



HAL
open science

Graphes, Réseaux, Structures et Dessins d'enfants

Daniel Parrochia

► **To cite this version:**

| Daniel Parrochia. Graphes, Réseaux, Structures et Dessins d'enfants. 2023. <hal-03918127>

HAL Id: hal-03918127

<https://hal.science/hal-03918127v1>

Preprint submitted on 2 Jan 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Graphes, Réseaux, Structures et Dessins d'enfants

Daniel Parrochia

Université de Lyon (France)

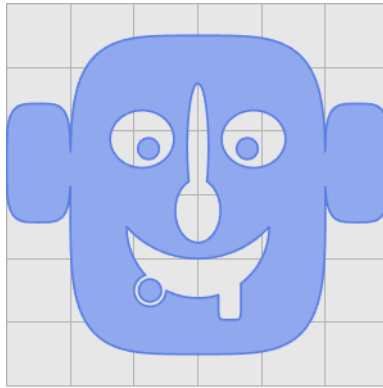


FIGURE 1 – Dessin d'enfant

Résumé. Nous commençons par étudier le contexte dans lequel a été introduite la notion de "dessin d'enfants" par Alexander Grothendieck. Nous définissons et étudions ensuite cette structure pour elle-même et la comparons à d'autres. En particulier, nous rappelons l'existence de ces graphes bipartis et bichromatiques particuliers que sont les "réseaux de Pacotte", que nous avons décrits dans un autre article. Pour finir, nous montrons comment les réseaux de Pacotte et, plus généralement, certains réseaux de transport, peuvent en fait être interprétés comme des dessins d'enfants au sens de Grothendieck, ce qui permet de faire agir sur eux le groupe de Galois absolu.

Mots-clés. Grothendieck, Dessins d'enfants, Réseaux de Pacotte, Structures 2-colorables.

1 Introduction anecdotique : l'enfant selon Grothendieck dans *Récoltes et Semailles*

La notion grothendieckienne de "dessin d'enfant" remonte au document intitulé "l'esquisse d'un programme" (voir [Grothendieck 84]) présenté par Alexander Grothendieck pour accompagner sa candidature au CNRS en 1984. Comme on le sait, la cinquantaine de pages composant ce texte a été rédigée par Grothendieck entre 1972 et 1984. Il s'agit d'un travail dans lequel l'auteur expose une stratégie de recherche visant entre autres à développer une généralisation de la théorie de Galois. Mais, au-delà des circonstances particulières propres à la naissance de ce texte, par ailleurs particulièrement fécond du point de vue mathématique, l'enfance et la créativité quasiment artistique propre aux enfants ont été un thème récurrent de la réflexion de Grothendieck sur son œuvre, qui explique peut-être cette terminologie si particulière. Sans nous lancer dans une enquête historico-psychologique, nous nous bornerons ici à quelques mots.

Pour appeler une structure mathématique "dessin d'enfant", il faut sans doute s'intéresser aux enfants. Si l'on devait chercher l'origine psychologique de cette notion, il faudrait avant tout relever les nombreuses considérations sur l'enfance développées par Grothendieck dans *Récoltes et Semailles*. Tout l'ouvrage, comme il est précisé, s'adresse, non à un enfant de dix ans, bien sûr, mais à l'enfant qui sommeille en chaque lecteur rationnel : "C'est à celui en toi qui sait être seul, à l'enfant, que je voudrais parler, et à personne d'autre", écrit Grothendieck dès le début du livre (voir [Grothendieck 86], 35). "L'enfant qui joue", "l'enfant-qui-aime-à-explorer-les-choses", qui adore "aller fouiner et s'enfouir dans les sables ou dans les vases boueuses et sans nom" (voir [Grothendieck 86], 63-64), l'enfant solitaire, ne faisant confiance qu'à son jugement, seul à dire, très souvent, que "le roi est nu", font partie de la mythologie grothendieckienne de l'enfance et sont des thèmes récurrents de la partie sur "L'enfant et la mère", l'enfant étant censé bénéficier de la toute-puissance maternelle.

Plus loin, dans la partie "L'enfant et le Bon Dieu", l'enfant est mis du côté de la découverte : "La découverte est le privilège de l'enfant. C'est du petit enfant que je veux parler, l'enfant qui n'a pas peur encore de se tromper, d'avoir l'air idiot, de ne pas faire sérieux, de ne pas faire comme tout le monde. Il n'a pas peur non plus que les choses qu'il regarde aient le mauvais goût d'être différentes de ce qu'il attend d'elles, de ce qu'elles devraient être, ou plutôt : de ce qu'il est bien entendu qu'elles sont. Il ignore les consensus muets et sans failles qui font partie de l'air que nous respirons – celui de tous les gens censés et bien connus comme tels. Dieu sait s'il y

en a eu, des gens censés et bien connus comme tels, depuis la nuit des âges!" (voir [Grothendieck 86], 127).

Le propre du regard enfantin est l'émerveillement, et celui-ci est proche du renouveau et de la véritable créativité, celle qui nous vient d'ailleurs. "C'est quand nous sommes enfants et prêts à nous émerveiller en la beauté des choses du monde et en nous-mêmes, que nous sommes prêts aussi à nous renouveler, et prêts comme instruments souples et dociles entre les mains de l' Ouvrier, pour que par Ses mains et à travers nous des êtres et des choses peut-être se renouvellent" (voir [Grothendieck 86], 198). Au-delà de l'enfant que tout le monde a été dans son enfance, il y a, pour Grothendieck, l'être qu'on est très profondément et qui reste constant au fil des années. C'est celui-là, surtout, qu'il appelle "l'enfant" et qui s'oppose, non plus à la mère ou à Dieu, mais au "patron".

C'est cet enfant joueur qui, selon Grothendieck, fait des mathématiques, y est créatif et y excelle. C'est lui, l'ouvrier qui est investi de la puissance de créer (voir [Grothendieck 86], 210). Ainsi, l'envie de faire des mathématiques est un désir d'enfant. "Les désirs de l'enfant se suivent, au fil des heures et des jours, comme les mouvements d'une danse naissant les uns des autres. Telle est leur nature. Ils ne s'opposent pas plus que ne s'opposent les strophes d'un chant, ou les mouvements successifs d'une cantate ou d'une fugue" (voir [Grothendieck 86], 212).

Ainsi ce n'est probablement pas un hasard si c'est au cours de l'année 1981, quand, après une longue interruption, l'"enfant" en lui s'est remis à avoir le désir des mathématiques, que Grothendieck a conçu, durant quelques mois d'une très grande créativité – il parle lui-même de "frénésie" –, l'idée d'associer des corps de nombres à des dessins d'enfants (voir [Grothendieck 86], 214).

La puissance créative de l'enfant, qui se manifeste notamment dans les dessins, est en effet à l'image de la créativité mathématique elle-même. Elle est au-delà de tout, et n'a pas besoin d'érudition (voir [Grothendieck 86], 224). Ce que Grothendieck – à tort ou à raison – reproche à certains disciples ou collègues est d'avoir tué l'enfant en eux ou, à tout le moins, d'avoir laissé en eux s'éteindre ce don d'émerveillement de l'enfant, "comme s'il n'avait jamais été" (voir [Grothendieck 86], 309). Pour Grothendieck, le fait que ces disciples ou collègues aient alors répudié une certaine vision des mathématiques qui était la sienne – par exemple, la théorie des motifs, laquelle aurait été enterrée par leurs soins – n'est qu'une conséquence de cette attitude fondamentale.

Tout cela révèle parfaitement la conception de la recherche de Grothendieck. Selon lui, parmi ceux qui découvrent, il y a ceux qui trouvent une chose décidée à l'avance,

comme le chasseur de papillons, "qui part avec dans son filet un beau papillon (empaillé si ça se trouve), et qui le sort tout content (et à son entière satisfaction) en revenant de sa "chasse" "(voir [Grothendieck 86], 429). Et puis il y a celui "qui se trouve placé devant un inconnu, comme un enfant nu devant la mer. Quand l'enfant désire la connaître, il entre et la connaît – qu'elle soit tiède ou fraîche, calme ou agitée. Celui qu'attire telle chose inconnue, et qui part pour la connaître, sûrement la connaîtra peu ou prou. Avec ou sans filet, il trouvera le vrai, ou en tous cas du vrai. Ses erreurs comme ses trouvailles sont autant d'étapes dans son cheminement, ou pour mieux dire, dans ses amours avec ce qu'il désire connaître" (voir [Grothendieck 86], 430).

Sur cette idée d'enfant et sur cette créativité enfantine magnifiée s'est greffée plus tard, dans la représentation de Grothendieck, une autre mythologie, celle du yin et du yang. "L'état d'enfance, l'état créateur, écrira-t-il, est celui de l'équilibre parfait des forces et énergies yin et yang, celui des "épousailles" du yin et du yang, se manifestant par un état d'harmonie créatrice" (voir [Grothendieck 86], 458).

Pour le mathématicien – comme, déjà, pour Bachelard¹ du reste – "il y a un élan de connaissance qui anime l'enfant en nous" (voir [Grothendieck 86], 497). Et encore : "La connaissance naît du désir de connaître, donc du désir de comprendre lorsque c'est la raison qui veut connaître. La méthode, instrument du désir, est par elle-même impuissante à enfanter une connaissance – pas plus que les forceps du médecin, ni même les mains expertes d'une sage-femme, n'enfantent. Mais parfois ils assistent utilement la naissance du nouveau-né, quand le temps est mûr et qu'ils savent venir à point..." (voir [Grothendieck 86], 498).

À la différence de Bachelard, sans doute, Grothendieck situe la puissance créative plutôt du côté de la mère (dont il regrette que l'enfant soit trop souvent coupé (voir [Grothendieck 86], 474). Il la met du côté de la mère plutôt que du côté du père (du "patron", du défenseur de la loi) – nécessaire aussi et qu'il sait parfois être, y compris vis-à-vis de lui-même, mais pour lequel il a probablement manqué de modèle. Sa pédagogie encense donc avant tout la libre créativité et non, comme celle de Bachelard, la "surveillance de soi", bien que celle-ci existe aussi évidemment pour Grothendieck, en tout cas dans ses textes mathématiques. On ne fait pas de mathématiques sans observer des règles, bien sûr, mais on n'en fait pas non plus en en restant prisonnier. Cela dit, laissons là ces aspects psychologiques de la création mathématique qui

1. En polémique avec la notion bergsonienne d'"élan vital", on trouve, chez Bachelard, dans le discours préliminaire à *La Formation de l'Esprit scientifique*, l'idée d'"une sorte d'élan qui va du géométrique plus ou moins visuel à l'abstraction complète" (voir [Bachelard 67], 6).

ne nous intéresserons pas directement ici. Avant de présenter la théorie grothendieckienne des dessins d'enfants, tentons de rappeler le contexte mathématique de cette découverte.

2 Contexte mathématique de la notion de "dessin d'enfant" et motivations de Grothendieck

Sur le point d'entrer dans le sujet faussement innocent des "dessins d'enfants", il convient en effet de faire un petit détour historique, ce qui permettra au non-mathématicien de se familiariser avec les concepts de ce champ.

2.1 Bref historique de la question

D'après Pierre Guillot (voir [Guillot 14]) que nous suivrons ici pas à pas, l'origine lointaine de la question des "dessins d'enfants" serait l'étude des "cartes", un mot désignant globalement des graphes plongés dans certaines surfaces d'une manière particulière. Le complément du graphe est alors l'union disjointes de disques topologiques, celle que peut évoquer, par exemple, un assemblage de pays sur une carte du monde. On s'est alors rapidement focalisé sur l'étude des cartes *régulières*, c'est-à-dire celles pour lesquelles le groupe d'automorphismes est aussi grand que possible. Par exemple, de telles « cartes » sont déjà mentionnées dans un livre de Coxeter et Moser datant de 1957 (voir [Coxeter 57]), et il existe sûrement des références plus anciennes.

En 1978, un article de Jones et Singerman (voir [Jones 78]) devenu classique a donné au champ des bases solides en établissant des bijections entre les fameuses « cartes » et des objets combinatoires comme les permutations d'une part, et les surfaces de Riemann compactes d'autre part – donc des courbes algébriques complexes.

C'est dans ce contexte qu'arrive le texte de Grothendieck exposé dans l'"Esquisse d'un programme" (voir [Grothendieck 84]), texte écrit entre 1972 et 1984, mais seulement publié en 1997 (voir [Grothendieck 97]). Les dessins d'enfants (en un sens à peine plus formel que leur représentation non mathématique²) peuvent alors être considérés, ainsi qu'on le verra, comme des courbes algébriques sur \mathbb{C} avec une struc-

2. Il faut quand même non seulement que le graphisme soit "d'un seul tenant" (i.e connexe), comme l'écrit Grothendieck dans l'*Esquisse*, mais qu'une bicoloration puisse être instituée sur l'ensemble des points d'intersection des différents "segments" ou "lignes" et que le tout soit situé sur une surface de Riemann ou sur le plan complexe.

ture supplémentaire (un morphisme dans le plan projectif complexe $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ avec ramification au-dessus de 0, 1 ou ∞ seulement). Grothendieck savait en outre qu'une telle courbe devait être définie sur la clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}$ des rationnels. Il semble que, depuis lors, cette remarque soit connue comme "la partie évidente du théorème de Belyi" par les personnes travaillant dans le domaine, et cela, même si cette partie n'est pas universellement reconnue comme "évidente", et a en fait peu à voir avec Belyi. Selon Pierre Guillot, une des premières preuves complètes et rigoureuses de la correspondance ou du "dictionnaire" mentionné par Grothendieck est probablement celle de Wolfart (voir [Wolfart 97]). Cependant, Grothendieck, comme on le verra, a été très impressionné par la simplicité et la force du résultat de Belyi (voir [Belyi 79]) déclarant qu'à l'inverse, toute courbe algébrique définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ peut être munie d'un morphisme comme ci-dessus (morphisme qu'on nomme aujourd'hui "application de Belyi", alors qu'il est devenu courant, par ailleurs, de parler du "théorème de Belyi" pour signifier l'équivalence de définissabilité de $\overline{\mathbb{Q}}$ d'une part, et la possibilité de trouver une application de Belyi d'autre part). Ainsi la théorie des dessins d'enfants englobe-t-elle toutes les courbes sur $\overline{\mathbb{Q}}$, et Grothendieck a souligné que ce simple fait impliquait que l'action de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ sur les dessins devait être fidèle. On trouve une exposition plaisante et de nombreux exemples de l'action galoisienne sur les dessins d'enfants dans [Lando 04]).

Plus tard, en 1990, Drinfeld a défini le groupe de Grothendieck-Teichmüller \widehat{GT} (voir [Drinfeld 90]) et a étudié son action sur les catégories tressées³, sans le relier explicitement à $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ bien que la motivation de la définition provienne de l'"Esquisse". C'est seulement Ihara en 1994 (voir [Ihara 94]) qui a prouvé l'existence d'un plongement de $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ dans \widehat{GT} . On notera cependant que, si les dessins d'enfants étaient bien l'idée originale de la preuve d'Ihara, ils sont, dans son texte, un peu cachés derrière les détails techniques.

Le groupe de Grothendieck-Teichmüller a, depuis, fait l'objet de nombreuses recherches (voir, par exemple, [Neumann 20]), utilisant assez souvent les outils de Drinfeld.

2.2 Panorama général

Soyons maintenant plus précis. Étant donné une surface de Riemann compacte X , on sait que toute fonction holomorphe sur X est constante. Cela est tout à fait

3. Une catégorie tensorielle tressée est une catégorie tensorielle \mathcal{C} , avec un foncteur \otimes de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ dans \mathcal{C} , munie d'un tressage, c'est-à-dire d'une contrainte de commutativité satisfaisant certains axiomes en relation avec la notion topologique de "tresse".

évident si l'on considère les fonctions holomorphes comme des applications localement conformes, c'est-à-dire des transformations de X dans un plan qui préservent localement les angles. Toute telle transformation étant continue, elle a, par conséquent, une image compacte, mais cette image est aussi ouverte, elle doit donc être constante et correspondre à l'effondrement de X en un point. Autrement dit, l'anneau $\mathcal{O}(X)$ des fonctions holomorphes sur X se réduit aux constantes $\mathcal{O}(X) = \mathbb{C}$.

C'est pourquoi, dans la théorie des surfaces de Riemann compactes, on s'intéresse aux fonctions *méromorphes*, c'est-à-dire celles avec au moins un pôle. Ces fonctions constituent un corps noté $\mathcal{M}(X)$ et peuvent être vues comme des revêtements ramifiés $X \rightarrow \mathbb{S}^2$ de la sphère de Riemann ou de la droite projective complexe.

On peut, par ailleurs, montrer qu'il existe toujours des fonctions méromorphes non constantes sur X (c'est le Théorème d'existence de Riemann). Cela signifie que toute surface de Riemann compacte est une couverture ramifiée de la sphère. Ceci peut encore être utilisé pour montrer que le corps $\mathcal{M}(X)$ est une extension de corps fini de $\mathcal{M}(\mathbb{S}^2) = \mathbb{C}(z)$ (ce dernier corps étant le corps des fonctions rationnelles, autrement dit des fractions polynomiales).

De plus, on peut montrer que chaque extension finie de $\mathbb{C}(z)$ donne lieu à une unique surface de Riemann compacte, à isomorphismes près, avec l'extension donnée comme corps de fonctions méromorphes (théorie de Dedekind-Weber des corps de fonctions algébriques à une variable). Cette surface de Riemann compacte peut toujours être réalisée comme une courbe algébrique dans l'espace projectif complexe $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ (sans singularités, évidemment). Cela signifie que c'est l'ensemble des zéros de certains polynômes homogènes à coefficients complexes, dans l'espace projectif.

Une question intéressante est alors de se demander à quelle condition une surface de Riemann compacte X peut être donnée par une équation à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}$, la clôture algébrique de l'ensemble \mathbb{Q} des rationnels. On sait que c'est le cas si et seulement s'il existe une fonction méromorphe $X \rightarrow \mathbb{S}^2$ avec au plus trois valeurs critiques (ce qui découle du théorème de Belyi). Une fonction de ce type est une couverture de la sphère qui est ramifiée sur trois points (ou moins). Ainsi, l'étude des surfaces de Riemann compactes ou des courbes algébriques planes lisses sur l'ensemble des nombres algébriques $\overline{\mathbb{Q}}$ se réduit à l'étude des revêtements de la sphère ramifiés en trois points, que l'on peut supposer être les points $0, 1$ et ∞ .

Ces revêtements ramifiés $f : X \rightarrow \mathbb{S}^2$ peuvent alors recevoir une représentation géométrique. La fibre de 0 est un ensemble fini de points dans X , qui peuvent être marqués par des points noirs. Les points dans la fibre de 1 sont généralement de couleur blanche. La pré-image de l'intervalle $[0,1]$ (en tant que courbe joignant 0 et

1) est donnée par un ensemble de courbes joignant alternativement des points noirs et blancs. Ce graphe sur X , formé de points noirs, de points blancs et de courbes, est ce qu'on appelle le *dessin d'enfant associé au revêtement ramifié* $f : X \rightarrow \mathbb{S}^2$.

C'est un fait remarquable que la couverture ramifiée $f : X \rightarrow \mathbb{S}^2$ détermine la structure de surface de Riemann de X (par pullback de la même structure dans \mathbb{S}^2), et ainsi, les surfaces de Riemann compactes sur des nombres algébriques (avec une fonction méromorphe spécifiée ramifiée sur au plus trois points) ne sont que des surfaces compactes orientables contenant certains graphes (les graphes associés aux revêtements ramifiés).

Grothendieck s'intéressait essentiellement au groupe de Galois absolu $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$, qui agit sur les coefficients de l'équation d'une courbe algébrique sur $\overline{\mathbb{Q}}$, donnant une autre courbe du même type. Si on considère les dessins associés à ces courbes, force est alors de constater que le groupe de Galois absolu transforme un dessin en un autre dessin, et ainsi, les dessins peuvent être utilisés pour obtenir une interprétation géométrique du groupe de Galois absolu.

3 Les dessins d'enfants dans l'"Esquisse"

Le texte original présentant le raisonnement de Grothendieck est exposé dans la troisième partie de l'"Esquisse d'un programme". Dans ce document, Grothendieck rappelle son intérêt pour les surfaces topologiques et l'étude isotopique des plongements d'un 1-complexe topologique dans une surface compacte, thème de la thèse d'un de ses élèves, Yves Ladegaillerie, en 1974. L'étude ayant conduit à un théorème donnant une description algébrique complète des classes d'isotopie de plongements de ces 1-complexes (ou de surfaces compactes à bord) dans une surface compacte orientée en termes de certains invariants combinatoires très simples, l'idée a été alors d'étendre cette approche aux plongements d'un espace compact quelconque dans une surface compacte orientée. La catégorie "isotopique" des surfaces compactes X , munies d'un 1-complexe topologique K plongé dans X peut alors être décrite en termes de groupoïdes fondamentaux.

Dans les années suivantes, Grothendieck s'est alors intéressé au cas où l'objet (X, K) est en fait une "carte" 2-dimensionnelle telle que celles évoquées informellement plus haut, c'est-à-dire où les composantes connexes de $X \setminus K$ sont des 2-cellules ouvertes et où, de plus, K est muni d'un ensemble fini S de "sommets" tel que les composantes connexes de $K \setminus S$ soient des 1-cellules ouvertes.

En ce cas, la catégorie isotopique des cartes en question admet une description al-

gébrique particulièrement simple, via l'ensemble des "repères" (ou "drapeaux", ou "bi-arcs") associés à la carte, qui se trouve naturellement muni d'une structure d'ensemble à groupe d'opérateurs, sous le groupe :

$$C_2 = \langle \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \mid \sigma_0^2 = (\sigma_0\sigma_2)^2 = 1 \rangle,$$

que Grothendieck appelle le *groupe cartographique (non orienté)* de dimension 2. Celui-ci admet comme sous-groupe d'indice 2 le *groupe cartographique orienté* engendré par les produits en nombre pair des générateurs, qui peut aussi se décrire comme

$$C_2^+ = \langle \rho_s, \rho_f, \sigma \mid \rho_s\rho_f = \sigma, \sigma^2 = 1 \rangle,$$

(avec :

$$\rho_s = \sigma_2\sigma_1, \rho_f = \sigma_1\sigma_0, \sigma = \sigma_0\sigma_2 = \rho_s = \sigma_2\sigma_0,$$

opérations de rotation élémentaire d'un repère autour d'un sommet, d'une face et d'une arête respectivement).

Grothendieck observe alors qu'il y a un dictionnaire parfait entre la situation topologique des cartes compactes (resp. des cartes compactes orientées), d'une part, et les ensembles finis à groupe d'opérateurs C_2 (resp. C_2^+) de l'autre, dictionnaire dont l'existence était apparemment plus ou moins connue, mais jamais énoncée en précision ni développée comme telle.

La réflexion prend un aspect nouveau avec cette remarque "simple" de Grothendieck que le groupe C_2^+ peut s'interpréter comme un quotient du groupe fondamental d'une sphère orientée privée de trois points, respectivement numérotés 0, 1, 2, les opérations ρ_s, σ, ρ_f s'interprétant, quant à elles, comme les lacets autour de ces points, satisfaisant la relation familière :

$$\ell_0\ell_1\ell_2 = 1.$$

La relation supplémentaire $\sigma^2 = 1$, c'est-à-dire, $\ell_1^2 = 1$ signifie, quant à elle, qu'on s'intéresse au quotient du groupe fondamental correspondant à un indice de ramification imposé 2 au point 1, qui classe donc les revêtements de la sphère, ramifiés au plus en les points 0, 1, 2, avec une ramification égale à 1 ou 2 en les points au dessus de 1.

Ainsi, les cartes orientées compactes forment une catégorie isotopique équivalente à celle de ces revêtements, soumis de plus à la condition supplémentaire d'être des revêtements finis.

Grothendieck conclut :

"Prenant maintenant comme sphère de référence la sphère de Riemann, ou droite projective complexe, rigidifiée par les trois points 0, 1 et ∞ (ce dernier remplaçant donc 2), et se rappelant que tout revêtement ramifié fini d'une courbe algébrique complexe hérite lui-même d'une structure de courbe algébrique complexe, on aboutit à cette constatation, qui huit ans après me paraît encore toujours aussi extraordinaire : toute carte orientée "finie" se réalise canoniquement sur une courbe algébrique complexe ! Mieux encore, comme la droite projective complexe est définie sur le corps de base absolue \mathbb{Q} , ainsi que les points de ramification admis, les courbes algébriques obtenues sont définies non seulement sur \mathbb{C} , mais sur la clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}$ de \mathbb{Q} dans \mathbb{C} . Quant à la carte de départ, elle se retrouve sur la courbe algébrique, comme image inverse du segment réel $[0, 1]$ (où 0 est considéré comme un sommet, et 1 comme milieu d'une "arête pliée" ayant 1 comme centre), lequel constitue dans la sphère de Riemann la "2-carte orientée universelle". Les points de la courbe algébrique X au dessus de 0, de 1 et de ∞ ne sont autres que les sommets, et les "centres" des arêtes et des faces respectivement de la carte (X, K) , et les ordres des sommets et des faces ne sont autres que les multiplicités des zéros et des pôles de la fonction rationnelle (définie sur \mathbb{Q}) sur X , exprimant sa projection structurale vers $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ " (voir [Grothendieck 84],11-12).

Le commentaire plus philosophique qui suit mérite également d'être rapporté :

"Cette découverte, qui techniquement se réduit à si peu de choses, a fait sur moi une impression très forte, et elle représente un tournant décisif dans le cours de mes réflexions, un déplacement notamment de mon centre d'intérêt en mathématique, qui soudain s'est trouvé fortement localisé. Je ne crois pas qu'un fait mathématique m'ait jamais autant frappé que celui-là, et ait eu un impact psychologique comparable. Cela tient sûrement à la nature tellement familière, non technique, des objets considérés, dont tout dessin d'enfant griffonné sur un bout de papier (pour peu que le graphisme soit d'un seul tenant) donne un exemple parfaitement explicite. À un tel dessin se trouvent associés des invariants arithmétiques subtils, qui seront chamboulés complètement dès qu'on y rajoute un trait de plus" (voir [Grothendieck 84]).

Une note de fin de texte, à la saveur très spinoziste (étant donné l'importance qu'elle accorde aux définitions d'essence (voir [Spinoza 64¹], § 51 ; [Spinoza 64²], 60), situe cette expérience dans le contexte d'une autre, probablement à l'origine de la vocation de Grothendieck :

"Je puis faire exception pourtant d'un autre "fait", du temps où, vers l'âge de douze ans, j'étais interné au camp de concentration de Rieucros (près de Mende). C'est là

que j'ai appris, par une détenue, Maria, qui me donnait des leçons particulières bénévoles, la définition du cercle. Celle-ci m'avait impressionné par sa simplicité et son évidence, alors que la propriété de "rotondité parfaite" du cercle m'apparaissait auparavant comme une réalité mystérieuse au-delà des mots. C'est à ce moment, je crois, que j'ai entrevu pour la première fois (sans bien sûr me le formuler en ces termes) la puissance créatrice d'une "bonne" définition mathématique, d'une formulation qui décrit l'essence. Aujourd'hui encore, il semble que la fascination qu'a exercé sur moi cette puissance-là n'a rien perdu de sa force" (voir [Grothendieck 84], 52-53).

4 Classes d'isomorphismes des dessins et classes d'isomorphismes des courbes algébriques

Il revient à Leila Schneps d'avoir développé de manière parfaitement claire le raisonnement de Grothendieck évoqué dans l'"Esquisse d'un programme".

Ce que Grothendieck a proposé, en réalité, revient à utiliser ce théorème particulier qu'est le théorème de Belyi pour décrire la bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphismes des dessins d'enfants et l'ensemble des classes d'isomorphismes des courbes algébriques définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$, la clôture algébrique de \mathbb{Q} dans \mathbb{C} . Comme le résume Leila Schneps (voir [Schneps 94], 47), Grothendieck a suggéré la possibilité d'associer une courbe algébrique définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ à une carte cellulaire sur une surface topologique, et a remarqué que toutes les courbes algébriques sur $\overline{\mathbb{Q}}$ pouvaient être obtenues de cette manière en conséquence du (ou en relation avec le) théorème de Belyi (si l'on intègre la précision apportée par Guillot). Nous nous bornons ici à préciser quelques éléments de cette démarche en suivant désormais l'article de Schneps.

X étant une courbe algébrique définie sur \mathbb{C} , on sait, par un théorème classique, que X est aussi définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ (autrement dit, possède un modèle défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$) si et seulement s'il existe une fonction holomorphe non constante $f : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ dont toutes les valeurs critiques sont dans $\overline{\mathbb{Q}}$.

On notera classiquement, comme le fait Grothendieck, π_1 le groupe fondamental de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 - \{0, 1, \infty\}$, engendré par les boucles ℓ_0, ℓ_1 et ℓ_{∞} autour de 0, 1 et ∞ , avec la relation $\ell_0 \ell_1 \ell_{\infty} = 1$. On atteint alors le résultat annoncé précédemment au moyen de lemmes et de théorèmes dont on trouvera les démonstrations dans l'article de Leila Schneps déjà cité (voir [Schneps 94]).

Lemme 4.1. *Il existe une bijection entre les classes de conjugaison des sous-groupes d'indice fini de π_1 et les classes d'isomorphisme des revêtements finis X de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ ra-*

mifiés uniquement sur $0, 1$ et ∞ .

Posons maintenant $\pi'_1 = \pi_1 / \langle \ell_1^2 \rangle$. On a alors le corollaire suivant :

Corollaire 4.2. *Il existe une bijection entre les classes de conjugaison des sous-groupes d'indice fini de π'_1 et les classes d'isomorphisme des revêtements de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ ramifiés uniquement sur $0, 1$ et ∞ , tel que la ramification sur 1 soit de degré au plus 2 .*

Des considérations développées par Belyi (voir [Belyi 79]) permettent alors d'énoncer le résultat suivant :

Théorème 4.3 (Belyi). *Soit X une courbe algébrique définie sur \mathbb{C} . Alors X est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ si et seulement s'il existe une fonction holomorphe $f : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ telle que toutes les valeurs critiques de f soient dans l'ensemble $\{0, 1, \infty\}$.*

Introduisons la définition suivante :

Définition 4.1. *Un morphisme $\beta : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ dont toutes les valeurs critiques sont dans $\{0, 1, \infty\}$ est appelé un morphisme de Belyi. On appelle β un morphisme de Belyi pré-propre si tous les ordres de ramification sur 1 sont inférieurs ou égaux à 2 , et propre s'ils sont tous exactement égaux à 2 .*

On verra plus loin qu'un dessin d'enfant au sens de Grothendieck correspond à une fonction de Belyi pré-propre et possède la bonne propriété d'avoir une arête en correspondance avec chaque pré-image de 1 sous β ; un dessin correspondant à une fonction de Belyi propre a, quant à lui, un sommet aux deux extrémités de chaque arête. On utilisera également les termes "pré-propre" et "propre" pour décrire les dessins d'enfants.

Corollaire 4.4 (du théorème 4.3). *Une courbe algébrique définie sur \mathbb{C} est définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ si et seulement s'il existe un morphisme de Belyi propre $\beta : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.*

Démonstration. (Schneps) Si $\alpha : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ est un morphisme de Belyi, alors $\beta = 4\alpha(1 - \alpha)$ est un morphisme de Belyi propre. \square

Si X est une courbe algébrique définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et β est un morphisme de Belyi sur cette courbe, on appelle le couple (X, β) une *paire de Belyi*. Deux couples de Belyi (X, β) et (Y, α) seront dits alors isomorphes s'il existe un isomorphisme $\phi : X \rightarrow Y$ tel que $\beta = \alpha \circ \phi$. Si β est propre, on appelle (X, β) une *paire de Belyi propre*.

Voici maintenant la notion formelle de "dessin d'enfants", telle que la présente Leila Schneps.

Définition 4.2 (Dessin d'enfant). *Un dessin d'enfant au sens de Grothendieck est un triplet $X_0 \subset X_1 \subset X_2$ où X_2 est le modèle topologique d'une surface de Riemann connexe compacte, X_0 est un ensemble fini de points, $X_1 \setminus X_0$ est une union finie disjointe de segments et $X_2 \setminus X_1$ est une surface finie disjointe réunion de cellules ouvertes, telle qu'une structure bipartite puisse être mise sur l'ensemble des sommets X_0 ; à savoir que les sommets peuvent être marqués avec deux marques distinctes de telle sorte que les voisins directs d'un sommet donné soient tous de la marque opposée.*

Définition 4.3. *Deux dessins $D = X_0 \subset X_1 \subset X_2$ et $D' = X'_0 \subset X'_1 \subset X'_2$ sont isomorphes s'il existe un homéomorphisme de X_2 dans X'_2 induisant un homéomorphisme de X_1 dans X'_1 et un autre de X_0 dans X'_0 . On utilise parfois la terminologie "dessin abstrait" pour une classe d'isomorphisme de dessins. Ceci indique que la structure du dessin est déterminée, mais qu'elle n'est associée à aucun plongement particulier dans une surface topologique complexe.*

À cause du corollaire 4.4 ci-dessus, en étudiant la correspondance des paires de Belyi avec les dessins on peut se limiter aux dessins propres, comme le fait Grothendieck dans [Grothendieck 84]; on a alors la définition plus simple :

Définition 4.4. *Un dessin de Grothendieck propre est un triplet $X_0 \subset X_1 \subset X_2$ où X_2 est le modèle topologique d'une surface de Riemann connexe compacte, X_0 est un ensemble fini de points et $X_1 \setminus X_0$ est une union finie disjointe de segments et $X_2 \setminus X_1$ est une union finie disjointe de cellules ouvertes.*

On introduit encore la définition suivante :

Définition 4.5. *Un marquage sur un dessin propre est le choix fixe d'un point sur chaque composante de $X_1 \setminus X_0$, et d'un point dans chaque cellule ouverte de $X_2 \setminus X_1$. On utilisera toujours la notation \bullet pour un point en X_0 , la notation \star pour un point en $X_1 \setminus X_0$ et enfin \circ pour un point en $X_2 \setminus X_1$.*

Rappelons maintenant que le groupe cartographique C_2 mentionné par Grothendieck est celui donné par les trois générateurs σ_0, σ_1 et σ_2 ainsi que par les relations $\sigma_0^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 1$ et $(\sigma_0\sigma_2)^2 = 1$. Le groupe cartographique orienté C_2^+ , quant à lui, est le sous-groupe d'indice 2 de C_2 donné par tous les éléments pairs de C_2 . Un ensemble générateur est donné par $\rho_0 = \sigma_1\sigma_0, \rho_1 = \sigma_0\sigma_2$ et $\rho_2 = \sigma_2\sigma_1$, avec les relations $\rho_1^2 = 1$ et $\rho_0\rho_1\rho_2 = 1$. Les trois générateurs du groupe C_2 agissent alors sur ce qu'on appelle l'ensemble-drapeau du dessin, c'est-à-dire un ensemble de triangles dont les sommets sont marqués (\bullet, \star et \circ).

Il s'ensuit le théorème suivant :

Théorème 4.5 (Malgoire, Voisin, Jones, Singerman). *Il existe une bijection entre les classes d'isomorphisme des dessins d'enfants propres et les classes de conjugaison des sous-groupes de C_2^+ d'indice fini.*

Et, on arrive finalement à la correspondance fondamentale de Grothendieck :

Théorème 4.6. *Il existe une bijection entre l'ensemble des dessins abstraits propres et l'ensemble des classes d'isomorphisme des paires de Belyi propres.*

Démonstration. (Schneps) Les groupes π_1' et C_2^+ sont canoniquement isomorphe. Soit $\phi : C_2^+ \rightarrow \pi_1'$, défini par $\phi(\rho_i) = \ell_i, i = 0, 1$, et $\phi(\rho_2) = \ell_\infty$, alors le théorème est une conséquence immédiate du lemme 4.1 et du théorème 4.6. \square

Comme l'avait suggéré Grothendieck et comme l'ont développé Schneps, Girono et Gonzalez-Diez, et bien d'autres, on peut donc faire correspondre explicitement des courbes algébriques complexes à des dessins particuliers, ce qui illustre ou sensibilise l'action du groupe de Galois, mais, inversement, définit sur les dessins en question une structure de groupe isomorphe au premier. La théorie peut être plus ou moins simple selon le genre ($g = 0, g = 1$) de la surface sous-jacente. Dans le cas de surfaces de genre 1, il faut parfois faire appel aux bases de Gröbner pour calculer les polynômes et résoudre le problème de la correspondance qui peut s'avérer passablement compliquée, en particulier quand les dessins ne sont pas des arbres, comme dans la Fig. 2 (nous ne traiterons pas de ces cas-là) :

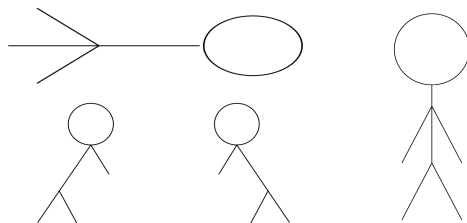


FIGURE 2 – Dessins d'enfants typiques

5 Simplifications et applications

Une définition un peu différente de la notion de *dessin d'enfant* peut être trouvée dans le livre d'Ernesto Girono et Gabino González-Diez (voir [Girono 12], 207).

Pour ces auteurs :

Définition 5.1. *Un dessin d'enfant, ou simplement un dessin, est une paire (X, \mathcal{D}) , où X est une surface topologique compacte orientée, et $\mathcal{D} \subset X$ un graphe fini tel que :*

1. \mathcal{D} est connexe ;
2. \mathcal{D} possède une bi-coloration, c'est-à-dire que ses sommets ont reçu soit la couleur noire, soit la couleur blanche et qu'ils sont connectés par une arête reliant un sommet d'une couleur donnée à un sommet de l'autre couleur ;
3. $X \setminus \mathcal{D}$ est la réunion d'un nombre fini de disques topologiques, qui sont appelés les faces de \mathcal{D} .

Remarque 5.1. *On notera que la condition (1) est une conséquence de la condition (3), tout chemin de X étant homotope à un chemin porté par la frontière des faces tout au long du dessin.*

Remarque 5.2. *La définition revient pratiquement à celle de Leila Schneps. On notera cependant que certains auteurs omettent la condition (2), au motif qu'on peut toujours associer à un graphe 1-coloré un dessin d'enfant en plaçant un nouveau sommet au milieu de chaque arête, ce qui le transforme ipso-facto en graphe bi-chromatique. Mais ce processus ne vaut que lorsque les sommets de couleur blanche sont de degré 2, ce qui n'est pas très naturel du point de vue des graphes bi-chromatiques et qui, définis sur des surfaces topologiques orientables, sont ce qu'on appelle des "cartes" (voir [Jones 78]).*

Le genre de (X, \mathcal{D}) est simplement le genre⁴ de la surface topologique X .

Comme pour Schneps, deux dessins d'enfants (X_1, \mathcal{D}_1) et (X_2, \mathcal{D}_2) sont considérés comme *équivalents* s'il existe un homéomorphisme préservant l'orientation de X_1 à X_2 dont la restriction à \mathcal{D}_1 induit un isomorphisme entre les graphes colorés \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 . Ceci montre que la structure d'un dessin est déterminée et n'est pas associée à un plongement dans une surface topologique particulière.

Exemples

Parmi les exemples de dessins d'enfants donnés par Gironde et Gonzales-Diez, on trouve le tétraèdre (voir Fig. 3), à condition qu'il soit inscrit dans une sphère topo-

4. Rappelons que le genre d'une surface topologique compacte connexe sans bord (c'est-à-dire dont tout point possède un voisinage homéomorphe au plan) est le nombre maximum de courbes fermées simples sans points communs que l'on peut tracer à l'intérieur de cette surface sans la déconnecter (c'est-à-dire telles que le complémentaire de ces courbes reste connexe).

logique et qu'on insère entre ses sommets 1-colorés (par exemple noirs) des points d'une autre couleur (par exemple, blancs), pour le transformer ainsi en graphe bi-chromatique.

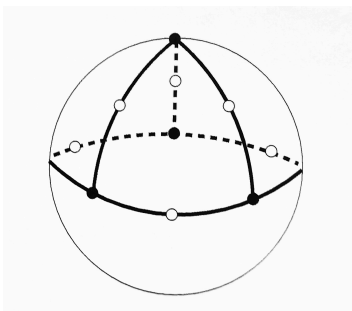


FIGURE 3 – Tétrahédre plongé dans une sphère topologique (d'après [Girondo 12], 208)

Les arbres contenus dans une sphère sont également, à l'évidence, des dessins d'enfants à une seule face (tout arbre pouvant toujours être bicoloré).

Un graphe correspondant aux sommets, aux arêtes et aux faces d'un cube est un dessin d'enfant (à 6 faces, 12 arêtes, 4 sommets noirs et 4 sommets blancs. La frontière de toute face est constituée de 4 arêtes et tous les sommets sont incidents à 3 arêtes (en d'autres termes, chacun est de degré 3).

Tous les polyèdres sphériques en général (par exemples tous les solides platoniciens) peuvent être vus également comme des dessins d'enfants (quelquefois, comme dans le cas du tétraèdre, en plaçant des sommets supplémentaires intermédiaires afin d'en faire des graphes bi-colorés). Il en va de même des 13 solides d'Archimède⁵, de leurs duaux (polyèdres de Catalan) et de leurs parents plus ou moins éloignés, tels le polyèdre de Dürer ou le pseudo-rhombicuboctaèdre et ses différentes cartes (voir [Lando 04], 113-115; [Magot 00]). Dans ce dernier cas, cependant, il faut ajouter des points blancs (ou noirs) pour que les cartes conjuguées soient bi-colorables.

5. Un solide d'Archimède est un polytope dont les faces sont des polygones réguliers, et dont les sommets sont "indistinguables" : cela signifie que les mêmes types de polygones dans le même ordre cyclique (ou son inverse) sont adjacents à chaque sommet. L'histoire des solides d'Archimède est assez compliquée. Traditionnellement, leur découverte est attribuée à Archimède (Héron et Pappus se réfèrent à un manuscrit qui aurait péri dans un incendie de la bibliothèque d'Alexandrie). Ils ont été redécouverts (et baptisés de leurs noms actuels) par Johannes Kepler. Avant lui, des listes partielles ont été trouvées par Piero della Francesca, Albrecht Dürer et Wenzel Jamnitzer. Des images de certains des solides d'Archimède ont été réalisées par Léonard de Vinci.

6 Quelques réalisations plus particulières : le cas des arbres

Comment agit concrètement le groupe de Galois sur les dessins ? Remarquons d'abord qu'en vertu du Corollaire 4.4, on doit se réduire à l'étude des dessins "propres", qui sont une particularisation des dessins. Ensuite, la théorie générale, qui développe l'intuition prodigieuse de Grothendieck reliant les corps de nombres aux cartes à 2 dimensions, n'est pas évidente du tout sur des surfaces de genre 1. Nous nous bornerons ici à étudier le cas des cartes les plus simples, à savoir les arbres planaires (voir [Bétréma 05]; [Bétréma 96]) ou les réseaux arborescents plans, sur des surfaces de genre 0⁶.

6.1 Points critiques, valeurs critiques d'un polynôme complexe

Définissons avant tout de façon précise les points critiques ou valeurs critiques d'un polynôme complexe.

Considérons un polynôme $P(z)$ à coefficients complexes. Il projette un plan complexe sur un autre. Prenons un point $w \in \mathbb{C}$ et considérons son image inverse $P^{-1} = \{z | P(z) = w\}$.

En général, cet ensemble est constitué de n points distincts, c'est-à-dire de solutions de l'équation $P(z) = w$, où n est le degré du polynôme P . Mais pour certaines valeurs spécifiques de w cette équation peut avoir des racines multiples, l'image inverse de w ayant alors moins de n points. Les racines multiples de $P(z) = w$ sont évidemment les racines de $P'(z) = 0$. Un point $z \in \mathbb{C}$, auquel $P'(z) = 0$, est appelé *point critique*. Une valeur $w = P(z)$ à un point critique z est appelée une valeur critique. On dit que le point critique z est d'ordre k , si en ce point $P'(z) = 0, P''(z) = 0, \dots, P^{(k-1)}(z) = 0, P^{(k)}(z) \neq 0$ (le plus petit ordre possible d'un point critique est donc égal à 2). Le nombre de points critiques, c'est-à-dire les racines de $P'(z)$, est $n - 1$ (avec la multiplicité prise en compte). Mais le nombre de points

6. Il est avantageux de commencer par le cas le plus simple. Lorsque la surface de Riemann X est de genre zéro, il s'agit de la sphère complexe $\overline{\mathbb{C}}$, et la fonction rationnelle correspondante est un polynôme. Or un polynôme de degré n a toujours un unique pôle de multiplicité n au point ∞ ; donc, l'hypercarte correspondante a une seule face, c'est-à-dire qu'il s'agit d'un arbre planaire bicolore. Comme l'explique Lando (voir [Lando 04], 80), dans de telles circonstances, on peut simplement oublier la valeur ∞ et travailler sur le plan complexe habituel \mathbb{C} , en recherchant des polynômes avec non pas trois mais deux valeurs critiques finies.

critiques peut être beaucoup plus petit que cela ⁷.

Considérons maintenant un segment de droite joignant deux points c_1 et c_2 sur le plan w . On le notera $[c_1, c_2]$, même dans le cas où ses extrémités ne sont pas réelles. L'image inverse $P^{-1}([c_1, c_2])$ de ce segment est, d'une manière générale, une union disjointe de n ensembles séparés sur le plan z , chacun étant homéomorphe à un segment, mais pas nécessairement droit. On appellera quand même "segments" ces lignes. Pour distinguer les extrémités des segments, on marquera l'un d'eux en noir et l'autre en blanc. Si, par hasard, c_1 ou c_2 (ou les deux) sont des valeurs critiques de $P(z)$, et s'il n'y a pas de valeurs critiques à l'intérieur du segment $[c_1, c_2]$, alors certains des segments sur le plan z se recolleront, formant ainsi un graphe. Dans ce graphe, les sommets de degré 1 sont des points ordinaires (non critiques), et les sommets de degré supérieur à 1 sont des points critiques, leur ordre coïncidant avec le nombre d'arêtes incidentes.

Le cas le plus intéressant est celui où $P(z)$ n'a qu'une ou deux valeurs critiques, à savoir $\{c_1, c_2\}$.

6.2 Polynômes de Shabat

Définition 6.1. On appelle polynôme $P(z)$ un polynôme de Shabat s'il existe deux nombres complexes c_1 et c_2 tels que :

$$P'(z) = 0 \Rightarrow P(z) \in \{c_1, c_2\}.$$

En clair, l'image inverse du segment $[c_1, c_2]$ sous le polynôme de Shabat est un arbre dessiné sur le plan, autrement dit un arbre planaire. Reprenons ici les exemples des auteurs cités en note, à savoir $P(z) = z^n$ et $P(z) = T_n(z)$ (polynôme de Chebyshev). L'image inverse du segment $[0, 1]$ sous z^n sera un arbre en forme d'étoile et l'image inverse du segment $[-1, 1]$ sous $T_n(z)$ sera un arbre en forme de chaîne (voir Fig. 4).

La classe des polynômes de Shabat est invariante sous toute transformation linéaire non dégénérée des plans z et w . On a :

$$z \rightarrow cz + d \quad \text{et} \quad w \rightarrow Cw + D, \quad c, d, C, D \in \mathbb{C}, c \neq 0, C \neq 0.$$

7. Les auteurs donnent deux exemples simples : celui où le polynôme $P(z) = z^n$ avec un point critique d'ordre n , à savoir, $z = 0$ et une valeur critique $w = 0$; celui où l'on a un polynôme de Chebyshev du type $T_n(z) = \cos(n \arccos(z))$. En ce cas, il y a $n - 1$ points critiques d'ordre 2, nommément $z = \cos(k\pi/n), k = 1, 2, \dots, n - 1$, et seulement deux valeurs critiques : $w = \pm 1$.

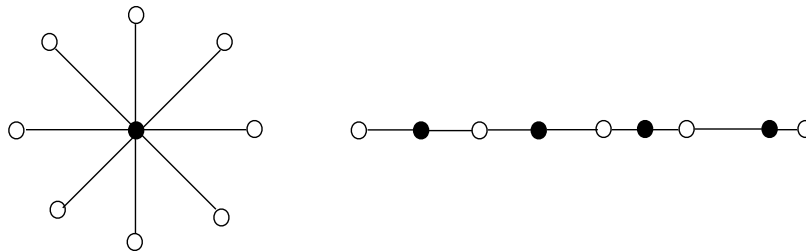


FIGURE 4 – Etoile et chaîne

Au moyen de la deuxième transformation (du plan w) nous pouvons transformer le segment $[c_1, c_2]$ en n'importe quel autre segment. Il existe deux choix canoniques du segment sur le plan w : $[0,1]$ et $[-1,1]$. Il est parfois plus commode d'utiliser une forme canonique, parfois l'autre, et parfois de ne prendre qu'un segment arbitraire $[c_1, c_2]$.

Introduisons maintenant une seconde définition, qui va permettre de classer les polynômes, et donc les graphes correspondants :

Définition 6.2. *Deux polynômes de Shabat $P(z)$ et $Q(z)$ sont dits équivalents s'il existe $c, d, C, D \in \mathbb{C}, c \neq 0, C \neq 0$, tel que*

$$P(z) = CQ(cz + d) + D.$$

La correspondance de Grothendieck se particularise, au plan des arbres, par l'énoncé suivant :

Théorème 6.1 (Riemann, Belyi, Grothendieck, Shabat). *Il existe une bijection entre l'ensemble des arbres planaires bicolores combinatoires et l'ensemble des classes d'équivalence des polynômes de Shabat.*

Un arbre étant un graphe connexe sans cycles ou sans circuits, un arbre *planaire* est un arbre qui est dessiné sur (ou inséré dans) le plan. Une *image* d'un arbre sur le plan détermine, pour tout sommet de l'arbre, une permutation cyclique sur l'ensemble des sommets adjacents. Un isomorphisme d'arbres planaires est un isomorphisme d'arbres qui conserve ces permutations cycliques (et donc l'orientation). Une classe d'isomorphismes d'arbres planaires est appelée arbre planaire combinatoire.

Les arbres planaires combinatoires ont été énumérés par [Harary 64] en utilisant le

théorème de Polya (voir [Pólya 37];[Pólya 87]). Des formules plus explicites pour le nombre d'arbres planaires sont données dans [Labelle 93] ; voir aussi [Tutte 64].

Tout arbre a une structure naturelle de graphe biparti : ses sommets pourraient être colorés en deux couleurs (par exemple, noir et blanc) de telle sorte que les sommets adjacents aient des couleurs différentes. Après avoir choisi l'une des deux colorations possibles, on obtient un arbre planaire bicolore. Un isomorphisme d'arbres planaires bicolores doit conserver non seulement la structure de l'arbre planaire, mais aussi les couleurs des sommets correspondants (voir, par exemple, Fig. 5).



FIGURE 5 – Deux arbres planaires bicolores isomorphes

Soit n le nombre d'arêtes, et soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ (resp. $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$) la suite de degrés de sommets noirs (resp. blancs), ordonnés par ordre décroissant (voir [Tutte 64], 272). Chaque arête joignant un sommet noir avec un sommet blanc, on a, par conséquent :

$$\sigma_{i=1}^p \alpha_i = \sigma_{j=1}^q \beta_j = n.$$

D'autre part, l'arbre ayant p sommets noirs et q sommets blancs, on a $p + q = n + 1$. Ainsi, $\langle \alpha, \beta \rangle$ est une paire de partitions de nombre n , ayant ensemble un total de $n + 1$ parties. On l'appelle "ensemble des degrés de l'arbre", et on dira aussi que l'arbre en question est de type $\langle \alpha, \beta \rangle$. Le lemme simple suivant montre que l'énoncé réciproque est également vrai :

Lemme 6.2. *Pour tout couple $\langle \alpha, \beta \rangle$ de partitions de nombre n ayant respectivement p et q parties, telles que $p + q = n + 1$, il existe au moins un arbre planaire bicolore ayant ce couple pour ensemble de degrés.*

Si on échange les couleurs noir et blanc, l'ensemble des degrés $\langle \alpha, \beta \rangle$ sera remplacé par $\langle \beta, \alpha \rangle$. Ainsi, on obtient généralement un arbre bicolore d'un autre type. Mais

dans le cas où $\alpha = \beta$ le type reste le même. Par exemple, les deux arbres illustrés à la Fig. 3 ont le même type $\langle 3, 2, 1, 1; 3, 2, 1, 1 \rangle$.

6.3 Calcul des polynômes de Shabat

Soit $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q \rangle$, le type d'un arbre donné; on pose aussi $[c_1, c_2] = [0, 1]$. Alors pour trouver le polynôme de Shabat correspondant il faut trouver $n + 2$ nombres complexes $\lambda, a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, b_2, \dots, b_q$ tels que l'on ait simultanément :

$$P(z) = \lambda(z - a_1)^{\alpha_1}(z - a_2)^{\alpha_2} \dots (z - a_p)^{\alpha_p}$$

et :

$$P(z) - 1 = \lambda(z - b_1)^{\beta_1}(z - b_2)^{\beta_2} \dots (z - b_q)^{\beta_q}.$$

De plus, comme le montrent les auteurs, toutes les valeurs a_i et b_j doivent être différentes. Les égalités entre coefficients fournissent n équations algébriques (le terme principal étant le même). Deux "degrés de liberté" supplémentaires restant à disposition, on peut les utiliser comme on veut. On peut ainsi fixer les positions de deux points quelconques, ou faire un autre choix qui place un arbre dans une position non ambiguë sur le plan complexe.

Appliquée à la lettre, cette méthode serait cependant trop compliquée. Mais c'est là qu'intervient le groupe de Galois.

6.4 L'action du groupe de Galois

Soit \mathbb{A} le corps des nombres algébriques, c'est-à-dire le corps de toutes les racines (complexes) des polynômes à coefficients rationnels. Le groupe de Galois $\Gamma = Gal(\mathbb{A}[\mathbb{Q}])$ est le groupe des automorphismes du corps \mathbb{A} . Ce groupe agit sur les racines des polynômes à coefficients rationnels en permutant (certains d'entre eux). Pour un polynôme irréductible spécifique f à coefficients rationnels, le groupe de Galois de f est le groupe-quotient de Γ par le sous-groupe de ces automorphismes qui ne déplacent pas les éléments non seulement de \mathbb{Q} mais aussi de son extension par les racines de f . Pour un polynôme irréductible de degré n , c'est un sous-groupe du groupe symétrique S_n , qui agit transitivement sur les racines de f .

On a montré précédemment que les coefficients des polynômes de Shabat pouvaient toujours être transformés en nombres algébriques (pour autant qu'on ait procédé correctement). Ils appartiennent à quelque corps de nombres, c'est-à-dire une extension

finie du corps \mathbb{Q} des nombres rationnels par les racines d'un polynôme irréductible f .

L'action du groupe de Galois Γ , outre les nombres rationnels, conserve également toutes les relations algébriques à coefficients rationnels. Ainsi, agissant sur les coefficients d'un polynôme de Shabat, Γ le transforme en d'autres polynômes de Shabat. Par conséquent, l'action de Γ sur les arbres planaires est bien définie. L'objectif principal de la théorie est de comprendre la nature combinatoire et géométrique de cette action. Par exemple, de ce qui a été vu précédemment, il ressort que le type $\langle \alpha, \beta \rangle$ est un invariant de cette action : les arbres appartenant à la même orbite du groupe ont le même type. Un ensemble d'arbres du même type est appelé une famille. Chaque famille est soit une orbite d'action de groupe de Galois, soit une réunion disjointe de plusieurs orbites.

Comme autre invariant combinatoire on pourrait citer l'ordre de symétrie d'un arbre ; rappelons qu'un arbre planaire ne peut avoir qu'un groupe cyclique de symétries. La notion de "corps de définition" d'une carte serait assez compliquée à préciser et impliquerait la théorie de la cohomologie de Galois. Mais dans le cas d'un arbre, c'est juste le plus petit corps de nombres auquel appartiennent les coefficients du polynôme de Shabat correspondant. Le domaine de définition est le même pour toute l'orbite. Le groupe de Galois d'une orbite particulière pourrait d'ailleurs être défini comme le groupe des automorphismes du domaine de définition.

6.5 Action sur un arbre

Nous reprendrons ici un exemple donné par [Bétréma 96] :

Considérons un arbre planaire du type $\langle 3, 2, 2; 2, 2, 1, 1, 1 \rangle$ (voir Fig. 6). Plaçons le sommet noir de degré 3 en $z = 0$: soit deux autres sommets noirs, les racines d'un polynôme quadratique $z^2 - 2z + a$ (le coefficient -2 devant z signifie que l'on place ces deux racines de telle manière que le point médian du segment qui les joint se situe en $z = 1$).

Ainsi, nous pouvons rechercher un polynôme de Shabat ayant la forme :

$$P(z) = z^3(z^2 - 2z + a)^2$$

(ce qui signifie qu'on prend le point final c_1 d'un segment d'image égal à zéro et qu'on n'impose aucune condition à c_2).

La dérivée de $P(z)$ est égale à :

$$P'(z) = z^2(z^2 - 2z + a)(7z^2 - 10z + 3a).$$

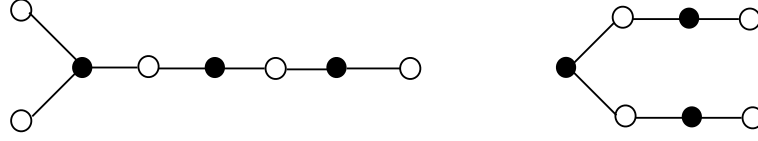


FIGURE 6 – L'arbre $\langle 3, 2, 2; 2, 2, 1, 1, 1 \rangle$ et son conjugué

Deux sommets blancs de degré 2 sont les racines du dernier facteur $Q(z) = 7z^2 - 10z + 3a$. Ces deux points doivent satisfaire deux conditions :

(1) Ils doivent être distincts, donc $\delta = 21a - 25 \neq 0$;

et :

(2) Les valeurs de $P(z)$ doivent être égales entre elles.

Le reste de la division euclidienne de $P(z)$ par $Q(z)$ donne :

$$\begin{aligned} R &= \frac{-48a^3z}{343} - \frac{768a^3}{2401} + \frac{3664a^2z}{2401} + \frac{12480a^2}{16807} - \frac{46400az}{16807} - \frac{48000a}{117649} + \frac{160000z}{117649}, \\ &= z\left(\frac{-48a^3}{343} + \frac{3664a^2}{2401} - \frac{46400a}{16807} + \frac{160000}{117649}\right) - \frac{768a^3}{2401} + \frac{12480a^2}{16807} - \frac{48000a}{117649}, \end{aligned}$$

qui est de la forme : $Az + B$.

On observe que les dénominateurs sont des puissances de 7. On réduit donc tout au même dénominateur, à savoir $117649 = 7^6$. On obtient alors :

$$A = -\frac{16}{7^6}(+1029a^3 - 11221a^2 + 20300a - 10000).$$

Et, après factorisation :

$$A = -\frac{16}{7^6}(21a - 25)(49a^2 - 476a + 400),$$

Le même type de calcul amène :

$$B = -\frac{196}{7^6}a(28a - 25)(7a - 10).$$

La condition (2) conduit à l'équation $A = 0$, d'où :

$$f(a) = 49a^2 - 476a + 400 = 0, \quad a = \frac{1}{7}(34 \pm 6\sqrt{21}).$$

A priori il est difficile de décider quel signe on doit prendre (plus ou moins). En prenant les deux, on obtient, comme on l'a vu en Fig. 5, deux arbres du type $\langle 3, 2, 2; 2, 2, 1, 1, 1 \rangle$. Ces deux arbres sont conjugués l'un de l'autre ; ils forment une orbite d'action du groupe de Galois, et leur corps de définition est $\mathbb{Q}(\sqrt{21})$.

7 Coloration de graphes, ordres, réseaux : structures mathématiques et dessins d'enfants

7.1 Coloration de graphes

Le nombre chromatique $\chi(G)$ d'un graphe G est le plus petit entier k tel que les sommets de G soit coloriables en k couleurs. Si $\chi(G) = k$, G est dit k -chromatique.

Rappel :

Théorème 7.1. $\chi(G) = 2$ si et seulement si G ne contient pas de cycle impair (G est biparti).

Outre les graphes bipartis, les arbres (graphes connexes sans cycles ou sans circuit), sont encore justiciables de la théorie des dessins d'enfants (au sens de Grothendieck) tous les graphes 2-colorables, les plans projectifs finis du type $\text{PG}[1, n]$ (qui sont des droites, donc des arbres), les treillis booléens, les réseaux arborescents comme les réseaux étoilés, les réseaux étoile-bus, c'est-à-dire ces topologies de réseaux hybrides dans lesquelles des réseaux étoilés sont interconnectés via des réseaux en bus ou les graphes hiérarchiques n réguliers comme, par exemple, les développements d'un nombre p -adique⁸. Les structures qui les généralisent (ordres partiels, complexes

8. De façon anecdotique, la structure de l'Encyclopédie hégélienne, qui est, grossièrement parlant, un graphe hiérarchique 3-régulier, est un dessin d'enfant comme, plus généralement, toute classification hiérarchique "nette". On pourrait en dire autant du "quadriparti" heideggerien.

simpliciaux, immeubles de Tits (voir [Ronan 09], 4) sont, elles aussi, des dessins d'enfants, pour autant qu'elles soient, en tant que graphes, connexes et bi-colorables (voir Fig. 7).

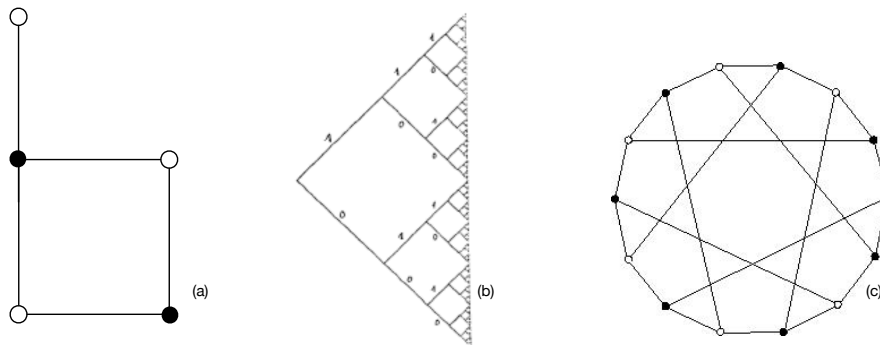


FIGURE 7 – Ordre partiel (a), ensemble des nombres 2-adiques \mathbb{Z}_2 (b) et immeuble de Tits $A_2(k)$ (c)

On peut en déduire aussi que certaines structures fractales, tout comme certains ensembles fermés ou certains pavages périodiques sont des dessins d'enfants. Nous nous bornerons à examiner dans la suite le cas des réseaux de Pacotte et de certains réseaux de transport.

On définit aussi, pour tout graphe, non plus une coloration des sommets mais une coloration des arêtes.

Définition 7.1. *L'indice chromatique $\chi'(G)$ d'un graphe G est le plus petit entier k tel que l'on puisse colorier les arêtes de G en k couleurs de sorte que deux arêtes incidentes à un même sommet aient des couleurs différentes.*

On passe alors assez facilement de la coloration des sommets à la coloration des arêtes et vice-versa grâce aux notions suivantes :

Définition 7.2. *Le graphe représentatif des arêtes (ou "graphe aux arêtes") $L(G)$ d'un graphe G est le graphe dont les sommets sont les arêtes de G ; deux sommets sont reliés dans $L(G)$ si les arêtes correspondantes de G sont incidentes à un même sommet.*

Il en résulte que :

Proposition 7.2. *Pour tout graphe G , $\chi'(G) = \chi(L(G))$.*

Autrement dit, l'indice chromatique d'un graphe n'est autre que le nombre chromatique de son graphe aux arêtes. En d'autres termes encore, pour colorer les arêtes d'un graphe G , on peut se ramener au problème de la coloration des sommets de son graphe aux arêtes $L(G)$. Inversement, toute coloration des sommets d'un graphe G' peut permettre d'induire une coloration d'arêtes si G' est interprété comme le graphe aux arêtes $L(G)$ d'un graphe G . On en déduit facilement la proposition suivante :

Proposition 7.3. *Tout graphe G , dont l'indice chromatique $\chi'(G) = 2$ a pour graphe aux arêtes $L(G)$ un graphe qui n'est autre qu'un dessin d'enfant.*

7.2 Généralisation aux hypergraphes et matroïdes ?

Comme on le sait, les hypergraphes sont des graphes dans lesquels les arcs ou arêtes peuvent relier plus de deux sommets. En conséquence, on peut généraliser des propriétés comme celles de la colorabilité ou de la bipartition.

C'est Felix Bernstein qui a introduit une première notion de 2-colorabilité dans le contexte d'une étude sur les familles d'ensembles (voir [Bernstein 08]).

Définition 7.3 (2-colorabilité (définition faible)). *Un hypergraphe $H = (V, E)$ est dit 2-colorable si son ensemble de sommets V peut être partitionné en deux ensembles, X et Y , tels que chaque hyperarête rencontre à la fois X et Y . De manière équivalente, les sommets de H peuvent être 2-colorés de manière à ce qu'aucun hyperarête ne soit monochromatique.*

Définition 7.4 (2 colorabilité exacte). *Une définition plus forte de la bipartition est la suivante : un hypergraphe est appelé biparti si son ensemble de sommets V peut être divisé en deux ensembles, X et Y , de sorte que chaque hyperarête contienne exactement un élément de X et exactement un élément de Y . En ce sens, tout graphe biparti est aussi un hypergraphe biparti (voir [Aharoni 90]; [Annamalai 15]).*

Chaque hypergraphe biparti est 2-colorable, mais la bipartition est une propriété plus forte que la 2-colorabilité. Contrairement à ce qui se passe pour les graphes, un hypergraphe peut-être 2-colorable sans être pour autant biparti, comme on peut le voir sur l'exemple suivant.

Soit H un hypergraphe sur les sommets $\{a, b, c, d\}$ avec les hyperarêtes suivantes :

$$E = \{\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}\}$$

Cet hypergraphe H est 2-colorable, par exemple par la partition $X = \{1, 2\}$ et $Y = \{3, 4\}$. Cependant, il n'est pas biparti, puisque chaque ensemble X à un élément possède une intersection vide avec une hyperarête, et chaque ensemble X à deux éléments ou plus possède une intersection de taille 2 ou plus avec au moins deux hyperarêtes.

Comme les hypergraphes ne sont pas des graphes, ils ne peuvent être considérés, en général, comme des dessins d'enfants. En revanche, certains graphes, comme les graphes biparti, sont ipso facto des hypergraphes biparti.

On en déduira la proposition suivante :

Proposition 7.4. *Tout hypergraphe biparti (donc 2-colorable) restreint à un graphe biparti est un dessin d'enfant.*

Mais bien sûr les hypergraphes qui ne sont pas des graphes ne sont pas des dessins d'enfants. La remarque vaut également pour les matroïdes, pour lesquels les propriétés précédentes de bipartition et de colorabilité se généralisent aussi⁹. Par exemple, on sait qu'un matroïde de rang r est r -colorable (voir [Cordovil 97], 157). En conséquence, un matroïde de rang 2 peut recevoir une bicoloration. Il ne s'ensuit pas pour autant qu'on puisse le considérer comme un dessin d'enfants. Comme dans le cas des hypergraphes, il faudrait faire correspondre aux valeurs critiques des polynômes de Shabat des ensembles de points et non pas des points, ce qui, dans la représentation commune, ne correspond plus à l'axiomatique des dessins d'enfants.

En revanche, une représentation via la notion de *transversal*, qui s'applique aux matroïdes (mais également aux hypergraphes) prend la forme d'un graphe biparti ou bichromatique. Rappelons quelques définitions.

Définition 7.5 (Matroïde transversal). *Soit $S = \{e_1, \dots, e_n\}$ et soit $A = \{A_1, \dots, A_k\}$, $A_i \subseteq S$, $n \geq k$. Un transversal de A est un sous-ensemble $\{e_{j_1}, \dots, e_{j_k}\}$ de S tel que :*

$$e_{j_i} \in A_i,$$

autrement dit, il existe une bijection entre $\{e_{j_1}, \dots, e_{j_k}\}$ et $\{A_1, \dots, A_k\}$.

9. Ainsi, les matroïdes bipartis ont été définis par Welsh (voir [Welsh 69]) comme une généralisation des graphes bipartis, graphes dans lesquels chaque cycle a une taille paire. Un matroïde graphique est biparti si et seulement s'il provient d'un graphe biparti.

Définition 7.6. Un ensemble $X \subseteq S$ est dit un *transversal partiel* de A s'il existe $\{i_1, \dots, i_l\} \subseteq \{1, \dots, k\}$ tel que X est un transversal de $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_l}\}$.

Soit $G = (U, V; E)$ le graphe biparti formé à partir de $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ et $A = \{A_1, \dots, A_k\}$, $A_i \subseteq S$, où $U = \{u_1, \dots, u_n\}$, $V = \{v_1, \dots, v_k\}$ et deux sommets $u_i \in U$ et $v_j \in V$ sont reliés si et seulement si $s_i \in A_j$. On voit donc qu'un ensemble X est un transversal partiel de A si et seulement s'il existe un couplage dans $G = (U, V; E)$ où chaque arête du couplage admet un sommet de U correspondant à l'un d'éléments de X .

Exemple

Soit $E = \{e_1, \dots, e_5\}$ et soit $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$, avec $A_1 = \{e_1, e_2, e_5\}$, $A_2 = \{e_1, e_3\}$, $A_3 = \{e_1, e_4, e_5\}$, $A_4 = \{e_2, e_3, e_5\}$ et $A_5 = \{e_1, e_3, e_4\}$.

Dans cette configuration, $\{e_2, e_3, e_4\}$ est un transversal de A et $X = \{e_1, e_3, e_4\}$ est un *transversal partiel* de A car X est transversal de $\{A_2, A_3, A_4, A_5\}$ (voir Fig. 8).

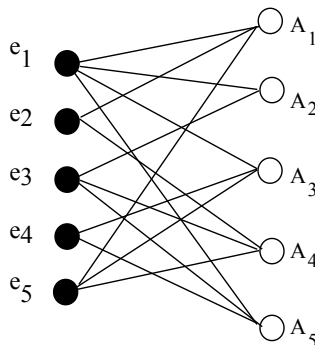


FIGURE 8 – Ensemble transversal

On peut alors montrer (voir [Oxley 92]) que si $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ et si $A = \{A_1, \dots, A_k\}$, avec $A_i \subseteq S$ pour tout $1 \leq i \leq k$, alors l'ensemble des transversaux partiels de A est l'ensemble des indépendants d'un matroïde. Un tel matroïde est appelé *matroïde transversal*.

Mais on observera surtout ici que l'ensemble transversal est évidemment bichromatique et biparti. Comme il est connexe et définissable, comme les arbres, sur une surface topologique orientée, on peut l'assimiler à un dessin d'enfant, en oubliant ce qui se tient réellement derrière les points A_i .

7.3 Les Réseaux de Pacotte

Nous avons eu l'occasion ailleurs de consacrer une étude entière à la notion de "réseau de Pacotte", que nous avons retranscrite dans le langage de la théorie des graphes (voir [Parrochia 20¹]; [Parrochia 20²]). Rappelons seulement ici que Julien Pacotte (1887-1956 ou 1957), physicien de formation, chercheur au Fonds National de la Recherche Scientifique à Bruxelles, auteur de nombreux ouvrages de philosophie des sciences, avait publié en 1936 un texte intitulé *Le Réseau Arborescent, schème primordial de la pensée*, dont il existe seulement quelques mentions dans la littérature¹⁰.

Pacotte, dans cet ouvrage paru à une époque où la théorie des graphes était encore embryonnaire, partait de l'universalité de la forme arborescente pour reconstruire sur elle l'ensemble des mathématiques. Initialement, ses réseaux arborescents étaient orientés. Dans le cas divergent, le modèle en était la figure formée par une plante, du sol à la naissance des feuilles, ou bien encore, la cellule se dédoublant et se multipliant par générations successives, plus encore certains phénomènes de décomposition (grain colloïdal se désagrègant, molécule en train de se dissocier, atome en voie d'ionisation et se désagrègant par palier, etc.). Dans le cas convergent, Pacotte pensait plutôt à des phénomènes tels que la cristallisation d'un magma hétérogène en milieu de structure granitique, la coalescence des micelles, la marche des demi-chromosomes vers un des deux pôles du noyau ovoïde pour y former un noyau nouveau, etc.

De tels réseaux concrets sont généralement parcourus par des flux, et donnent donc lieu à une modélisation au moyen de graphes orientés. Mais Pacotte avait eu l'idée de remplacer les flèches par une bicoloration des sommets de ces figures, de sorte qu'il aboutissait à la notion de réseau "polarisé".

Retraduit en langage de graphes, un réseau arborescent de Pacotte est donc, au plan le plus général, comme nous avons pu le montrer, un 1-graphe antisymétrique connexe (quasi fortement connexe s'il est sans circuits), 2-coloriable et biparti (un graphe est biparti si et seulement si il est 2-coloriable). Il possède également d'autres propriétés que nous avons établies dans nos articles précédemment cités, mais que nous n'avons pas à considérer ici.

Ce que nous voulons seulement faire observer avant tout est la forme générale des réseaux de Pacotte, telle qu'elle apparaît par exemple dans les schémas comme ceux de la Fig. 9.

10. Ses aspects formels dépassent en général le littéraire ou le spécialiste de sciences humaines, et n'intéressent guère le mathématicien, après le développement de la théorie des graphes.

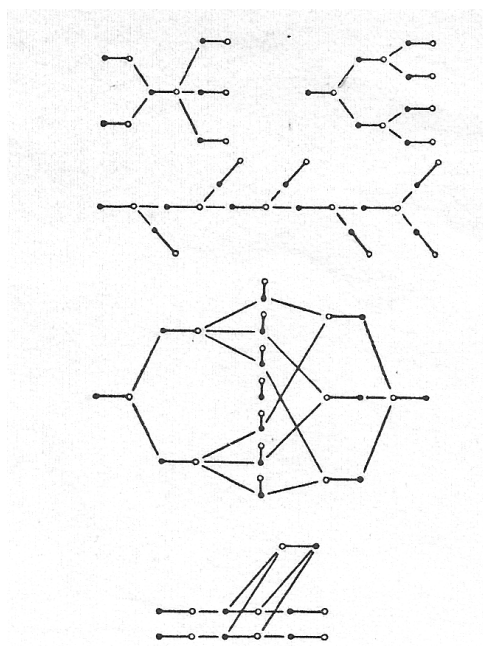


FIGURE 9 – Exemples de réseaux de Pacotte (d’après J. Pacotte, *op. cit.*, p. 9)

De tels schémas donnent lieu à une interprétation en termes de Dessins d’enfants. Ils vérifient en effet les trois conditions stipulées dans la Définition 5.1 : être connexe, posséder une bicoloration des sommets, être la réunion d’un nombre fini de faces, en quoi on peut toujours les décomposer pour peu qu’on les plonge dans une surface de Riemann ou un équivalent.

En conséquence, nous n’hésitons pas à poser que :

Proposition 7.5. *Tout réseau de Pacotte est un dessin d’enfant (au sens de Grothendieck).*

Un cas simple est la forme de réseau (ou de partie de réseau) arborescent polarisé qu’on découvre (ou qu’on peut reconstruire) à partir du texte de Pacotte. Celui-ci étant assez avare d’images, il est parfois difficile de l’illustrer correctement. Néanmoins les trois premiers réseaux de la Fig. 9 sont typiquement des arbres planaires, qu’on peut successivement décrire, en appliquant la méthode de Tutte. Le premier (en haut à gauche), par exemple, est de la forme :

$$\langle 4 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1; 3 \ 2 \ 2 \ 2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \rangle$$

et se trouve déjà plus complexe que les arbres évoqués plus haut. Il n’en relève pas

moins de la méthodologie précédente et on pourrait parfaitement lui associer un polynôme de Shabat. Il en irait de même pour les deux arbres suivants. Concernant les graphes non planaires, il est clair, également, qu'on peut toujours les plonger dans la sphère topologique, comme dans le cas du tétraèdre de la Fig. 2 cité par Girondo et Gonzalez-Diès.

7.4 Réseaux de transport et coloration de graphes

7.4.1 Rappels

Arc incident Soit un graphe $G(X, U)$. Rappelons qu'on appelle "arc incident à $A \subset X$ vers l'extérieur", tout arc u dont l'extrémité initiale appartient à A , mais non son extrémité terminale. On dit en ce cas que u est incident à A vers l'extérieur et on note $u \in \omega^+(A)$. On définit de même un arc incident à A vers l'intérieur, et l'ensemble $\omega^-(A)$. Evidemment l'ensemble $\omega(A)$ des arcs incidents à A est tel que :

$$\omega(A) = \omega^+(A) \cup \omega^-(A).$$

Flot et flux Un "flot" dans un graphe G est un vecteur $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m) \in \mathbb{Z}^m$, tel que :

1. Pour $i = 1, 2, \dots, m$, ϕ_i est un nombre de \mathbb{Z} appelé le "flux" dans l'arc i (par exemple, une certaine quantité de véhicules ou de matières parcourant l'arc i dans le sens de son orientation (si $\phi_i > 0$) ou en sens inverse (si $\phi_i < 0$);
2. Pour tout sommet x du graphe, la somme des flux entrant dans x est égale à la somme algébrique des flux sortant de x , autrement dit :

$$\sum_i \in \omega^-(x) \phi_i = \sum_j \in \omega^+(x) \phi_j \quad (x \in X) \quad (\text{Loi de Kirchoff})$$

Considérons maintenant un 1-graphe connexe G dont les arcs sont notés $1, 2, \dots, m$ et supposons que certaines quantités b_i, c_i soient telles que :

$$-\infty \leq b_i \leq c_i \leq +\infty$$

avec les conditions plus particulières :

- 1) $b_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$);
- 2) $c_i \geq 0$ pour tout i , et $c_i = +\infty$;

3) L'arc $i = 1$ est l'arc (b, a) qui relie un point b nommé sortie à un point a nommé entrée, ces deux points vérifiant :

$$\omega^-(a) = (1, 0, 0, \dots, 0),$$

$$\omega^+(a) = (1, 0, 0, \dots, 0);$$

4) G est un 1-graphe antisymétrique.

L'arc $1 = (b, a)$, qui ne sera pas tracé, est nommé arc de retour et est juste introduit pour maintenir la loi de Kirchoff aux sommets a et b .

Définition 7.7 (voir [Ford 62]). *Un graphe G , de capacité c_i associée à tout arc i et qui satisfait toutes les conditions précédentes, est appelé un réseau de transport et il sera noté : $R = (X, U, c(u))$.*

Dans la suite, comme nous laisserons de côté la question des capacités (il suffit de supposer tous les arcs de même capacité), le réseau précédent se réduit à un graphe fini connexe G . Ce graphe est, en principe, orienté. Mais on peut aisément remplacer cette orientation par une coloration des sommets du graphe.

En théorie des graphes, le théorème de Gallai-Hasse-Roy-Vitaver énonce précisément une dualité entre les colorations des sommets d'un graphe non orienté donné et les orientations de ses arêtes. Il dit très exactement que le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorer un graphe G (son nombre chromatique) est égal à 1 plus la longueur du plus long chemin dans une orientation de G choisie pour minimiser la longueur de ce chemin. Sous la forme que lui donnent Lih-Hsing Hsu et Cheng-Kuan Lin ([Hsu 09]), il s'énonce comme suit :

Théorème 7.6 (Gallai-Hasse-Roy-Vitaver). *Soit D une orientation définie sur un graphe G et soit $\ell(D)$ le plus long chemin. Alors, $\chi(D) \leq 1 + \ell(D)$. De plus, il existe une orientation de G pour faire tenir l'égalité.*

Pour les graphes bicolorables comme les réseaux de Pacotte, cas particulier de réseau de transport, cela équivaut à dire que $\ell(D) = 1$. D'où :

Proposition 7.7. *Tout réseau de transport bi-colorable est un dessin d'enfant (au sens de Grothendieck).*

Cependant, comme il existe des graphes dont l'indices chromatique est supérieur à 2, il existe évidemment des réseaux de transport (la plupart) qui ne sont pas bicolorables.

8 Conclusion

Dans les arbres, les forêts et les réseaux arborescents de Pacotte ou les réseaux de transport qui s'y ramènent, on peut supprimer l'orientation en instituant sur eux une bicoloration des sommets. Dans ce cas également, à condition de les inscrire dans une surface de Riemann ou un plan complexe, les structures en question deviennent des dessins d'enfants au sens de Grothendieck et il est alors possible de faire agir sur eux le groupe de Galois absolu. Ceci permet de voir comment un réseau peut être facilement transformé en un réseau équivalent, de manière cependant non triviale. Des solutions auxquelles on n'aurait pas pensé de prime abord peuvent donc se révéler par cette méthode. Il en va de même pour toutes les applications des graphes bipartis et bichromatiques qui sont ainsi soumis à la puissance des corps de nombres.

L'équivalence des graphes biparti et bicolorables avec les dessins d'enfants, et donc, avec les polynômes de $\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}$ révèle l'importance des corps de nombres et rend douteux la possibilité de s'en affranchir. Le projet de Pacotte de reconstruire les mathématiques à partir de graphes bicolorables en devient quelque peu problématique : on ne peut guère se passer des nombres, lesquels risquent de ne pas avoir une existence seconde ou dérivée, mais première.

Il semble par ailleurs que la reconstruction la plus simple d'opérations logiques suppose déjà une tricoloration : on prouve par exemple qu'il existe un algorithme en temps polynomial qui transforme tout ensemble S de 3-clauses en un graphe G qui est 3-coloriable si et seulement si S est satisfiable (voir [Goubault 02]). Dans ce contexte, avoir réussi à reconstituer la logique des propositions, des prédicats et l'arithmétique élémentaire à l'aide d'un graphe bichromatique, comme l'a fait Pacotte, supposait la définition de conditions supplémentaires, notamment sur les cocycles (voir [Parrochia 20¹]; [Parrochia 20²]).

En admettant cette dernière reconstruction et en donnant à la notion de dessin d'enfant le sens que lui donne Grothendieck, on pourrait presque aller jusqu'à dire que toute pensée est, non pas tant un "coup de dé" – comme le voulait Mallarmé – qu'un acte créatif particulier pouvant s'expliciter dans un dessin abstrait. Toute pensée est un dessin d'enfant.

Références

[Aharoni 90] Aharoni, R., Kessler, O., "On a possible extension of Hall's theorem to bipartite hypergraphs", *Discrete Mathematics* 84 (3), 309-313, 1990.

- [Annamalai 15] Annamalai, C., "Finding Perfect Matchings in Bipartite Hypergraphs", *Proceedings of the 2016 Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, Proceedings*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1814-1823, 2015.
- [Bachelard 67] Bachelard, G., *La Formation de l'Esprit Scientifique* (1934), Paris, Vrin, 5e ed., 1967.
- [Belyi 79] Belyi, G., "On Galois extensions of a maximal cyclotomic field", *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* 43, 2, 269-276, 1979 (en Russe). Traduction anglaise *Math. USSR Izv.* 14, 247-256, 1979.
- [Bernstein 08] Bernstein, "Zur theorie der trigonometrische Reihen", *Leipz. Ber.*, 60, 325-328, 1908.
- [Bétréma 96] Bétréma, J., Zvonkin, A., "Plane trees and Shabat polynomials", *Discrete Mathematics* 153, 47-58, 1996.
- [Bétréma 05] Bétréma, J., Zvonkin, A., "La vraie Forme d'un Arbre", *Colloquium on Trees in Algebra and Programming, CAAP 1993 : TAPSOFT'93 : Theory and Practice of Software Development*, 599-612.
- [Cordovil 97] Cordovil, R., "Coloring Matroids", *Discrete Mathematics*, 165/166 (1997) 155-160.
- [Coxeter 57] Coxeter H. S., Moser, W. O. J., *Generators and relations for discrete groups*, Springer-Verlag, Berlin, 1957.
- [Drinfeld 90] Drinfeld, V. G., "On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ ", *Algebra i Analiz* 2 (1990), no. 4, 149-181.
- [Ford 62] Ford, L. R., Fulkerson, D. R., *Flows in Networks*, Rand Corporation, Santa Monica, 1962.
- [Girondo 12] Girondo, E., González-Diez G., *Introduction to Compact Riemann Surfaces and Dessins d'Enfants*, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- [Goubault 02] Goubault, E., "Complexité du coloriage des graphes", <http://www.lsv.fr/~goubault/3col-ans.pdf>.
- [Grothendieck 84] Grothendieck, A., *Esquisse d'un Programme*, <https://webusers.imj-prg.fr>, 1984.
- [Grothendieck 86] Grothendieck, A., *Récoltes et semailles*, édition en ligne, 1986.
- [Grothendieck 97] Grothendieck, A., *Esquisse d'un programme, Geometric Galois actions, 1*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 242, with an English translation on pp. 243–283, pp. 5-48, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

- [Guillot 14] Guillot, P., "An elementary approach to Dessins d'enfants", arXiv :1309.1968v2 [math.GR] 20 Aug 2014.
- [Harary 64] Harary, Prins, G., Tutte, W. T., "The number of plane trees", Koninklijke Nederlandse Akademie Van Wetenschappen 67, 319-329, 1964.
- [Hsu 09] Hsu, L-H., Lin, C-K., *Graph Theory and Interconnexion networks*, Taylor and Francis, Boca Raton, USA, 2009.
- [Ihara 94] Ihara, Y., "On the embedding of $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ into \widehat{GT} ", in L. Schneps (ed.) *The Grothendieck theory of dessins d'enfants* (Luminy, 1993), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 200, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994, pp. 289–321.
- [Jones 78] Jones A. et Singerman, D., "Theory of maps on orientable surfaces", *Proc. London Math. Soc.* (3), 37 (2), 273-307, 1978.
- [Labelle 93] Labelle, G., "Sur la symétrie et l'asymétrie des structures combinatoires", *Theoret. Comput. Sci.*, 117, 3-22, 1993.
- [Lando 04] Lando, S. K., Zvonkin, A., K., *Graphs on surfaces and their applications*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 141, with an appendix by Don B. Zagier, Low-Dimensional Topology, II, Springer-Verlag, Berlin, 2004, rep. 2010.
- [Magot 00] Magot, N., Zvonkin, A., "Belyi functions for Archimedean solids", *Discrete Mathematics*, 217, 249-271, 2000.
- [Neumann 20] Neumann, F., Schroll, S. (ed.) *Galois Covers, Grothendieck-Teichmüller Theory and Dessins d'Enfants*, interactions between Geometry, Topology, Number Theory and Algebra (Leicester, UK, june 2018), Springer Nature, Cham, Switzerland AG 2020.
- [Oxley 92] Oxley, J., *Matroid theory*, Oxford University Press, Oxford, 1992.
- [Parrochia 20¹] Parrochia, D., "Réseau de Pacotte, théorie des graphes et géométrie projective", hal-02860776, 2020.
- [Parrochia 20²] Parrochia, D., "Pacotte tree networks, graph theory and projective", arXiv :2006.05376v1 [physics.hist-ph], 2020.
- [Pólya 37] Pólya, G., "Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen", *Acta Math.*, vol. 68, no 1, 1937, 145-254.
- [Pólya 87] Pólya, G., et Read, R. C., *Combinatorial Enumeration of Groups, Graphs, and Chemical Compounds*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [Ronan 09] Ronan, M., *Lectures on Buildings* The University of Chicago Press, Ltd, Londres, 2009.

- [Schneps 94] Schneps, L., "Dessins d'enfants on the Riemann Sphere", in *The Grothendieck Theory of Dessins d'Enfant*, London Math. Soc. Lecture Notes 200, 47-78, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.
- [Spinoza 64¹] , Spinoza, B. de, *Traité de la Réforme de l'Entendement*, tr. fr. C. Appuhn, *Œuvres* 1, Garnier-Flammarion, 1964.
- [Spinoza 64²] , Spinoza, B., de, Lettre 60 à Tschirnhaus, *Traité politique, Lettres*, tr. fr., C. Appuhn, *Œuvres* 4, Garnier-Flammarion, 1964.
- [Tutte 64] Tutte, W. T., "The number of planted plane trees with a given partition", *American Math. Monthly*, 71 (1964), 272-277.
- [Welsh 69] Welsh, D. J. A., "Euler and bipartite matroids", *Journal of Combinatorial Theory*, 6 (4) : 375-377, 1969.
- [Wolfart 97] Wolfart, J., "The "obvious" part of Belyi's theorem and Riemann surfaces with many automorphisms", *Geometric Galois actions, 1*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 242, 97-112, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.