



**HAL**  
open science

## Étude de l'efficacité de la gestion décentralisée d'une épidémie et application au Covid-19

Olivier Lindamulage de Silva, Samson Lasaulce, Irinel-Constantin Morarescu

► **To cite this version:**

Olivier Lindamulage de Silva, Samson Lasaulce, Irinel-Constantin Morarescu. Étude de l'efficacité de la gestion décentralisée d'une épidémie et application au Covid-19. XXVIIIème Colloque Francophone de Traitement du Signal et des Images, GRETSI 2022, Sep 2022, Nancy, France. hal-03919830

**HAL Id: hal-03919830**

**<https://hal.science/hal-03919830>**

Submitted on 3 Jan 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Étude de l'efficacité de la gestion décentralisée d'une épidémie et application au Covid-19 \* \*

Olivier Lindamulage De Silva, Samson Lasaulce, and Irinel-Constantin Morărescu  
Université de Lorraine, CNRS, CRAN, F-54000 Nancy, France

olivier.lindamulage-de-silva@univ-lorraine.fr

**Résumé** – Dans cet article, nous introduisons un modèle de jeu qui permet d'évaluer la potentielle perte d'efficacité induite par un contrôle décentralisé d'une épidémie. Chaque joueur représente une région ou un pays qui est supposé choisir son action de contrôle pour mettre en œuvre un compromis local entre les aspects socio-économiques et l'aspect sanitaire. Nous effectuons l'analyse de l'équilibre de Nash de ce jeu. Nous quantifions ensuite par des résultats numériques la perte induite par une prise de décision décentralisée en termes de prix de l'anarchie (PoA). Ces résultats permettent d'identifier clairement les scénarios où la décentralisation est acceptable ou non au regard des mesures d'efficacité globale retenues.

**Abstract** – In this paper, we introduce a game that allows one to assess the potential loss of efficiency induced by a decentralized control or local management of a global epidemic. Each player represents a region or a country which is assumed to choose its control action to implement a tradeoff between socio-economic aspects and the health aspect. We conduct the Nash equilibrium analysis of this game. Then we quantify through numerical results the loss induced by decentralization, measured in terms of price of anarchy (PoA). These results allow one to clearly identify scenarios where decentralization is acceptable or not regarding to the retained global efficiency measures.

## 1 Introduction

En 2020, de nombreux gouvernements dans le monde ont dû prendre des mesures drastiques pour atténuer la propagation du virus SRAS-Cov2. En particulier au cours du premier semestre de 2020, des mesures sanitaires uniformes ont été prises sur de vastes zones géographiques telles que des pays. Parmi les conséquences de cette inadéquation, nous trouvons : des pertes économiques locales évitables, des dommages psychologiques, de la frustration et donc une dégradation en termes d'efficacité des mesures. Motivés par cette observation, nous proposons un modèle mathématique pour analyser les effets de la décentralisation sur la gestion des épidémies. Dans ce contexte, chaque région ou pays est un décideur. Pour évaluer la perte d'efficacité potentielle induite par une prise de décision décentralisée de la gestion de l'épidémie, nous considérons un modèle mathématique qui est relativement simple tout en capturant les principaux effets d'intérêt. Cet article considère un jeu de forme stratégique qui est construit à partir d'un modèle compartimental Susceptible-Infecté-Récouvert (SIR) en réseau [1]. Plus précisément, nous considérons un jeu où chaque joueur représente une région géographique qui décide des règles de distanciation sociale visant à minimiser un coût. Chaque coût individuel met en œuvre un compromis donné entre les pertes socio-économiques et les pertes de santé.

Les principales différences entre le présent travail et les résultats existants sur les jeux épidémiques en réseau (par ex, [2, 3, 4, 5]) peuvent être résumées comme suit : nous considérons un

modèle SIR alors que les modèles de jeu existants sont appliqués au modèle SIS (Susceptible-Infected-Susceptible) en réseau ; nous contrôlons les taux de transmission inter-régions alors que les travaux existants considèrent des réseaux décrits par une matrice d'adjacence binaire ; nous proposons un jeu à un coup sur un horizon temporel fini contrairement aux travaux existants qui considèrent des jeux en temps infini avec des actions constantes.

Nos principales contributions peuvent être résumées comme suit :

- Nous formulons un jeu de forme stratégique appliqué à un modèle SIR en réseau, dans lequel : les interactions sont décrites par une matrice d'adjacence pondérée ; un joueur est un nœud du réseau qui essaie de minimiser son propre coût en faisant un compromis entre les pertes socio-économiques et sanitaires.
- Nous introduisons un régime de fonctionnement appelé Régime d'Interconnexion Faible (**RIF**), qui nous permet d'assurer l'existence d'un équilibre de Nash (NE) du jeu considéré. Cette analyse assure la bienposition de la mesure d'efficacité de l'équilibre considérées dans ce travail : le Prix de l'Anarchie (PoA).

## 2 Position du problème

Nous considérons un ensemble de  $K > 1$  régions interconnectées (par exemple, des provinces, des états ou des villes) qui sont touchées par une épidémie ; l'indice de la région est désigné par  $k \in \mathcal{K} := \{1, \dots, K\}$ . La propagation de l'épidémie au sein d'une région est supposée suivre un modèle SIR. Cette section présente à la fois le modèle que nous considérons pour la dynamique épidémique en présence de régions interconnectées (Sec. 2.1) et le jeu proposé pour modéliser le processus de prise

\*Ce travail est soutenu par l'ANR via la financement NICETWEET No ANR-20-CE48-0009 et par le CNRS via le financement COVEXIT.

de decision (Sec. 2.2).

## 2.1 Modèle mathématique de la propagation du virus

Pour la région  $k \in \mathcal{K}$ , nous désignons respectivement par  $\beta_{kk}$  et  $\gamma_k$  le taux de transmission (endogène) du virus et le taux d'élimination/de récupération ( $\frac{1}{\gamma_k}$  est appelé la période de récupération moyenne). Pour  $k \neq \ell$ , la quantité  $\beta_{k\ell}$  désigne le taux de transmission de la région  $\ell$  vers la région  $k$ . L'action de la région  $k$  sur l'épidémie est représentée par une action de contrôle scalaire désignée par  $u_k \in \mathcal{U}_k$  où  $\mathcal{U}_k := [U_k^{\min}, U_k^{\max}] \subset [0, 1]$  est compact. **L'action de contrôle  $u_k$  est supposée être constante sur la période de temps d'intérêt (phase de travail) qui est l'intervalle  $[0, T]$ ,  $T > 0$** ; une phase peut typiquement durer quelques semaines. Nous désignerons par  $u$  le profil ou vecteur d'action :  $u := (u_1, \dots, u_K) \in \mathcal{U}$  où  $\mathcal{U} := \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_K$  et nous utiliserons également la notation  $u_{-k}$  pour désigner le profil d'action réduit de l'action  $u_k$ . Les fractions de susceptibles, infectés et récupérés pour la région  $k$  sont respectivement désignées par  $(s_k, i_k, r_k) \in [0, 1]^3$ . Avec cette notation, la dynamique en temps continu de l'épidémie dans la région  $k$  en présence d'interconnexion est supposée être donnée par  $\forall t \in [0, T], u \in \mathcal{U}$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial s_k}{\partial t}(t, u) = -s_k(t, u) \left[ (1 - u_k) \sum_{\ell=1}^K \beta_{k\ell} i_\ell(t, u) \right] \\ \frac{\partial i_k}{\partial t}(t, u) = -\frac{\partial s_k}{\partial t}(t, u) - \gamma_k i_k(t, u) \\ \frac{\partial r_k}{\partial t}(t, u) = \gamma_k i_k(t, u) \\ s_k(t, u) + i_k(t, u) + r_k(t, u) = 1, \end{cases} \quad (1)$$

où les fractions initiales de susceptibles et d'infectés sont choisies comme  $s_k^0 > 0$  et  $i_k^0 \geq 0$ .

## 2.2 Modèle mathématique du jeu étudié

On suppose que chaque Région  $k$  vise à minimiser le coût composite suivant qui modélise le compromis entre les pertes socio-économiques et l'impact sanitaire local de l'épidémie :

$$J_k(u) := \underbrace{a_k u_k + b_k u_k^2}_{\text{pertes socio-économiques}} + \underbrace{c_k [s_k^0 - s_k(T, u)]}_{\text{pertes sanitaires}}, \quad (2)$$

où  $(a_k, b_k, c_k) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^3$  sont constants. En particulier, nous supposons que le coût socio-économique est une somme de termes linéaires et quadratiques par rapport aux règles de distanciation sociale, comme cela est motivé dans la littérature connexe du contrôle optimal appliqué aux épidémies (voir par exemple, [6], [7, Section 2.4]) ou dans les études économiques, selon [8, Eq. 8 dans la Section 2.2.2]. D'autre part, nous considérons que les pertes sanitaires sont proportionnelles à la taille finale de l'épidémie après une phase de travail. On remarque alors, à travers de ce dernier terme, que la décision de chaque nœud a un impact sur ses voisins. La forme stratégique (voir par exemple [9]) du jeu statique considéré est donc donnée par :

$$\mathcal{G} := \left( \mathcal{K}, \left( \mathcal{U}_k \right)_{1 \leq k \leq K}, \left( J_k \right)_{1 \leq k \leq K} \right). \quad (3)$$

La région  $k \in \mathcal{K}$  exprime ses intérêts en fixant le triple  $(a_k, b_k, c_k)$ , tandis que l'ensemble d'actions  $\mathcal{U}_k$  est imposé par un planificateur social (par exemple, un pays ou une organisation internationale, selon la nature du joueur).

## 2.3 Mesure d'efficacité globale retenue

Dans le but d'évaluer les pertes induites par une prise de décision décentralisée, nous introduisons la mesure du prix de l'anarchie (PoA), bien connu dans le domaine de la théorie des jeux [10]. Rappelons dans un premier temps, la définition d'un équilibre de Nash (NE). Un profil d'action  $u^{\text{NE}}$  est un NE si :  $\forall k, \forall u'_k, J_k(u^{\text{NE}}) \leq J_k(u'_k, u_{-k}^{\text{NE}})$ . Le PoA est défini par :

$$\text{PoA} := \max_{u \in \mathcal{U}^{\text{NE}}} \sum_{k=1}^K J_k(u) / \min_{u \in \mathcal{U}} \sum_{k=1}^K J_k(u), \quad (4)$$

où  $\mathcal{U}^{\text{NE}}$  est l'ensemble des NE de  $\mathcal{G}$ . Le PoA compare donc la performance du pire NE à la performance de la solution centralisée. En particulier, lorsque le PoA est trop élevé, la stratégie de décentralisation ne sera pas efficace au risque d'observer un comportement égoïste de la part des joueurs.

## 3 Analyse de l'existence d'un équilibre de Nash

Dans cette section, nous énonçons notre résultat principal concernant l'existence d'un NE pur qui est fortement liée aux propriétés géométriques des fonctions de coût  $J_k$ ,  $k \in \mathcal{K}$ , telles que les propriétés de quasi-convexité. L'analyse de la quasi-convexité de  $J_k$  semble être un problème non trivial, étant donné l'expression de ce dernier. C'est la raison pour laquelle nous définissons le régime de travail suivant.

**Régime d'interconnexion faible (RIF)** : Le jeu  $\mathcal{G}$  est dit être dans le RIF, si  $\forall (k, \ell) \in \mathcal{K}^2 : \ell \neq k$  il existe  $\nu_{\beta, k} > 0$  tel que  $\beta_{k\ell} \leq \nu_{\beta, k}$  et  $J_k$  est quasi-convexe par rapport à  $u_k$  sur  $\mathcal{U}_k$ .

La motivation derrière la définition du RIF est donnée par le résultat suivant.

**Proposition 1** Dans le RIF le jeu  $\mathcal{G}$  a au moins un NE pur.

**Preuve.** Les conditions du Théorème de Debreu-Fan-Glicksberg pour les jeux quasi-convex sont vérifiées [9, Theorem 50] donc l'existence d'un pure NE est assuré.

Une question pratique importante serait : "Quand le jeu est-il dans le RIF?". Pour répondre à cette question technique, introduisons l'hypothèse de travail suivante.

**Hypothèse 1** Soit  $\forall (k, \ell) \in \mathcal{K}^2, \rho_{k\ell} := \beta_{k\ell}/\gamma_\ell$ .

**Condition (i)** : La matrice  $\widehat{\mathbf{B}}$  dont les entrées sont données par :  $\widehat{\mathbf{B}}_{k, \ell} = \beta_{k\ell}$ , est non-singulière.

**Condition (ii)** :  $\forall k, \forall u, \forall T$  dans  $\mathcal{T}$  on a que  $s_k(t, u) > 0$ .

**Condition (iii)** :

$$\mathcal{T} := \left\{ t \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \forall k, \forall u, (1 - u_k) s_k(t, u) \leq \frac{1}{\sum_{\ell=1}^K \rho_{k\ell}} \right\} = \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Avec  $\forall k \in \mathcal{K}, s_k^0 < \left( \sum_{\ell=1}^K \rho_{k\ell} (1 - U_k^{\min}) \right)^{-1}$ .

La condition (i) est assurée lorsque  $\widehat{\mathbf{B}}$  est strictement diagonalement dominant; la condition (ii) est trivialement satisfaite en pratique; la condition (iii) est nécessaire pour caractériser une limite supérieur concernant les taux de transmission du virus entre les régions, c'est-à-dire, pour que le jeu soit dans le **RIF** nous avons besoin de vérifier que  $\forall k \neq \ell, \beta_{k,\ell} \leq \nu_{\beta,k} := \left( \frac{\min_{\ell \in \mathcal{K}} \gamma_\ell}{(1 - U_k^{\min}) s_k^0} - \beta_{kk} \right) / 4$ . Dans ce qui suit, nous proposons d'exposer une condition suffisante pour que le jeu soit dans le **RIF**. Pour établir le résultat correspondant, quelques notations s'imposent. Soit  $T \in \mathcal{T}, u \in \mathcal{U}, s(T, u) = (s_1(T, u), \dots, s_K(T, u))^\top, i(T, u) = (i_1(T, u), \dots, i_K(T, u))^\top, r = (r_1(T, u), \dots, r_K(T, u))^\top$ . Nous notons les deux matrices carrées  $\mathbf{B} := \text{diag}(1 - u) \widehat{\mathbf{B}}$  et  $\mathbf{\Gamma} := \text{diag}(\gamma)$ , où  $\gamma := (\gamma_1, \dots, \gamma_K)$ . En utilisant (1) et [1, Section 2], on peut écrire l'identité suivante :  $F_k(u, s(T, u), i(T, u)) = 0$  avec  $F_k(u, s, i) = (1 - u_k) \sum_{\ell=1}^K \rho_{k\ell} (s_\ell + i_\ell - x_\ell^0) + \ln \left( \frac{s_k^0}{s_k} \right)$ . Où  $s^0 = s(0, \cdot), i^0 = i(0, \cdot)$  et  $x^0 = s^0 + i^0$ . Nous définissons l'ensemble des joueurs non monotones comme  $\mathcal{K}_{\text{NM}} := \left\{ k \in \mathcal{K} : J_k \text{ n'est pas monotone par rapport à } u_k \right\}$ . Maintenant que nous avons introduit toutes les notations nécessaires pour établir le résultat principal, nous exposons le lemme clé suivant qui fournit,  $\forall k \in \mathcal{K}$ , une borne inférieure de la dérivée de  $s_k$  par rapport à  $u_k$ .

**Lemme 1** *Sous l'hypothèse 1,  $\forall T \in \mathcal{T}, \forall u \in \mathcal{U}$  et  $\forall (k, \ell) \in \mathcal{K}^2$  on a  $\frac{\partial s_k}{\partial u_\ell}(T, u) \geq 0$  et*

$$\frac{\partial s_k}{\partial u_k}(T, u) \geq \frac{s_k(T, u) \ln \left( \frac{s_k(T, u)}{s_k^0} \right)}{(1 - u_k) [(1 - u_k) \rho_{kk} s_k(T, u) - 1]}.$$

**Preuve.** Voir Annexe 5.1.

Le théorème suivant établit le résultat principal de cet article, en assurant que le jeu  $\mathcal{G}$  est dans le **RIF**.

**Théorème 1** *Soit  $T \in \mathcal{T}$ . Supposons que l'hypothèse 1 soit vérifiée et que le profil d'action le moins restrictif  $u_{\min} = (U_1^{\min}, \dots, U_K^{\min}) \in [0, 1]^K$  vérifie que,  $\forall k \in \mathcal{K}_{\text{NM}}, (1 - U_k^{\min}) s_k(T, u_{\min}) \geq 1 / (2\rho_{kk})$ . Alors, le jeu  $\mathcal{G}$  est dans le **RIF**.*

**Preuve.** Voir annexe 5.2.

La condition supplémentaire que nous introduisons signifie que si les épidémies sont suffisamment contrôlées, alors le jeu  $\mathcal{G}$  est un jeu quasi-convexe, assurant ainsi l'existence d'un NE pur, selon la Proposition 1.

## 4 Analyse numérique des performances globales

L'objectif de cette section est de quantifier numériquement le PoA pour un scénario de type Covid-19. Inspiré par les données épidémiologiques du Covid-19 sur le territoire français en 2020.

Nous considérons un graphe avec  $K = 10$  noeuds et nous proposons d'observer l'influence de la structure du graphe sur le PoA. Nous supposons que  $\forall k, \gamma_k = 0.14; \forall k \in \mathcal{K}, a_k = b_k = 1$ ; Les régions  $k \in \{6, \dots, 10\} = \mathcal{K}_{\text{NM}}$  ont choisi  $c_k = 1000$ , alors que  $\forall k \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_{\text{NM}}, c_k = 0$ . En se basant sur les observations dans [7, 11, 12], nous considérons : l'horizon temporel de la phase épidémique considérée comme étant fixé à  $T = 30$  jours; la valeurs des poids  $\beta_{k,\ell}, \forall k \neq \ell$  sont fixées de manière aléatoire suivant une lois uniforme d'espérance  $5 \cdot 10^{-2} \times \beta_{k,k}$ . Au vu des poids  $a_k, b_k, c_k$ , on définit l'action minimale  $U_k^{\min}$  de sorte à vérifier le Théorème 1, (c'est-à-dire, en fixant  $U_k^{\min}$  tel que  $\beta_{k,\ell} \leq \nu_{\beta,k}$ . Les paramètres considéré dans ces simulations sont raisonnables au vu de la situation en France fournie par l'Institut national de la statistique et des études économiques (INSEE) dans le [13, Tableau 6-8]. On propose de tirer de manière aleatoire 5000 structures de graph suivant le modèle de Watts-Strogatz (Small-world graph) en faisant varier le nombre moyen de degrés par agent  $\overline{D}_{eg}$  dans  $\overline{D}_{eg} \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$  avec une probabilité de connexion fixée à 0.5. Nous observons dans Fig. 1 l'interpolation du PoA par rapport à la quantité  $\sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{\ell \in \mathcal{N}_k} \frac{\beta_{k,\ell}}{\gamma_k}$ , où  $\mathcal{N}_k$  est l'ensemble des voisins de la Région  $k$ .

Nous observons que le Prix de l'Anarchie croît en fonction du nombre moyen de degrés par agents dans le graphe; celui-ci peut être aussi grand que 1.5 pour des graphes fortement connectés. Par conséquent, le résultat dans ce cas est que le planificateur social ne devrait pas décentraliser la prise de décision.

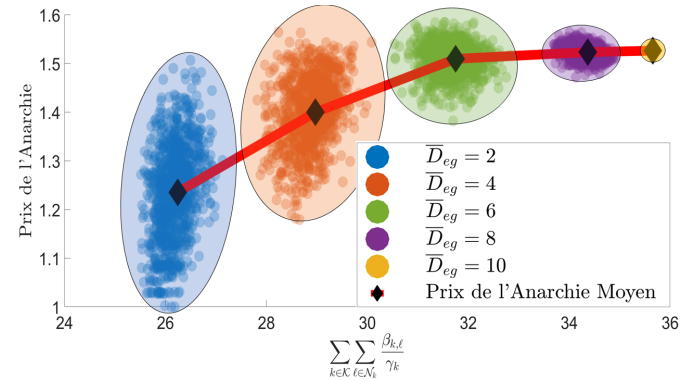


FIGURE 1 – Prix de l'Anarchie en fonction de  $\sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{\ell \in \mathcal{N}_k} \frac{\beta_{k,\ell}}{\gamma_k}$  pour des graphes aléatoires selon le modèle Watts-Strogatz en faisant varier le nombre moyen de degrés par agent  $\overline{D}_{eg}$  dans  $\overline{D}_{eg} \in \{2, 4, 6, 8, 10\}$ .

## 5 Conclusion

L'analyse menée de l'équilibre de Nash du jeu proposé repose en grande partie sur la quasi-convexité individuelle de la fonction de coût d'une région. Du fait de l'expression non triviale des coûts, nous nous plaçons dans le régime de fonctionnement **RIF**; ce régime apparaît comme non limitatif pour les

scénarios réels Covid-19 au vu des valeurs faibles des flux d'interconnexion entre les régions. L'analyse numérique permet de quantifier clairement ce qui est perdu lorsque des régions ou des pays gèrent eux-mêmes la gestion de l'épidémie de manière décentralisée et sans coordination. L'approche proposée pourrait être améliorée, par exemple, en intégrant des contraintes couplées pour tenir compte des capacités de réanimation des régions et en effectuant une analyse numérique plus approfondie de l'impact du graphe sur le prix de l'anarchie.

## Annexe

### 5.1 Preuve du Lemme 1

Soit  $k \in \mathcal{K}$ ,  $u \in \mathcal{U}$ ,  $T \in \mathcal{T}$  et,  $X := (u, s(T, u), i(T, u)) \in \mathcal{U} \times (0, 1]^K \times (0, 1]^K$  tel que  $F(X) := (F_1(X), \dots, F_K(X)) = 0$ . D'après le théorème des fonctions implicites on obtient :  $\frac{\partial s}{\partial u}(T, u) = - \left[ \frac{\partial F}{\partial s}(X) \right]^{-1} \frac{\partial F}{\partial u}(X)$ . Dans ce qui suit on note,  $D := (\text{diag}(s(T, u))^{-1} - \text{diag}(B\Gamma^{-1}))^{-1}$ ,  $\bar{B} := B - \text{diag}(B)$ . Compte tenu de l'expression de  $F$ , on a :  $\frac{\partial F}{\partial s}(X) = -D^{-1}(\mathbf{I}_K - D\bar{B}\Gamma^{-1})$ . D'après la Condition (iii) de l'Hypothèse 1 on montre que la série de Neumann  $\sum_{k=0}^{\infty} (D\bar{B}\Gamma^{-1})^k$  converge. On faisant l'approximation à l'ordre premier de cette série, on obtient une borne inférieure à  $\frac{\partial s}{\partial u}(T, u)$  que l'on note  $\widehat{\frac{\partial s}{\partial u}}(T, u)$ .

### 5.2 Preuve du Théorème 1

Le but de cette preuve est de s'assurer que  $\forall k \in \mathcal{K}$ ,  $J_k$  est quasi-convexe par rapport à  $u_k \in \mathcal{U}_k$ . Nous savons que,  $\forall k \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{K}_{\text{NM}}$ , la propriété de quasi-convexité de  $J_k$  tient. Dans ce qui suit, nous sommes intéressés par la convexité des coûts  $J_k$  pour les joueurs  $k \in \mathcal{K}_{\text{NM}}$ . Par conséquent, nous proposons d'analyser dans un premier temps la convexité de  $i_k$  par rapport à  $u_k$ , ce qui nous permet de discuter de la concavité de  $s_k$  par rapport à  $u_k$ . Soit  $k \in \mathcal{K}_{\text{NM}}$ ,  $u \in \mathcal{U}$ ,  $T \in \mathcal{T}$ . En suivant le même raisonnement que dans le Lemme 1, on applique le théorème de la fonction implicite et on en déduit

$$\text{que } \frac{\partial i_k}{\partial u_k}(T, u) = \frac{\gamma_k b_{kk}^{\text{inv}} \ln \left( \frac{s_k(T, u)}{s_k^0} \right)}{(1 - u_k)^2}, \text{ où } b_{kk}^{\text{inv}} \text{ est le } (k, k)^{\text{th}}$$

élément de  $\widehat{B}^{-1}$ . De la monotonie de  $s_k$  par rapport à  $u_k$ , on déduit la quasi-convexité de  $\frac{\partial i_k}{\partial u_k}$  par rapport à  $u_k$ . Écrivons la dérivée seconde de  $i_k$  par rapport à  $u_k$  :

$$\frac{\partial^2 i_k}{\partial u_k^2}(T, u) = \frac{\gamma_k b_{kk}^{\text{inv}} \left( \frac{\partial s_k}{\partial u_k}(T, u)(1 - u_k) + 2s_k(T, u) \ln \left( \frac{s_k(T, u)}{s_k^0} \right) \right)}{(1 - u_k)^3 s_k(T, u)}.$$

En combinant avec la borne inférieure de  $\frac{\partial s_k}{\partial u_k}$  donnée dans le Lemme 1 et la condition donnée dans le Théorème 1, il s'ensuit que  $\frac{\partial^2 i_k}{\partial u_k^2}(T, u_{\min}) \geq 0$ . Puisque  $\frac{\partial i_k}{\partial u_k}$  est quasi-convexe par rapport à  $u_k$ , alors  $\forall T \in \mathcal{T}$  et  $\forall u \in \mathcal{U}$ ,  $\frac{\partial^2 i_k}{\partial u_k^2}(T, u) \geq 0$ . Par conséquent,  $\forall T \in \mathcal{T}$ ,  $\forall u \in \mathcal{U}$ ,  $\frac{\partial^2 s_k}{\partial u_k^2}(T, u) \leq 0$ , puisque  $s_k = 1 - i_k - r_k$  et  $r_k(T, u) = \int_0^T \gamma_k i_k(t, u) dt$ . Pour conclure

cette Preuve,  $\forall k \in \mathcal{K}$ ,  $J_k$  est quasi-convexe alors par définition le jeu  $\mathcal{G}$  est dans le **RIF**.

## Références

- [1] P. Magal, O. Seydi, and G. Webb. Final size of an epidemic for a two-group SIR model. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, pages 2042–2059, 2016.
- [2] A.R. Hota and S. Sundaram. Game-theoretic vaccination against networked SIS epidemics and impacts of human decision-making. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, pages 1461–1472, 2019.
- [3] J. Omic, A. Orda, and P. Van Mieghem. Protecting against network infections : A game theoretic perspective. In *IEEE Conference on Computer Communications (INFOCOM)*, pages 1485–1493, 2009.
- [4] Y. Hayel, S. Trajanovski, E. Altman, H. Wang, and P. Van Mieghem. Complete game-theoretic characterization of SIS epidemics protection strategies. In *53rd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1179–1184. IEEE, 2014.
- [5] S. Trajanovski and et al. Decentralized protection strategies against SIS epidemics in networks. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2(4) :406–419, 2015.
- [6] F. Di Lauro and et al. COVID-19 and flattening the curve : A feedback control perspective. *IEEE Control Systems Letters*, pages 1435–1440, 2020.
- [7] S. Lasaulce, C. Zhang, V. Varma, and I.-C. Morarescu. Analysis of the tradeoff between health and economic impacts of the Covid-19 epidemic. *Frontiers in Public Health*, 9 :173, 2021.
- [8] A. Charpentier, E. Romuald and et al. COVID-19 pandemic control : balancing detection policy and lockdown intervention under ICU sustainability. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 2020.
- [9] S. Lasaulce and H. Tembine. *Game theory and learning for wireless networks : fundamentals and applications*. Academic Press, 2011.
- [10] C. Papadimitriou. Algorithms, games, and the internet. In *Proceedings of the thirty-third annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 749–753, 2001.
- [11] F. Casella. Can the COVID-19 epidemic be controlled on the basis of daily test reports? *IEEE Control Systems Letters*, pages 1079–1084, 2020.
- [12] H. Salje, C.T. Kiem, and et al. Estimating the burden of SARS-CoV-2 in France. pages 208–211, 2020.
- [13] L. Guan and et al. Transport effect of COVID-19 pandemic in France. *Annual reviews in control*, 2020.