus faire preuve d'hésitation pour affirmer le caractère indéterminé du rapport  $\frac{0}{0}$  et la justification de celui-ci, contrairement aux textes de 1701 précédemment commentés. Ce type d'argumentation concernant la manipulation de zéro n'est d'ailleurs pas isolé car on retrouve dans d'autres manuscrits contemporains des développements proches [LH 35 VII 17, 6-8], [Pasini 1985b, 19-31]<sup>25</sup>. Compris dans le strict cadre de l'algèbre,  $\frac{0}{0}$  n'est pas calculable. Or, il s'agit ici de

<sup>23</sup> Par exemple,  $0 + a = a ; 0 + 0 = 0 ; -0 = 0 ;$  si  $n + n = 0$  alors  $n = 0$  ( $n$  est considéré être positif) ; Si  $-a = +a$  alors  $a = 0$

<sup>24</sup> Par exemple :  $0 \times a = 0$ . De cette propriété, il observe que si  $0b = 0c$ , on ne peut pas déduire que  $b = c$ . Aussi, pour  $b$  non nul,  $\frac{0}{b} = 0$ .

<sup>25</sup> Leibniz annotant sur les notes prises par Philippe Naudé : « Quantitas quaevis, vel etiam 0, si supponatur divisa vel divisum per 0, potest vere esse = 0, et = quantitati cuilibet assignabili ; et =  $\infty$  ; qua de causa, talibus uti in calculis non magis possumus, quam si nunquam quantitas esse possent, quia  $\frac{0}{0}$ , vel  $\frac{1}{0}$  vel generalius  $\frac{b}{0}$  sunt res omnimode indeterminata et incognita, quia aliquando verae sunt quantitates assignabiles ; aliquando  $\infty$ , et aliquando 0 (...) Unde patet, quod si in calculo quodam algebraico obtineremus pro responsione vel pro ipsa resolutione  $x = \frac{b}{0}$  vel  $\frac{0}{0}$ , non certe inde sequeretur  $x$  aequale esse infinito, nec certe aequalem quantitati assignabili, sed cuinam inter haec, nullo modo scribi posse hac responsione. » [LH 35 VII 17, 7r<sup>o</sup>-8r<sup>o</sup>], [Pasini 1985b, 20].

trouver le résultat du rapport  $\frac{dy}{dx}$  lorsque  $dx$  et  $dy$  deviennent égaux chacun à 0 et à cette fin, de se procurer les moyens pour l'effectuer. Or, en prenant  $v$  et  $z$  pour des riens, « on n'apprend rien » [*ex quibus nihil discemus*] de ce rapport.

Il est à remarquer qu'ici Leibniz n'écrit pas que  $v$  et  $z$  ne *sont* pas des riens mais que si l'on veut espérer l'effectuation d'un calcul, il ne faut pas les *prendre* pour des riens. Avoir à les considérer autrement que comme des riens est donc un impératif lié à une pratique calculatoire : « il faut les prendre [ $v$  et  $z$ ] pour des grandeurs naissantes ou évanouissantes ». Cette dernière expression est précisée par la suite dans la version latine du texte. Les grandeurs naissantes ou évanouissantes sont celles qui diffèrent du rien de manière inassignable<sup>26</sup>. Bien qu'elles ne soient pas assignables, elles se trouvent être quelque chose d'existant et non pas un rien absolu<sup>27</sup>. En outre, la grandeur  $z$ , naissante ou évanouissante, est « autant que son  $dz$  » parce que  $z$  ne différant du rien que de manière inassignable, sa première ou ultime différence infinitésimale, existant au même moment, coïncide avec elle<sup>28</sup>.

Quelques aspects de ce développement méritent qu'on s'y attarde. À la demande de Varignon, ces deux textes sont rédigés en vue d'attester du bien-fondé du nouveau calcul qui cause tant de querelles à l'Académie des sciences. Ils s'adressent non seulement aux membres académiques mais aux acteurs de la République des lettres qui suivent depuis presque cinq ans ce débat. En raison de ces enjeux communautaires, Leibniz est plus prudent. Il ne présente plus les différentielles comme des incomparables. En effet, cela avait conduit à des méprises lorsque pour « rendre le raisonnement sensible à tout le monde » [Leibniz 1702, 183] il avait fait appel à des analogies entre les degrés d'infinité et des grandeurs finies. Cela est notable par son choix de vocabulaire : le terme « incomparable », ou celui de « fiction » ou même celui de « différentielle » sont absents alors que foisonnent les couples « évanouissant/naissant » et « inassignable/assignable ». Sa terminologie n'est d'ailleurs pas sans rappeler celle utilisée par Newton dans le premier Livre des *Principia* [Newton 1687]. Cinq ans auparavant, lors des séances académiques des 7 et 11 août 1700, Varignon s'était appuyé sur la notoriété du texte newtonien pour défendre le calcul. Citant quasi intégralement en latin le scholie de la fin du Livre I des *Principia*, il caractérisait la différentielle comme évanescence [Varignon 1700, 314-315]. Présenter la nature de la différentielle comme celle

---

<sup>26</sup> « a nihilo inassignabiliter differentibus », [Gotha FB A 448-449, 42 r<sup>o</sup>], [Leibniz 1706, 38].

<sup>27</sup> « ubi adhuc aliquid aut jam aliquid rei adest, etsi assignabile non sit », [Gotha FB A 448-449, 42 r<sup>o</sup>], [Leibniz 1706, 38].

<sup>28</sup> « Porro quantitas  $z$ , ubi est nascens aut evanescens, idem est quod  $dz$  ibidem existens ; (...) cum magnitudo nascens aut evanescens, seipsa a nihilo differat inassignabiliter, primaque adeo seu ultima differentia (infinitesimalis scilicet) coincidat cum termino ipso. », [Gotha FB A 448-449, 42 r<sup>o</sup>], [Leibniz 1706, 38].

d'*evanescentia divisibilia* était un argument crucial pour défendre l'idée qu'elle pouvait être rendue « plus petite que quelque grandeur que ce soit » et ainsi se placer dans la lignée de la géométrie des Anciens [Peiffer 1990], [Bella 2018]. Qu'il y ait une proximité terminologique entre le texte de Leibniz, la défense de Varignon et les *Principia* témoigne que la rhétorique liée aux justifications du calcul s'uniformise et se stabilise. Choisir de définir la différentielle comme « inassignable » renvoie à une conception de l'infinitésimale comme « moindre que toute quantité donnée » et permet une justification de la méthode différentielle en utilisant le vocabulaire archimédien. Dans « Leery Bedfellows : Newton and Leibniz on the Status of Infinitesimals » [Arthur 2008], Richard Arthur soutient que Newton et Leibniz, malgré les différences notables dans leurs philosophies des mathématiques, s'accordent sur une conception de ce qu'est un infinitésimal, et surtout sur la manière de fonder le calcul<sup>29</sup>. En particulier, chacun d'eux fait appel au principe d'Archimède sous la forme de ce qu'Arthur nomme le « principe de la différence inassignable ». Chez Newton, ce principe correspond, dans sa version synthétique, au premier lemme du Livre I des *Principia* [Arthur 2008, 19].

Après avoir expliqué pourquoi  $v$  et  $z$  doivent être pris pour des évanescents, Leibniz revient à la configuration géométrique en indiquant que ses affirmations sont confirmées par l'observation de la figure :

Comme il est manifeste dans la figure 130 du traité de l'Analyse des infinitésimales, ou la distance entre  $B$  et  $b$  est moindre qu'aucune qu'on puisse assigner [LH 35 VII 9, 2v<sup>o</sup>].

Ce retour à la figure est intéressant. Par ce qui a été dit plus haut, Leibniz est convaincu que son calcul s'accorde avec les réquisits d'exactitude des Anciens et qu'ainsi le terme « infinitésimal », ou tout autre choix métaphorique de formulation, est un moyen pour abréger des développements dans lesquels une différence doit être rendue moindre que toute quantité donnée. Cependant, bien que l'usage de son langage infinitésimal doive suffire à la preuve, Leibniz sollicite son lecteur pour une ultime vérification sur la figure. Le lecteur est conduit à « voir » qu'entre  $B$  et  $b$  la distance est « moindre qu'aucune qu'on puisse assigner ». À l'évidence, le « voir » n'est pas immédiat mais doit passer par l'imagination : le segment  $Bb$ , bien que fini sur la figure matérielle, peut être rendu plus petit que n'importe quel assignable. Cette opération mentale n'est de fait qu'une autre façon d'exprimer l'infinitésimal et relève de la tension à cette époque entre représentation géométrique et analyse. L'invention du calcul leibnizien a pour but de résoudre des problèmes liés aux courbes. Or, pour intégrer le cadre géométrique dans lequel ces courbes habitent, les différentielles sont naturellement

---

<sup>29</sup> Arthur utilise le terme anglais de « *consilience* » qui n'a pas de véritable équivalent en français.

interprétées géométriquement [Fraser 2015, 31-33, 43]. Dans ce sens, dans le cadre du calcul infinitésimal, la figure, bien que non-démonstrative, ne peut pas être réduite à son seul rôle illustratif, ni non plus à une fonction « monstrative » [Knecht 1981, 142-143]. Il conviendrait d'affiner le rôle joué par le diagramme dans les preuves de l'analyse infinitésimale à ses débuts, et en particulier en quel sens et de quelle manière le diagramme peut garantir la preuve développée dans le texte, comme l'a fait Tournès pour une période plus tardive [Tournès 2007]<sup>30</sup>.

Après ce développement, Leibniz peut conclure. Le calcul différentiel est le seul à fournir une interprétation au problème  $\frac{0}{0}$ , qui est apparu dans la configuration du point de décussation. Cette interprétation suppose un traitement calculatoire efficace et s'appuie sur des considérations figuratives. Leibniz ajoute que le cas de la décussation n'est pas isolé puisque, par exemple, dans la méthode des tangentes « arrive la même chose sur le même fondement » car

nous utilisons les différences des abscisses ou ordonnées, non déjà coïncidentes, lorsque la différence est pleinement nulle, mais disparaissant [les différences] dans la coïncidence, lorsque les différences aussi ne sont pas encore nulles, mais posées cependant dans l'acte d'évanouir [Gotha FB A 448-449, 42 vo], [Leibniz 1706, 38]<sup>31</sup>.

Leibniz souligne que l'écriture «  $\frac{dy}{dx}$  » renvoie à cette situation [Gotha FB A 448-449, 42r<sup>o</sup>].

Pour finir, en guise d'épilogue, il est intéressant d'observer la manière dont Leibniz intègre l'opération de division par 0 dans des écrits contemporains d'axiomatisation d'algèbre. À titre d'exemple, dans l'un des manuscrits, Leibniz écrit :

$\frac{a}{0}$  est une absurdité à moins qu' $a$  ne soit 0.

Démonstration : Soit  $a$  un autre que 0 et  $\frac{a}{0} = x$  donc (prop. 15, cor. 7)  $0 \cdot x = 0 \cdot \frac{a}{0} = (13)$

$\frac{0a}{0} = (10) a$ .

<sup>30</sup> Cela ne peut pas être traité ici, mais à notre connaissance, pour la période du calcul différentiel à ses débuts, aucune étude sur le rôle des diagrammes n'a encore été proposée. Dominique Tournès examine où et comment apparaissent les diagrammes dans le cadre de la théorie des équations différentielles entre les XVIII<sup>e</sup> et XIX<sup>e</sup> siècles (c'est-à-dire peu après le début du calcul). Lorsque le diagramme est qualitatif (c'est-à-dire pouvant demeurer dans l'imagination ou obtenu par un tracé à main levée), il est un auxiliaire psychologique du raisonnement et permet un contrôle de la recherche analytique. Tournès affirme que les diagrammes sont une aide précieuse pour écrire les démonstrations et ajoute que bien qu'il soit possible, dans le cadre des équations différentielles, de donner des preuves sans aucun diagramme, les diagrammes contribuent à la preuve en fournissant, à défaut de fondations logiques, des fondations cognitives. Il conclut en soulignant que la confiance en les preuves analytiques vient en grande partie du fait qu'elles sont consistantes avec ce qui est vu sur le diagramme.

<sup>31</sup> « differentias abscissarum vel ordinarum adhibemus non jam coincidentium, ubi differentia plane nulla est, sed in coincidentiam abeuntium, ubi differentiae quoque non adhuc nullae sunt, sed tamen positae in actu evanescenti », [Gotha FB A 448-449, 42 v<sup>o</sup>], [Leibniz 1706, 38] (traduction par nos soins).

Ainsi  $a = 0 \cdot x$  (ax. 7) = 0 donc  $a=0$  ce qui est une absurdité quand on suppose que  $a$  n'est point 0 [LH 35 IV 12, 7r<sup>o</sup>]<sup>32</sup>.

Puis il ajoute un scholie :

Quand on divise par 0 dans le Calcul des infinitésimales, 0 n'y signifie pas un rien absolument mais un nombre qui exprime une grandeur évanouissante ou qui est sur le point de devenir rien, et, qui par conséquent garde encor la nature de la grandeur qu'on suppose décroître continuellement jusqu'à l'évanouissement. Et lorsqu'un tel nombre, multiplie quel autre nombre le produit n'est pas absolument un rien ou 0, mais c'est encor quelque chose d'évanouissant [LH 35 IV 12, 7r<sup>o</sup>].

## 5. Remarques conclusives

Leibniz se confronte à l'expression  $\frac{0}{0}$  dans des cadres différents de recherche – les séries numériques puis le calcul différentiel. Dans chacun de ces cas, il s'efforce d'évaluer dans quelle mesure cette expression peut être interprétée, ou quelle est sa capacité à représenter avec exactitude quelque chose. Dans le cas des séries numériques, cette confrontation, hasard de la combinatoire, se solde par un échec : cette expression ne saurait mettre en évidence une quelconque relation entre objets. Dans le cas du calcul différentiel, il en est tout autrement. L'association des signes du rapport « – » et de zéro « 0 », que constitue  $\frac{0}{0}$ , renvoie pour l'algèbre à une impossibilité et indique une borne. Intraitable par l'algèbre ordinaire, le calcul différentiel, au moyen des quantités évanouissantes, relève le défi de donner sens à  $\frac{0}{0}$  et dépasse cette borne. Cependant, force est de constater que cette donation de sens se réalise non seulement dans une tension entre algèbre et calcul différentiel. Si Leibniz, ainsi que ceux qui pratiquent son calcul, s'efforcent d'interpréter ce quotient dans le cadre de l'analyse des courbes, c'est que d'une certaine façon ils partagent la conviction que le quotient de deux quantités infiniment petites est une expression qui doit avoir un pendant géométrique.

L'analyse de la manière dont l'expression  $\frac{0}{0}$  a été interprétée et traitée révèle certaines formes générales de la pratique du calcul différentiel à ses débuts. Elle illustre tout d'abord les difficultés rencontrées pour développer un langage analytique intégrant les notions et les principes du calcul différentiel, alors que pour ceux-ci il n'y a pas de consensus établi. Elle

---

<sup>32</sup> Le corollaire 7 de la proposition 15 exprime que si  $a = b$  alors  $ac = bc$ . La proposition 13 énonce que  $\frac{a}{b} \times c = \frac{ac}{b}$ , pour le démontrer Leibniz utilise l'axiome 12 :  $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ . Enfin la proposition 10 énonce que  $\frac{ab}{b} = a$ , pour la démontrer Leibniz utilise l'axiome 11 :  $\frac{a}{a} = 1$ . Les axiomes et les propositions sont valables implicitement pour des quotients dont le dénominateur n'est pas nul. Or appliquée à 0, la proposition 10 implique que  $\frac{0}{0} = 1$ . Leibniz semble plus attaché aux manipulations aveugles qu'à l'implication concernant le quotient de deux zéros. Le but de Leibniz est de montrer que  $\frac{a}{0}$  est une absurdité mais que ce n'est pas nécessairement le cas pour  $\frac{0}{0}$ .

montre aussi que cette pratique s'appuie de manière essentielle sur un raisonnement diagrammatique. C'est sous cette double tension, entre algèbre/calcul différentiel et entre calcul/géométrie, que se constitue un cadre où émerge une pratique productrice d'une forme de rigueur, contrairement à ceux qu'une certaine historiographie a pu affirmer.

## Bibliographie

### Abréviations

**A:** Leibniz, G.W., *Sämtliche Schriften und Briefe, herausgegeben von der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften und der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen*, Reihe 1-8, Darmstadt, Leipzig, Berlin, 1923- [A suivi du numéro de la série en chiffres romains et du numéro du tome].

**GM:** *Leibnizens Mathematische Schriften*, éd. Gerhardt, Halle, 1850-1853, rééd. Hildesheim, New-York, Olms, 1962. [GM suivi du tome en chiffres romains].

**LH 35:** Leibniz-Handschriften zur Mathematik

### Sources primaires

BERNOULLI, Jean, [1955] *Der Briefwechsel von Johann I Bernoulli*, Band 1, herausgegeben von der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. Band 1. Bâle: Birkhäuser Verlag.

LEIBNIZ, G.W. [1689], « Tentamen de motuum coelestium causis », *Acta Eruditorum*, février 1689, p. 82-96.

LEIBNIZ, G.W. [1701], « Mémoire de Mr Leibnitz touchant son sentiment sur le Calcul différentiel », *mémoire de Trévoux*, novembre-décembre 1701.

LEIBNIZ, G.W. [1702], « Extrait d'une lettre de M. Leibnitz à M. Varignon, contenant l'explication de ce qu'on a rapporté de luy dans les Memoires des mois de Novembre et Decembre derniers », *Journal des Sçavants*, 20 mars 1702, p. 183-186

LEIBNIZ, G.W. [1706], « Sentiment de Monsieur Leibnitz », *Continuation de la défense de M. Saurin contre la Réplique de M. Rolle publiée en 1703, sous le titre de Remarques touchant le problème général des Tangentes, &c*, Amsterdam, chés Henry Westein.

LEIBNIZ, G.W [1995], *La caractéristique géométrique*, texte établi, introduit et annoté par Javier Echeverria, traduit, annoté et postfacé par Marc Parmentier, Paris : Vrin.

LEIBNIZ, G.W. [2018], *Mathesis universalis écrits sur la mathématique universelle*, textes introduits, traduits et annotés sous la direction de David Rabouin, Paris : Vrin.

L'HOSPITAL, Guillaume [1696], *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*, Paris : De l'Imprimerie Royale.

NEWTON, Isaac [1687], *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, London:Strater.

ROLLE, Michel [1702] « Règles et remarques, pour le problème général des tangentes », *Journal des Sçavants*, 13 avril 1702, p. 239-253.

ROLLE, Michel [1703], Remarques de M. Rolle de l'Académie des Sciences touchant le problème général des tangentes, Paris : Chez Jean Boudot.

SAURIN, Joseph [1702], « Réponse à l'écrit de M. Rolle de l'Académie royale des sciences insérée dans le journal du 13 avril 1702 sous le titre de Règles et Remarques pour le problème général des tangentes », *Journal des Sçavants*, 3 août 1702, p. 519-534.

SAURIN, Joseph [1705] « Défense de la réponse à M. Rolle de l'Académie royale des sciences contenue dans le Journal des Sçavans du 3 août 1702 CONTRE La réplique de cet auteur publiée en 1703 sous le titre de Remarques touchant le Problème général des Tangentes, *Journal des Sçavans*, jeudi 23 avril 1705, p. 241-256.

VARIGNON, Pierre [1700], « Mr Varignon a fini sa réponse aux difficultés de Mr Rolle contre le calcul différentiel », 11 août 1700, Procès-verbaux de l'Académie Royale des Sciences, fol. 311r°-317v°.

VARIGNON, Pierre [1701] « Réponse au second des reproches d'erreur, que Mr Rolle fait au calcul différentiel », 9 juillet 1701, Procès-verbaux de l'Académie Royale des Sciences, tome 20, fol. 235r°-240v°.

### Sources secondaires

ARTHUR, Richard [2008], Leery Bedfellows : Newton and Leibniz on the Status of Infinitesimals, dans *Infinitesimal differences, Controversies between Leibniz and his Contemporaries*, édité par Ursula Goldenbaum et Douglas Jesseph, Berlin:Walter de Gryter, 7-30.

BELLA, Sandra [2018], « De la géométrie et du calcul des infiniment petits : les réceptions de l'algorithme leibnizien (1690-1706) », thèse de doctorat sous la direction d'Evelyne Barbin et de David Rabouin, soutenue le 23 octobre 2018 à l'Université de Nantes.

BEELEY, Philip [2008], Infinity, infinitesimals, and the Reform of Cavalieri : John Wallis and his critics dans *Infinitesimal differences, Controversies between Leibniz and his Contemporaries*, édité par Ursula Goldenbaum et Douglas Jesseph, Berlin:Walter de Gryter, 31-52.

BLAY, Michel [1992], *La naissance de la mécanique analytique*, Bibliothèque d'histoire des sciences, Paris : PUF.

CAJORI, Florian [1928], *A history of mathematical notations*, Two Volumes Bound As one, New York: Dover publications, 1993.

FRASER, Craig [2015], Non standard Analysis, infinitesimals, and the History of calculus, *A delicate Balance : global perspectives on innovation and Tradition in the History of Mathematics*, editors David Bowe and Wann-Shang Horng, Springer, 2015, p. 25-48.

HOFMANN, Joseph E [1974], *Leibniz in Paris 1672-1676*, traduction de l'allemand de *Die Entwicklungsgeschichte der Leibnizschen Mathematik während des Aufenthalts in Paris (1672-1676)*, Oldenburg Verlag, Munich, 1949, traduction publiée en 1974, Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

JESSEPH, Douglas [2015], Leibniz on the elimination of infinitesimals, *G.W. Leibniz, Interrelations Between Mathematics and Philosophy*, éd. par Norma B. Goethe, Philip Beeley and David Rabouin, Netherlands, Springer, p. 189-206.

KNECHT, Herbert H. [1981], *La logique chez Leibniz, essai sur le rationalisme baroque*, Lausanne : L'Age d'Homme.

MANCOSU, Paolo [1996], *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*, New-York : Oxford University Press. *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*, New-York : Oxford University Press.

- PASINI, Enrico [1985a], *La Nozione di infinitesimo in Leibniz: tra matematica e metafisica*, diss., a.a. 1985-86, Università degli studi di Torino, Lettere e filosofia.
- PASINI, Enrico [1985b], Appendice de *La Nozione di infinitesimo in Leibniz: tra matematica e metafisica*, diss., a.a. 1985-86, Università degli studi di Torino, Lettere e filosofia.
- PASINI, Enrico [1988], “Die private Kontroverse des G.W. Leibniz mit sich selbst. Handschriften über die Infinitesimalrechnung in Jahre 1702, Leibniz Tradition und Aktualität V. Internationaler Leibniz-Kongreß unter der Schirmherrschaft des Nierder süchsischen Ministerpräsidenten Dr. Ernst Albrecht Vorträge, Hannover, 14-19 November 1988, p. 695-709.
- PASINI, Enrico [1993], *Il Reale e L’Immaginario, La Fondazione del Calcolo Infinitesimale Nel Pensiero Di Leibniz*, Torino: Edizioni Sonda.
- PEIFFER, Jeanne [1990], « Pierre Varignon, lecteur de Leibniz et de Newton », *Studia Leibnitiana*, supplementa XXVIII, 244-266.
- RABOUIN, David [2019], *Mathématiques et Philosophie chez Leibniz, Au fil de l’analyse des notions et des vérités*, Manuscrit inédit présenté en vue de l’Habilitation à diriger des recherches, 23 juin 2020.
- SHANK, J. B. [2018], *Before Voltaire, The origin of “Newtonian” Mechanics, 1680-1715*, The University of Chicago Press, Chicago & London.
- TOURNES, Dominique [2012], “Diagrams in the theory of differential equations (eighteenth to nineteenth centuries)”, *Synthese*, 186, 257-288.
- VERMIJ, Rienk H. [1989], “Bernard Nieuwentijt and the Leibnizian Calculus”, *Studia Leibnitiana*, Bd. 21, H. 1, 69-81.