



HAL
open science

Cours de probabilités

Marouane Daoui, Mouloud El Hafidi

► **To cite this version:**

| Marouane Daoui, Mouloud El Hafidi. Cours de probabilités. Licence. Maroc. 2018. hal-03917429

HAL Id: hal-03917429

<https://hal.science/hal-03917429v1>

Submitted on 1 Jan 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/365628350>

Probability Course (in French)

Book · January 2019

CITATIONS
0

READS
2

2 authors, including:

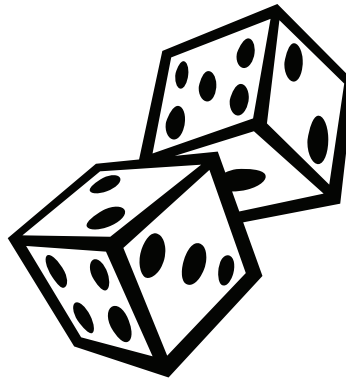


[Marouane Daoui](#)

7 PUBLICATIONS 0 CITATIONS

SEE PROFILE

Cours de probabilités¹



MAROUANE DAoui

MOULOUD EL HAFIDI

Année universitaire : 2018 / 2019

1. Ce document est un support de cours destiné aux étudiants de la filière « sciences économiques et gestion » (2^{ème} semestre). Il ne prétend certainement pas être exhaustif ni traiter en détail tous les sujets abordés. L'assistance au cours proprement dit, ainsi qu'aux travaux dirigés est fortement recommandée.

Table des matières

1	Théorie des ensembles et analyse combinatoire	2
1.1	Théorie des ensembles	2
1.1.1	Notions de base : ensembles et éléments	2
1.1.2	Opérations sur les ensembles	4
1.1.3	Ensembles finis et ensembles dénombrables	8
1.1.4	Ensembles produits	8
1.2	Éléments d'analyse combinatoire	9
1.2.1	Notations factorielle et cardinal	9
1.2.2	Permutations d'un ensemble	10
1.2.3	Arrangements sans répétition	10
1.2.4	Arrangement avec répétition	11
1.2.5	Combinaisons sans répétition	12
1.2.6	Combinaisons avec répétition	12
1.2.7	Exemple illustratif	13
2	Notion de probabilité	14
2.1	Définitions et concepts de base	14
2.1.1	Expérience aléatoire	14
2.1.2	Ensemble fondamental	15
2.1.3	Événement d'une expérience aléatoire	16
2.1.4	Ensemble d'événements	19
2.1.5	Tribu d'événements	19
2.1.6	Espace probabilisable	20
2.2	Probabilités	21
2.2.1	Définition générale	21
2.2.2	Définition axiomatique	22
2.2.3	Propriétés de probabilité	23
2.2.4	Équiprobabilité	23
2.3	Probabilité conditionnelle	24
2.3.1	Définition de la probabilité conditionnelle	24

2.3.2	Théorème de Bayes	25
2.4	Indépendance en probabilité	28
3	Variables aléatoires	29
3.1	Définition générale	29
3.2	Variables aléatoires discrètes	30
3.2.1	Loi de probabilité	31
3.2.2	Fonction de répartition	32
3.2.3	Espérance et variance d'une variable aléatoire discrète	33
3.3	Variables aléatoires continues	35
3.3.1	Fonction de densité	36
3.3.2	Fonction de répartition	38
3.3.3	Espérance et variance d'une variable aléatoire continue	39
3.4	Couple de variables aléatoires	39
3.4.1	Loi jointe et loi marginale	39
3.4.2	Covariance d'un couple de variables aléatoires	41
3.4.3	Loi conditionnelle	43
4	Lois de probabilité usuelles	45
4.1	Lois de probabilité discrètes	45
4.1.1	Loi uniforme discrète	45
4.1.2	Loi de Bernoulli	46
4.1.3	Loi binomiale	47
4.1.4	Loi géométrique	49
4.1.5	Loi de Poisson	51
4.2	Lois de probabilité continues	53
4.2.1	Loi uniforme continue	53
4.2.2	Loi exponentielle	54
4.2.3	Loi normale	55
	Annexes	59
	Annexe 1 : Table statistique de la loi binomiale	59
	Annexe 2 : Table statistique de la loi binomiale (suite)	60
	Annexe 3 : Table statistique de la loi binomiale (suite)	61
	Annexe 4 : Table statistique de la loi de Poisson	62
	Annexe 5 : Table statistique de la loi normale centrée réduite	63
	Bibliographie	64

Introduction

le terme statistique est apparu vers le milieu du XVIIe siècle; il vient du latin *statisticus*, relatif à l'état (*status*), et est employé alors dans un sens purement descriptif de recueil ou de collection de faits chiffrés, les *statistiques*. Cependant, le mot employé au singulier avec l'article défini, la *statistique*, évoque la méthode utilisée ensuite pour étendre des résultats et dégager des lois (*l'inférence statistique*). Il s'agit donc dans ce sens d'un moyen scientifique d'analyse et de compréhension du phénomène étudié, s'appliquant très largement à l'économie.

Le calcul des probabilités a commencé avec Blaise Pascal, Pierre Fermat, Christian Huygens et Jacques Bernoulli par l'analyse des jeux dits de hasard¹. La théorie des probabilités servira ensuite d'outil de base à un ensemble de méthodes ou de règles objectives permettant d'utiliser des données pour fixer la précision avec laquelle on estime certains paramètres (théorie de l'estimation) ou on teste certaines hypothèses (théorie des tests) : la Statistique mathématique (ou inférentielle).

Les concepts de probabilité et de variable aléatoire constituent les notions fondamentales de l'analyse statistique. La théorie moderne des probabilités repose sur la notion d'espace probabilisable et définit la probabilité comme une mesure appliquée sur une tribu d'événements de cet espace.

La notion de variable aléatoire se comprend alors comme une application mesurable, c'est-à-dire une sorte de fonction, définie d'un univers probabilisé vers un univers de réalisations probabilisables. Ainsi toute la théorie moderne des statistiques et ses applications dans le domaine de l'économie et de la vie courante repose sur ces deux notions.

1. Le mot hasard est d'ailleurs emprunté à l'arabe *az-zahr* (jeu de dés, *alea* en latin) au XII^e siècle, d'où est venue cette expression jeu de hasard au XVI^e siècle.

Chapitre 1

Théorie des ensembles et analyse combinatoire

Les notions élémentaires et les concepts généraux de la théorie des ensembles sont indispensables pour une introduction moderne à la théorie des probabilités.

L'analyse combinatoire, quant à elle, étudie comment compter les objets. Elle fournit des méthodes de dénombrements particulièrement utiles en théorie des probabilités.

1.1 Théorie des ensembles

1.1.1 Notions de base : ensembles et éléments

◇ **Définition 1.**— On appelle **ensemble** toute liste ou toute collection d'objets bien définis. Ces objets sont appelés **éléments** de l'ensemble. On écrit :

$$p \in A \text{ si } p \text{ est un élément de l'ensemble } A.$$

Pour dire qu'un objet a est élément d'un ensemble A , on notera $a \in A$, et $a \notin A$ dans le cas contraire.

► **Exemple 1 :** Les ensembles peuvent être finis ou bien infinis. Dans le cas fini, on utilisera la notation avec des accolades : $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ désigne l'ensemble des entiers naturels inférieurs ou égaux à 6.

► **Exemple 2** : Soient A et B deux ensembles tels que : $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{1, 2, 4, 5\}$, alors $3 \in A$ et $3 \notin B$.

◇ **Définition 2.**— Un ensemble A est inclus dans un ensemble E si tout élément de A appartient aussi à E , c.à.d. si $p \in A$ implique $p \in E$, on dit alors que A est un **sous-ensemble** (ou une partie) de E , ce qu'on écrit : $A \subset E$.

On dit également que l'ensemble A est *inclus* dans un ensemble E . On note alors $A \subset E$, et $A \not\subset E$ dans le cas contraire.

► **Exemple** : Soient A et B deux ensembles tels que : $A = \{1, 3, 5\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, alors $A \subset B$.

◇ **Définition 3.**— Deux ensembles sont **identiques** si chacun d'eux est contenu dans l'autre, et l'on écrit :

$$A = B \text{ si et seulement si } A \subset B \text{ et } B \subset A$$

On représente les négations de $p \in A$, $A \subset B$ et $A = B$ respectivement par $p \notin A$, $A \not\subset B$ et $A \neq B$.

On utilise également la notation \emptyset pour désigner l'**ensemble vide** c.à.d. l'ensemble qui ne contient aucun élément. On considère que cet ensemble est un sous-ensemble de tous les autres ensembles.

On suppose que tous les ensembles considérés sont des sous-ensembles d'un certain ensemble qu'on appelle *ensemble universel* et que l'on désigne par U . Ainsi, pour un ensembles quelconque A , on a $\emptyset \subset A \subset U$.

► **Exemple** : L'ensemble $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ signifie que A est l'ensemble constitué des nombres 1, 3, 5, 7, et 9.

L'ensemble $B = \{x / x \text{ est un nombre premier, } x < 15\}$ signifie que B est l'ensemble des nombres premiers inférieurs à 15. Ces deux ensembles A et B peuvent être écrits sous la forme :

$A = \{x / x \text{ est un nombre impair, } x < 10\}$ et $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

Observons que $9 \in A$ mais que $9 \notin B$, et que $11 \in B$, mais que $11 \notin A$.

◆ **Propriétés** : On considère A , B et C trois ensembles quelconques. Alors :

(i) $A \subset A$;

(ii) Si $A \subset B$ et $B \subset A$, alors $A = B$;

(iii) Si $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$.

1.1.2 Opérations sur les ensembles

Considérons A et B deux ensembles quelconques.

1- Réunion :

◇ **Définition.**— La **réunion** (ou union) de A et B que l'on désigne par $A \cup B$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B :

$$A \cup B = \{x / x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Le terme "ou" est employé ici au sens de "et/ou".

Attention le *ou* mathématique est inclusif et non exclusif, contrairement à la vie courante (café ou thé, garçon ou fille, etc.). Par exemple : $A = \{1, 2\}$ et $B = \{2, 3\}$, alors $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ ("ou" inclusif) et non $\{1, 3\}$ ("ou" exclusif).

◆ **Exemple** : soit $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, alors :

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$$

2- Intersection :

◇ **Définition.**— L'**intersection** de A et de B que l'on désigne par $A \cap B$, est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à l'ensemble A et à l'ensemble B :

$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Si $A \cap B = \emptyset$, c.à.d. si A et B n'ont aucun élément en commun, on dit alors que A et B sont *disjoints*.

◆ **Exemple** : soit $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, alors :

$$A \cap B = \{1, 3, 5\}$$

3- Complémentaire :

◇ **Définition 1.**— La **différence** entre A et B ou le **complémentaire relatif** de B par rapport à A que l'on note $C_B A$, se note aussi $A \setminus B$ ou $A - B$, est l'ensemble de éléments qui appartiennent à A mais pas à B :

$$A \setminus B = A - B = C_A B = \{x : x \in A, x \notin B\}$$

Remarquons que $C_A B$ et B sont des ensembles disjoints, c.à.d. que $C_A B \cap B = \emptyset$.

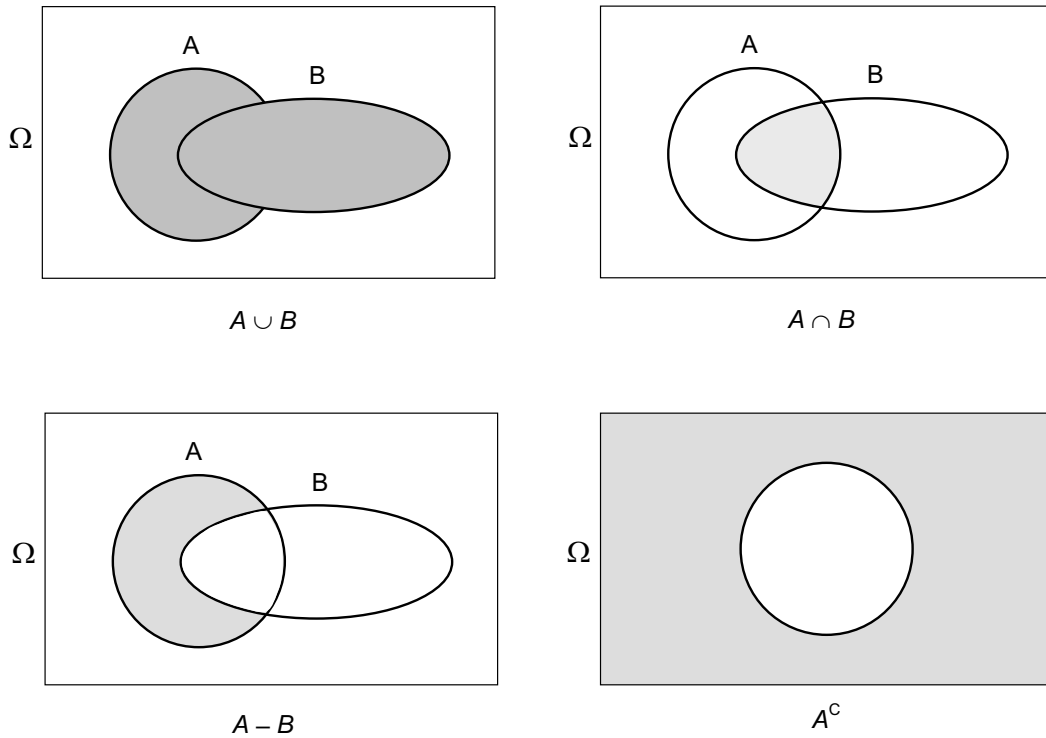
◇ **Définition 2.**— Le **complémentaire absolu**, ou plus simplement le **complémentaire** de A que l'on désigne par \bar{A} , ou C_A , est l'ensemble des éléments qui n'appartiennent pas à A .

$$\bar{A} = \{x / x \in U, x \notin A\}$$

4- Illustration des opérations ensemblistes :

Les diagrammes suivants (Figure 1.1) qu'on appelle diagramme de Venn illustrent les opérations précédentes sur les ensembles.

FIGURE 1.1 – Illustration de quelques opérations sur les ensembles



► **Exemple :** Soit $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{3, 4, 5, 6\}$ avec $U = \{1, 2, 3, \dots\}$ alors :

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad A \cap B = \{3, 4\}$$

$$C_A B = A - B = \{1, 2\} \quad \bar{A} = C A = \{5, 6, 7, \dots\}$$

5- Lois de l'algèbre des ensembles :

Les ensembles sur lesquels on effectue les opérations précédentes satisfont des lois ou identités diverses que l'on peut résumer dans le tableau (1.1).

TABLEAU 1.1 – Lois de l’algèbre des ensembles

<i>Loi idempotente</i>	
$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
<i>Loi associative</i>	
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
<i>Loi commutative</i>	
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
<i>Loi de distributivité</i>	
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
<i>Loi d’identité</i>	
$A \cup \emptyset = A$	$A \cap U = A$
$A \cup U = U$	$A \cap \emptyset = \emptyset$
<i>Loi de complémentarité</i>	
$A \cup \bar{A} = U$	$A \cap \bar{A} = \emptyset$
$\bar{\bar{A}} = A$	$\bar{U} = \emptyset$, $\bar{\emptyset} = U$
<i>Loi de Morgan</i>	
$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$	$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$

1.1.3 Ensembles finis et ensembles dénombrables

✧ **Définition 1.**— Un ensemble peut être fini ou infini. Un ensemble est **fini** s'il est vide ou s'il contient exactement n éléments, n étant un entier positif. Dans le cas contraire, l'ensemble est **infini**.

► **Exemple :** Soit M l'ensemble des jours de la semaine, c.à.d. $M = \{ \text{Lundi, Mardi, Mercredi, Jeudi, Vendredi, Samedi, Dimanche} \}$. Alors M est *fini*.
Soit Y l'ensemble des nombres entiers positifs pairs, c.à.d. $Y = \{2, 4, 6, \dots\}$. Alors Y est un ensemble *infini*.

✧ **Définition 2.**— Un ensemble est **dénombrable** s'il est fini ou si l'on peut ranger ses éléments sous la forme d'une suite. On dit dans ce cas qu'il est **infini et dénombrable**. Dans le cas contraire, l'ensemble est **non dénombrable**.

► **Exemple :** Soit Y l'ensemble des nombres entiers positifs pairs, c.à.d. $Y = \{2, 4, 6, \dots\}$. Alors Y est un ensemble infini et dénombrable.
Cependant, l'intervalle unité de la droite réelle, c.à.d. $I = \{x / 0 \leq x \leq 1\}$, est un ensemble infini et non dénombrable.

1.1.4 Ensembles produits

✧ **Définition.**— Soient A et B deux ensembles. L'**ensemble produit** de A et de B , que l'on écrit $A \times B$, est constitué de tous les couples ordonnés (a, b) où $a \in A$ et $b \in B$:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

On désigne par A^2 le produit $A \times A$ d'un ensemble A par lui-même.

► **Exemple :** Soit $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{a, b\}$. Alors :

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

1.2 Éléments d'analyse combinatoire

L'analyse combinatoire est l'étude des différentes manières de "ranger" des objets. Ces objets peuvent être des nombres, des individus, des lettres, etc. Nous examinons ici les cas qui se présentent le plus fréquemment.

1.2.1 Notations factorielle et cardinal

✧ **Définition 1.**— Soit n un entier naturel non nul. On définit la factorielle de n , notée $n!$, par :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

Par convention : $0! = 1$.

► **Exemple :** $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.

✧ **Définition 2.**— Le cardinal d'un ensemble fini E est le nombre d'éléments de E . On le note $card(E)$.

► **Exemple :** Soit l'ensemble $A = \{1, 3, 5, 7\}$, alors : $card(A) = 4$.
 $card(\emptyset) = 0$.

◆ **Propriétés :** Soient A et B deux ensembles finis. On a :

$$card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$$

En particulier, si $A \cap B = \emptyset$ (A et B disjoints) on a :

$$card(A \cup B) = card(A) + card(B)$$

Et si $B = \bar{A}$, on a toujours $A \cap B = \emptyset$ et de plus :

$$card(\bar{A}) = card(E) - card(A)$$

avec $A \subset E$.

1.2.2 Permutations d'un ensemble

✧ **Définition 1.**— On appelle **permutation** (sans répétition) un rangement, ou un classement ordonné de n objets. Le nombre de permutations de n objets est égal à :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

► **Exemple 1 :** Si nous disposons de trois objets a , b et c . Le nombre de permutations possibles de ces 3 objets est égal à $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$. Les permutations possibles sont les suivantes :

$$\{abc\} \quad \{acb\} \quad \{bac\} \quad \{bca\} \quad \{cab\} \quad \{cba\}$$

► **Exemple 2 :** Il y a 120 façons de disposer 5 personnes dans une voiture à 5 places. En effet, cela revient à trouver toutes les permutations d'un ensemble à 5 éléments, il y en a tout $5! = 120$.

✧ **Définition 2.**— Lorsque nous avons n objets comprenant respectivement (n_1, n_2, \dots, n_r) termes identiques, le nombre de **permutation avec répétition** est égal à :

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_r!}$$

► **Exemple :** Nous désirons “ranger” trois boules vertes et deux boules bleues toutes identiques excepté leur couleur. Nous avons bien 5 objets à notre disposition, mais nous ne pouvons pas faire distinction entre les boules vertes ou les boules bleues. Le nombre de permutations possibles sera donc plus restreint que le nombre de permutations de 5 objets distincts qui est $5! = 120$. Il faudra diviser ce résultat par le nombre de permutations possibles des boules vertes ($3! = 6$) et celui des boules bleues ($2! = 2$) puisqu'elles ne sont pas différenciables. Le nombre de permutations sera donc égal à :

$$\frac{5!}{(3! \times 2!)} = 10$$

1.2.3 Arrangements sans répétition

Il faut distinguer le cas où l'on range des objets en tenant compte de l'ordre du cas où l'ordre n'importe pas. Dans le cas où l'on **tient compte de l'ordre** nous

parlerons d'**arrangements**.

◇ **Définition.**— Le nombre d'**arrangements sans répétition** (ou d'**arrangements sans remise**) possibles de k éléments parmi n est donné par :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-k+1)$$

► **Exemple :** Nous désirons savoir combien de nombres à trois chiffres peuvent être formés avec l'ensemble $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Il est clair que l'ordre des chiffres est important : 357 est différent de 735. Pour dénombrer tous les cas possibles, nous parlerons d'arrangements sans répétition de trois chiffres parmi cinq. Le nombre d'arrangements sans répétition est égale à :

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

1.2.4 Arrangement avec répétition

◇ **Définition.**— Un **arrangement avec répétition** (ou **arrangements avec remise**) de k objets pris parmi n est une suite ordonnée de k éléments choisis parmi n , et pouvant se répéter. Le nombre total de ces arrangements est donné par :

$$P_n^k = n^k$$

► **Exemple 1 :** Si nous reprenons l'exemple précédent, en supposant cette fois que le même chiffre peut apparaître plusieurs fois (par exemple : 335, 199, ...), nous parlerons donc d'arrangement avec répétition ou de permutation avec répétition. Dans ce cas le nombre d'arrangements est égal à :

$$P_5^3 = 5^3 = 125$$

On peut former donc 125 nombres différents de trois chiffres avec les cinq chiffres 1, 3, 5, 7 et 9.

► **Exemple 2 :** Il y a 10^8 numéros de téléphone commençant par 06. En effet, il y en

a autant que d'arrangements avec répétitions de 8 éléments de $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ qui a 10 éléments. Il y en a en tout 10^8 .

1.2.5 Combinaisons sans répétition

Si l'ordre dans lequel les objets ont été choisis ne nous intéresse pas, nous pouvons parler de **combinaison**.

◇ **Définition 1.**— Une **combinaison sans répétition** (ou **combinaison sans remise**) est un sous-ensemble **non ordonnée** de k éléments choisis dans un ensemble qui en contient n . Le nombre de combinaisons sans répétition de k éléments parmi n est égale à :

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

► **Exemple :** On tire d'une urne cinq boules au hasard, qui en contient quinze numérotées. Ce qui nous intéresse ici, c'est le numéro que portent les boules. L'ordre dans lequel ces boules ont été tirés nous n'intéresse pas. Si les boules ne sont pas remises dans l'urne après chaque tirage, le nombre de combinaisons possibles, sans répétition, se calcule comme suit :

$$C_{15}^5 = \frac{15!}{5!(15-5)!} = 3003$$

1.2.6 Combinaisons avec répétition

◇ **Définition.**— Une **combinaison avec répétition** (ou **combinaison avec remise**) est un sous-ensemble **non ordonnée** de k éléments choisis dans un ensemble qui en contient n et qui peuvent se répéter. Le nombre de combinaisons avec répétition de k éléments parmi n est égale à :

$$K_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-k)!}$$

► **Exemple :** Reprenons l'exemple précédent. En supposant cette fois que les boules sont remises dans l'urne après chaque tirage. De même, l'ordre dans lequel ces boules

ont été tirés nous n'intéresse pas. D'où le nombre de combinaisons possibles, avec répétition, est égal à :

$$K_{15}^5 = \frac{(15 + 5 - 1)!}{5!(15 - 1)!} = 11628$$

Il y a donc 11628 combinaisons avec répétition possibles.

1.2.7 Exemple illustratif

Les différents types de rangements sont illustrés (Tableau 1.2) avec un exemple de 4 objets (A, B, C, D) pour lesquels il s'agit d'énumérer toutes les permutations, arrangements et combinaisons de 2 lettres et ce, avec et sans répétition :

TABLEAU 1.2 – Exemple illustratif

Permuations	$4! = 24$	ABCD ABDC ACBD ACDB ADBC ADCB	BACD BADC BCAD BCDA BDAC BDCA	CABD CADB CBAD CBDA CDAB CDBA	DABC DACB DBAC DBCA DCAB DCBA
Arrangements sans répétition	$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$	AB AC AD	BA CA DA	BC BD CD	CB DB DC
Arrangements avec répétition	$P_4^2 = 4^2 = 16$	AA BB CC DD	AB AC BC BD	AD CD BA CB	CA DB DA DC
Combinaisons sans répétition	$C_4^2 = \frac{A_4^2}{2!} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$	AB	AC BD	AD CD	BC
Combinaisons avec répétition	$K_4^2 = \frac{(4+2-1)!}{2!(4-2)!} = 10$	AA AB	BB AC BD	CC AD CD	DD BC

Chapitre 2

Notion de probabilité

La formalisation d'un problème dans lequel le hasard intervient nous amène à construire un modèle probabiliste, choisi en fonction du but que l'on poursuit. Ce modèle est constitué d'un ensemble fondamental, d'une tribu d'événements et d'une probabilité. Le choix de l'ensemble fondamental est très important pour le calcul ultérieur des probabilités des événements. Nous introduirons également les notions de probabilité conditionnelle et d'indépendance. La formule de Bayes est souvent très utile pour le calcul de probabilités conditionnelles.

2.1 Définitions et concepts de base

Avant de définir ce qu'est une probabilité sur un ensemble d'événements, il faut commencer par préciser quelques notions de base.

2.1.1 Expérience aléatoire

◇ **Définition.**— Une **expérience aléatoire** est une expérience renouvelable, en théorie ou en pratique, et qui, renouvelée dans des conditions identiques ne donne pas forcément le même résultat à chaque renouvellement.

► **Exemple :** L'exemple typique d'une expérience aléatoire renouvelable est celle du lancer de pièce de monnaie. Il est possible de répéter plusieurs fois un lancer de pièce dans les mêmes conditions : à chaque lancer, on n'obtiendra pas nécessairement le même résultat, c-à-d « pile » ou « face ».

2.1.2 Ensemble fondamental

Le résultat d'une expérience aléatoire s'appelle un **événement**. La quantification des « chances » qu'un tel événement a de se réaliser correspond à la notion intuitive de **probabilité**. cette quantification nécessite la définition et la précision préalable de l'ensemble des résultats possibles, appelés **événements élémentaires**. Cet ensemble expérimental s'appelle ensemble fondamental (ou univers des possibles) et est noté traditionnellement par Ω (*prononcer grand omega*).

✧ **Définition 1.**— L'ensemble fondamental (ou univers des possibles), noté Ω , est défini par l'ensemble de tous les résultats possibles qui peuvent être obtenus au cours d'une expérience aléatoire.

► **Exemple 1 :** Jet d'un dé à six faces numérotées : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

► **Exemple 2 :** On tire une boule dans une urne contenant une boule blanche, deux noires et cinq jaunes et l'ensemble fondamental retenu est : $\Omega = \{\text{noire, blanche, rouge}\}$.

— L'ensemble fondamental Ω peut être **fini** ou **infini**, **continu** ou **discret**.

► **Exemple 1 :** On lance une pièce jusqu'à obtenir pile, l'événement retenu étant le nombre de jets effectués : $\Omega = \{1, 2, \dots, n, \dots\} = \mathbb{N}^*$ ensemble infini dénombrable.

► **Exemple 2 :** On observe la durée de vie d'une lampe : $\Omega = [0, +\infty[= \mathbb{R}_+$ ensemble infini non dénombrable.

✧ **Définition 2.**— Dans le cas d'un ensemble fondamental fini ou infini dénombrable, la taille de l'ensemble est appelé **cardinalité** et est représenté par l'opérateur $\text{card}(\Omega)$.

► **Exemple 1 :** On considère une expérience aléatoire correspondant au lancer d'un dé à 6 faces. L'univers (fini) des possibles est alors défini par : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. La cardinalité de cet univers est égale à 6, c.à.d. $\text{card}(\Omega) = 6$.

► **Exemple 2** : On admet que le nombre de gouttes d'eau qui tombent pendant une durée d'une heure sur une surface donnée est le résultat d'une expérience aléatoire théorique. L'ensemble fondamental est alors : $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, n\}$.

La cardinalité de cet univers est égale à : $\text{card}(\Omega) = n$. Si $n \in \mathbb{N}$, cet univers est fini. Si, au contraire $n = \infty$ et $\Omega = \mathbb{N}$, cet univers est infini, mais dénombrable.

2.1.3 Événement d'une expérience aléatoire

En général, à partir d'un ensemble, il est toujours possible de définir des sous-ensembles. Il en va de même pour l'ensemble fondamental. Un sous-ensemble de l'ensemble fondamental est appelé un **événement**.

◇ **Définition 1.**— Un **événement** A est un sous-ensemble de l'ensemble fondamental Ω , vérifiant $A \subset \Omega$. Un événement constitué d'un seul élément, c.à.d. pour lequel $\text{card}(A) = 1$, est un **événement élémentaire** (ou singleton).

► **Exemple** : On considère une expérience aléatoire correspondant au lancer d'un dé à 6 faces, telle que $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

L'événement « nombre pair », noté A , correspond au sous-ensemble de l'univers Ω défini par $A = \{2, 4, 6\}$.

L'événement « nombre impair », noté B , correspond au sous-ensemble $B = \{1, 3, 5\}$.

On peut en outre définir un autre événement C , sans lui attribuer un nom particulier, tel que $C = \{1, 5\}$ par exemple. L'événement $D = \{1\}$ est un événement élémentaire ou singleton.

À partir de la définition d'un événement, nous pouvons à présent introduire les notions d'événement certain et d'événement impossible.

◇ **Définition 2.**— Un **événement certain** correspond à l'ensemble fondamental Ω . Cependant, un **événement impossible** est un événement qui ne se réalise jamais. Il correspond à l'ensemble vide, noté \emptyset .

Nous pouvons à présent combiner des événements à l'aide d'opérations ensemblistes.

✧ **Définition 3.**— Soient deux événements A et B . La réalisation de l'événement C , défini par $C = A \cup B$ (lire A **union** B) implique la réalisation de l'événement A ou de l'événement B , ou des deux événements A et B simultanément.

✧ **Définition 4.**— Soient deux événements A et B . La réalisation de l'événement D , défini par $D = A \cap B$ (lire A **inter** B) entraîne la réalisation de l'événement A et de l'événement B .

► **Exemple :** Reprenons l'exemple de lancer de dé.

À partir de l'ensemble fondamental $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, on peut définir plusieurs types d'événements par union ou intersection d'événements élémentaires ou d'autres d'événements (Tableau 2.1).

TABLEAU 2.1 – Exemples d'événements associés à un lancer de dé

Notation	Interprétation
$A = 1 \cup 2$	On obtient 1 ou 2
$B = 1 \cap 2 = \emptyset$	On obtient 1 et 2 : événement impossible
$C = 1 \cup 2 \cup 3$	On obtient 1, 2 ou 3
$D = 1 \cap (2 \cup 3) = \emptyset$	On obtient 1 et 2, ou 1 et 3 : événement impossible
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	On obtient 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 : événement certain

De la combinaison d'événements, nous pouvons déduire les notions d'événements disjoints et d'événements complémentaire.

✧ **Définition 5.**— Deux événements A et B sont **disjoints** s'ils n'ont pas d'élément en commun, c.à.d. $A \cap B = \emptyset$. Ces deux événements sont donc incompatibles : la réalisation simultanée de ces événements est impossible.

◇ **Définition 6.**— Deux événements A et \bar{A} , appartenant à un ensemble B , sont **complémentaires** si leur union correspond à B , c.à.d. n'ont pas d'élément en commun, c.à.d. $A \cup \bar{A} = B$.

La barre horizontale au dessus de la lettre associée à l'événement signifie « *complémentaire de* ».

► **Exemple :** Pour un univers $\Omega = \{\text{“blanc“}, \text{“rouge“}, \text{“bleu“}\}$, l'événement $\bar{A} = \{\text{“bleu“}\}$ est le complémentaire de l'événement $A = \{\text{“blanc“}, \text{“rouge“}\}$.

Dans la théorie moderne des probabilités, la modélisation d'une expérience aléatoire fait référence au langage des ensembles. En effet, les opérations logiques sur les événements : « et », « ou », « négation » se traduisent par des opérations ensemblistes : intersection, réunion, passage au complémentaire. Le tableau 2.2 présente la correspondance entre les deux langages.

TABLEAU 2.2 – Langage ensembliste - langage probabiliste

Notations	Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire probabiliste
\emptyset	Ensemble vide	Événement impossible
Ω	Ensemble fondamental	Événement certain
ω	Élément de Ω	Événement élémentaire
A	Sous-ensemble de Ω	Événement
$\omega \in A$	ω appartient à A	Le résultat de ω est une des réalisations possibles de A
$A \subset B$	A inclus dans B	A implique B
$A \cup B$	Réunion de A et B	A ou B
$A \cap B$	Intersection de A et B	A et B
A^c	Complémentaire de A dans Ω	Événement contraire de A
$A \cap B = \emptyset$	A et B sont disjoints	A et B sont incompatibles

2.1.4 Ensemble d'événements

À partir d'événements combinés ou d'événements élémentaires (singletons), il est possible de définir des **ensembles d'événements** ou **parties d'événements**.

◇ **Définition.**— L'**ensemble des parties**, noté $\mathcal{P}(\Omega)$, correspond à l'ensemble de tous les événements réalisables à partir des événements élémentaires de l'univers Ω . Par convention $\Omega \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $\emptyset \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Par convention, l'événement certain (univers) et l'ensemble des événements impossibles appartiennent toujours à l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\Omega)$.

Il convient de ne pas confondre l'univers de tous les *résultats possibles* Ω et l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ de tous les *événements* que l'on peut définir à partir de Ω .

► **Exemple :** On considère l'exemple d'un lancer de dé à trois faces. L'univers des résultats possibles est $\Omega = \{1, 2, 3\}$. En effet, le résultat de l'expérience aléatoire, c.à.d. du lancer de dé, sera soit 1, soit 2 ou soit 3. Par contre, à partir de cet univers de cardinalité égale à 3, on peut constitué $2^3 = 8$ événements :

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1 \cup 2\}, \{1 \cup 3\}, \{2 \cup 3\}, \{1 \cup 2 \cup 3\}, \emptyset\}$$

On peut aussi noter l'ensemble des parties sous la forme suivante :

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1 \cup 2\}, \{1 \cup 3\}, \{2 \cup 3\}, \Omega, \emptyset\}$$

Pour un univers des possibles Ω de dimension finie, de cardinalité $\text{card}(\Omega) = n$, la cardinalité de l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\Omega)$ est égale à : $\text{card}(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^n$.

2.1.5 Tribu d'événements

◇ **Définition.**— Une **tribu** sur l'univers Ω est un sous-ensemble d'événements ou de parties, notée \mathcal{F} , vérifiant :

(i) $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, $\Omega \in \mathcal{F}$ et $\emptyset \in \mathcal{F}$.

(ii) L'ensemble \mathcal{F} est stable par **passage au complémentaire** : pour tout événement A de \mathcal{F} , l'événement complémentaire \bar{A} appartient à l'ensemble

\mathcal{F} .

$$\forall A \in \mathcal{F} \text{ alors } \bar{A} \in \mathcal{F}$$

(iii) L'ensemble \mathcal{F} est stable par **réunion dénombrable** : pour toute suite d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartenant à \mathcal{F} , l'union de ces événements appartient à l'ensemble \mathcal{F} .

$$(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F} \text{ alors } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$$

Par convention, on note les tribus par des lettres avec une police de caractère dite calligraphique, comme par exemple \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{F} , etc.

► **Exemple** : Soit un univers $\Omega = \{1, 2, 3\}$, alors l'ensemble $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \Omega\}$ est une tribu sur Ω . En effet, cet ensemble appartient à l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\Omega)$. De plus, il comprend l'ensemble vide \emptyset et l'événement certain (univers) Ω . Cet ensemble est stable par passage au complémentaire. Par exemple, si l'on pose $B = \{1\}$, alors $\bar{B} = \{\emptyset, \{2, 3\}, \Omega\} \in \mathcal{A}$. On obtient un résultat similaire pour toute union des sous-ensembles de \mathcal{A} . Enfin, si l'on considère par exemple l'union des événements $\{1\}$ et $\{2, 3\}$, on obtient un événement $C = \{1\} \cup \{2, 3\} = \Omega \in \mathcal{A}$. On obtient un résultat similaire pour toute union des sous-ensembles de \mathcal{A} .

2.1.6 Espace probabilisable

◇ **Définition.**— Un **espace probabilisable** est un couple (Ω, \mathcal{F}) où \mathcal{F} est une tribu sur l'univers Ω . Dans le cas d'un univers fini ou infini dénombrable, un univers probabilisable est donné par $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ puisque $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω . Un espace probabilisable est un univers de résultats sur lequel nous pouvons définir des probabilités.

► **Exemple** : On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé à trois faces parfaitement équilibrées. L'univers des résultats possibles est $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Comme nous l'avons vu précédemment, l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\Omega)$ est défini par :

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1 \cup 2\}, \{1 \cup 3\}, \{2 \cup 3\}, \{1 \cup 2 \cup 3\}, \emptyset\}$$

Puisque l'univers Ω est fini, l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu sur Ω et le couplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est un espace probabilisable.

2.2 Probabilités

2.2.1 Définition générale

Une **probabilité** est une application qui associe à tout événement appartenant à une tribu une valeur sur $[0, 1]$.

✧ **Définition.**— On appelle **probabilité** P sur (Ω, \mathcal{F}) une application $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ telle que :

- (i) $P(\Omega) = 1$
- (ii) Pour toute suite d'événements disjoints $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{F} on a (propriété dite de σ additivité) :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n)$$

Le triplet (Ω, \mathcal{F}, P) s'appelle un *espace probabilisé*, où \mathcal{F} est une tribu sur l'univers Ω et P une probabilité.

► **Exemple :** On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé à trois faces parfaitement équilibrées avec $\Omega = \{1, 2, 3\}$. L'ensemble des parties $\mathcal{P}(\Omega)$ est :

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1 \cup 2\}, \{1 \cup 3\}, \{2 \cup 3\}, \{1 \cup 2 \cup 3\}, \emptyset\}$$

Le couplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est un univers probabilisable, on peut donc lui associer une probabilité $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$, telle que pour tout événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ il existe une probabilité $P(A) \in [0, 1]$. Puisque le dé est parfaitement équilibré, les événements élémentaires $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ sont équiprobables et leur probabilité est égale à $\frac{1}{3}$. On en déduit les probabilités pour tous les événements de $\mathcal{P}(\Omega)$ (le tableau 2.3 synthétise ces $2^3 = 8$ probabilités pour tous les événements de $\mathcal{P}(\Omega)$).

TABLEAU 2.3 – Probabilités pour un lancer de dé à trois faces

Événement	Probabilité	Événement	Probabilité
$A_1 = \{1\}$	$P(A_1) = 1/3$	$A_5 = \{1 \cup 3\}$	$P(A_5) = 2/3$
$A_2 = \{2\}$	$P(A_2) = 1/3$	$A_6 = \{2 \cup 3\}$	$P(A_6) = 2/3$
$A_3 = \{3\}$	$P(A_3) = 1/3$	$\Omega = \{1 \cup 2 \cup 3\}$	$P(\Omega) = 1$
$A_4 = \{1 \cup 2\}$	$P(A_4) = 2/3$	\emptyset	$P(\emptyset) = 0$

La probabilité associée à l'union de n'importe quels événements disjoints de la tribu \mathcal{P} est égale à la somme des probabilités des événements. Par exemple :

$$P(\{1\} \cup \{2\}) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$P(\{1 \cup 2\} \cup \{3\}) = P(A_4 \cup A_3) = P(A_4) + P(A_3) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

2.2.2 Définition axiomatique

Dans le cas d'un univers fini, on peut proposer une définition équivalente de la probabilité, dite définition axiomatique.

✧ **Définition.**— Soit (Ω, \mathcal{F}) un espace probabilisable fini tel que $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ et soit $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties, avec $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Une **probabilité** est une application $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$, telle que :

- (i) La somme des probabilités associées aux événement élémentaires ω_i est égale à 1 :

$$\sum_{i=1}^n P(\omega_i) = 1$$

- (ii) La probabilité d'un événement $A \in \mathcal{F}$ est égale à la somme des probabilités associées aux événements élémentaires ω_i qui le constituent :

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$$

Ces axiomes des probabilités sont aussi appelés axiomes de Kolmogorov.

► **Exemple :** On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé à trois faces parfaitement équilibrées avec $\Omega = \{1, 2, 3\}$. On vérifie que pour l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ on a :

$$P(\{1\}) + P(\{2\}) + P(\{3\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

Par ailleurs, la probabilité de tout événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ est égale à la somme des probabilités associées aux événements élémentaires qui le constituent. Par exemple,

pour l'événement $A = \{1 \cup 3\}$, on a :

$$P(\{1 \cup 3\}) = P(\{1\}) + P(\{3\}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

2.2.3 Propriétés de probabilité

Soit un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) , alors quels que soient les événements A et B appartenant à $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, la probabilité P vérifie :

♦ **Propriété 1** : La probabilité associée à l'événement certain (univers des possibilités Ω) est égale à 1 :

$$P(\Omega) = 1$$

♦ **Propriété 2** : L'événement impossible est de probabilité nulle :

$$P(\emptyset) = 0$$

♦ **Propriété 3** : La probabilité de l'événement complémentaire d'un événement quelconque A s'obtient par :

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

♦ **Propriété 4** : La probabilité de l'union de deux événements s'obtient par la formule de Poincaré :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

♦ **Propriété 5** : Si un événement en implique un autre, sa probabilité est plus petite :

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

2.2.4 Équiprobabilité

Si Ω est fini, $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, à chacun des événements élémentaires ω_i on a : $P(\{\omega_i\}) = p_i$, avec $1 \leq i \leq n$, tel que : $0 \leq p_i \leq 1$ et $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, ce qui correspond à la loi uniforme discrète définie par :

$$p_i = \frac{1}{n} \text{ avec } 1 \leq i \leq n$$

La probabilité d'un événement quelconque A de $\mathcal{P}(\Omega)$ est définie comme la somme des probabilités des tous les événements élémentaires qui sont inclus.

$$P(A) = \sum_{\omega_i} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \times \text{card}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

Un cas favorable étant un événement élémentaire qui réalise A . Cependant, il faut bien faire attention que cette règle ne s'applique que dans le cas d'équiprobabilité des événements élémentaires.

2.3 Probabilité conditionnelle

2.3.1 Définition de la probabilité conditionnelle

On considère l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) et un événement particulier A , tel que $A \subset \mathcal{F}$. Cependant, avant la réalisation de l'expérience aléatoire, on obtient une information qui se traduit par un événement $B \in \mathcal{F}$. La probabilité associée à l'événement A doit donc tenir compte de l'événement B . Cette probabilité associée à l'événement A sachant que l'événement B est appelée **probabilité conditionnelle**.

✧ **Définition 1.**— Soit un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) et soient A et B deux événements appartenant à la tribu \mathcal{F} sur Ω , tels que $P(B) > 0$ (l'événement impossible ne peut pas être un événement de conditionnement). La **probabilité conditionnelle** de l'événement A sachant B est définie par :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

La probabilité conditionnelle d'une union d'événements disjoints (A_1, \dots, A_n) correspond à la somme des probabilités de ces événements :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i/B\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i/B)$$

► **Exemple :** On lance deux fois une pièce de monnaie et on cherche la probabilité que les deux jets amènent « face » sachant que le premier est déjà un « face ». On suppose que les éléments de l'ensemble fondamental $\Omega = \{(F, F); (F, P); (P, F); (P, P)\}$

sont équiprobables. En désignant par l'événement $A = \text{« les deux jets amènent face »}$, c.à.d. $A = \{(F, F)\}$ et par l'événement $B = \text{« le premier jet donne face »}$, c.à.d. $B = \{(F, F); (F, P)\}$. Cette probabilité conditionnelle est donnée par :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(F, F)}{P((F, F); (F, P))}$$

$$= \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}$$

◇ **Définition 2.**— Soit un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) et soient A et B deux événements appartenant à la tribu \mathcal{F} sur Ω , tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$. La **probabilité jointe** associée à l'événement $A \cap B$ est définie par :

$$P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B) = P(B/A) \times P(A)$$

Cette définition peut se généraliser à un ensemble d'événements $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{F}^n$ tels que $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) > 0$, par la formule des probabilités composées (formule de l'intersection). La probabilité jointe associée à l'événement $A_1 \cap \dots \cap A_n$ est définie par :

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2/A_1) \times P(A_3/A_1 \cap A_2) \times \dots \times P(A_n/A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Cette formule des probabilités composées est particulièrement utile pour le calculer des probabilités d'intersections.

2.3.2 Théorème de Bayes

◇ **Définition.**— Soit un système complet d'événements, c.à.d. une partition de Ω en événements A_1, \dots, A_n de probabilités strictement positives, $P(A_i) > 0$ pour $1 \leq i \leq n$, et incompatibles deux à deux, c.à.d. avec $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$ et $\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$. On suppose que les probabilités des événements inclus dans chacun des A_i sont connues et on va donc décomposer un événement quelconque B sur ce système :

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap B)$$

On aboutit ainsi à la formule de la probabilité totale :

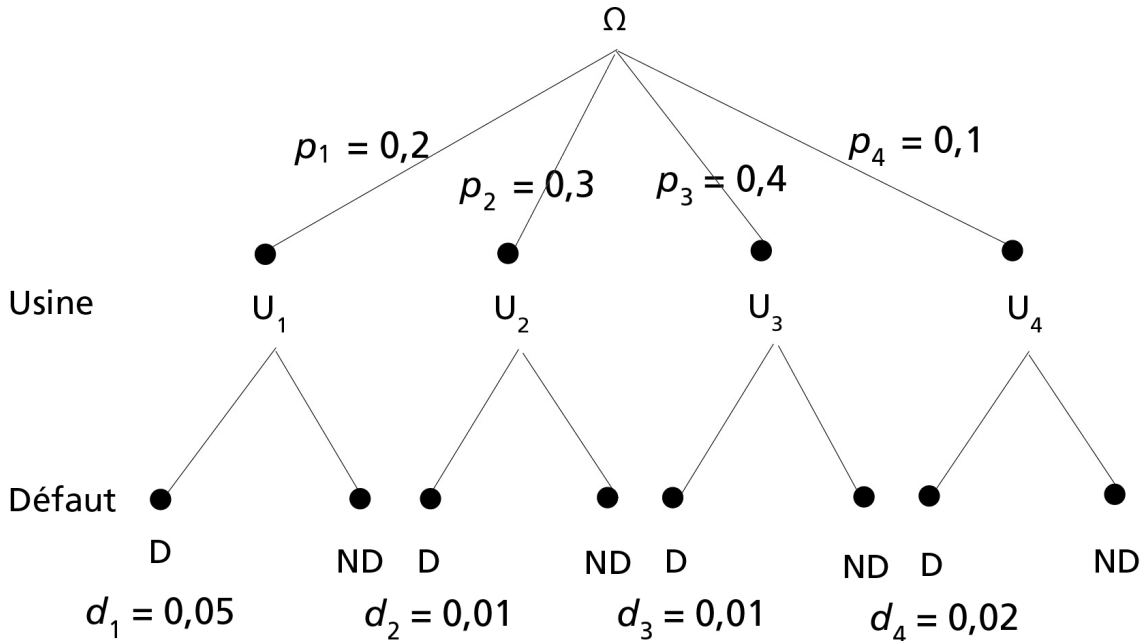
$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) P(B/A_i)$$

Ceci va nous permettre de calculer les probabilités *a posteriori* $P(B/A_i)$, après réalisation d'un événement B , à partir des probabilités *a priori* $P(A_i)$, $1 \leq i \leq n$:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) P(B/A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j) P(B/A_j)}$$

► **Exemple** : Une pièce est produite dans quatre usines, noté U_i pour $i = 1, \dots, 4$. On note $p_i = P(U_i)$ la probabilité que la pièce provienne de l'usine U_i , avec $p_1 = 0,2$, $p_2 = 0,3$, $p_3 = 0,4$ et $p_4 = 0,1$. Pour chacune de ces usines, la probabilité que la pièce soit défectueuse est notée d_i , avec $d_1 = 0,05$, $d_2 = 0,01$, $d_3 = 0,01$ et $d_4 = 0,02$. Ces probabilités doivent être comprises comme des probabilités conditionnelles de défaut sachant que la pièce est produite dans l'usine i et peuvent se noter sous la forme $d_i = P(D/U_i)$ où D représente l'événement « défauts ». Le système complet peut être représenté sous la forme d'un arbre des « défauts » comme sur la figure (2.1) .

FIGURE 2.1 – Arbre des défauts



Considérons une pièce défectueuse prise au hasard et calculons la probabilité qu'elle provienne de la $i^{\text{ème}}$ usine.

D'après le théorème de Bayes, on a :

$$P(U_i/D) = \frac{P(D/U_i) \times P(U_i)}{\sum_{j=1}^4 P(D/U_j) \times P(U_j)} = \frac{P(D/U_i) \times P(U_i)}{P(D)} \quad \forall i = 1, \dots, 4$$

Calculons d'abord la probabilité qu'une pièce soit défectueuse, c.à.d. $P(D)$.
D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(D) = \sum_{j=1}^4 P(D/U_j) \times P(U_j)$$

$$P(D) = (d_1 \times p_1) + (d_2 \times p_2) + (d_3 \times p_3) + (d_4 \times p_4)$$

$$P(D) = (0,05 \times 0,2) + (0,01 \times 0,3) + (0,01 \times 0,4) + (0,02 \times 0,1) = 0,019$$

La probabilité totale de défaut est $P(D) = 0,019$, c.à.d. il y a 1,9% de chance qu'une pièce soit défectueuse.

Par conséquent, on obtient :

$$P(U_1/D) = \frac{P(D/U_1) \times P(U_1)}{P(D)} = \frac{d_1 \times p_1}{P(D)} = \frac{0,05 \times 0,2}{0,019} = 0,5263$$

$$P(U_2/D) = \frac{P(D/U_2) \times P(U_2)}{P(D)} = \frac{d_2 \times p_2}{P(D)} = \frac{0,01 \times 0,3}{0,019} = 0,1579$$

$$P(U_3/D) = \frac{P(D/U_3) \times P(U_3)}{P(D)} = \frac{d_3 \times p_3}{P(D)} = \frac{0,01 \times 0,4}{0,019} = 0,2105$$

$$P(U_4/D) = \frac{P(D/U_4) \times P(U_4)}{P(D)} = \frac{d_4 \times p_4}{P(D)} = \frac{0,02 \times 0,1}{0,019} = 0,1053$$

En conclusion, une pièce défectueuse prise au hasard a la plus forte chance de provenir de l'usine 1.

2.4 Indépendance en probabilité

◇ **Définition.**— Soit un espace probabilisé (Ω, \mathcal{F}, P) et soient A et B deux événements appartenant à la tribu \mathcal{F} sur Ω . Les événements A et B sont dit **indépendants** si :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

En effet, la probabilité de réalisation simultanée de deux événements indépendants est égale au produit des probabilités que chacun de ces événements se produise séparément.¹

On peut également définir l'indépendance mutuelle de n événements $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{F}^n$. Les événements A_1, \dots, A_n sont dits **mutuellement indépendants** si :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$

► **Exemple :** On considère une expérience aléatoire consistant à lancer, deux fois de suite, un dé à 6 face et on s'intéresse aux événements $A =$ « Obtenir un 1 au premier lancer » et $B =$ « Obtenir un 2 au deuxième lancer ». Il nous faut démontrer que ces deux événements sont indépendants (bien entendu ce résultat est évident, il n'y a pas d'influence d'un lancer sur l'autre!). L'ensemble fondamental est $\Omega = E \times E$ avec $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, sur lequel il y a équiprobabilité : $P(\{\omega\}) = \frac{1}{6^2}$. Comme $A = \{1\} \times E$, $B = \{2\} \times E$ et $A \cap B = A \cap B = \{(1, 2)\}$ on obtient :

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{6^2} = P(A) \times P(B)$$

Les événements A et B sont donc bien indépendants.

1. En conséquence, si $P(B) > 0$:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P(B)}{P(B)} = P(A)$$

La réalisation d'un événement ne modifie pas la probabilité de réalisation de l'autre.

Chapitre 3

Variables aléatoires

Chaque résultat d'une expérience aléatoire peut être codé au moyen d'une application qui, si elle permet d'associer une probabilité à chacune de ses valeurs numériques discrètes, sera appelée variable aléatoire discrète. De même, on peut associer aux résultats d'une expérience aléatoire un ensemble de valeurs qui forment un (ou plusieurs) intervalle(s) réel(s). Si on peut calculer la probabilité de tous les intervalles qui sont inclus dans cet ensemble, l'application qui réalise ce codage se nomme variable aléatoire (v.a.) continue.

La loi de la variable aléatoire discrète est alors déterminée par les probabilités de toutes ses valeurs possibles. Elle est souvent caractérisée par les deux premiers moments qui sont l'espérance, caractéristique de valeur centrale, et la variance, caractéristique de dispersion autour de cette valeur centrale.

La loi de probabilité d'une variable aléatoire continue est généralement définie par une densité qui sera la dérivée de la fonction de répartition. Le calcul des moments s'effectue à l'aide de cette densité par une intégration.

3.1 Définition générale

Rappelons qu'une application est une relation entre deux ensembles pour laquelle chaque élément du premier (ensemble de départ) est relié à une unique élément du second (ensemble d'arrivé).

On considère une expérience aléatoire et l'on désigne par Ω l'ensemble des résultats possibles.

✧ **Définition.**— Une **variable aléatoire** est une application, notée X , qui pour chaque événement de l'ensemble fondamental Ω associe une valeur appartenant à un univers $X(\Omega)$ qui correspond à l'univers des réalisations, c.à.d l'univers des valeurs prises par la variable aléatoire X . Plus généralement, l'application X associe à tout événement de la tribu \mathcal{F} sur Ω , une valeur appartenant à la tribu \mathcal{E} sur $X(\Omega)$.

Soient (Ω, \mathcal{F}, P) un espace probabilisé et $(X(\Omega), \mathcal{E})$ un univers probabilisable. Une **variable aléatoire** est toute application X de Ω vers $X(\Omega)$:

$$\forall x \in (\mathcal{F}) \quad X^{-1}(x) \in \mathcal{E}$$

Ainsi, la variable aléatoire X est une sorte de fonction qui « transforme » les résultats d'une expérience aléatoire définis sur Ω en des réalisations définies sur $X(\Omega)$.

► **Exemple :** On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé à 6 faces. L'univers des résultats possibles est alors défini par $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Définissons une variable aléatoire, noté X , comme une application qui prend la réalisation 100 lorsque le résultat du lancer est un nombre pair et 200 lorsque le résultat est un nombre impair. On a défini une application associant à tout événement de Ω un élément de l'univers des réalisations $X(\Omega) = \{100, 200\}$.

Suivant que l'univers des réalisations $X(\Omega)$ est dénombrable (fini ou infini) ou non dénombrable (infini), on peut distinguer deux types de variables aléatoires : les variables aléatoires **discrètes** et les variables aléatoires **continues**.

3.2 Variables aléatoires discrètes

Une **variable aléatoire discrète** est une variable aléatoire qui peut prendre des réalisations discrètes, c.à.d. non continues.

✧ **Définition.**— Soient (Ω, \mathcal{F}, P) un univers probabilisé fini ou infini dénombrable. On appelle **variable aléatoire discrète** X toute application $X : \Omega \rightarrow X(\Omega)$ telle que $\forall x_i \in X(\Omega)$:

$$P(X = x_i) = P(\{\omega \in \Omega ; X(\omega) = x_i\})$$

Le terme $P(X = x_i)$ se lit comme « la probabilité que la variable aléatoire X prenne la réalisation x_i ». Par convention, on note la variable aléatoire avec une lettre majuscule (par exemple X) et sa réalisation avec une lettre minuscule (par exemple x).

3.2.1 Loi de probabilité

✧ **Définition.**— L'application $P(X = x_i)$ définie pour toutes les réalisations $x_i \in X(\Omega)$ s'appelle la **loi de probabilité** de la variable aléatoire discrète X . Cette loi de probabilité n'est rien d'autre que la « liste » des probabilités $P(X = x_1), P(X = x_2), \dots, P(X = x_n), \dots$, associés à tous les événements de l'univers des réalisations $X(\Omega)$. Par définition, la somme de ces probabilités pour toutes les réalisations de l'univers $X(\Omega)$ est toujours égale à 1.

$$\sum_{x_i \in X(\Omega)} P(X = x_i) = 1$$

Si le nombre de réalisations, noté n , appartenant à l'univers $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ est fini :

$$\sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1$$

Par contre, si l'univers des réalisations $X(\Omega)$ est infini dénombrable :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(X = x_i) = 1$$

On appelle alors loi de probabilité (ou distribution) de la variable aléatoire X l'ensemble des couples $(x_i, p_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Si X ne prend qu'un petit nombre de valeurs, cette distribution est généralement présenté dans un tableau.

Valeurs possibles x_i de X	x_1	\dots	x_i	\dots	Total
Probabilités correspondantes (p_i)	p_1	\dots	p_i	\dots	1

► **Exemple** : La loi uniforme associée à un lancer de dé à six faces numérotées est présentée dans le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5	6	Total
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

3.2.2 Fonction de répartition

◇ **Définition.**— La **fonction de répartition** de la variable aléatoire (discrète ou continue) X , notée $F_X(x)$, correspond à la probabilité que cette variable prenne des réalisations inférieures^a à une certaine valeur $x \in \mathbb{R}$:

$$F_X(x) = P(X < x) ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

La **fonction de répartition** d'une variable aléatoire discrète X définie sur $X(\Omega)$ est une fonction $F_X(x) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ telle que :

$$F_X(x) = P(X < x) = \sum_{x_i \in X(\Omega), x_i < x} P(X = x_i) ; \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

a. Dans la littérature statistique anglo-saxonne, on définit habituellement $F(x)$ comme la probabilité attachée à l'ensemble des valeurs inférieures ou *égales* à x : $F_X(x) = P(X \leq x)$; $\forall x \in \mathbb{R}$.

Dans le cas d'une variable aléatoire discrète, la fonction de répartition est une fonction croissante des valeurs de x qui se présente en forme de *fonction en escalier*.

◆ **Propriétés** : Pour toute variable aléatoire X (discrète ou continue), la fonction de répartition $F_X(x)$ vérifie toujours les propriétés suivantes :

- (i) $0 \leq F_X(x) \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- (ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$.
- (iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.

La fonction de répartition permet de calculer la probabilité que la variable aléatoire que la variable aléatoire X appartienne à un intervalle $[a, b[$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $b > a$:

$$P(a \leq X < b) = P(X < b) - P(X < a) = F_X(b) - F_X(a)$$

3.2.3 Espérance et variance d'une variable aléatoire discrète

1 – Espérance mathématique :

◇ **Définition.**— L'espérance mathématique, notée $\mathbb{E}(X)$ ou $E(X)$, d'une variable aléatoire discrète X défini sur $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ est égale à :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

► **Exemple 1 :** On considère une variable aléatoire Y définie sur $Y(\Omega) = \{0, 2, 4, 6\}$ telle que sa loi de probabilité est caractérisée par les probabilités du tableau.

TABLEAU 3.1 – Probabilités associées à la variable Y

Réalisation de Y	Probabilité
$Y = 0$	$P(Y = 0) = 0,1$
$Y = 2$	$P(Y = 2) = 0,2$
$Y = 4$	$P(Y = 4) = 0,3$
$Y = 6$	$P(Y = 6) = 0,4$

Son espérance mathématique est égale à :

$$E(Y) = \sum_{i=1}^4 y_i P(Y = y_i) = 0 \times 0,1 + 2 \times 0,3 + 4 \times 0,4 + 6 \times 0,2 = 3,4$$

Cela signifie qu'en « moyenne » les réalisations obtenues pour plusieurs tirages dans la loi de probabilité de cette variables seront égales à 3,4.

◆ **Propriété 1 :** Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ fini et soit $g(\cdot)$ une fonction telle que $\sum_{i=1}^n |g(x_i)| P(X = x_i) < \infty$. L'espérance de la

variable aléatoire $g(X)$ est alors définie par :

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{i=1}^n g(x_i)P(X = x_i)$$

◆ **Propriété 2** : Soit X une variable aléatoire et soient deux constantes $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors $\mathbb{E}(a + bX) = a + b\mathbb{E}(X)$. On dit que l'espérance est un opérateur linéaire.

◆ **Propriété 3** : Soit X une variable aléatoire et soit $g(\cdot)$ une fonction non-linéaire, alors :

$$\mathbb{E}(g(x)) \neq g(\mathbb{E}(X))$$

► **Exemple 2** : On considère une variable aléatoire Y telle que $\mathbb{E}(Y) = 5$. Puisque l'espérance est un opérateur linéaire $\mathbb{E}(6 - 2Y) = 6 - 2\mathbb{E}(Y) = -4$. Par contre, $\mathbb{E}(Y^2) \neq \mathbb{E}(Y)^2$ et $\mathbb{E}(\frac{1}{Y}) \neq \frac{1}{\mathbb{E}(Y)}$ car les fonctions $g(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{x}$ ne sont pas des fonctions linéaires.

2 – Variance et écart-type :

La variance est un indicateur de la dispersion de la loi de probabilité autour de l'espérance.

◇ **Définition 1.**— Soit X une variable aléatoire (discrète ou continue) telle que $\mathbb{E}(X^2)$ existe. La **variance** de X , notée $\mathbb{V}(X)$ ou $V(X)$, est défini par :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$$

La variance $\mathbb{V}(X)$ peut toujours se réécrire sous la forme suivante :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Dite aussi formule de Konig-Huygens.

✧ **Définition 2.**— Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Si $\mathbb{E}(X^2)$ existe, sa **variance** est :

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mathbb{E}(X))^2 \times P(X = x_i)$$

On montre que cette équation peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\mathbb{V}(X) = \left[\sum_{i=1}^n p_i x_i^2 \right] - \mathbb{E}(X)^2 = \left[\sum_{i=1}^n p_i x_i^2 \right] - \left[\sum_{i=1}^n p_i x_i \right]^2$$

avec $p_i = P(X = x_i)$.

L'**écart-type**, noté σ_X , correspond à la racine carrée de la variance, c.à.d. $\sigma_X^2 = \mathbb{V}(X)$.

► **Exemple :** On considère une variable aléatoire Y définie sur $Y(\Omega) = \{0, 2, 4, 6\}$ telle que sa loi de probabilité définie par les probabilité de l'exemple relatif à l'espérance. Nous avons vu que qon espérance était égale à $\mathbb{E}(Y) = 3,4$. Sa variance est égale à :

$$\mathbb{V}(Y) = \sum_{i=1}^4 (y_i - \mathbb{E}(X))^2 P(Y = y_i)$$

On obtient alors :

$$\mathbb{V}(Y) = (0 - 3,4)^2 \times 0,1 + (2 - 3,4)^2 \times 0,3 + (4 - 3,4)^2 \times 0,4 + (6 - 3,4)^2 \times 0,2 = 3,24$$

◆ **Propriété :** Soit X une variable aléatoire et soient deux constantes $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors $\mathbb{V}(a + bX) = b^2 \mathbb{V}(X)$. On parle de **non-linéarité de la variance**.

3.3 Variables aléatoires continues

On considère le cas où l'univers des réalisations $X(\Omega)$ de loi de probabilité de la variable aléatoire X est non dénombrable. On dit alors que la variable aléatoire est **continue**. C'est le cas notamment de toutes les variables aléatoires réelle (v.a.r en abrégé) pour lesquelles $X(\Omega) = \mathbb{R}$ ou une partie de \mathbb{R} .

✧ **Définition.**— Soit (Ω, \mathbb{F}, P) un univers probabilisé non dénombrable. On appelle **variable aléatoire réelle** (continue) toute application $\Omega \rightarrow X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ telle que pour tout intervalle $I \subseteq X(\Omega)$:^a

$$P(X \in I) = P(\{\omega \in \Omega; X(\omega) \in I\})$$

^a. Le symbole \subseteq , utilisé pour les ensembles, « inclus ou équivalent à ».

Cette définition signifie que la probabilité que la variable X appartienne à un certain intervalle de réalisations $I \subseteq X(\Omega)$ (par exemple l'intervalle $[-3, 5]$) correspondent à la somme des réalisations $X(\omega)$ qui appartiennent elles-mêmes à l'intervalle I . Ainsi, l'application X permet de déterminer les probabilités associées à des **intervalles de réalisations**.

3.3.1 Fonction de densité

Dans le cas d'une variable aléatoire réelle (continue), on ne peut déterminer que la probabilité associée à des intervalles de réalisations.

✧ **Définition.**— Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$. La loi de probabilité de X admet une **fonction de densité**, notée^a $f_X(x)$, si cette fonction est définie sur $X(\Omega)$, positive ou nulle, intégrable^b et telle que $\forall (a, b) \in X(\Omega)^2$:

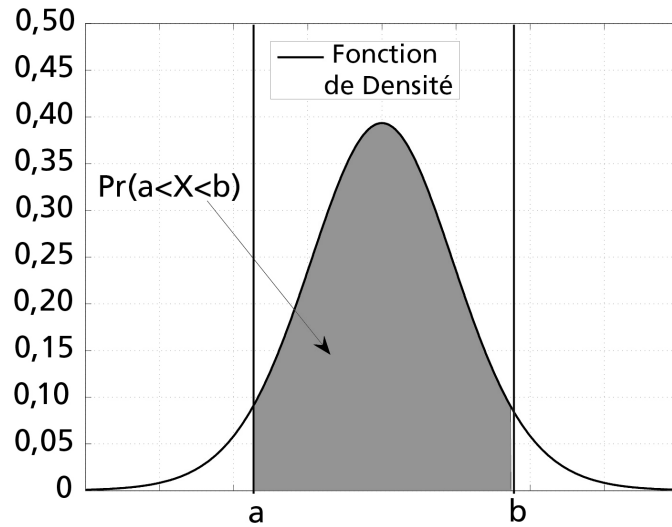
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

^a. La fonction de densité est notée avec une lettre minuscule avec en indice le nom de la variable aléatoire (notée en majuscule).

^b. On dit qu'une fonction intégrable si cette fonction peut être intégrée et que son intégrale est égale à une quantité finie.

La figure (3.1) illustre le concept de fonction de densité. Une fonction de densité $f_X(x)$ est une fonction positive ou nulle, définie sur $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ (axe des abscisses) telle que pour tout couple de valeurs $(a, b) \in X(\Omega)^2$, la probabilité que les réalisations de X appartiennent à l'intervalle $[a, b]$ correspond à l'*aire sous la densité* entre ces deux bornes. Rappelons que cette aire représente l'intégrale $\int_a^b f_X(x) dx$.

FIGURE 3.1 – Illustration de la définition de la fonction de densité



Puisque la probabilité d'être en un point est nulle, la définition de la densité de probabilité peut se réécrire de façon équivalente sous la forme suivante :

$$P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

♦ **Propriété** : La probabilité associée à une réalisation particulière d'une variable aléatoire continue est nulle :

$$P(X = x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

► **Exemple** : On que la note Y d'un étudiant à son examen de « statistique » a été distribué au hasard. La variable Y , définie sur $Y(\Omega) = [0, 20]$, admet une loi uniforme (continue) telle que :

$$f_Y(y) = \frac{1}{20} \quad \forall y \in [0, 20]$$

Déterminons la probabilité d'obtenir une note comprise entre 8 et 13, ainsi que la probabilité d'obtenir une note supérieure à 15. Par définition, il vaut :

$$P(8 \leq Y \leq 13) = \int_8^{13} f_X(x) dx = \int_8^{13} \frac{1}{20} dx = \left[\frac{x}{20} \right]_8^{13} = \frac{13}{20} - \frac{8}{20} = \frac{1}{4}$$

Si la note a été attribuée au hasard, on vérifie qu'il a 1 chance sur 4 d'obtenir une note comprise entre 8 et 13. De la même façon :

$$P(P \geq 15) = \int_{15}^{20} f_X(x) dx = \int_{15}^{20} \frac{1}{20} dx = \left[\frac{x}{20} \right]_{15}^{20} = \frac{20}{20} - \frac{15}{20} = \frac{1}{4}$$

◆ **Propriétés** : Soit X une variable aléatoire continue avec $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$. Sa fonction de densité $f_X(x)$ vérifie les propriétés suivantes :

- (i) $f_X(x) \geq 0, \forall x \in X(\Omega)$ et $f_X(x) = 0, \forall x \notin X(\Omega)$.
- (ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$.
- (iii) $P(X \geq a) = P(X > a) = \int_a^{+\infty} f_X(x) dx$.
- (iv) $P(X \leq b) = P(X < b) = \int_{-\infty}^b f_X(x) dx$.

3.3.2 Fonction de répartition

◇ **Définition.** — La **fonction de répartition**, notée $F_X(x)$, de la variable aléatoire réelle X définie sur $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ correspond à la probabilité que cette variable soit inférieure ou égale à une certaine valeur x in \mathbb{R} :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

◆ **Propriétés** : Pour toute variable aléatoire continue X , la fonction de répartition $F_X(x)$ vérifie toujours les propriétés suivantes :

- (i) $F_X(x)$ est croissante avec x : $\frac{\partial F_X(x)}{\partial x} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- (ii) $0 \leq F_X(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.
- (iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$.
- (iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.

Par construction, la fonction de densité correspond à la dérivée première de la fonction de répartition :

$$f_X(x) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

3.3.3 Espérance et variance d'une variable aléatoire continue

✧ **Définition 1.**— Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$ et caractérisé par une fonction de densité $f_X(x)$. Le **moment ordinaire** (non centré) d'ordre $k \in \mathbb{N}$ de la loi de probabilité de X est définie par :

$$m_k = \mathbb{E}(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x) dx$$

Le **moment centré d'ordre** $k \in \mathbb{N}$ de la loi de probabilité de X est définie par :

$$\mu_k = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^k\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}(X))^k f_X(x) dx$$

✧ **Définition 2.**— Soit X une variable aléatoire réelle continue, son **espérance** et sa **variance** sont définies par :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

$$\mathbb{V}(X) = \mu_2 = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 f_X(x) dx$$

3.4 Couple de variables aléatoires

On considère deux variables aléatoires (discrètes ou continues) X et Y respectivement définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$. Les réalisations du **couple de variables aléatoires** (X, Y) appartiennent à l'univers des réalisations $X(\Omega) \times Y(\Omega)$.¹

3.4.1 Loi jointe et loi marginale

✧ **Définition 1.**— L'application $P((X = x_i) \cap (Y = y_i)), \forall (x_i, y_i) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ définit la **loi de probabilité jointe** du couple de variables aléatoires dis-

1. Le symbole \times correspond au *produit cartésien*. Cela signifie que l'univers des réalisations $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ (prononcer $X(\Omega)$ *croix* $Y(\Omega)$) correspond à l'ensemble de tous les couples de réalisations (x, y) où $x \in X(\Omega)$ et $Y \in Y(\Omega)$.

crètes (X, Y) . Puisque les réalisations forment un système complet :

$$\sum_{(x_i, y_i) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} P((X = x_i) \cap (Y = y_i)) = 1$$

La quantité $P((X = x_i) \cap (Y = y_i))$ correspond à la probabilité jointe d'observer à la fois $X = x_i$ et $Y = y_i$. On peut la noter de différentes façons :

$$P((X = x_i) \cap (Y = y_i)) = P(x_i, y_i) = P(X = x_i) \cap P(Y = y_i)$$

✧ **Définition 2.**— Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires défini sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$. On appelle **lois de probabilité marginales** de X et de Y , les applications respectivement définies par :

$$P(X = x_i) = \sum_{y_i \in Y(\Omega)} P((X = x_i) \cap (Y = y_i))$$

$$P(Y = y_i) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} P((X = x_i) \cap (Y = y_i))$$

La **probabilité marginale** $P(X = x_i)$ correspond ainsi à la somme des probabilités jointes d'observer $X = x_i$ conjointement à toutes les réalisations possibles de Y , c.à.d. $Y = y_1, \dots, y_n$ si $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_n\}$.

Par construction, la somme des probabilités marginales $P(X = x_i)$ associées à toutes les réalisations $x_i \in X(\Omega)$ est égale à 1 :

$$\sum_{x_i \in X(\Omega)} P((X = x_i)) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} \sum_{y_i \in Y(\Omega)} P((X = x_i) \cap (Y = y_i)) = 1$$

De la même façon :

$$\sum_{y_i \in Y(\Omega)} P((X = y_i)) = \sum_{y_i \in Y(\Omega)} \sum_{x_i \in X(\Omega)} P((X = x_i) \cap (Y = y_i)) = 1$$

► **Exemple :** On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y respectivement définies sur $X(\Omega) = [a, b]$ et $Y(\Omega) = [1, 2]$, telles que :

$$P(X = a) = 0,2 \quad P(X = b) = 0,8$$

$$P(Y = 1) = 0,7 \quad P(Y = 2) = 0,3$$

On admet que la loi de probabilité jointe du couple (X, Y) , définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega) = \{\{a, 1\}, \{a, 2\}, \{b, 1\}, \{b, 2\}\}$, est définie par :

$$P((X = a) \cap (Y = 1)) = 0,14 \quad P((X = a) \cap (Y = 2)) = 0,06$$

$$P((X = b) \cap (Y = 1)) = 0,56 \quad P((X = b) \cap (Y = 2)) = 0,24$$

La probabilité marginale d'observer $X = a$ est égale à :

$$P(X = a) = P((X = a) \cap (Y = 1)) + P((X = a) \cap (Y = 2)) = 0,14 + 0,06 = 0,2$$

3.4.2 Covariance d'un couple de variables aléatoires

✧ **Définition 1.**— La **covariance** de deux variables aléatoires X et Y , notée $Cov(X, Y)$, est définie comme étant l'espérance du produit des variables centrées sur leurs espérances respectives, c.à.d. :

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X)) \times (Y - \mathbb{E}(Y))]$$

ou de façon équivalente par :

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

En utilisant la distribution jointe du couple (X, Y) , la covariance de ces deux variables aléatoires **discrètes** X et Y est égale à :

$$Cov(X, Y) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} \sum_{y_i \in Y(\Omega)} x_i y_i P((X = x_i) \cap (Y = y_i)) - \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y)$$

Ce moment permet d'évaluer le sens de variation des variables X et Y . Si la covariance est positive, les réalisations des deux variables X et Y évoluent « dans le même sens ». Cependant, si la covariance est négative, les réalisations ont tendance à évoluer « en sens opposé ».

Il est important de noter que l'indépendance des deux variables X et Y implique la nullité de la covariance ($Cov(X, Y) = 0$), mais que la réciproque n'est pas nécessai-

rement vraie.

La covariance est une mesure symétrique $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$. Par définition, $Cov(X, X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = V(X)$.

✧ **Définition 2.**— La **corrélation** entre deux variables aléatoires X et Y est définie par :

$$corr(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

où $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ et $\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)}$ désignent les écarts-types des variables X et Y . Par construction, $corr(X, Y) \in [-1, 1]$.

► **Exemple :** On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y respectivement définies sur $X(\Omega) = [10, 20]$ et $Y(\Omega) = [1, 2]$, telles que :

$$P(X = 10) = 0,2 \quad P(Y = 1) = 0,7$$

On admet que la loi de probabilité jointe du couple (X, Y) , définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega) = \{\{10, 1\}, \{10, 2\}, \{20, 1\}, \{20, 2\}\}$, est définie par :

$$P((X = 10) \cap (Y = 1)) = 0,14 \quad P((X = 10) \cap (Y = 2)) = 0,06$$

$$P((X = 20) \cap (Y = 1)) = 0,56 \quad P((X = 20) \cap (Y = 2)) = 0,24$$

On montre que :

$$\mathbb{E}(X) = 10 \times P(X = 10) + 20 \times P(X = 20) = 18$$

$$\mathbb{E}(Y) = 1 \times P(Y = 1) + 2 \times P(Y = 2) = 1,3$$

La covariance entre X et Y est définie par :

$$Cov(X, Y) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 x_i y_j P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) - \mathbb{E}(X) \times \mathbb{E}(Y)$$

On vérifie que cette covariance est nulle puisque les variables X et Y sont indépendantes.

$$Cov(X, Y) = 0,14 \times 10 + 0,06 \times 20 + 0,56 \times 20 + 0,24 \times 40 - 1,3 = 0$$

3.4.3 Loi conditionnelle

✧ **Définition 1.**— Soient deux variables aléatoires discrètes X et Y respectivement définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$. L'application $P(X = x_i/Y = y_i), \forall x_i \in X(\Omega)$ définit la **loi de probabilité conditionnelle** de la variable X sachant $Y = y_i$. Par définition :^a

$$P(X = x_i/Y = y_i) = \frac{P((X = x_i) \cap (Y = y_i))}{P(Y = y_i)} \quad \forall x_i \in X(\Omega)$$

^a. Le terme $P(X = x_i/Y = y_i)$ se lit « probabilité que la variable X prenne la valeur x_i sachant que la variable Y est égale à y_i ».

De façon symétrique, on peut définir la loi de probabilité de la variable Y sachant que $X = x_i$ par :

$$P(Y = y_i/X = x_i) = \frac{P((X = x_i) \cap (Y = y_i))}{P(X = x_i)} \quad \forall y_i \in Y(\Omega)$$

Les probabilités conditionnelles, comme toute probabilité, somme à l'unité :

$$\sum_{x_i \in X(\Omega)} P(X = x_i/Y = y_i) = 1.$$

◆ **Propriété :** Les variables aléatoires discrètes X et Y sont **indépendantes** lorsque les relations suivantes sont vérifiées $\forall x_i \in X(\Omega)$ et $\forall y_i \in Y(\Omega)$:

$$P((X = x_i) \cap (Y = y_i)) = P(X = x_i) \times P(Y = y_i)$$

$$P(X = x_i/Y = y_i) = P(X = x_i)$$

$$P(Y = y_i/X = x_i) = P(Y = y_i)$$

► **Exemple :** On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y respectivement définies sur $X(\Omega) = [a, b]$ et $Y(\Omega) = [1, 2]$. On admet que :

$$P(X = a) = 0,2 \quad P(Y = 1) = 0,7$$

$$P((X = a) \cap (Y = 1)) = 0,14 \quad P((X = b) \cap (Y = 1)) = 0,56$$

La loi conditionnelle de X sachant que $Y = 1$ est définie par les probabilités suivantes :

$$P(X = a/Y = 1) = \frac{P((X = a) \cap (Y = 1))}{P(Y = 1)} = \frac{0,14}{0,7} = 0,2$$

$$P(X = b/Y = 1) = \frac{P((X = b) \cap (Y = 1))}{P(Y = 1)} = \frac{0,56}{0,7} = 0,8$$

On vérifie que $P(X = a/Y = 1) = P(X = a)$ et que $P(X = b/Y = 1) = P(X = b)$. Les probabilités conditionnelles sont égales aux probabilités marginales. C'est la conséquence de l'hypothèse d'indépendance des variables X et Y .

✧ **Définition 2.**— Pour un univers des réalisations fini $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, l'**espérance conditionnelle** et la **variance conditionnelle** de la variable X sachant que $Y = y_i$ sont définies par :

$$\mathbb{E}(X/Y = y_i) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i/Y = y_i)$$

$$\mathbb{V}(X/Y = y_i) = \sum_{i=1}^n (x_i - \mathbb{E}(X))^2 P(X = x_i/Y = y_i)$$

Toutes ces définitions peuvent être généralisées au cas d'un vecteur de variables aléatoires discrètes.

Chapitre 4

Lois de probabilité usuelles

Dans ce chapitre, nous présenterons les principales propriétés de certaines lois usuelles discrètes ou continues. Nous insisterons plutôt sur le contexte d'application de ces lois.

4.1 Lois de probabilité discrètes

4.1.1 Loi uniforme discrète

◇ **Définition 1.**— La **loi uniforme discrète** est une loi de probabilité définie sur un support fini $X(\Omega) = \{k_1, \dots, k_n\}$, pour laquelle toutes les réalisations sont **équiprobables**. On dit que la loi de probabilité de X est uniforme si :

$$P(X = k) = \frac{1}{n} \quad \forall k \in X(\Omega)$$

► **Exemple :** On considère une variable aléatoire X distribuée selon une loi uniforme discrète sur $X(\Omega) = \{1, \dots, 10\}$, alors $P(X = k) = \frac{1}{10} \quad \forall k \in X(\Omega)$. Toutes les réalisations ont la même probabilité.

◇ **Définition 2.**— Si la variable aléatoire X admet une loi uniforme discrète sur $X(\Omega) = [a, a + 1, \dots, b - 1, b]$, sa **fonction de répartition** $F_X(x) = P(X \leq x)$

est définie, $\forall x \in \mathbb{R}$, par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si : } x < a \\ \frac{x-a+1}{b-a+1} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si : } x > b \end{cases}$$

Rappelons qu'une fonction de répartition est toujours définie sur \mathbb{R} , y compris dans le cas d'une variable aléatoire discrète.

◆ **Propriété** : Si X admet une loi uniforme discrète sur $X(\Omega) = \{a, a+1, \dots, b-1, b\}$, alors son espérance et sa variance sont égales à :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$$

4.1.2 Loi de Bernoulli

La loi de **Bernoulli** est une loi de probabilité discrète définie sur un support fini comportant deux réalisations. La loi de Bernoulli est utilisée pour représenter des variables aléatoires **dichotomiques** ou **Binaires**. Elle peut être appliquée à des variables quantitatives ou à des variables qualitatives.¹

◇ **Définition 1.**— La variable aléatoire discrète X suit une **loi de Bernoulli**, de paramètre p , alors on note $X \sim B(p)$, si :

$$P(X = k) = p^k(1-p)^{1-k} \quad \forall k \in X(\Omega) = \{0, 1\}$$

Où le paramètre p est un réel vérifiant $p \in]0, 1[$. Il est appelé **probabilité de succès**^a et correspond à la probabilité que X prenne une réalisation égale à 1, c.à.d. $P(X = 1) = p$.

^a. La valeur 1 est supposée coder le « succès » d'une expérience. Par exemple, on code 1 si « pile » et 0 si « face » si l'on s'intéresse au résultat « pile » dans le cadre d'un lancer de pièce.

► **Exemple** : La loi de Bernoulli peut être appliquée sur des supports du type $X(\Omega) = \{\text{« succès », « échec »}\}$, $X(\Omega) = \{10, 35\}$.

1. Toutefois, il est toujours possible d'exprimer une variable dichotomique qualitative sous la forme d'une variable quantitative en utilisant un **codage** $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

✧ **Définition 2.**— Si la variable aléatoire discrète X suit une **loi de Bernoulli**, de paramètre $p \in]0, 1[$, **sa fonction de répartition** est définie, $\forall x \in \mathbb{R}$, par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si : } x < 0 \\ 1 - p & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si : } x \geq 1 \end{cases}$$

◆ **Propriété :** Si X admet une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$, alors l'espérance et la variance de X sont égales à :

$$\mathbb{E}(X) = p \quad \mathbb{V}(X) = p(1 - p)$$

4.1.3 Loi binomiale

La **loi binomial** est une loi de probabilité discrète définie sur le support fini $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$. Cette loi correspond à une expérience aléatoire dans laquelle on répète n fois de manière indépendante une expérience de Bernoulli avec une probabilité de succès égale à p . On compte alors le nombre de succès, c.à.d. le nombre de fois où la réalisation de la variable de Bernoulli est égale à 1. Le nombre total de succès, noté X , est une variable aléatoire admettant une distribution binomiale de paramètres n, p , notée $X \sim \mathbb{B}(n, p)$.

✧ **Définition 1.**— La variable aléatoire discrète X définie sur $X(\Omega) = \{0, 1, \dots, n\}$ suit une **loi binomiale** $\mathbb{B}(n, p)$ si :^a

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \quad \forall k \in X(\Omega)$$

avec $p \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

^a. La loi binomiale dépend du nombre de combinaisons de x éléments parmi n . Rappelons que ce nombre de combinaisons est donné par : $C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$.

► **Exemple :** Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et telle que $X \sim \mathbb{B}(4, 1/5)$. On obtient alors :

$$P(X = 0) = C_4^0 p^0 (1 - p)^{4-0} = \frac{4!}{0! \times 4!} \times 0,2^0 \times (1 - 0,2)^{4-0} = 0,8^4 = 0,4096$$

$$P(X = 1) = C_4^1 p^1 (1 - p)^{4-1} = \frac{4!}{1! \times 3!} \times 0,2^1 \times (1 - 0,2)^{4-1} = 4 \times 0,2 \times 0,512 = 0,4096$$

$$P(X = 2) = C_4^2 p^2 (1 - p)^{4-2} = \frac{4!}{2! \times 2!} \times 0,2^2 \times (1 - 0,2)^{4-2} = 6 \times 0,04 \times 0,64 = 0,1536$$

◇ **Définition 2.**— Si la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathbb{B}(n, p)$, sa **fonction de répartition** $F_X(x) = P(X \leq x)$ est définie, $\forall x \in \mathbb{R}$, par :

$$\begin{cases} F_X(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ F_X(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ F_X(x) = 1 & \text{si } x > n \end{cases}$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne^a le plus grand entier inférieur ou égale à x .

a. L'opérateur $\lfloor x \rfloor$ est appelée le *floor* (étage en français). Par exemple $\lfloor 1,07 \rfloor = 1$ et $\lfloor 1 \rfloor = 1$.

► **Exemple :** Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ telle que $X \sim \mathbb{B}(4; 1/5)$, alors :

$$F_X(1) = \sum_{k=0}^{\lfloor 1 \rfloor} P(X = k) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0,8192$$

puisque $\lfloor 1 \rfloor = 1$. De même, façon :

$$F_X(1,58) = \sum_{k=0}^{\lfloor 1,58 \rfloor} P(X = k) = \sum_{k=0}^1 P(X = k) = F_X(1) = 0,8192$$

puisque $\lfloor 1,58 \rfloor = 1$.

On comprend aisément que le calcul de $F_X(x)$ soit relativement fastidieux notamment lorsque x et/ou n sont grands. C'est pourquoi lorsque l'on souhaite obtenir des probabilités cumulées d'une loi binomiale, on utilise des **tables statistiques** de la loi binomiale. Plusieurs tables de la loi binomiale figure en annexe de ce cours (**Annexes .1, .2 et .3**) : chaque table correspond à une valeur de n ($n = 10, n = 20, n = 25$ et $n = 50$). Pour chaque table sont reportées différentes valeurs de la probabilité p (de 0,05 à 0,3). Sur les lignes de chaque table figure une valeur k variant de 0 à n . Pour une valeur de n (une table), une valeur p (colonne) et une valeur de k (ligne), on trouve la probabilité cumulée $P(X \leq k)$ associée à la loi $X \sim \mathbb{B}(n, p)$.

◆ **Propriété 1** : Si X admet une loi de Binomial $\mathbb{B}(n, p)$, alors l'espérance et la variance d'une loi binomiale $\mathbb{B}(n, p)$ sont égales à l'espérance et la variance d'une loi de Bernoulli multipliées par n :

$$\mathbb{E}(X) = np \quad \mathbb{V}(X) = np(1 - p)$$

◆ **Propriété 2** : Soient Z_1, \dots, Z_n des variables de Bernoulli (p) indépendantes avec $p \in]0, 1[$, alors :

$$\sum_{i=1}^n Z_i \sim \mathbb{B}(n, p)$$

Cette propriété implique que la loi binomiale est **additive**.

◆ **Propriété 3** : Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes telles que $X \sim B(n, p)$ et $Y \sim B(m, p)$, alors :

$$X + Y \sim B(n + m, p)$$

Propriété 4 : Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim B(n, p)$. Si $n > 5$ et si :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left| \left(\sqrt{\frac{1-p}{p}} - \sqrt{\frac{p}{1-p}} \right) \right| < 0,3$$

alors l'approximation de la loi binomiale par la loi normale peut être appliquée :

$$X \approx \mathcal{N}(np, : np(1 - p))$$

où le symbole \approx signifie « approximativement distribué » selon et le symbole \mathcal{N} désigne la loi normale.

4.1.4 Loi géométrique

La loi géométrique est une loi de probabilité discrète pouvant être définie soit sur l'ensemble des entiers \mathbb{N} , soit sur l'ensemble des entiers non nuls \mathbb{N}^* .

Lorsqu'elle est définie sur \mathbb{N}^* , la loi géométrique de paramètre p correspond à l'expérience aléatoire qui consiste à répéter de manière indépendante une expérience de Bernoulli avec une probabilité de succès égale à p jusqu'au premier succès. Soit X la variable qui correspond au rang du premier succès : ce rang est nécessairement

supérieur ou égale à 1 et inférieur ou égale à n , donc $X \in X(\Omega) = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$. La variable X admet une distribution géométrique de paramètre p notée $X \sim \mathcal{G}(p)$. Lorsqu'elle est définie sur \mathcal{N} , la loi géométrique correspond à la distribution du nombre d'échecs peut être égale à 0 en cas de réussite à la première expérience de Bernoulli. La variable $Y \in Y(\Omega) = \{0, 1, \dots, n, \dots\}$ est distribuée selon une loi géométrique de paramètre p , notée de la même façon $Y \sim \mathcal{G}(p)$.

✧ **Définition 1.**— La variable aléatoire discrète X définie sur $X(\Omega) = \mathbb{N}$ suit une **loi géométrique** $\mathcal{G}(p)$ si :

$$P(X = k) = (1 - p)^k p \quad \forall x \in \mathbb{N}$$

Si cette variable est définie sur $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, alors :

$$P(X = k) = (1 - p)^k p \quad \forall x \in \mathbb{N}^*$$

où la probabilité de succès p est un réel vérifiant $p \in]0, 1]$.

La loi géométrique représente le nombre d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p nécessaires à l'obtention d'un succès. Le nom de loi géométrique provient du fait que les probabilités forment une progression géométrique.

On remarque que la loi géométrique peut être définie pour une probabilité de succès p égale à 1, mais pas pour une probabilité nulle.

✧ **Définition 2.**— Si la variable aléatoire X suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ sur $X(\Omega) = \mathbb{N}$, sa **fonction de répartition** $F_X(x) = P(X \leq x)$ est définie, $\forall x \in \mathbb{R}$, par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1 - p)^{\lfloor x \rfloor + 1} & \text{si } \geq 0 \end{cases}$$

Si cette variable est définie sur $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$, sa fonction de répartition devient :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - (1 - p)^{\lfloor x \rfloor} & \text{si } \geq 1 \end{cases}$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier inférieur ou égale à x .

Pour les deux définitions de la fonction de répartition on vérifie toujours que $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$.

► **Exemple** : Soit Y une variable aléatoire discrète définie sur $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ telle que $X \sim \mathcal{G}(0, 1)$, alors :

$$P(X \leq 1) = F_X(1) = 1 - (1 - 0, 1)^{\lfloor 1 \rfloor + 1} = 1 - 0, 9^2 = 0, 19$$

$$P(X \leq 1, 2) = F_X(1, 2) = 1 - (1 - 0, 1)^{\lfloor 1, 2 \rfloor + 1} = 1 - 0, 9^2 = 0, 19$$

◆ **Propriété** : Si X admet une loi de Binomial $\mathcal{G}(p)$ définie sur $X(\Omega) = \mathbb{N}$, alors :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1 - p}{p} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1 - p}{p^2}$$

Si cette loi est définie sur $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ alors :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1 - p}{p^2}$$

4.1.5 Loi de Poisson

La **loi de Poisson** est une loi de probabilité discrète définie sur l'ensemble des entiers \mathbb{N} . Cette loi est notamment utilisée pour représenter un nombre d'événements se produisant dans un laps de temps donné. Dit autrement, c'est une loi permettant de modéliser des **variables de comptage**. Elle est généralement utilisée pour modéliser les **phénomènes d'occurrence rare** (par exemple le nombre de voitures arrivant à un péage pendant un intervalle de quelques minutes, le nombre de panne d'une machine sur une période donnée, etc).

◇ **Définition 1.**— La variable aléatoire discrète X définie sur $X(\Omega) = \mathbb{N}$ suit une **loi de Poisson** de paramètre λ , notée $\mathcal{P}(\lambda)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, si :

$$P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad \forall x \in \mathbb{N}$$

► **Exemple** : Soit Y une variable aléatoire discrète définie sur $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ telle que $X \sim \mathcal{P}(0, 2)$, alors :

$$P(X = 0) = e^{-0,2} \frac{0, 2^0}{0!} = e^{-0,2} = 0, 8187$$

$$P(X = 1) = e^{-0,2} \frac{0, 2^1}{1!} = e^{-0,2} \times 0, 2 = 0, 1637$$

$$P(X = 2) = e^{-0,2} \frac{0, 2^2}{2!} = e^{-0,2} \times \frac{0, 4}{2} = 0, 0164$$

◇ **Définition 2.**— Si la variable aléatoire X admet une loi $\mathcal{P}(\lambda)$ sur $X(\Omega) = \mathbb{N}$, sa **fonction de répartition** $F_X(x) = P(X \leq x)$ est définie, $\forall x \in \mathbb{R}$, par $F_X(x) = 0$, si $x < 0$ et :

$$F_X(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} P(X = i) = \sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \quad \forall x \geq 0$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier inférieur ou égale à x .

► **Exemple** : Soit Y une variable aléatoire discrète définie sur $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ telle que $X \sim \mathcal{P}(0, 2)$. Calculons les probabilités $P(X \leq 1)$ et $P(X \leq 1, 27)$.

$$F_X(1) = P(X \leq 1) \sum_{i=0}^{\lfloor 1 \rfloor} P(X = i) = \sum_{i=0}^1 P(X = i)$$

$$= P(X = 0) + P(X = 1) = 0, 9824$$

$$F_X(1, 27) = P(X \leq 1, 27) \sum_{i=0}^{\lfloor 1, 27 \rfloor} P(X = i) = \sum_{i=0}^1 P(X = i)$$

$$= P(X = 0) + P(X = 1) = F_X(1) = 0, 9824$$

De la même façon que pour la loi binomiale, le calcul des probabilités cumulées $F_X(x)$ dans le cas de la loi de Poisson peut s'avérer fastidieux lorsque x est élevé. On utilise alors les **tables statistiques** de la loi de Poisson. Les tables statistiques figurent dans l'**annexe .4** de ce cours pour différentes valeurs du paramètre λ comprise entre 0, 1 et 10. Pour chaque λ sont affichées les probabilités cumulées $P(X \leq x)$ obtenues pour différentes valeurs de x allant de 0 à 7 ou de 0 à 30 suivant

les cas.

◆ **Propriété 1** : Si X admet une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, alors l'espérance et la variance de X sont égales à :

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \quad \mathbb{V}(X) = \lambda$$

◆ **Propriété 2** : Si les variables X_1, \dots, X_n sont indépendantes et sont telles que $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$ avec $\lambda_i > 0$ pour $i = 1, \dots, n$ alors :

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{P}(\lambda) \quad \text{avec} \quad \lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

La somme de variables de Poisson est distribuée selon une Loi de Poisson.

4.2 Lois de probabilité continues

4.2.1 Loi uniforme continue

La **loi uniforme continue** est une loi de probabilité continue définie sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et caractérisée par une fonction de densité constante pour toutes les valeurs réelles $x \in [a, b]$. Dans ce cas l'idée d'équiprobabilité de la loi uniforme continue se traduit par le fait que tous les intervalles de même longueur inclus dans le support $[a, b]$ ont la même probabilité. Si X suit une loi uniforme continue sur le segment $[a, b]$, on note : $X \sim \mathcal{U}_{[a,b]}$.

◇ **Définition 1.**— Soient deux valeurs réelles a et b , telles que $b \geq a$.

La variable aléatoire réelle X suit une **loi uniforme continue** sur le support $X(\Omega) = [a, b]$ si sa fonction de densité est définie par :

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \quad \forall x \in X(\Omega)$$

Rappelons que $f_X(x) = 0$ si $x \notin X(\Omega) = [a, b]$. Dans le cas particulier où $a = 0$ et $b = 1$, on parle de **loi uniforme (continue) standard**.

► **Exemple** : Considérons une variable aléatoire X distribuée selon une loi uni-

forme continue sur $X(\Omega) = [0, 20]$, sa fonction de densité est définie par $f_X(x) = \frac{1}{20}$, $\forall x \in [0, 20]$ et $f_X(x) = 0$ si $\forall x \notin [0, 20]$.

◇ **Définition 2.**— Si la variable aléatoire réelle X admet une loi uniforme continue sur $X(\Omega) = [a, b]$, sa **fonction de répartition** $F_X(x) = P(X \leq x)$ est définie par $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$F_X(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

◆ **Propriété :** Si X admet une loi uniforme continue sur $X(\Omega) = [a, b]$, alors l'espérance et la variance de X sont égales à :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

4.2.2 Loi exponentielle

La **loi exponentielle** correspond au temps mesuré entre des événements issus d'un **processus de Poisson**, c.à.d. un processus continu de comptage dans lequel les événements arrivent de façon continue et indépendamment les uns des autres avec une intensité constante. Cette loi exponentielle permet de modéliser la durée de vie d'un phénomène.

La fonction de densité de la loi exponentielle dépend d'un paramètre réel θ strictement positif ($\theta > 0$), appelé **intensité**.

◇ **Définition 1.**— La variable aléatoire X suit une **loi exponentielle** de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$ sur $X(\Omega) = \mathbb{R}_*^+$, notée $X \sim \mathcal{E}(\theta)$, si sa fonction de densité est définie par :

$$f_X(x) = \theta e^{-\theta x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

◇ **Définition 2.**— Si la variable aléatoire X admet une loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$ sur $X(\Omega) = \mathbb{R}^+$, sa **fonction de répartition** $F_X(x) = P(X \leq x)$

est définie par :

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\theta x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

◆ **Propriété** : Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$, alors l'espérance et la variance de X sont égales à :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\theta} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\theta^2}$$

4.2.3 Loi normale

La **loi normale**, ou loi de Laplace-Gauss, est une loi de probabilité continue définie sur l'ensemble de réels \mathbb{R} . La densité de la loi normale dépend d'un paramètre de location (qui correspond à son espérance) noté μ et d'un paramètre d'échelle (qui correspond à sa **variance**) noté σ^2 .

◇ **Définition 1.**— La variable aléatoire réelle X suit une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2 , notée $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, si sa fonction de densité est définie sur $X(\Omega) = \mathbb{R}$ par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_*^+$.

Le symbole π renvoi au nombre π égal à approximativement 3,1415.

La loi normale est parfois notée sous la forme $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ où σ désigne l'écart-type de la distribution de X .

◆ **Propriétés** : Si la variable aléatoires réelle X suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors sa fonction de densité vérifie les propriétés suivantes :

- (i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_X(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_X(x) = 0$.
- (ii) $f_X(\mu + x) = f_X(\mu - x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- (iii) $f_X(x)$ atteint son maximum en $x = \mu$.

La propriété (ii) signifie que la fonction de densité de la loi normale est symétrique par rapport à son espérance μ .

Parmi les lois normales générales, on distingue la **loi normale centrée réduite** ou **loi normale standard**, d'espérance nulle et de variance égale à 1. On admet que :

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

✧ **Définition 2.**— La variable réelle X suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ si sa fonction de densité est définie par :

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

✧ **Définition 3.**— Si la variable aléatoire réelle X admet une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, sa **fonction de répartition** $F_X(x) = P(X \leq x)$ est définie sur $\forall x \in \mathbb{R}$ par :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(z) dz = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2} dz$$

Supposons que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et que l'on veuille calculer $F_X(c) = P(X \leq c)$ où c est une valeur réelle. On peut alors exprimer cette probabilité cumulée à l'aide de la fonction de répartition $\phi(\cdot)$ de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

$$F_X(c) = P(X \leq c) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{c - \mu}{\sigma}\right) = \phi\left(\frac{c - \mu}{\sigma}\right)$$

► **Exemple :** Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X \sim \mathcal{N}(0, 6; 4)$. Calculons la probabilité cumulée $P(X \geq -0,5)$.

$$F_X(-0,5) = P(X \leq -0,5) = P\left(\frac{X - 0,6}{\sqrt{4}} \leq \frac{-0,5 - 0,6}{\sqrt{4}}\right) = \phi(-0,55)$$

Si l'on admet que $\phi(-0,55) = 0,2912$ on obtient $P(X \leq -0,5) = 0,2912$.

Comment calculer une probabilité cumulée pour une loi normale centrée réduite à partir de la table statistique? La table statistique de la loi normale centrée et réduite (**Annexe .5**) permet de déterminer la probabilité cumulée $\phi(z)$ pour un certain nombre de valeurs réelles z . La valeur de z est reconstruite par addition

des valeurs reportées en lignes (allant de 0 à 0,09 par pas de 0,01) et des valeurs reportées en colonne (allant de 0 à 2,9 par pas de 0,1). Par exemple, si l'on souhaite calculer la probabilité cumulée $\phi(1,67)$ on décompose la valeur 1,67 en une somme $1,6 + 0,07$. En considérant la ligne correspondant à la la valeur 1,6 et la colonne correspondant à la valeur 0,07, on trouve à l'intersection la valeur de la probabilité cumulée $\phi(1,67) = 0,952540$.

On constate que les réalisations z reportées dans la table statistique de l'**annexe .5** sont toutes positives. dès lors, comment calculer une probabilité cumulée du type $\phi(-0,7)$? On utilise pour cela la propriété suivante.

◆ **Propriété 1** : Puisque la densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$ est symétrique par rapport à son espérance égale à 0, on a :

$$\phi(0) = 0,5$$

$$\phi(-x) = 1 - \phi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

► **Exemple** : On suppose que $X \sim \mathcal{N}(0,6 ; 4)$, déterminons les probabilités $P(X \geq 1,86)$ et $P(X \leq -0,22)$ à partir de la table statistique de la loi normale centrée et réduite.

$$\begin{aligned} P(X \geq 1,86) &= 1 - P(X \leq 1,86) \\ &= 1 - P\left(\frac{X - 0,6}{\sqrt{4}} \leq \frac{1,86 - 0,6}{\sqrt{4}}\right) \\ &= 1 - \phi(0,63) = 1 - 0,735653 = 0,264347 \end{aligned}$$

◆ **Propriété 2** : Par définition, l'espérance et la variance sont égales aux paramètres de la loi :

$$\mathbb{E}(X) = \mu \quad \mathbb{V}(X) = \sigma^2$$

La loi normale est une distribution *symétrique* par rapport à $\mathbb{E}(X)$.

◆ **Propriété 3** : Soit une variable aléatoire réelle $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et soient deux constantes $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors :

$$a + bX \sim \mathcal{N}(a + b\mu, b^2\sigma^2)$$

Ainsi, la transformée linéaire d'une variable normalement distribuée suit une loi normale. Puisque l'espérance est un opérateur linéaire et la variance est un opérateur quadratique, les moments de cette loi sont définies par :

$$\mathbb{E}(a + bX) = a + b\mathbb{E}(X) = a + b\mu$$

$$\mathbb{V}(a + bX) = b^2\mathbb{V}(X) = b^2\sigma^2$$

♦ **Propriété 4** : Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires réelles indépendantes telles que $X_i \sim \mathbb{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$ pour $i = 1, \dots, n$. Alors :

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

avec $\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i$ et $\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$

Annexe 1 : Table statistique de la loi binomiale

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

(k le nombre d'occurrences parmi n)

		n = 10									
		p									
		0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
k	0	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1	0,9139	0,7361	0,5443	0,3758	0,2440	0,1493	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
	2	0,9885	0,9298	0,8202	0,6778	0,5256	0,3828	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
	3	0,9990	0,9872	0,9500	0,8791	0,7759	0,6496	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719
	4	0,9999	0,9984	0,9901	0,9672	0,9219	0,8497	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770
	5	1,0000	0,9999	0,9986	0,9936	0,9803	0,9527	0,9051	0,8338	0,7384	0,6230
	6	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9965	0,9894	0,9740	0,9452	0,8980	0,8281
	7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9952	0,9877	0,9726	0,9453
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9983	0,9955	0,9893
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

		n=20									
		p									
		0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
k	0	0,3585	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,7358	0,3917	0,1756	0,0692	0,0243	0,0076	0,0021	0,0005	0,0001	0,0000
	2	0,9245	0,6769	0,4049	0,2061	0,0913	0,0355	0,0121	0,0036	0,0009	0,0002
	3	0,9841	0,8670	0,6477	0,4114	0,2252	0,1071	0,0444	0,0160	0,0049	0,0013
	4	0,9974	0,9568	0,8298	0,6296	0,4148	0,2375	0,1182	0,0510	0,0189	0,0059
	5	0,9997	0,9887	0,9327	0,8042	0,6172	0,4164	0,2454	0,1256	0,0553	0,0207
	6	1,0000	0,9976	0,9781	0,9133	0,7858	0,6080	0,4166	0,2500	0,1299	0,0577
	7	1,0000	0,9996	0,9941	0,9679	0,8982	0,7723	0,6010	0,4159	0,2520	0,1316
	8	1,0000	0,9999	0,9987	0,9900	0,9591	0,8867	0,7624	0,5956	0,4143	0,2517
	9	1,0000	1,0000	0,9998	0,9974	0,9861	0,9520	0,8782	0,7553	0,5914	0,4119
	10	1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9961	0,9829	0,9468	0,8725	0,7507	0,5881
	11	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9949	0,9804	0,9435	0,8692	0,7483
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9987	0,9940	0,9790	0,9420	0,8684
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9985	0,9935	0,9786	0,9423
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9984	0,9936	0,9793
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9985	0,9941
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987
	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998
	18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Annexe 2 : Table statistique de la loi binomiale (suite)

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

(k le nombre d'occurrences parmi n)

		n = 25									
		p									
		0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
k	0	0,2774	0,0718	0,0172	0,0038	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,6424	0,2712	0,0931	0,0274	0,0070	0,0016	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000
	2	0,8729	0,5371	0,2537	0,0982	0,0321	0,0090	0,0021	0,0004	0,0001	0,0000
	3	0,9659	0,7636	0,4711	0,2340	0,0962	0,0332	0,0097	0,0024	0,0005	0,0001
	4	0,9928	0,9020	0,6821	0,4207	0,2137	0,0905	0,0320	0,0095	0,0023	0,0005
	5	0,9988	0,9666	0,8385	0,6167	0,3783	0,1935	0,0826	0,0294	0,0086	0,0020
	6	0,9998	0,9905	0,9305	0,7800	0,5611	0,3407	0,1734	0,0736	0,0258	0,0073
	7	1,0000	0,9977	0,9745	0,8909	0,7265	0,5118	0,3061	0,1536	0,0639	0,0216
	8	1,0000	0,9995	0,9920	0,9532	0,8506	0,6769	0,4668	0,2735	0,1340	0,0539
	9	1,0000	0,9999	0,9979	0,9827	0,9287	0,8106	0,6303	0,4246	0,2424	0,1148
	10	1,0000	1,0000	0,9995	0,9944	0,9703	0,9022	0,7712	0,5858	0,3843	0,2122
	11	1,0000	1,0000	0,9999	0,9985	0,9893	0,9558	0,8746	0,7323	0,5426	0,3450
	12	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9966	0,9825	0,9396	0,8462	0,6937	0,5000
	13	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9940	0,9745	0,9222	0,8173	0,6550
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9982	0,9907	0,9656	0,9040	0,7878
	15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9971	0,9868	0,9560	0,8852
	16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9992	0,9957	0,9826	0,9461
	17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9942	0,9784
	18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9984	0,9927
	19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9980
	20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995
	21	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
	22	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Annexe 3 : Table statistique de la loi binomiale (suite)

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

(k le nombre d'occurrences parmi n)

n = 50

k	p									
	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
0	0,0769	0,0052	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,2794	0,0338	0,0029	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,5405	0,1117	0,0142	0,0013	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,7604	0,2503	0,0460	0,0057	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,8964	0,4312	0,1121	0,0185	0,0021	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5	0,9622	0,6161	0,2194	0,0480	0,0070	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
6	0,9882	0,7702	0,3613	0,1034	0,0194	0,0025	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
7	0,9968	0,8779	0,5188	0,1904	0,0453	0,0073	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000
8	0,9992	0,9421	0,6681	0,3073	0,0916	0,0183	0,0025	0,0002	0,0000	0,0000
9	0,9998	0,9755	0,7911	0,4437	0,1637	0,0402	0,0067	0,0008	0,0001	0,0000
10	1,0000	0,9906	0,8801	0,5836	0,2622	0,0789	0,0160	0,0022	0,0002	0,0000
11	1,0000	0,9968	0,9372	0,7107	0,3816	0,1390	0,0342	0,0057	0,0006	0,0000
12	1,0000	0,9990	0,9699	0,8139	0,5110	0,2229	0,0661	0,0133	0,0018	0,0002
13	1,0000	0,9997	0,9868	0,8894	0,6370	0,3279	0,1163	0,0280	0,0045	0,0005
14	1,0000	0,9999	0,9947	0,9393	0,7481	0,4468	0,1878	0,0540	0,0104	0,0013
15	1,0000	1,0000	0,9981	0,9692	0,8369	0,5692	0,2801	0,0955	0,0220	0,0033
16	1,0000	1,0000	0,9993	0,9856	0,9017	0,6839	0,3889	0,1561	0,0427	0,0077
17	1,0000	1,0000	0,9998	0,9937	0,9449	0,7822	0,5060	0,2369	0,0765	0,0164
18	1,0000	1,0000	0,9999	0,9975	0,9713	0,8594	0,6216	0,3356	0,1273	0,0325
19	1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9861	0,9152	0,7264	0,4465	0,1974	0,0595
20	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9937	0,9522	0,8139	0,5610	0,2862	0,1013
21	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9974	0,9749	0,8813	0,6701	0,3900	0,1611
22	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9990	0,9877	0,9290	0,7660	0,5019	0,2399
23	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9944	0,9604	0,8438	0,6134	0,3359
24	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9976	0,9793	0,9022	0,7160	0,4439
25	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9900	0,9427	0,8034	0,5561
26	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9955	0,9686	0,8721	0,6641
27	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9981	0,9840	0,9220	0,7601
28	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9993	0,9924	0,9556	0,8389
29	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9966	0,9765	0,8987
30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9986	0,9884	0,9405
31	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9947	0,9675
32	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9978	0,9836
33	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9923
34	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9967
35	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9987
36	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995
37	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998
38	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Annexe 4 : Table statistique de la loi de Poisson

$$P(X = k) = e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!}$$

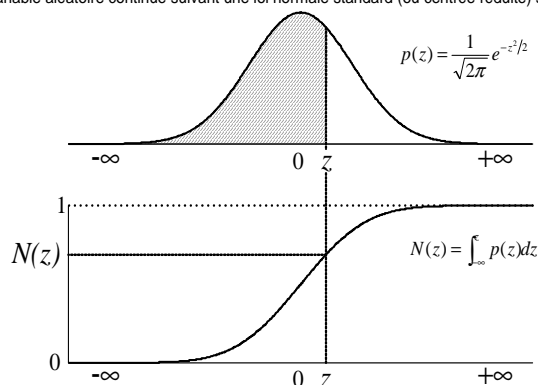
(μ le nombre d'occurrences moyen)

x	μ									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,9953	0,9825	0,9631	0,9384	0,9098	0,8781	0,8442	0,8088	0,7725	0,7358
2	0,9998	0,9989	0,9964	0,9921	0,9856	0,9769	0,9659	0,9526	0,9371	0,9197
3	1,0000	0,9999	0,9997	0,9992	0,9982	0,9966	0,9942	0,9909	0,9865	0,9810
4	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9992	0,9986	0,9977	0,9963
5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9994
6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
7	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

x	μ									
	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,2231	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,5578	0,4060	0,1991	0,0916	0,0404	0,0174	0,0073	0,0030	0,0012	0,0005
2	0,8088	0,6767	0,4232	0,2381	0,1247	0,0620	0,0296	0,0138	0,0062	0,0028
3	0,9344	0,8571	0,6472	0,4335	0,2650	0,1512	0,0818	0,0424	0,0212	0,0103
4	0,9814	0,9473	0,8153	0,6288	0,4405	0,2851	0,1730	0,0996	0,0550	0,0293
5	0,9955	0,9834	0,9161	0,7851	0,6160	0,4457	0,3007	0,1912	0,1157	0,0671
6	0,9991	0,9955	0,9665	0,8893	0,7622	0,6063	0,4497	0,3134	0,2068	0,1301
7	0,9998	0,9989	0,9881	0,9489	0,8666	0,7440	0,5987	0,4530	0,3239	0,2202
8	1,0000	0,9998	0,9962	0,9786	0,9319	0,8472	0,7291	0,5925	0,4557	0,3328
9	1,0000	1,0000	0,9989	0,9919	0,9682	0,9161	0,8305	0,7166	0,5874	0,4579
10	1,0000	1,0000	0,9997	0,9972	0,9863	0,9574	0,9015	0,8159	0,7060	0,5830
11	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9945	0,9799	0,9467	0,8881	0,8030	0,6968
12	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9980	0,9912	0,9730	0,9362	0,8758	0,7916
13	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9964	0,9872	0,9658	0,9261	0,8645
14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9986	0,9943	0,9827	0,9585	0,9165
15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9976	0,9918	0,9780	0,9513
16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9990	0,9963	0,9889	0,9730
17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9947	0,9857
18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9976	0,9928
19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9989	0,9965
20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984
21	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9993
22	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997
23	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999
24	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Annexe 5 : Table statistique de la loi normale centrée réduite

Probabilité qu'une variable aléatoire continue suivant une loi normale standard (ou centrée réduite) soit inférieure au seuil z .



La table ci-dessous présente les valeurs pour z positif. Pour z négatif la valeur est $N(z) = 1 - N(-z)$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500000	0,503989	0,507978	0,511966	0,515953	0,519939	0,523922	0,527903	0,531881	0,535856
0,1	0,539828	0,543795	0,547758	0,551717	0,555670	0,559618	0,563559	0,567495	0,571424	0,575345
0,2	0,579260	0,583166	0,587064	0,590954	0,594835	0,598706	0,602568	0,606420	0,610261	0,614092
0,3	0,617911	0,621720	0,625516	0,629300	0,633072	0,636831	0,640576	0,644309	0,648027	0,651732
0,4	0,655422	0,659097	0,662757	0,666402	0,670031	0,673645	0,677242	0,680822	0,684386	0,687933
0,5	0,691462	0,694974	0,698468	0,701944	0,705401	0,708840	0,712260	0,715661	0,719044	0,722405
0,6	0,725747	0,729069	0,732371	0,735653	0,738914	0,742154	0,745373	0,748571	0,751748	0,754903
0,7	0,758036	0,761148	0,764238	0,767305	0,770350	0,773373	0,776373	0,779350	0,782305	0,785236
0,8	0,788145	0,791030	0,793892	0,796731	0,799546	0,802337	0,805105	0,807850	0,810570	0,813267
0,9	0,815940	0,818589	0,821214	0,823814	0,826391	0,828944	0,831472	0,833977	0,836457	0,838913
1,0	0,841345	0,843752	0,846136	0,848495	0,850830	0,853141	0,855428	0,857690	0,859929	0,862143
1,1	0,864334	0,866500	0,868643	0,870762	0,872857	0,874928	0,876976	0,879000	0,881000	0,882977
1,2	0,884930	0,886861	0,888768	0,890651	0,892512	0,894350	0,896165	0,897958	0,899727	0,901475
1,3	0,903200	0,904902	0,906582	0,908241	0,909877	0,911492	0,913085	0,914657	0,916207	0,917736
1,4	0,919243	0,920730	0,922196	0,923641	0,925066	0,926471	0,927855	0,929219	0,930563	0,931888
1,5	0,933193	0,934478	0,935745	0,936992	0,938220	0,939429	0,940620	0,941792	0,942947	0,944083
1,6	0,945201	0,946301	0,947384	0,948449	0,949497	0,950529	0,951543	0,952540	0,953521	0,954486
1,7	0,955435	0,956367	0,957284	0,958185	0,959070	0,959941	0,960796	0,961636	0,962462	0,963273
1,8	0,964070	0,964852	0,965620	0,966375	0,967116	0,967843	0,968557	0,969258	0,969946	0,970621
1,9	0,971283	0,971933	0,972571	0,973197	0,973810	0,974412	0,975002	0,975581	0,976148	0,976705
2,0	0,977250	0,977784	0,978308	0,978822	0,979325	0,979818	0,980301	0,980774	0,981237	0,981691
2,1	0,982136	0,982571	0,982997	0,983414	0,983823	0,984222	0,984614	0,984997	0,985371	0,985738
2,2	0,986097	0,986447	0,986791	0,987126	0,987455	0,987776	0,988089	0,988396	0,988696	0,988989
2,3	0,989276	0,989556	0,989830	0,990097	0,990358	0,990613	0,990863	0,991106	0,991344	0,991576
2,4	0,991802	0,992024	0,992240	0,992451	0,992656	0,992857	0,993053	0,993244	0,993431	0,993613
2,5	0,993790	0,993963	0,994132	0,994297	0,994457	0,994614	0,994766	0,994915	0,995060	0,995201
2,6	0,995339	0,995473	0,995604	0,995731	0,995855	0,995975	0,996093	0,996207	0,996319	0,996427
2,7	0,996533	0,996636	0,996736	0,996833	0,996928	0,997020	0,997110	0,997197	0,997282	0,997365
2,8	0,997445	0,997523	0,997599	0,997673	0,997744	0,997814	0,997882	0,997948	0,998012	0,998074
2,9	0,998134	0,998193	0,998250	0,998305	0,998359	0,998411	0,998462	0,998511	0,998559	0,998605

Pour les valeurs de z supérieures à 3 :

z	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$N(z)$	0,998650	0,999032	0,999313	0,999517	0,999663	0,999767	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997

Bibliographie

- [1] Anderson D., Sweeney D., Camm J., Williams T., Borsenberger C. & Cochran J. (2015). *Statistiques pour l'économie et la gestion*. De Boeck.
- [2] Cantoni E., Huber P. & Ronchetti E. (2009). *Maîtriser l'aléatoire : Exercices résolus de probabilités et statistique*. Springer.
- [3] Goldfarb B. & Pardoux C. (2011). *Introduction à la méthode statistique - 6e éd. : Économie, gestion*. Dunod.
- [4] Lecoutre J. (2015). *TD Statistique et probabilités - 6e édition*. Dunod.
- [5] Lecoutre J. (2016). *Statistique et probabilités - 6e éd. : Cours et exercices corrigés*. Dunod.
- [6] Reischer C., Leblanc R. & Rémillard B. (2002). *Théorie des Probabilités : Problèmes et Solutions*. Presses de l'Université du Québec.
- [7] Ross S. (2007). *Initiation aux probabilités*. Presses polytechniques et universitaires romandes.