



HAL
open science

Enlacement dans les fibrés en tores et fonctions L de Hecke

Nicolas Bergeron

► **To cite this version:**

Nicolas Bergeron. Enlacement dans les fibrés en tores et fonctions L de Hecke. Séminaires et congrès, A paraître. hal-03918336

HAL Id: hal-03918336

<https://hal.science/hal-03918336>

Submitted on 2 Jan 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ENLACEMENT DANS LES FIBRÉS EN TORES ET FONCTIONS L DE HECKE

par

Nicolas Bergeron

Ce texte reprend l'exposé que j'ai donné à l'occasion du congrès de la SMF à Lille. Son objectif est de présenter, à travers une problématique classique, une petite partie d'un travail en cours avec Pierre Charollois, Luis Garcia et Akshay Venkatesh. Je tâche d'y respecter l'esprit de l'exposé oral en mettant l'accent sur des exemples. Sauf mention du contraire, les illustrations sont dues à Jos Leys.

1. Introduction

Afin de motiver un peu les résultats que je veux énoncer, il est utile de commencer par rappeler une vénérable formule. On sait que la série harmonique $\sum_{n \geq 1} 1/n$ diverge. Bien mieux, la fonction zêta de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s},$$

qui est bien définie pour $\operatorname{Re}(s) > 1$, admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe qui est holomorphe sur $\mathbf{C} - \{1\}$ et a un pôle simple de résidu 1 en $s = 1$:

$$\lim_{s \rightarrow 1} (s - 1)\zeta(s) = 1.$$

À l'aide de l'équation fonctionnelle de la fonction zêta, on peut vérifier que cette limite est équivalente à l'évaluation de ζ en 0 :

$$\zeta(0) = -\frac{1}{2},$$

identité qui assigne une valeur finie (régularisée) à la série divergente

$$1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

En 1924, Hecke suggère une vaste généralisation de cette formule. Il observe en effet que les fonctions zêta des corps quadratiques réels prennent des valeurs rationnelles en 0 et suggère une démonstration reposant sur l'étude des développements de Fourier de certaines formes modulaires. En 1937 Siegel [15], à l'aide de la théorie des formes

quadratiques, démontre plus généralement que les fonctions zêta de tous les corps de nombres *totalemt réels* prennent des valeurs rationnelles en $s = 0$. En 1962 Klingen [9] complète le programme de Hecke et l'étend à tous les corps totalement réels retrouvant ainsi le théorème de Siegel ; on parle d'ailleurs fréquemment du « Théorème de Klingen–Siegel ». L'objectif principal de ce court article est d'en esquisser une démonstration « topologique » en interprétant les valeurs spéciales des fonctions zêta impliquées comme des nombres d'enlacement.

Pour simplifier l'exposition, on se concentre sur le cas suivant qui contient déjà toutes les difficultés. Soient K un corps quadratique réel, L un idéal fractionnaire de K et h un point rationnel, c'est-à-dire un point de K , modulo L , autrement dit un élément de $K \otimes \mathbf{R}/L$. À ces données, Hecke attache une fonction zêta partielle (ou fonction L) qui est absolument convergente dans le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > 1$:

$$\zeta(h, L, s) = \sum'_{\nu \in (h+L)^+/U} \frac{1}{|\mathbf{N}(\nu)|^s},$$

où $(h+L)^+$ désigne l'ensemble des éléments totalement positifs de $h+L$, l'expression $\mathbf{N}(\nu)$ désigne la norme de ν dans K , le groupe U est constitué des unités positives, dans l'anneau des entiers \mathcal{O}_K , qui préservent $h+L$ et le prime sur le signe somme signifie que l'on exclut l'éventuelle contribution de $\nu = 0$ à la série.

Théorème 1.1. — *Supposons h non nul modulo L . Alors, on a :*

$$\zeta(h, L, 0) \in \mathbf{Q}.$$

Lorsque h appartient à L , le théorème reste vrai et la démonstration que l'on propose pourrait en fait s'étendre à ce cas. Dans cette démonstration, on interprète la valeur spéciale $\zeta(h, L, 0)$ comme un nombre d'enlacement d'orbites périodiques dans une variété de dimension 3 obtenue comme suspension du tore par un difféomorphisme linéaire. On commence par décrire les variétés en question.

2. Suspensions linéaires du tore

Une matrice $A \in \operatorname{SL}_2(\mathbf{Z})$ induit un difféomorphisme f_A du tore $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ défini par

$$f_A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \text{ pour tout } \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2.$$

Ce difféomorphisme est dit *linéaire*. Il lui correspond une action libre et propre de \mathbf{Z} sur le produit $\mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}$:

$$(2.1) \quad k \cdot (x, t) = (A^k(x), t + k) \quad (k \in \mathbf{Z}, x \in \mathbf{T}^2, t \in \mathbf{R}).$$

Définition 2.1. — On appelle *suspension d'un difféomorphisme linéaire* $f = f_A$ du tore la variété quotient

$$T_A = \mathbf{Z} \backslash [\mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}] = (\mathbf{T}^2 \times [0, 1]) / (x, 0) \sim (f_A(x), 1).$$

Il s'agit d'un cas particulier de fibré sur le cercle. La projection $\mathbf{T}^2 \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ sur la deuxième coordonnée induit en effet une application

$$(2.2) \quad T_A \rightarrow \mathbf{S}^1$$

qui est une fibration en tores. Par linéarité du difféomorphisme f_A , la monodromie de (2.2) préserve la structure de groupe (abélien) sur \mathbf{T}^2 . On dit que (2.2) est un *fibré en groupes (abéliens)*; on peut en particulier parler de la *section nulle* de (2.2).

Les suspensions linéaires du tore sont parmi les plus simples et jolis exemples de variétés de dimension 3. Poincaré les considère pour la première fois en 1892 dans la Note où il définit le groupe fondamental, et les reprend en détail dans les §11, 13 et 14 de son *Analysis Situs*. Pour lire Poincaré dans le texte, lire les commentaires de l'auteur polycéphal Henri Paul de Saint Gervais et en apprendre plus sur la topologie ou juste voir de belles images, on peut se rendre sur le site

<http://analysis-situs.org>.

Deux exemples. —

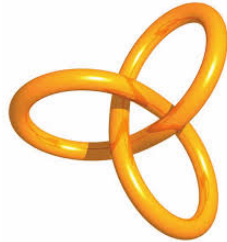
Le complémentaire du nœud de trèfle dans \mathbf{S}^3 . — Considérons la suspension linéaire du tore associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La variété T_A privée de la section nulle est un fibré en tores épointés :

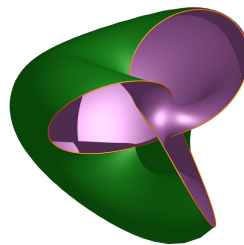
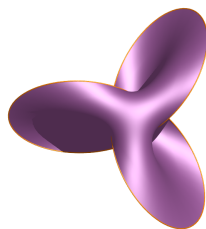
$$T_A^* := [(\mathbf{T}^2 - \{0\}) \times [0, 1]] / (x, 0) \sim (Ax, 1).$$

Il est par ailleurs connu (voir par exemple [12]) que le nœud de trèfle

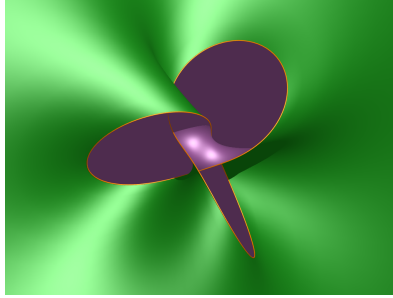


est un *nœud fibré*, de genre 1 et de matrice de monodromie A . La variété T_A^* est donc difféomorphe au complémentaire du nœud de trèfle dans \mathbf{S}^3 .

Une projection stéréographique centrée en un point hors du nœud permet alors de *visualiser* la fibration. Chaque fibre est une surface de genre 1, homéomorphe au tore privé d'un disque et dont le bord dans \mathbf{S}^3 est le nœud de trèfle. Dans les images ci-dessous, on représente plusieurs de ces fibres en faisant varier le point sur la base, le cercle \mathbf{S}^1 , de la fibration.



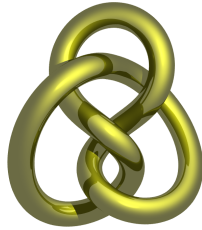
Lorsque la fibre passe par le centre de la projection stéréographique, la surface dans \mathbf{R}^3 passe par l'infini



et après un tour du cercle on revient à la surface de départ.



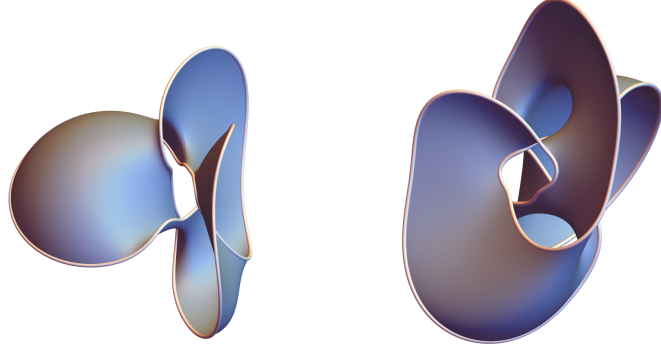
Le complémentaire du nœud de huit dans \mathbf{S}^3 . — Le nœud de huit



est également un nœud fibré, de genre 1, et l'on peut montrer (voir par exemple [11, §9.1]) que sa matrice de monodromie est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que la variété T_A^* est diffeomorphe au complémentaire du nœud de huit dans \mathbf{S}^3 . S'il est cette fois plus difficile de représenter la fibration, on peut toutefois s'y essayer en contemplant longuement les représentations suivantes d'une fibre sous deux angles différents, réalisées par Fabrice Rouillier



3. Orbites périodiques dans les suspensions linéaires du tore

Soit A une matrice de $SL_2(\mathbf{Z})$. Un point

$$x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbf{Q}^2/\mathbf{Z}^2$$

est fixé par une puissance de A . L'image de

$$\{x\} \times \mathbf{R} \subset \mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}$$

dans le quotient T_A est donc une courbe fermée L_x .

Définition 3.1. — On appelle *orbite périodique* associée à x la courbe fermée

$$L_x \subset T_A.$$

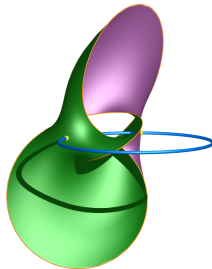
La *longueur* de L_x est le plus petit entier $k \geq 1$ tel que A^k fixe x .

L'orbite périodique L_0 est la section nulle. Si x est non nul dans $\mathbf{Q}^2/\mathbf{Z}^2$, la courbe L_x est contenue dans T_A^* .

Exemple. Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $x = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$, on a :

$$Ax = -x \text{ et } A^2x = x.$$

L'orbite périodique L_x est de longueur 2.



Définition 3.2. — Soit m un entier strictement positif. On appelle *entrelacs de m -torsion* la réunion

$$T_A[m] = \bigcup_{\substack{x \in \mathbf{T}^2 \\ m \cdot x = 0}} L_x$$

de toutes les orbites périodiques associées à des points de m -torsion.

La multiplication par m sur \mathbf{T}^2 induit une application

$$m : T_A \rightarrow T_A.$$

L'entrelacs de m -torsion $T_A[m]$ coïncide avec la préimage de L_0 par m .

Exemple. Pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $m = 2$, on a :

$$T_A[2] = L \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + L_0.$$

L'orientation naturelle de \mathbf{R} munit chaque composante de $T_A[m]$ d'une orientation. Dans la suite, on considère une combinaison linéaire formelle à coefficients dans \mathbf{Z} de ces composantes, autrement dit une multi-courbe orientée avec multiplicité.

Définition 3.3. — Soit m un entier strictement positif. On note \mathcal{L}_m la multi-courbe

$$\mathcal{L}_m = T_A[m] - m^2 L_0.$$

Le lemme suivant résulte d'une observation de Sullivan [17].

Lemme 3.4. — *Soit m un entier strictement positif. Un multiple non nul de la multi-courbe \mathcal{L}_m borde une surface dans T_A .*

Démonstration. — L'énoncé du lemme est *homologique*. Il s'agit de montrer que la multi-courbe \mathcal{L}_m représente une classe triviale dans $H_1(T_A, \mathbf{Q})$.

Pour montrer cela, on commence par remarquer que l'application $m : T_A \rightarrow T_A$ est un revêtement de degré fini (égal à m^2). Elle induit donc un morphisme surjectif

$$m_* : H_\bullet(T_A, \mathbf{Q}) \rightarrow H_\bullet(T_A, \mathbf{Q}).$$

Puisque $H_\bullet(T_A, \mathbf{Q})$ est un \mathbf{Q} -espace vectoriel de dimension finie, le morphisme m_* est également injectif. Or

$$m_*([L_0]) = [L_0] \text{ et } m_*([T_A[m]]) = m^2[L_0],$$

de sorte que

$$m_*([\mathcal{L}_m]) = m_*([T_A[m]] - m^2[L_0]) = 0 \text{ dans } H_1(T_A, \mathbf{Q}).$$

Il en résulte que

$$[\mathcal{L}_m] = 0 \text{ dans } H_1(T_A, \mathbf{Q}).$$

□

Supposons donc trouvée une surface $\Sigma \subset T_A - T_A[m]$ dont le bord $\partial\Sigma$ dans T_A est un multiple non nul de la multi-courbe \mathcal{L}_m :

$$\partial\Sigma = \ell\mathcal{L}_m \text{ avec } \ell \in \mathbf{Z} - \{0\}.$$

Le nombre d'intersection algébrique n d'une courbe simple fermée γ dans $T_A - T_A[m]$ avec Σ dépend en général du choix de la surface Σ . On peut toutefois montrer que la classe de n/ℓ dans \mathbf{Q}/\mathbf{Z} ne dépend que de γ et de la multi-courbe \mathcal{L}_m . On l'appelle le *nombre d'enlacement* de γ avec \mathcal{L}_m ; celui-ci donne lieu à une classe de cohomologie dans $H^1(T_A - T_A[m], \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$.

Définition 3.5. — Soit m un entier strictement positif. On note

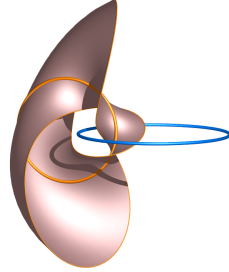
$$z_m \in H^1(T_A - T_A[m], \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

la classe de cohomologie qui à une courbe simple fermée dans $T_A - T_A[m]$ associe son nombre d'enlacement avec \mathcal{L}_m .

Exemple. L'image suivante montre que pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, on a :

$$z_2 \left(L \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \right) = \text{Enlacement} \left(L \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \mathcal{L}_2 \right) = 0$$

dans T_A .



Cela n'est pas surprenant car, dans cet exemple, la matrice A est d'ordre fini. La variété T_A est donc finiment revêtue par le tore \mathbf{T}^3 dans lequel on vérifie facilement que l'enlacement est nul. On verra que pour les matrices d'ordre infini la classe z_m est en général non-triviale.

Dans les paragraphes suivants on exprime $z_m(L_x)$ à l'aide des valeurs en 0 de certaines fonctions zêta de corps quadratiques réels. De cette manière on donne une nouvelle démonstration du théorème 1.1. Cette démonstration présente l'avantage de donner lieu à de nombreuses généralisations et extensions. Dans le paragraphe suivant, on explique en effet rapidement comment les constructions ci-dessus s'étendent à tous les fibrés en groupes à fibres toriques.

4. Un théorème général sur les fibrés en groupes à fibres toriques

Soit

$$T \rightarrow M$$

un fibré en groupes au-dessus d'une variété connexe orientée M , dont les fibres sont des tores $\mathbf{R}^N/\mathbf{Z}^N$.

Il fait encore sens de considérer, pour tout entier strictement positif m , l'ensemble $T[m]$ des points de m -torsion dans T . Notons $\{0\}$ l'image de la section nulle dans T . Le lemme de Sullivan concerne cette situation générale, on peut d'ailleurs constater que la démonstration donnée ci-dessus se transpose mot à mot. La classe de $T[m] - m^N\{0\}$ en homologie rationnelle est donc triviale. Dualement, cela revient à dire que l'image dans $H^N(T, \mathbf{Q})$ de la classe duale $[T[m] - m^N\{0\}] \in H^N(T - T[m])$ est nulle. Elle admet donc une préimage dans $H^{N-1}(T - T[m], \mathbf{Q})$. Celle-ci n'est pas uniquement déterminée en général ; on montre toutefois le théorème suivant dans [2].

Théorème 4.1. — *Soit m en entier strictement positif. La classe duale $[T[m] - m^N\{0\}] \in H^N(T - T[m])$ admet une préimage distinguée*

$$z_m \in H^{N-1}(T - T[m], \mathbf{Q}).$$

En suivant un travail de Bismut et Cheeger [3] on peut construire un représentant explicite de z_m en cohomologie de de Rham. On construit plus précisément une forme différentielle explicite E de degré $N - 1$ sur $T^* = T - \{0\}$ telle que le théorème suivant soit vérifié.

Théorème 4.2. — *Soit m un entier strictement positif. L'expression*

$$E^{(m)} := m^*E - m^N E$$

définit une forme fermée de degré $N - 1$ sur $T - T[m]$ dont la classe de cohomologie est égale à z_m .

Dans le paragraphe suivant on construit « à la main » la forme E , appelée *forme d'enlacement*, dans le cas des fibrés en tores sur le cercle.

5. Forme différentielle d'enlacement

Revenons au cas où $T = T_A$ pour une certaine matrice $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. Alors

$$T = \mathbf{Z} \setminus [\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}] / \mathbf{Z}^2$$

est un double quotient de $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$, où \mathbf{Z} opère à gauche diagonalement *via* (2.1) et \mathbf{Z}^2 opère à droite par translation sur le premier facteur.

La construction d'une forme d'enlacement se fait en deux étapes : dans un premier temps on considère le fibré vectoriel

$$(5.1) \quad \mathcal{T} := \mathbf{Z} \setminus [\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}] \rightarrow \mathbf{S}^1.$$

On construit une forme différentielle duale à la section nulle et à décroissance rapide dans les fibres. À partir de cette forme on construit une forme d'enlacement avec la section nulle dans \mathcal{T}^* , l'espace total du fibré (5.1) privé de la section nulle.

Dans un deuxième temps on forme la moyenne de ces formes différentielles relativement à l'action à droite de \mathbf{Z}^2 sur \mathcal{J} . Dans le cas de la forme d'enlacement, cela fait intervenir un processus (standard) de régularisation.

5.1. Forme de Thom sur \mathcal{J} . — Supposons A hyperbolique, c'est-à-dire $|\text{trace}(A)| > 2$. Alors la matrice A est diagonalisable sur \mathbf{R} de valeurs propres $\epsilon^{\pm 1}$ avec $\epsilon > 1$ et, quitte à change de base, on peut supposer

$$A = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon^{-1} \end{pmatrix}.$$

L'application

$$\Phi : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}; ((u, v), r) \mapsto ((\epsilon^{-r}u, \epsilon^r v), r)$$

est un difféomorphisme qui conjugue l'action (2.1) de \mathbf{Z} sur $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$ à l'action par translation sur la seconde variable.

Maintenant, la forme différentielle $\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(u^2+v^2)} du \wedge dv$ sur $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$ ne dépend pas de la seconde variable et définit une forme fermée, à décroissance rapide et d'intégrale 1 dans les fibres $\mathbf{R}^2 \times \{*\}$. Il s'en suit que la forme différentielle

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon^{-2r}u^2 + \epsilon^{2r}v^2)} d(\epsilon^{-r}u) \wedge d(\epsilon^r v) \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon^{-2r}u^2 + \epsilon^{2r}v^2)} [du \wedge dv + \log \epsilon (udv + vdu) \wedge dr] \end{aligned}$$

sur $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$ définit sur \mathcal{J} , l'espace total du fibré vectoriel (5.1), une 2-forme fermée, à décroissance rapide et d'intégrale 1 dans les fibres. On dit que φ est une *forme de Thom*.

Le groupe \mathbf{R}_+^\times opère sur (5.1) par multiplication dans les fibres. Un réel strictement positif induit ainsi un difféomorphisme de \mathcal{J} , et le lemme suivant résulte de calculs simples.

Lemme 5.1. — 1. On a :

$$\frac{d}{dt}(t^*\varphi) = \frac{1}{t}d(t^*\psi)$$

où

$$(5.2) \quad \psi = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon^{-2r}u^2 + \epsilon^{2r}v^2)} [udv - vdu + \log \epsilon uvdr].$$

2. L'intégrale $\int_0^{+\infty} t^*\psi$ converge sur \mathcal{J} privée de la section nulle; elle y définit une forme fermée η . Vue comme courant sur \mathcal{J} la différentielle de η est égale au courant d'intégration le long de la section nulle de (5.1).

D'après le théorème de Stokes, la période de η le long d'une courbe fermée dans \mathcal{J}^* et bordant une surface S dans \mathcal{J} est égale à

$$\int_{\partial S} \eta = \int_S d\eta$$

et donc, d'après le lemme 5.1 (2), au nombre d'intersection algébrique de S avec la section nulle, autrement dit à l'enlacement de ∂S avec la section nulle.

Il s'agit maintenant de moyenner la forme différentielle η sous l'action (à droite) de \mathbf{Z}^2 sur le fibré vectoriel \mathcal{T} .

5.2. Construction de la forme d'enlacement dans T . — Soit L un réseau de \mathbf{R}^2 préservé par A . Les moyennes

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{(\lambda, \mu) \in L} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon^{-2r}(u+\lambda)^2 + \epsilon^{2r}(v+\mu)^2)} [du \wedge dv + \log \epsilon ((u+\lambda)dv + (v+\mu)du) \wedge dr]$$

et

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{(\lambda, \mu) \in L} e^{-\frac{1}{2}(\epsilon^{-2r}(u+\lambda)^2 + \epsilon^{2r}(v+\mu)^2)} [(u+\lambda)dv - (v+\mu)du + \log \epsilon (u+\lambda)(v+\mu)dr]$$

sont convergentes. Elles définissent respectivement des formes différentielles θ_φ et θ_ψ sur le quotient $T = \mathcal{T}/L$. La 2-forme θ_φ est fermée et duale à la section nulle dans T . On devrait obtenir la forme d'enlacement cherchée comme somme de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \theta_{t^*\psi} \frac{dt}{t}.$$

Toutefois celle-ci est divergente. On contourne le problème par un procédé de régularisation standard (basé sur la formule sommatoire de Poisson) :

Proposition 5.2. — *L'expression*

$$(5.3) \quad E(s) := \int_0^{+\infty} \theta_{t^*\psi} t^{2s} \frac{dt}{t}$$

converge absolument pour $\operatorname{Re}(s) > 0$ et définit une forme différentielle de degré 1 sur T . Elle admet un prolongement méromorphe en la variable s qui est holomorphe partout sauf en $s = 1$ où elle admet un pôle simple.

On note E la restriction de la 1-forme $E(0)$ à T^* . La forme E étant obtenue comme moyenne (régularisée) de la forme d'enlacement η , on obtient assez naturellement :

Corollaire 5.3. — *Soit m un entier strictement positif. La 1-forme*

$$E^{(m)} := m^*E - m^2E$$

est une forme fermée dont la classe de cohomologie calcule l'enlacement avec l'entre-lacs \mathcal{L}_m dans T^* .

La 1-forme E coïncide avec la forme E du théorème 4.2 appliqué à $T = T_A$.

6. Calcul des nombres d'enlacement

On commence par préciser les notations du paragraphe précédent :

$$A = P \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon^{-1} \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{avec } P = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega'_1 \\ \omega_2 & \omega'_2 \end{pmatrix},$$

où ϵ est une unité du corps quadratique réel $K = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$, $d = \operatorname{trace}(A)^2 - 4$, et ω_j, ω'_j sont des nombres conjugués dans K . La conjugaison dans K échange ϵ, ϵ^{-1} et ω_j, ω'_j ,

alors que remplacer A par A^{-1} ne permute que ϵ et ϵ^{-1} . On peut donc se ramener au cas où $|\epsilon| > 1$ et $\det(P) > 0$. Enfin, quitte à remplacer A par $-A$ on peut supposer $\epsilon > 1$.

On a :

$$P^{-1} = \det(P)^{-1} \begin{pmatrix} \omega'_2 & -\omega'_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 \end{pmatrix}.$$

On peut donc supposer que les coordonnées du paragraphe précédent sont

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\omega'_2 - y\omega'_1 \\ -x\omega_2 + y\omega_1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$L = \mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2$$

est un idéal fractionnaire relativement à un ordre de K . On fixe par ailleurs un point (de torsion)

$$h = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2 \in L \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$$

et on note

$$U = \{\epsilon^k : k \in \mathbf{Z}\}.$$

Le groupe U est un groupe d'unités positives qui opère sur $h + L$ et préserve le sous-ensemble $(h + L)^+$ constitué des éléments totalement positifs. Comme rappelé en introduction, il correspond à l'orbite $(h + L)^+/U$ une série L de Hecke :

$$\zeta(h, L, s) := \sum'_{\nu \in (h+L)^+/U} \frac{1}{|\mathbf{N}(\nu)|^s},$$

qui est absolument convergente dans le demi-plan $\operatorname{Re}(s) > 1$.

Soit $(K \otimes \mathbf{R})^{+, \times}$ l'ensemble des éléments inversibles et totalement positifs dans $K \otimes \mathbf{R}$; c'est la composante connexe de l'identité dans $(K \otimes \mathbf{R})^\times$. La norme de K induit un morphisme $\mathbf{N} : (K \otimes \mathbf{R})^{+, \times} \rightarrow \mathbf{R}^{+, \times}$ de noyau $(K \otimes \mathbf{R})^1$.

Le groupe U est contenu dans $(K \otimes \mathbf{R})^1$ et il opère sur $K \otimes \mathbf{R}$ et $(K \otimes \mathbf{R})^1$ de telle sorte que T_A s'identifie au double quotient

$$U \backslash [(K \otimes \mathbf{R}) \times (K \otimes \mathbf{R})^1] / L.$$

Finalement h donne lieu à une section de torsion et donc à un entrelacs de torsion L_h . On suppose dorénavant que h est non nul modulo L .

Le théorème 1.1 énoncé en introduction va alors résulter du calcul d'enlacement suivant.

Théorème 6.1. — *Soit m un entier strictement positif. On a :*

$$\text{Enlacement}(L_h, \mathcal{L}_m) = \zeta(mh, L, 0) - m^2 \zeta(h, L, 0).$$

Démonstration. — Il s'agit d'intégrer la 1-forme différentielle h^*E sur le cercle $U \backslash (K \otimes \mathbf{R})^1$. On commence par donner une expression explicite de h^*E . Par

définition, on a :

$$\begin{aligned} h^*E(s) &= -\frac{\log \epsilon}{2\pi} \sum_{\nu \in h+L} \left(\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}(\epsilon^{-2r}\nu^2 + \epsilon^{2r}(\nu')^2)} t^{2s+2} \frac{dt}{t} \right) N(\nu) dr \\ &= -\frac{2^{s-1} \log \epsilon}{\pi} \Gamma(s+1) \sum_{\nu \in h+L} \frac{\operatorname{sgn}(N(\nu))}{|N(\nu)|^s} \frac{1}{(\epsilon^{-2r}|\nu/\nu'| + \epsilon^{2r}|\nu'/\nu|)^{s+1}} dr. \end{aligned}$$

On calcule finalement la période $\int_{U \setminus (K \otimes \mathbf{R})^1} h^*E(s)$:

$$\begin{aligned} &\frac{2^{s-1} \log \epsilon}{\pi} \Gamma(s+1) \sum_{\nu \in h+L} \frac{\operatorname{sgn}(N(\nu))}{|N(\nu)|^s} \int_0^1 \frac{1}{(\epsilon^{-2r}|\nu/\nu'| + \epsilon^{2r}|\nu'/\nu|)^{s+1}} dr \\ &= \frac{2^{s-2}}{\pi} \Gamma(s+1) \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{(y+y^{-1})^{s+1}} \frac{dy}{y} \right) \sum_{\nu \in (h+L)/U} \frac{\operatorname{sgn}(N(\nu))}{N(\nu)^s} \\ &= 4 \frac{2^{s-2} \Gamma((s+1)/2)^2}{\pi} \zeta(h, L, s). \end{aligned}$$

Il s'en suit que $h^*E = \zeta(h, L, 0)$ et donc

$$h^*E^{(m)} = (mh)^*E - m^2 h^*E = \zeta(mh, L, 0) - m^2 \zeta(h, L, 0).$$

□

Pour démontrer le théorème 1.1, il suffit de choisir un entier m tel que $mh = h$ modulo L . On a alors en effet

$$\zeta(h, L, 0) = \frac{1}{1-m^2} (\zeta(mh, L, 0) - m^2 \zeta(h, L, 0)) \in \mathbf{Q}.$$

La démonstration ci-dessus donne en fait un résultat plus précis dû à Coates et Sinnott [6] :

Corollaire 6.2. — *Pour tout entier m strictement positif, on a :*

$$m^2 \zeta(h, L, 0) - \zeta(mh, L, 0) \in \mathbf{Z}[1/m].$$

7. Conclusion

Il n'est pas difficile d'étendre la démonstration ci-dessus à tout corps de nombres totalement réel de degré N . Dans ce cas $T \rightarrow M$ est un fibré en tores de dimension N au-dessus d'un tore de dimension $N-1$. On retrouve alors le théorème de Klingens–Siegel mentionné en introduction, ainsi que sa « version entière » (analogue du corollaire 6.2) due à Deligne–Ribet [7] et Cassou-Noguès [4].

L'histoire du théorème de Klingens–Siegel et de ses raffinements entiers est riche. On renvoie à [8] pour un beau survol de celle-ci. La démonstration présentée ici n'est pas la première démonstration topologique. Au début des années 1990, Sczech [13, 14] et Nori [10] introduisent des cocycles rationnels qui permettent de retrouver le théorème de Klingens–Siegel. Plus récemment, Charollois et Dasgupta [5] ont « rendu entier » le cocycle de Sczech et, encore plus récemment, Beilinson, Kings et Levin [1] ont

rendu entier celui de Nori. Dans les deux cas, les auteurs retrouvent le théorème de Deligne–Ribet et Cassou-Noguès.

Notre approche suggère de considérer des familles de tore plus générales, par exemple celles associées à un produit fibré \mathcal{E}^N de la courbe elliptique universelle \mathcal{E} au-dessus d’une courbe modulaire Y . Dans ce contexte la forme E du théorème 4.2 permet de construire des morphismes explicites et assez fascinants

$$H_{N-1}(\Gamma, \mathbf{Z}) \rightarrow M_N(Y)$$

qui relie le monde géométrico-topologique des quotients arithmétiques réels $\Gamma \backslash \mathrm{SL}_N(\mathbf{R}) / \mathrm{SO}_N$ au monde de l’arithmétique des formes modulaires $M_N(Y)$ de poids N sur Y . On évoque ces perspectives plus en détail dans [2].

Références

- [1] Alexander Beilinson, Guido Kings, and Andrey Levin. Topological polylogarithms and p -adic interpolation of L -values of totally real fields. *Math. Ann.*, 371(3-4) :1449–1495, 2018.
- [2] N. Bergeron, P. Charollois, and L Garcia. Transgressions of the Euler class and Eisenstein cohomology of $\mathrm{GL}_n(\mathbf{Z})$. *Jpn. J. Math. to appear*. Notes of the Takagi lectures of the first author.
- [3] Jean-Michel Bismut and Jeff Cheeger. Transgressed Euler classes of $\mathrm{SL}(2n, \mathbf{Z})$ vector bundles, adiabatic limits of eta invariants and special values of L -functions. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 25(4) :335–391, 1992.
- [4] Pierrette Cassou-Noguès. Valeurs aux entiers négatifs des fonctions zêta et fonctions zêta p -adiques. *Invent. Math.*, 51(1) :29–59, 1979.
- [5] Pierre Charollois and Samit Dasgupta. Integral Eisenstein cocycles on \mathbf{GL}_n, I : Sczech’s cocycle and p -adic L -functions of totally real fields. *Camb. J. Math.*, 2(1) :49–90, 2014.
- [6] J. Coates and W. Sinnott. On p -adic L -functions over real quadratic fields. *Invent. Math.*, 25 :253–279, 1974.
- [7] Pierre Deligne and Kenneth A. Ribet. Values of abelian L -functions at negative integers over totally real fields. *Invent. Math.*, 59(3) :227–286, 1980.
- [8] Taku Ishii and Takayuki Oda. A short history on investigation of the special values of zeta and L -functions of totally real number fields. In *Automorphic forms and zeta functions*, pages 198–233. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2006.
- [9] Helmut Klingen. über die Werte der Dedekindschen Zetafunktion. *Math. Ann.*, 145 :265–272, 1961/1962.
- [10] Madhav V. Nori. Some Eisenstein cohomology classes for the integral unimodular group. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, pages 690–696. Birkhäuser, Basel, 1995.
- [11] Jean-Pierre Otal. Le théorème d’hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3. *Astérisque*, (235) :x+159, 1996.
- [12] Dale Rolfsen. *Knots and links*, volume 7 of *Mathematics Lecture Series*. Publish or Perish, Inc., Houston, TX, 1990. Corrected reprint of the 1976 original.
- [13] Robert Sczech. Eisenstein cocycles for $\mathrm{GL}_2\mathbf{Q}$ and values of L -functions in real quadratic fields. *Comment. Math. Helv.*, 67(3) :363–382, 1992.

- [14] Robert Sczech. Eisenstein group cocycles for GL_n and values of L -functions. *Invent. Math.*, 113(3) :581–616, 1993.
- [15] Carl Ludwig Siegel. Über die analytische Theorie der quadratischen Formen. III. *Ann. of Math. (2)*, 38(1) :212–291, 1937.
- [16] Carl Ludwig Siegel. Bernoullische Polynome und quadratische Zahlkörper. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II*, 1968 :7–38, 1968.
- [17] Dennis Sullivan. La classe d’Euler réelle d’un fibré vectoriel à groupe structural $SL_n(\mathbb{Z})$ est nulle. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 281(1) :Aii, A17–A18, 1975.

NICOLAS BERGERON, ENS, Département de Mathématiques et Applications, F-75005, Paris, France
E-mail : `nicolas.bergeron@ens.fr`