



HAL
open science

Comportement asymptotique d'un Modèle de propagation de front : Cas d'un problème à frontière libre en une dimension

Mohamed Karimou Gazibo

► **To cite this version:**

Mohamed Karimou Gazibo. Comportement asymptotique d'un Modèle de propagation de front : Cas d'un problème à frontière libre en une dimension. CIST-UNZ, Nov 2022, KOUDOUGOU, Burkina Faso. hal-03918284v2

HAL Id: hal-03918284

<https://hal.science/hal-03918284v2>

Submitted on 22 Aug 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Comportement asymptotique d'un Modèle de propagation de front : Cas d'un problème à frontière libre en une dimension

Mohamed KARIMOU GAZIBO

Résumé. Nous considérons un modèle physique de propagation de front de flamme droit dans un milieu solide et homogène en une dimension gouverné par un problème à frontière libre :

$$\begin{cases} u_t - du_{xx} & = 0 & \text{dans } x < \xi(t), t > 0 \\ du_x & = r & \text{sur } x = \xi(t) \\ \xi_t & = r & \text{pour } t > 0. \end{cases}$$

La position du front de flamme à l'instant t est $\xi(t)$ et $u(t, x)$ est la température à l'instant t dans le domaine délimité par le front. On s'intéresse particulièrement à l'évolution dans le temps du couple (ξ, u) . Nous définissons une notion de *solution onde* où *solution à état onde stationnaire*, le couple (c, u) avec $c > 0$ une vitesse constante de propagation du front et $u = u(x)$ une température stationnaire. Nous montrons ensuite que la solution de notre problème converge vers une *solution onde* quand $t \rightarrow \infty$. Enfin, les résultats théoriques sont confirmés par différents tests numériques.

Mathematics Subject Classification (2010). Primary 35R35; Secondary 35K05, 35C07 .

Keywords. Problème à frontière libre, Equation de la chaleur, Solution onde, Transformée de Laplace, Comportement asymptotique.

1. Introduction

On se place en une dimension d'espace. On considère le système (P)-(C) :

$$\begin{cases} \xi_t & = r, & t > 0 \\ \xi(0) & = 0. \end{cases} \quad (\text{P})$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t - du_{xx} = 0 & \text{dans } x < \xi(t), t > 0 \\ du_x = r & \text{sur } x = \xi(t), t > 0 \\ u(t, x) \rightarrow 0 & \text{pour } x \rightarrow -\infty, t > 0 \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{dans } x \leq \xi(0). \end{array} \right. \quad (\text{C})$$

Ici, $u(t, x)$ représente la température qui y règne dans la region delimitée par la position du front à l'instant t donné par $\xi(t)$. La vitesse de propagation du front r (taux de combustion) est supposée constante tout comme le coefficient de diffusivité thermique d . Plusieurs auteurs se sont intéressés au modèle de propagation de front de flamme dans un milieu donné (voir [8, 9, 10, 2, 1, 5]). Le modèle est souvent donnée par une équation d'Hamilton-Jacobi de type (P_{2D}^1) (voir l'appendice de ce papier). Ces auteurs décrivent une solution onde comme étant un couple (c, v) où c est une vitesse constante de propagation et v un profil établit du front de sorte pour un temps long le front est donné par : $\xi(t, x) = -ct + v(y)$. Pour le cas du système (P)-(C), le problème consiste à trouver pour un temps suffisamment long une température stationnaire u dans le domaine délimité par la frontière libre (ici le front). Contrairement au cas où l'interface (la frontière libre) n'est pas connu d'avance (par exemple dans le cas des problèmes avec changement de phases [11]), la connaissance à priori du mouvement de l'interface peut nous permettre de nous placer dans un repère fixe lié au front. Pour cela un changement de variable pour fixer le front peut être envisagé. Ainsi à l'aide du changement de variable suivant : $z = x - \xi(t)$, on se ramène au système (P)-(T) avec

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t + ru_z - du_{zz} = 0 & z < 0, t > 0 \\ du_z = r & z = 0, t > 0 \\ u(t, z) \rightarrow 0 & z \rightarrow -\infty, t > 0 \\ u(0, z) = u_0(z) & -\infty < z \leq 0. \end{array} \right. \quad (\text{T})$$

Le reste de ce papier se présente comme suit : la section 2 est consacrée au comportement asymptotique en temps de la solution du problème (T) qui converge vers la solution onde (voir Définition 2.1). Dans la section 3, on propose un schéma stable prenant en compte la condition limite au front. Dans la section 4 nous présentons quelques simulations numériques pour vérifier la convergence de la solution numérique vers l'unique solution onde. A la section 5, nous présentons brièvement le problème en deux dimensions qui sera l'objet d'une autre étude ultérieure. Enfin, en Appendice, nous présentons une condition sur la propagation du front, permettant un changement de variable en dimension 2.

2. Existence de solution onde du problème

Dans cette section, on s'intéressera au comportement asymptotique en temps de la solution de (T). Remarquons qu'ici nous sommes dans le cas simple d'une équation parabolique linéaire avec des coefficients constants. L'existence d'une solution unique est assurée par des résultats classiques (voir par exemple [6, 7]). La régularité de laquelle dépendant uniquement de celle

de la condition initiale. Nous supposons l'hypothèse suivante sur la condition initiale :

$$u_0(x) \in L^1(\mathbb{R}^-) \text{ avec } u_0(x) \longrightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow -\infty \quad (\text{I})$$

En utilisant les transformées de Laplace, nous prouverons la convergence vers une solution onde de la solution du problème lorsque t tend vers l'infini. Définissons d'abord la notion de solution onde pour le système d'équations couplées (P)-(T) :

2.1. Notion de solution onde

Definition 2.1. On appelle solution onde du système (P)-(T), le couple (c, u) avec $c \in \mathbb{R}^+$ représentant la vitesse de propagation du front ($\xi(t) = -ct$) et u une température stationnaire dans le domaine.

Remarque 2.2. Etant donné que le front se propage avec une vitesse constante r , et $\exp(\frac{r}{d}z)$ est solution du problème stationnaire associé au problème d'évolution (T) alors le couple $(r, \bar{u}(z) = \exp(\frac{r}{d}z))$ est une solution onde du système (P)-(T) (au sens de la Définition 2.1). D'ailleurs dans ce cas, c'est l'unique solution onde.

2.2. Convergence asymptotique vers la solution onde

Soit u la solution du problème (T). Définissons pour $p > 0$, $u^*(p, z)$ la transformée de Laplace en temps de la fonction $u(t, z)$ donnée par :

$$u^*(p, z) = \int_0^{+\infty} u(t, z) \exp(-pt) dt.$$

Remarque 2.3. On sait qu'il existe une relation (théorème de la valeur finale) entre la limite à l'infini d'une fonction et la limite en zéro de sa transformée de Laplace. Si les limites indiquées existent alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, z) = \lim_{p \rightarrow 0} pu^*(p, z). \quad (2.1)$$

Démonstration. En effet, la transformée de Laplace de la dérivée de u par rapport à t donne :

$$(u_t)^*(p, z) = \int_0^{+\infty} u_t(t, z) \exp(-pt) dt = pu^* - u(0, z).$$

D'après le théorème de Lebesgue, la limite du membre de gauche quand p tend vers zéro est

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} u_t(t, z) \exp(-pt) dt &= \int_0^{+\infty} u_t(t, z) dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R u_t(t, z) dt \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} u(R, z) - u(0, z) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, z) - u(0, z). \end{aligned} \quad (2.2)$$

La limite du membre de droite quand $p \rightarrow 0$ est

$$\lim_{p \rightarrow 0} pu^* - u(0, z). \quad (2.3)$$

L'égalité cherchée s'obtient en comparant (2.2) et (2.3). \square

Théorème 2.4. *On suppose que la donnée initiale u_0 vérifie (I). Alors, la solution de (T) converge vers la solution onde $\bar{u}(z) = \exp(\frac{r}{d}z)$ lorsque t tend vers l'infini.*

Démonstration. Considérons le problème stationnaire

$$\begin{cases} ru_z - du_{zz} = 0 & z < 0, \\ du_z = r & z = 0, \\ u(z) \rightarrow 0 & z \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (\text{S})$$

La fonction $\bar{u}(z) = \exp(\frac{r}{d}z)$ est solution du problème (S), si bien que la fonction $v(t, z) = u(t, z) - \bar{u}(z)$ est solution du problème

$$\begin{cases} v_t + rv_z - dv_{zz} = 0 & z < 0, t > 0 \\ v_z = 0 & z = 0, t > 0 \\ v(t, z) \rightarrow 0 & z \rightarrow -\infty, t > 0 \\ v(0, z) = v_0(z). & -\infty < z \leq 0, \end{cases} \quad (\bar{\text{T}})$$

avec $v_0(z) = u_0(z) - \bar{u}(z)$. On est donc ramené à démontrer la convergence de $v(t, z)$ vers 0 quand $t \rightarrow \infty$. La transformée de Laplace de l'équation de v donne

$$pv^* + rv_z^* - dv_{zz}^* = v_0. \quad (2.4)$$

Une solution de (2.4) est la somme d'une solution particulière de (2.4) et d'une solution de l'équation homogène associée à (2.4). Considérons alors l'équation homogène associée à (2.4)

$$dv_{zz}^* - rv_z^* - pv^* = 0. \quad (2.5)$$

La solution de (2.5) est donnée par :

$$v^*(p, z) = \tilde{A}(p) \exp(c_1 z) + \tilde{B}(p) \exp(c_2 z) \quad (2.6)$$

avec

$$c_1 = \frac{r - \sqrt{r^2 + 4dp}}{2d} < 0 \text{ et } c_2 = \frac{r + \sqrt{r^2 + 4dp}}{2d} > 0. \quad (2.7)$$

Il nous reste à trouver une solution particulière de (2.4). Pour cela, cherchons une solution particulière de (2.4) sous la forme :

$$v^*(p, z) = A(p, z) \exp(c_1 z) + B(p, z) \exp(c_2 z). \quad (2.8)$$

La dérivée première de v^* par rapport à z est :

$$v_z^*(p, z) = A_z \exp(c_1 z) + B_z \exp(c_2 z) + c_1 A \exp(c_1 z) + c_2 B \exp(c_2 z).$$

Cherchons une solution qui vérifie en plus :

$$A_z(p, z) \exp(c_1 z) + B_z(p, z) \exp(c_2 z) = 0. \quad (2.9)$$

Calculons ensuite la dérivée seconde de v^* par rapport à z :

$$v_{zz}^*(p, z) = c_1 A_z \exp(c_1 z) + c_2 B_z \exp(c_2 z) + c_1^2 A \exp(c_1 z) + c_2^2 B \exp(c_2 z).$$

En écrivant que v^* est solution de (2.4), il reste, compte-tenu du fait que c_1 et c_2 annulent $p + rZ - dZ^2$,

$$-dc_1 A_z \exp(c_1 z) - dc_2 B_z \exp(c_2 z) = v_0. \quad (2.10)$$

On résout alors un système linéaire en A_z et B_z avec les équations (2.9) et (2.10) pour trouver :

$$\begin{cases} A_z(p, z) &= \frac{v_0}{d(c_2 - c_1)} \exp(-c_1 z) \\ B_z(p, z) &= \frac{v_0}{d(c_1 - c_2)} \exp(-c_2 z). \end{cases}$$

Une solution de (2.4) est alors :

$$v^*(p, z) = \tilde{A}(p) \exp(c_1 z) + \tilde{B}(p) \exp(c_2 z) + A(p, z) \exp(c_1 z) + B(p, z) \exp(c_2 z), \quad (2.11)$$

où

$$\begin{cases} A(p, z) &= \frac{1}{d(c_2 - c_1)} \int_{-\infty}^z v_0(x) \exp(-c_1 x) dx \\ B(p, z) &= \frac{1}{d(c_1 - c_2)} \int_{-\infty}^z v_0(x) \exp(-c_2 x) dx. \end{cases}$$

Reste à déterminer \tilde{A} et \tilde{B} via les conditions aux limites.

Commençons par remarquer que la condition de Dirichlet $\lim_{z \rightarrow -\infty} v(t, z) = 0$ implique $\lim_{z \rightarrow -\infty} v^*(p, z) = 0$.

En effet, soit $p > 0$, puisque $v(t, z)$ tend vers 0 lorsque $z \rightarrow -\infty$ alors d'après la définition de v^* , il est facile de voir que $\forall \epsilon > 0$, $\lim_{z \rightarrow -\infty} v^*(p, z) \leq \frac{\epsilon}{p}$.

Faisons donc tendre z vers $-\infty$ dans (2.11) et regardons chacun des quatre termes résultants : On voit que $\tilde{B}(p) \exp(c_2 z)$ tend vers zéro à l'infini car $c_2 > 0$.

Regardons maintenant le terme en $A(p, z)$. On a

$$A(p, z) \exp(c_1 z) = \frac{1}{d(c_2 - c_1)} \int_{-\infty}^z v_0(x) \exp[c_1(z - x)] dx,$$

avec $c_1(z - x) \leq 0$, alors

$$A(p, z) \exp(c_1 z) \leq \frac{1}{d(c_2 - c_1)} \int_{-\infty}^z |v_0(x)| dx.$$

En utilisant le fait que v_0 est dans L^1 , il s'en suit que

$$\frac{1}{d(c_2 - c_1)} \lim_{z \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^z |v_0(x)| dx = 0 \Rightarrow \lim_{z \rightarrow -\infty} A(p, z) \exp(c_1 z) = 0.$$

Examinons le terme $B(p, z) \exp(c_2 z)$:

$$B(p, z) \exp(c_2 z) = \frac{1}{d(c_1 - c_2)} \int_{-\infty}^z v_0(x) \exp[c_2(z - x)] dx.$$

Dans un premier temps nous allons considérer une condition initiale v_0 à décroissance rapide plus précisément, nous allons imposer :

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^z v_0(x) \exp(-cx) dx = 0 \text{ pour un } c > 0 \text{ donné.} \quad (2.12)$$

Par exemple, $v_0(x)$ de la forme $\exp(\gamma x)$ avec $\gamma > c$ convient.

Remarquons aussi, à ce stade, que $c_2 = c_2(p)$ via (2.7) et on s'intéresse ici à des p 'petits' c'est à dire à la limite quand $p \rightarrow 0$. Donc en prenant par exemple $c = \frac{r}{d} + 1$, sous l'hypothèse (2.12), B tend vers zéro quand z tend vers moins l'infini.

Ainsi lorsque z tend vers moins l'infini, nécessairement le terme restant $\tilde{A}(p) \exp(c_1 z)$ est nul, c'est à dire $\tilde{A}(p) = 0$. L'équation (2.11) devient :

$$\begin{aligned} v^*(p, z) &= \tilde{B}(p) \exp(c_2 z) + \frac{1}{d(c_2 - c_1)} \int_{-\infty}^z v_0(x) \exp[c_1(z - x)] dx \\ &+ \frac{1}{d(c_1 - c_2)} \int_{-\infty}^z v_0(x) \exp[c_2(z - x)] dx. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Maintenant, nous allons utiliser la deuxième condition aux limites à savoir $v_z(t, z = 0) = 0$ c'est à dire $v_z^*(p, 0) = 0$.

En dérivant (2.13) par rapport à z , on a

$$\begin{aligned} v_z^*(p, z) &= c_2 \tilde{B}(p) \exp(c_2 z) + \frac{c_1}{d(c_2 - c_1)} \int_{-\infty}^z v_0(x) \exp[c_1(z - x)] dx \\ &+ \frac{c_2}{d(c_1 - c_2)} \int_{-\infty}^z v_0(x) \exp[c_2(z - x)] dx + \frac{v_0(z)}{d(c_1 - c_2)} + \frac{v_0(z)}{d(c_2 - c_1)}. \end{aligned}$$

Ainsi, en $z = 0$ on a :

$$\begin{aligned} v_z^*(p, 0) &= \frac{1}{d(c_2 - c_1)} \left[c_1 \int_{-\infty}^0 v_0(x) \exp(-c_1 x) dx - c_2 \int_{-\infty}^0 v_0(x) \exp(-c_2 x) dx \right] \\ &+ c_2 \tilde{B}(p). \end{aligned}$$

Puisque $v_z^*(p, 0) = 0$, nous trouvons

$$\tilde{B}(p) = -\frac{1}{d(c_2 - c_1)} \left[\frac{c_1}{c_2} \int_{-\infty}^0 v_0(x) \exp(-c_1 x) dx - \int_{-\infty}^0 v_0(x) \exp(-c_2 x) dx \right].$$

Par conséquent, une expression de v^* est donnée par :

$$\begin{aligned} v^*(p, z) &= \frac{1}{d(c_2 - c_1)} \int_{-\infty}^z v_0(x) \exp[c_1(z - x)] dx \\ &+ \frac{1}{d(c_1 - c_2)} \int_{-\infty}^z v_0(x) \exp[c_2(z - x)] dx \\ &- \frac{1}{d(c_2 - c_1)} \frac{c_1}{c_2} \int_{-\infty}^0 v_0(x) \exp(-c_1 x) \exp(c_2 z) dx \\ &+ \frac{1}{d(c_2 - c_1)} \int_{-\infty}^0 v_0(x) \exp[c_2(z - x)] dx. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Maintenant nous allons vérifier que v^* est borné pour tout z lorsque p tend vers zéro. Pour voir cela, étudions les quatre termes de (2.14) lorsque p tend vers zéro. Pour p tendant vers zéro, on a c_1 tend vers zéro et c_2 tend vers $\frac{r}{d}$, d'où

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{d(c_2 - c_1)} \int_{-\infty}^z v_0(x) \exp[c_1(z - x)] dx = \frac{1}{r} \int_{-\infty}^z v_0(x) dx \leq \frac{\|v_0\|_{L^1}}{r}.$$

Ensuite, sous l'hypothèse (2.12) le terme $B(p, z) \exp(c_2 z)$ est borné pour tout z . Il reste à examiner les deux derniers termes de (2.14). Tout d'abord, intéressons nous à $\int_{-\infty}^0 v_0(x) \exp(-c_1 x) \exp(c_2 z) dx$ on a

$$\int_{-\infty}^0 v_0(x) \exp(-c_1 x) \exp(c_2 z) dx \leq \int_{-\infty}^0 v_0(x) dx \leq \|v_0\|_{L^1} < \infty,$$

ce qui montre que

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{-1}{d(c_2 - c_1)} \frac{c_1}{c_2} \int_{-\infty}^0 v_0(x) \exp(-c_1 x) \exp(c_2 z) dx = 0.$$

Regardons maintenant $\frac{1}{d(c_2 - c_1)} \int_{-\infty}^0 v_0(x) \exp[c_2(z - x)] dx$. Ce terme est borné d'après l'hypothèse (2.12) lorsque p tend vers zéro.

Finalement on déduit que $v^*(p, z)$ reste borné quand p tend vers zéro, d'où

$$\lim_{p \rightarrow 0} p v^*(p, z) = 0.$$

On conclut d'après (2.1), que sous l'hypothèse (2.12) de décroissance rapide de la condition initiale, v tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini.

Maintenant, considérons une condition initiale v_0 générale. On va approcher v_0 par une suite de conditions initiales $(v_{0,k})_k$ telle que la suite $(v_{0,k})_k$ pour tout k , soit à support compact. Comme les $(v_{0,k})_k$ vérifient (2.12), la suite de solutions $(v_k)_k$ converge vers 0 pour t tendant vers $+\infty$. On a

$$\|v(t, \cdot)\|_1 = \|v(t, \cdot) - v_k(t, \cdot) + v_k(t, \cdot)\|_1 \leq \|v(t, \cdot) - v_k(t, \cdot)\|_1 + \|v_k(t, \cdot)\|_1.$$

En utilisant le principe de maximum, on a $\|v - v_k\|_1 \leq \|v_0 - v_{0,k}\|_1$, et donc

$$\|v(t, \cdot)\|_1 \leq \|v_0 - v_{0,k}\|_1 + \|v_k(t, \cdot)\|_1.$$

En passant d'abord à la limite en k puis en t , on obtient la convergence de v vers 0. Finalement en revenant à u , on a bien la convergence de $u(t, z)$ vers $\bar{u}(z)$ quand $t \rightarrow +\infty$. \square

3. Schéma numérique du problème

Cette partie est consacrée à la discrétisation du problème (T) avec pour objectif de vérifier à travers des simulations numériques que la solution approchée satisfait les résultats du théorème 2.4. Nous utiliserons ici la méthode des différences finies centrées pour discrétiser le terme de diffusion et un

schéma upwind pour le terme de diffusion. Soit $\tau = \delta t$ le pas de temps. Pour les raisons numériques, nous considérerons $\Omega =] - L, 0[$ avec un $L > 0$, suffisamment grand et on prendra $u(t, z = -L) \rightarrow 0, \forall t > 0$ grâce à (I). On construit un maillage uniforme constitué d'une collection de point $(z_i)_{1, \dots, F}$ avec pour pas d'espace uniforme $h = \delta z = \frac{L}{F-1}$. Ainsi on localisera un point z_i par $z_i = -L + (i-1)h$ avec $i \in \{1, \dots, F\}$. La valeur de la solution numérique au point $z = z_i$ à $t = n\tau$ est donnée par u_i^n avec $n \geq 0$ et $i \in J = \{1, \dots, F\}$.

Proposition 3.1. *Supposons (I), une approximation numérique de la solution du problème (T) est donnée par :*

$$u_i^0 = u(0, z_i) \text{ pour } i \in J \quad (3.1)$$

$$u_i^{n+1} = C_O u_{i-1}^n + (1 - C_O - C_E) u_i^n + C_E u_{i+1}^n \text{ pour } n > 0, i \in J \quad (3.2)$$

$$u_F^{n+1} = (1 - 2C_E) u_F^n + 2C_E u_{F-1}^n + C_I \text{ pour } n > 0, i = F \quad (3.3)$$

$$\text{avec } C_O = \frac{\tau}{h^2}(rh + d), C_E = d \frac{\tau}{h^2} \text{ et } C_I = \frac{\tau r}{h d}(2d + h)$$

Démonstration. A l'intérieur du domaine, avec la méthode des différences finies centrées pour discrétiser le terme de diffusion et un schéma upwind pour le terme de diffusion on a :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + r \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} - d \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} = 0. \quad (3.4)$$

qui donne (3.2). Pour compléter le schéma, il reste à discrétiser la condition de Neumann au front. L'évaluer la valeur de la solution numérique au front ($z = z_F$) qui est nécessaire dans l'approximation du terme de diffusion lorsque $i = F - 1$ est délicat car l'approximation du type :

$$u_z(n\tau, z_F) \approx \frac{u_F^n - u_{F-1}^n}{h} \quad (3.5)$$

n'approche pas la solution au front. En effet, la solution est connue et est de la forme $\exp(\frac{r}{d}z)$ qui est égale à 1 au front. Il est évident que nous ne sommes pas à mesure d'avoir cette valeur avec la méthode précédente car la température au front aura tendance à croître à chaque itération pour des grandes valeurs de $\frac{r}{d}$. En effet, l'approximation précédente induit une erreur d'ordre 0(1) et ne permet pas une convergence. Ceci vient de l'approximation de Taylor

$$u^n(z_F) = u^n(z_{F-1}) + \frac{r}{d}h + 0(h^2). \quad (3.6)$$

Ainsi

$$u_{zz}^n(z_{F-1}) = \frac{u^n(z_{F-2}) - 2u^n(z_{F-1}) + u^n(z_F)}{h^2} + 0(h^2). \quad (3.7)$$

C'est à dire

$$u_{zz}^n(z_{F-1}) = \frac{u^n(z_{F-2}) - 2u^n(z_{F-1}) + u^n(z_{F-1}) + \frac{r}{d}h}{h^2} + 0(1). \quad (3.8)$$

Pour éviter cela, on passe par Taylor d'ordre supérieure :

$$\frac{u^{n+1}(z_F) - u^n(z_F)}{\tau} + r(u_z^n)(z_F) - d(u_{zz}^n)(z_F) = 0. \quad (3.9)$$

Le deuxième terme de (3.9) est donné par la condition de Neumann, il reste à évaluer le dernier terme

$$u^n(z_{F-1}) = u^n(z_F) - hu_z^n(z_F) + \frac{h^2}{2}u_{zz}^n(z_F) + 0(h^3) \quad (3.10)$$

En remplaçant $u^n(z_{F-1})$ par sa valeur dans (3.9) on

$$u_{zz}^n(z_F) = \frac{-2u^n(z_F) + 2u^n(z_{F-1}) + 2\frac{r}{d}h}{h^2} + 0(h) \quad (3.11)$$

Finalement

$$u_F^{n+1} = (1 - 2C_E)u_F^n + 2C_E u_{F-1}^n + C_I \quad (3.12)$$

□

Remarque 3.2. Le schéma (3.1)-(3.2)-(3.3) est stable si la condition suivante est vérifiée :

$$\tau \leq \frac{h^2}{rh + 2d}. \quad (3.13)$$

4. Simulations numériques

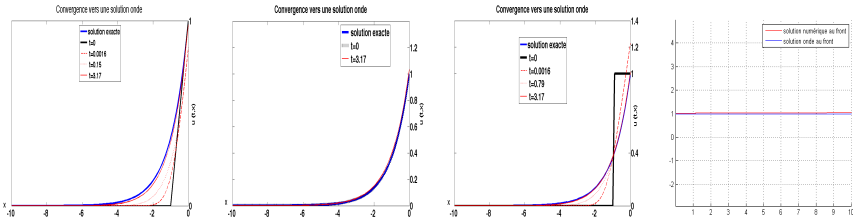


FIGURE
1

FIGURE
2

FIGURE
3

FIGURE
4

Dans cette partie, nous vérifierons à travers des tests numériques que la solution numérique obtenue par le schéma (3.1)-(3.2)-(3.3) sous le condition (3.13) converge vers une solution stationnaire (solution onde) quand t devient grand. Nous supposons $r = d = 1$, $h = \frac{1}{10}$.

En démarrant avec une température initiale donnée par $u_0(z) = \exp(\frac{r}{d}z)$, et en suivant l'évolution de la température numérique (voir Figure 2 pour différent temps), on remarque qu'il y'a convergence vers la solution onde. Ce constat est attendu car la donnée initiale considérée est égale à la solution onde. En principe la solution devrait rester stationnaire, son évolution est due aux erreurs d'approximations.

Pour mieux illustrer cette convergence, nous comparons dans la Figure 4,

l'évolution dans le temps la valeur de la solution numérique au front par rapport à la valeur de la solution exacte au front qui est 1. Considérons une autre condition initiale moins régulière donnée par :

$$u_0(z) = \begin{cases} \frac{r}{d}z + 1 & \text{si } \frac{-r}{2d} < z \leq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec une telle donnée initiale, la Figure 1 nous indique aussi que la solution numérique converge vers cette même solution onde $\exp(\frac{r}{d}z)$ dans t dévient grand.

Enfin, on effectue un autre test numérique avec une condition initiale discontinue donnée par :

$$u_0(z) = \begin{cases} \frac{r}{d} & \text{si } \frac{-r}{2d} < z \leq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'évolution de la température à différent temps est illustrée par la Figure 3. Ici, aussi ce test numérique confirme la convergence vers la solution onde.

Remarque 4.1. Notons que plus le maillage est fin, plus les solutions numériques sont proches de la solution onde.

5. Perspective à venir : Problème 2D

Après l'étude du problème simplifié 1D, il sera intéressant d'envisager l'approximation numérique du problème 2D c'est à dire la propagation d'un front initial périodique quelconque en milieu hétérogène. L'objectif est de vérifier la convergence (pour un temps long) de la solution numérique vers une solution onde dont l'existence a été prouvée par Alibaud et Namah dans [1]. Le problème à frontière libre 2D est le système (P_{2D}) - (C_{2D}) suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_t + rK(u_f)\sqrt{1 + \xi_y^2} = \epsilon \frac{\xi_{yy}}{1 + \xi_y^2} \quad y \in]0, 1[, \quad t > 0 \\ \xi(t, 1) = \xi(t, 0) \quad t > 0, \\ \xi_y(t, 1) = \xi_y(t, 0) \quad t > 0, \\ \xi|_{t=0} = \xi_0(y) \quad y \in [0, 1]. \end{array} \right. \quad (P_{2D})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t - \operatorname{div}(d \nabla u) = 0 \quad (x, y) \in \Omega_t, \quad t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(t, \cdot, y) = \theta \beta V_n \quad (x, y) \in \Gamma_t, \quad t > 0 \\ u(t, x, y) = 0 \quad x \rightarrow -\infty \\ u(t, x, 1) = u(t, x, 0) \\ u_y(t, x, 1) = u_y(t, x, 0) \\ u|_{t=0} = u_0(x, y). \end{array} \right. \quad (C_{2D})$$

Le domaine spatial repéré à chaque instant $t > 0$ est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_t = \{(x, y) / y \in]0, 1[\text{ avec } x < \xi(t, y)\}, \\ \Gamma_t = \{(x, y) / x = \xi(t, y)\}, \\ \Gamma_0 = \partial\Omega_t \cap \{y = 0\}, \\ \Gamma_1 = \partial\Omega_t \cap \{y = 1\}. \end{array} \right.$$

En s'inspirant du problème 1D, l'idée est de faire un changement de variable permettant de se ramener à un repère fixe lié au front. Ce changement de variable n'est possible que dans le cas d'une propagation monotone que nous allons définir en Appendice de ce papier.

6. Appendice

Dans cette partie, nous n'allons considérer qu'un modèle géométrique de propagation de front (on néglige l'effet de la température), ce qui revient à considérer $K(u) = 1$ dans l'équation principale (P_{2D}). Dans ce cas, le problème (P_{2D}) se ramène à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_t + r(y)\sqrt{1 + \xi_y^2} = \epsilon \frac{\xi_{yy}}{1 + \xi_y^2} \quad y \in]0, 1[, t > 0 \\ \xi(t, 1) = \xi(t, 0) \quad t > 0, \\ \xi_y(t, 1) = \xi_y(t, 0) \quad t > 0, \\ \xi(0, y) = \xi_0(y) \quad y \in [0, 1]. \end{array} \right. \quad (P_{2D}^1)$$

Nous avons donc une équation de type Hamilton-Jacobi avec un terme de diffusion. Suivant les caractéristiques du milieu, le front peut être vu comme se propageant dans un milieu hétérogène (Le taux de combustion r varie suivant les différentes couches du matériau considéré). Le paramètre ϵ est le coefficient du terme de diffusion appelé aussi terme de courbure (effet régularisant).

Nous analyserons ensuite le problème (P_{2D}^1) suivant certaines valeurs des paramètres r et ϵ . Ces observations nous permettront de trouver une relation liant les coefficients ϵ et r pour avoir une propagation monotone (voir Définition 6.2) qui sera utile dans l'étude du problème couplé (P_{2D})-(C_{2D}). On obtient alors le schéma numérique suivant :

$$\begin{aligned} \xi_j^{n+1} = & \xi_j^n - r_j \tau H_{\text{GOD}} \left(\frac{\xi_j^n - \xi_{j-1}^n}{h}, \frac{\xi_{j+1}^n - \xi_j^n}{h} \right) \\ & + \epsilon \tau \frac{\left(\xi_{j+1}^n - \xi_j^n \right) - \left(\xi_j^n - \xi_{j-1}^n \right)}{h^2 + 0.25 \left[\left(\xi_{j+1}^n - \xi_j^n \right) + \left(\xi_j^n - \xi_{j-1}^n \right) \right]^2}. \end{aligned}$$

où H_{GOD} est le flux numérique de Godunov¹ défini comme suit :

$$H_{\text{GOD}}(a, b) = \begin{cases} \min_{v \in [a, b]} H(v) = \min_{v \in [a, b]} \sqrt{1 + v^2} & \text{si } a \leq b \\ \max_{v \in [b, a]} H(v) = \max_{v \in [a, b]} \sqrt{1 + v^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Il existe plusieurs type de schémas monotones pour notre problème (Lax-Frederick, Rusanov, Godunov...). Nous avons choisi le schéma de Godunov pour son caractère upwind et le fait qu'il ne soit pas 'trop' diffusif.

Remarque 6.1. Ce schéma est stable si la condition suivante est vérifiée

$$\tau \leq \min\left(\frac{h}{2 \max_y r}, \frac{h^2}{2\epsilon}\right).$$

On propose ici une définition qui jouera un rôle crucial dans la preuve de la monotonie du schéma qu'on adoptera pour le système couplé (P_{2D}) - (C_{2D}) .

Definition 6.2. On appelle "propagation monotone", une propagation telle que pour tout $t \geq 0$, pour tout $y \in [0, 1]$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}(t, y) \leq 0 \text{ c'est à dire } \frac{\xi_j^{n+1} - \xi_j^n}{t_{n+1} - t_n} \leq 0 \quad \forall n \geq 0, j \in \mathbb{N}. \quad (6.1)$$

Si'il existe au moins un temps $t \geq 0$ tel que (6.1) ne soit pas vérifié, alors la propagation sera dite non-monotone.

Pour un front initial donné par une droite, la propagation du front se fait de la droite vers la gauche. On a bien une propagation monotone. C'est n'est pas toujours le cas pour un front initial quelconque. Par exemple, en partant d'un front initial sinusoïdal, on peut avoir une propagation monotone (voir Figure 5) et une propagation non monotone (voir Figures 6). En faite, cela est une consequence de la forte degenerescence de (P_{2D}^1) (rapport entre le terme de convection et de diffusion). L'objectif de cette partie est d'établir

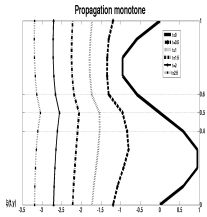


FIGURE
5

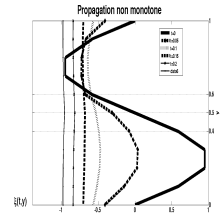


FIGURE
6

une condition sur ϵ , r et ξ_0 pour que ξ_t soit négative ou nulle, pour tout $t > 0$. Pour cela, on va faire appel à un résultat de principe de maximum pour des problèmes paraboliques.

Proposition 6.3. Pour tout r , ξ_0 et ξ suffisamment régulières, on a $\xi_t \leq 0$ pour tout $y \in [0, 1]$ si :

$$\epsilon \max_y \xi_{yy}(0, y) \leq r_{\min}. \quad (6.2)$$

Remarque 6.4. Notons que dans le cas où $\max_y \xi_{0,yy} = 0$ alors ξ_t est strictement négatif pour tout $t > 0$.

Démonstration. On sait d'après [3, 4], pour tout $\xi_0 \in W^{2,\infty}(]0, 1[)$ que le problème (P_{2D}^1) admet une unique solution telle que $\xi_y \in W^{1,\infty}(]0, +\infty[\times]0, 1[)$. Posons maintenant $V(t, y) = \xi_t$. En dérivant la première équation de (P_{2D}^1) par rapport à la variable t on obtient

$$\frac{\partial \xi_t}{\partial t} + r(y) \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{1 + \xi_y^2} \right) - \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\xi_{yy}}{1 + \xi_y^2} \right) = 0.$$

On calcule ensuite les dérivées partielles suivantes

$$\frac{\partial \xi_t}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t}; \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{1 + \xi_y^2} \right) = \frac{\frac{\partial}{\partial t} (1 + \xi_y^2)}{2\sqrt{1 + \xi_y^2}} = \frac{\xi_y (\xi_t)_y}{\sqrt{1 + \xi_y^2}} = \frac{\xi_y}{\sqrt{1 + \xi_y^2}} V_y \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\xi_{yy}}{1 + \xi_y^2} \right) &= \frac{(1 + \xi_y^2) (\xi_t)_{yy} - \xi_{yy} \frac{\partial}{\partial t} (1 + \xi_y^2)}{(1 + \xi_y^2)^2} \\ &= \frac{1}{(1 + \xi_y^2)} V_{yy} - \frac{2\xi_{yy}\xi_y}{(1 + \xi_y^2)^2} V_y. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Ainsi, d'après les relations (6.3), (6.4), (6.5), V vérifie l'équation parabolique

$$V_t + b(y)V_y - a(y)V_{yy} = 0 \text{ dans } U =]0, T] \times]0, 1[\quad (6.6)$$

avec :

$$a(t, y) = \frac{\epsilon}{1 + \xi_y^2} \text{ et } b(t, y) = r(y) \frac{\xi_y}{\sqrt{1 + \xi_y^2}} + \frac{2\epsilon\xi_{yy}\xi_y}{(1 + \xi_y^2)^2}.$$

Les fonctions a et b sont bornées vu que ξ_y et ξ_{yy} sont bornées. Par le principe de maximum, on déduit alors que

$$\max_{t,y} V(t, y) \leq \max_y V(0, y) \text{ c'est à dire } \max_{t,y} \xi_t(t, y) \leq \max_y \xi_t(0, y).$$

Or

$$\xi_t(0, y) = \epsilon \frac{\xi_{yy}(0, y)}{1 + (\xi_y(0, y))^2} - r(y) \sqrt{1 + (\xi_y(0, y))^2}.$$

D'où $\xi_t(0, y) \leq 0$ si et seulement si :

$$\forall y \in [0, 1] \quad \epsilon \xi_{yy}(0, y) \leq r(y) \left(1 + (\xi_y(0, y))^2 \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Une condition suffisante pour que $\xi_t(t, y) \leq 0$ est alors donnée par :

$$\forall y \in [0, 1], \quad \epsilon \xi_{yy}(0, y) \leq r(y) \text{ c'est à dire } \epsilon \max_y \xi_{yy}(0, y) \leq r_{min}.$$

□

Remarque 6.5. Dans le cas où $r = 0$ il est claire que $\xi_t \leq 0$ dès que $\xi_{yy} \leq 0$.

Références

- [1] N. Alibaud, G.Namah, *On the propagation of periodic flame front by Arrhenius kinetic*. Interfaces and Free Boundaries. **19** (2017), 449-491.
- [2] C. M. Brauner, P.C Fife, G. Namah, C. Schmidt- Lainé, *Propagation of a combustion front in a striated solid medium : A homogenization Analysis*. Quart. Appl. Math. **51**(1993) no. 3 467-493.
- [3] X. Chen, G. Namah *Wave propagation under curvature effets in a heterogeneous medium*. Appl Anal. **64** (1997), no 3-4, 219-233.
- [4] M. G Crandall, P. L Lions : *Viscosity solutions of Hamilton Jacobi Equations*. Trans. Amer. Math. Soc. Vol 277 ,no. 1, 1983. pp 487-502
- [5] M Gazibo, R. Laydi, G. Namah *Numerical approach for propagation of a flame front governed by a free boundary system*. In preparation.
- [6] O. A. Ladyenskaja, V. A. Solonnikov and N.NV. A. Solonnikov and N. N. Ural'ceva *Linear and quasilinear equations of parabolic type*. Translated from the Russian by S. Smith. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23, American Mathematical Society, Providence, R.I., 196
- [7] J.L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. (French) Dunod, Gauthier-Villar, Paris 1969 xx+554 pp (1969).
- [8] G. Namah *Asymptotic solution of a Hamilton-Jacobi equation*. Asymptotic Anal. Vol (1996), no. 4, 355-370.
- [9] G. Namah, *Propagation d'un front dans un milieu hétérogène :Comportement en temps long et homogénéisation. Application à la combustion du propegols solides*. Thèse-HDR Bordeaux I, 1997
- [10] S. Osher, J. A. Sethian. *Front propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on Hamilton Jacobi formulation*. Journal of Comp. Physics, Vol. **79**, no 1, 12-48, (1988).
- [11] D. A Tarzia, *Determination of the Unknown Coefficients in the Lamé-Clapeyron Problem (or One-Phase Stefan Problem)*. Adv in Appli Math **3**, (1982), 74-82.

Mohamed KARIMOU GAZIBO

Laboratoire de Mathématiques Fondamentales et Applications (LMFA)

Université Abdou Moumouni de Niamey,

École Normale Supérieure, Département de Mathématiques, BP :10963 Niamey,
Niger

e-mail: mgazibok@yahoo.fr