



**HAL**  
open science

# Une AER comme implémentation du plan B de Klein pour l'intégrale

Gaëtan Planchon, Thomas Hausberger

► **To cite this version:**

Gaëtan Planchon, Thomas Hausberger. Une AER comme implémentation du plan B de Klein pour l'intégrale. 7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic (CITAD7), Jun 2022, Bellaterra (Barcelone), Espagne. pp.489-500. hal-03913005

**HAL Id: hal-03913005**

**<https://hal.science/hal-03913005v1>**

Submitted on 26 Dec 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Une AER comme implémentation du plan B de Klein pour l'intégrale

Gaëtan Planchon<sup>1</sup> and Thomas Hausberger<sup>2</sup>

<sup>1</sup>IMAG, Université de Montpellier & CNRS, France ; [gaetan.planchon@umontpellier.fr](mailto:gaetan.planchon@umontpellier.fr)

<sup>2</sup>IMAG, Université de Montpellier & CNRS, France ; [thomas.hausberger@umontpellier.fr](mailto:thomas.hausberger@umontpellier.fr)

## Abstract

*In the institutional context of secondary school teacher training in France, we have developed a study and research activity (A.E.R) which aims at creating links between the integral of the Lycée (upper secondary) and the theories of Riemann and Lebesgue taught at the University. In other words, it is an answer to the question of the implementation of Klein's plan B, in the case of the integral, as a strategy to overcome the second Klein discontinuity. The methodology is based on the exploitation of a praxeological model of reference for the different objects of knowledge.*

## Résumé

*Dans le contexte institutionnel de la formation des enseignants du secondaire en France, nous avons élaboré une activité d'étude et de recherche (A.E.R) qui vise à créer des liens entre l'intégrale du Lycée (upper secondary) et les théories de Riemann et de Lebesgue enseignées à l'Université. En d'autres termes, il s'agit d'une réponse à la question de l'implémentation du plan B de Klein, dans le cas de l'intégrale, comme stratégie pour pallier à la seconde discontinuité de Klein. La méthodologie se fonde sur l'exploitation d'un modèle praxéologique de référence pour les différents objets de savoir.*

## Introduction

Dès 1908, Felix Klein a identifié un problème dans la formation des enseignants de mathématiques du premier et du second degré, en l'occurrence une double discontinuité lors de la transition du lycée à l'université, puis du retour à l'école de l'élève professeur pour enseigner. Afin d'y remédier, il entreprend dans une série d'ouvrages (Klein, 2016) de présenter les « mathématiques élémentaires d'un point de vue plus élevé » en s'appuyant sur trois grands principes : souligner les connexions entre les domaines mathématiques, montrer comment les mathématiques universitaires se rapportent aux mathématiques scolaires et relier les mathématiques aux applications, ou encore l'intuition au formalisme et à l'abstraction (Kilpatrick, 2019). Ces trois principes fondent son « plan B » pour l'enseignement des mathématiques.

Le champ de la didactique des mathématiques a émergé de ce projet dans les années soixante et des cours destinés à récapituler les connaissances dans une perspective intégratrice sont désormais la norme à la fin d'un cursus de formation. Pour autant, la seconde discontinuité semble subsister (Wasserman et al., 2018) et appelle à davantage de recherches sur le transfert des connaissances académiques en connaissances pertinentes pour les enseignants, lequel n'est pas automatique (Hoth et al., 2020).

Quelles connaissances mathématiques sont utiles à un futur enseignant ? Quels types de liens sont développés et à développer entre les connaissances universitaires et les mathématiques de l'école, dans les dispositifs de formation, pour favoriser le développement professionnel des enseignants ? Ce sont autant de débats qui font actuellement de la seconde discontinuité de Klein une question vive dans les recherches en éducation mathématique et un enjeu fort pour la profession d'enseignant et de formateur.

Dans cette direction, de nouveaux outils ont été récemment apportés (Winsløw et Grønbæk 2014 ; Winsløw 2020) en posant la problématique de la seconde discontinuité de Klein avec la théorie Anthropologique de la didactique (TAD; Chevallard, 2020). Winsløw utilise la notion de *rapport* d'un individu à un objet de savoir au sein d'une institution, en TAD. Il distingue les institutions lycée (L) et université (U), ainsi que 3 différentes *positions institutionnelles* : élève au lycée ( $s$ ), étudiant à l'université ( $\sigma$ ) et enfin enseignant au lycée ( $t$ ). Un objet de savoir (dans le cas de cet article, nous prenons pour exemple l'intégrale), qui vit à travers les 2 institutions, sera noté  $o$  au lycée et  $\omega$  lorsqu'il s'agit d'une théorie de l'intégration (Riemann ou Lebesgue, en lien avec la théorie générale de la mesure) enseignée à l'université. Winsløw (2014) propose alors la modélisation suivante des discontinuités :

$$R_L(s,o) \rightarrow R_U(\sigma,\omega) \rightarrow R_U^*(\sigma,\omega) \rightarrow R_U(\sigma,o) \rightarrow R_L(t,o)$$

où la réponse de Klein au problème du transfert consiste à établir un rapport  $R_U^*(\sigma,\omega)$  tissant des liens entre  $o$  et  $\omega$  dans l'optique du changement de position que traduit la dernière flèche. Dans une modélisation ultérieure, Winsløw (2010) note  $R_U(\sigma,oU\omega)$  ce nouveau rapport intégrateur.

Dans un travail antérieur (Planchon et Hausberger, 2020), nous avons rédigé un problème du type de ceux proposés à l'écrit du CAPES<sup>1</sup> et portant sur l'intégrale du lycée dans ses liens avec la théorie de Riemann et la théorie de la mesure. Comme le stipule le Journal Officiel<sup>2</sup>, "Les notions traitées dans ces programmes [du collège et lycée] doivent pouvoir être abordées avec un recul correspondant au niveau M1 du cycle master". Un rapport de type  $R_U(\sigma,oU\omega)$  est donc attendu d'un futur enseignant, en France. Le travail d'ingénierie s'est inspiré de la méthodologie mise en oeuvre par Winsløw et Kondratieva (2018) : les liens sont décrits à travers des relations entre blocs de la *praxis* et du *logos* (voir Outils théoriques) relatifs aux connaissances mathématiques en jeu dans les institutions  $L$  et  $U$  (dans notre cas, les différents concepts d'intégrale). Par ailleurs, l'étude d'épistémologie historique a permis d'identifier dans les travaux de Lebesgue (1935) une axiomatique, plus élémentaire que la théorie générale de la mesure, propice à fonder la notion d'aire. Sa reprise par Perrin (2005), en renforçant toutefois le rôle des transformations géométriques dans l'esprit de l'algèbre moderne, confirme ces potentialités. Le problème de CAPES qui en est issu a été soumis à une promotion d'étudiants préparant le concours : les résultats de cette expérimentation ont montré que les étudiants,

---

<sup>1</sup> Certificat d'Aptitude au Professorat de l'Enseignement du Second degré. Il s'agit du principal concours de recrutement des enseignants, en France, lequel évalue la maîtrise de connaissances disciplinaires couvrant essentiellement les deux premières années d'université, ainsi que des capacités liées aux dimensions professionnelles

<sup>2</sup> du 8 décembre 2015, texte 8

dans leur majorité, ont réussi à se saisir de l'axiomatique dans les premières questions du problème mais qu'ils perdent de vue sa fonction lorsqu'il s'agit de s'engager dans une preuve du théorème fondamental de l'analyse en s'abstenant de lire les propriétés de l'aire sur la figure. Ceci vient confirmer la nécessité de dispositifs d'apprentissage ayant pour objectif le développement de liens entre connaissances mathématiques des institutions  $L$  et  $U$ .

Nous présentons dans cet article les premières étapes d'une seconde implémentation des idées fondant notre ingénierie sur un plan épistémologique, mais dans une toute autre modalité didactique : une *activité d'étude et de recherche* (AER, voir Outils théoriques). Nous faisons l'hypothèse que promouvoir le questionnement va favoriser la mise en regard des savoirs universitaires avec ceux du lycée. Les effets produits par cette nouvelle modalité ne pourront être discutés dans le format contraint de la présente communication. L'objectif de l'article est de fournir une analyse a priori qui met en lumière les potentialités du dispositif pour l'implémentation du plan de Klein pour l'intégrale. Cette analyse mobilise de nombreux outils de la TAD selon une méthodologie nouvelle par rapport aux travaux existants en TAD sur la seconde discontinuité de Klein.

Ces outils et la méthodologie de l'étude font l'objet des premières parties de l'article, puis nous présentons le dispositif et son analyse a priori. Nous concluons sur la portée de ces analyses et les perspectives offertes.

## **Outils théoriques**

Le premier outil théorique de TAD utilisé est la notion de *praxéologie* (Chevallard, 2020), une unité que nous noterons  $P$ , composée d'une *praxis*  $\Pi$  et d'un *logos*  $\Lambda$ . La TAD postule que le rapport à un objet de savoir émerge des praxéologies où ce dernier intervient au niveau de la technique  $\tau$ , technologie  $\theta$  ou théorie  $\Theta$  (les différents niveaux de la praxéologie  $P$ , qui vise la réalisation d'un type de tâches  $T$ ). Ce rapport est relatif à une institution donnée et à une instance positionnelle dans l'institution.

Il s'agira donc de décrire les rapports institutionnels (voir Introduction)  $R_L(s,o)$  et  $R_U(\sigma,\omega)$  à l'intégrale du Lycée  $o$  et de l'Université  $\omega$  à travers des *modèles praxéologiques de référence* (MPR ; Florensa et al., 2015). Ces modèles sont des reconstructions du savoir enseigné, obtenus en considérant différents niveaux de la transposition didactique (via l'épistémologie historique, les programmes officiels, les études de manuels et documents de cours). Nous décrivons les MPR en mettant en évidence l'unification des praxéologies ponctuelles autour de technologies communes, pour constituer des *organisations mathématiques locales* (OML), elles-mêmes unifiées par le niveau théorique au sein d'organisations *régionales* (OMR). Les OMR correspondent en général aux *secteurs* et les OML aux *thèmes* qui structurent la présentation du cours. La mise en regard du cours et des exercices permet ainsi de construire des modèles qui rendent compte de l'écologie des objets de savoirs au sein des institutions.

Le second type d'outils de TAD utilisé dans cet article est relié aux paradigmes d'études en TAD. L'activité des étudiants (futurs enseignants) sera modélisée par le format de l'AER (*activité d'étude de recherche*), d'où a émergé la notion de PER (parcours d'étude et de recherche) en TAD et le paradigme du *questionnement du monde* (Chevallard, 2020). Alors que les liens entre connaissances du lycée et de l'université sont décrits à travers les blocs  $\Pi$  et  $\Lambda$  qui mobilisent ces connaissances, les

processus d'apprentissage (qui visent de telles mises en relation) seront modélisés grâce aux outils des AER et PER : nous utiliserons notamment le *question-gramme* (les questions générées par le processus d'étude, décrites dans l'ordre chronologique d'apparition, et les éléments de réponses apportées) pour rendre compte de la *chronogénèse* et le *schéma Herbartien développé* (loc. cit.) pour rendre compte de la *mésogénèse* (comment les réponses apportées par l'institution, lesquelles conduisent à la visite d'éléments de praxéologies, sont déconstruites pour produire une réponse R' de pair avec un enrichissement praxéologique).

## Questions de recherche et méthodologie

Notre étude vise l'implémentation du plan B de Klein pour l'intégrale. Cet article rend compte d'une des premières phases du processus d'ingénierie : l'analyse a priori. La construction de l'activité se fonde sur la transformation du problème de CAPES évoqué dans l'introduction en un guide d'AER. Cette transformation a nécessité un approfondissement des MPR précédemment élaborés (notamment celui de l'Université, en théorie de la mesure, mais aussi celui du Lycée suite à un changement de programmes), de façon à préciser l'équipement praxéologique des étudiants. Ces nouveaux modèles sont présentés dans la section 4 de l'article.

L'utilisation d'outils permettant d'analyser l'évolution du milieu lors du processus d'étude (donc la chronogénèse et mésogénèse) nous a paru indispensable. En effet, les copies d'étudiants obtenues lors de la réalisation du problème de CAPES constituent des données insuffisantes pour comprendre les obstacles aux transferts des connaissances universitaires sur l'intégrale. Notre méthodologie se fonde ainsi sur une articulation fine entre la description du processus d'étude avec les outils des PER et les MPR fruits des analyses praxéologiques. Notamment, les œuvres visitées sont décrites en termes de blocs  $\Pi$  et  $\Lambda$ .

Cet article vise ainsi à répondre aux questions de recherche suivantes : *Comment décrire les liens entre connaissances mathématiques du lycée et de l'université, dans le cadre d'un processus d'étude ? Quelles sont les potentialités de l'activité que nous proposons (section Présentation du dispositif d'apprentissage) dans l'optique d'une implémentation du plan B de Klein pour l'intégrale ?* Ces deux questions sont liées ; la première est de nature méthodologique tandis que la seconde renvoie directement à l'analyse a priori de notre activité en vue de l'évaluation du dispositif d'apprentissage. La précision des réponses que nous pouvons apporter à la seconde question seront des indicateurs de la pertinence de notre réponse à la première.

Comme dernier élément méthodologique, nous introduisons de nouvelles notations pour affiner les descriptions praxéologiques des liens entre  $o$  et  $\omega$ . Le modèle de Winsløw met en exergue la nécessité de créer un nouveau rapport  $R_U^*(\sigma, \omega)$  favorisant le transfert des connaissances avancées. Ceci nous amène à noter  $P^*$  une praxéologie qui trouve sa source dans le modèle praxéologique dominant de l'institution Université mais dont le travail d'ingénierie a modifié certaines composantes en vue de liens entre  $o$  et  $\omega$  (lesquels apparaîtront ultérieurement dans le processus d'étude). Ces nouvelles praxéologies visent en engendrer le rapport  $R_U^*(\sigma, \omega)$ . D'autre part, nous notons  $\tilde{P}$  des praxéologies qui proviennent de l'institution Lycée mais qui se trouvent, au cours du processus de l'étude, enrichies par des éléments praxéologiques relatifs à  $\omega$ . Cette dernière idée nous est venue de la lecture de Hochmuth (2022), lequel considère l'enrichissement de praxéologies élémentaires de calculus par

intégration d'éléments praxéologiques tirés de mathématiques plus avancées (en analyse non linéaire).

## Éléments saillants des MPR

Nous allons dans un premier temps présenter les principaux éléments du MPR correspondant à l'intégrale enseignée en classe de terminale en France, puis nous développerons un second MPR relatif à la théorie de la mesure enseignée à l'université de Montpellier, en se limitant aux principaux éléments qui serviront dans l'ingénierie.

### MPR du lycée

L'intégrale au lycée figure depuis 2019 au programme de deux enseignements de niveau Terminale : en *mathématiques spécialité* et en *mathématiques complémentaires*. Au sein de ces deux programmes, la notion d'intégrale d'une fonction continue positive est définie comme aire sous la courbe, l'aire demeurant une notion intuitive renvoyant à une *praxis* introduite dès le cycle 3 du primaire : le dénombrement de carrés élémentaires constituant une surface donnée, après quadrillage (voir la figure 1 : extrait du programme de mathématiques spécialité).

#### • Calcul intégral

La définition de l'intégrale s'appuie sur la notion intuitive d'aire rencontrée au collège. Les élèves développent une vision graphique de l'intégrale et maîtrisent le calcul approché, en liaison avec la méthode des rectangles et le calcul exact par les primitives.

On met en regard les écritures  $\int_a^b f(x) dx$  et  $\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$ .

#### Contenus

- Définition de l'intégrale d'une fonction continue positive définie sur un segment  $[a, b]$ , comme aire sous la courbe représentative de  $f$ . Notation  $\int_a^b f(x) dx$ .
- Théorème : si  $f$  est une fonction continue positive sur  $[a, b]$ , alors la fonction  $F_a$  définie sur  $[a, b]$  par  $F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$  est la primitive de  $f$  qui s'annule en  $a$ .
- Sous les hypothèses du théorème, relation  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$  où  $F$  est une primitive quelconque de  $f$ . Notation  $[F(x)]_a^b$ .
- Théorème : toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.
- Définition par les primitives de  $\int_a^b f(x) dx$  lorsque  $f$  est une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle contenant  $a$  et  $b$ .
- Linéarité, positivité et intégration des inégalités. Relation de Chasles.
- Valeur moyenne d'une fonction.
- Intégration par parties.

### Figure 1 : Extrait du programme de mathématiques spécialité

Cette définition  $\theta_{\text{aire}}$  génère trois praxéologies ponctuelles (calcul d'une intégrale à l'aide d'une formule d'aire, calcul de l'aire entre deux courbes, approximation d'intégrale par la méthode des rectangles). Le développement praxéologique s'accompagne d'un enrichissement du bloc théorique : la croissance de l'aire, l'invariance par symétrie sont de nouveaux éléments du *logos* qui apparaissent au fur et à mesure du développement de cette première OML dédiée à l'aire.

Le théorème fondamental de l'analyse (TFA, la dérivabilité de la fonction aire) fournit, en corollaire, le nouvel outil de calcul pour les intégrales des fonctions positives via les primitives. Sa preuve est au programme de la classe de terminale mathématiques spécialité, lequel contient une section « démonstrations » pour chaque thème. Nous notons  $t_L$  la tâche isolée « démontrer le TFA dans le cas d'une fonction continue et monotone ». De façon remarquable se produit alors un changement de perspective sur l'intégrale qui est définie, dans le cas d'une fonction continue de signe quelconque,

via une primitive<sup>3</sup>. Le TFA devient ainsi un élément théorique relatif à trois nouvelles praxéologies (calcul d'intégrales via une primitive, intégration par partie, encadrement d'une intégrale) qui constituent une seconde OML unifiée par la nouvelle définition. Enfin, le *logos* s'enrichit encore de nouvelles propriétés de l'intégrale (linéarité et croissance).

### **MPR de théorie de la mesure**

Pour notre étude, nous avons analysé les supports (feuilles de TD, corrigés des TD et notes de cours par un étudiant, programme de l'UE) de l'unité d'enseignement « mesure et intégration » de la L3 de mathématiques de l'université de Montpellier, en 2020. Le plan du cours suggère un découpage en 4 secteurs au sens de la TAD : la théorie de la mesure, la théorie générale de l'intégration, mesures images et mesures produits, espaces  $L^p$ .

Les notions de tribu et de mesure sont des concepts de la théorie de la mesure en tant que théorie structuraliste. Les dialectiques concret/abstrait et particulier/général, que Hausberger (2017) a subsumé sous le nom de dialectique des objets et des structures, s'appliquent ainsi dans ce contexte. La méthode structuraliste procède par des raisonnements en termes de classes d'objets, de stabilité des propriétés des structures par des opérations sur les structures, dont des opérations ensemblistes. Nous pouvons faire l'hypothèse que de tels principes structuralistes vont guider la présentation du cours donné par l'enseignant ainsi que les types de tâches proposés.

La notion de tribu d'un ensemble, c'est-à-dire la classe sur laquelle portera la notion de mesure, est définie de manière axiomatique dans le vocabulaire de la théorie des ensembles<sup>4</sup>. Cette notion unifie une première OML (montrer qu'un ensemble est une tribu, montrer qu'une tribu est engendrée par une partie). Le deuxième thème abordé est celui des ensembles et fonctions mesurables. La stabilité de la structure de tribu par image directe et réciproque est étudiée. De nouveaux éléments technologiques apparaissent en fonction de la structure de l'ensemble d'arrivée des fonctions étudiées (structure d'espace vectoriel, d'anneau, topologie), ce qui permet ainsi d'établir des propriétés de stabilité des fonctions mesurables vis à vis des opérations arithmétiques sur les fonctions et du passage à la limite.

Enfin, le troisième thème est centré sur la définition axiomatique<sup>5</sup> d'une mesure. Cette définition engendre une praxéologie ponctuelle (montrer qu'une application donnée est une mesure) qui est illustrée sur des cas particuliers : la mesure de Dirac, de comptage, de Lebesgue sur  $\mathbf{R}^n$ . Les feuilles de TD nous permettent d'identifier deux autres praxéologies ponctuelles au sein de l'OML mesure : tout d'abord,  $P_{M,1}$  (mesurer un ensemble pour une mesure donnée) dont la technique consiste à

---

<sup>3</sup> Une fonction  $f$  continue sur un segment est minorée par un réel  $m$ . La fonction  $f-m$  est positive et admet donc une primitive  $G$  d'après le TFA. La fonction  $G(x)+mx$  est alors une primitive de  $f$ .

<sup>4</sup> Une tribu  $\mathcal{A}$  sur un ensemble  $X$  est un ensemble de partie de  $X$  tel que,  $\mathcal{A}$  est non vide, stable par passage au complémentaire, stable par union dénombrable

<sup>5</sup> Une mesure positive sur  $(X, \mathcal{A})$ , où  $\mathcal{A}$  est une tribu sur  $X$ , est une application  $\mu$  définie sur  $\mathcal{A}$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^+$ , telle que  $\mu(\emptyset)=0$  et, pour toute famille dénombrable  $(A_i)$  d'éléments de  $\mathcal{A}$  telle que  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ,  $\mu(\cup A_i) = \sum \mu(A_i)$

identifier comment est construit l'ensemble à mesurer vis à vis des opérations ensemblistes qui caractérisent les tribus, puis à utiliser les bonnes propriétés de la mesure considérées. Un exemple de réalisation de cette tâche est illustré par la figure 2 (question 2). Notons que, dans cette tâche singulière  $t_{M,1}$ , l'accent est mis sur une propriété qui sera caractéristique de la mesure de Lebesgue sur  $\mathbf{R}$ , l'invariance par translation. La technique consiste ici, après avoir traité le cas de  $x$  entier et  $x$  rationnel, à utiliser la propriété de densité de  $\mathbf{Q}$  dans  $\mathbf{R}$  et d'écrire  $[0,x[$  comme l'union croissante d'une suite d'intervalle  $[0,q_n[$  puis à utiliser une propriété des mesures générales, liée à la  $\sigma$ -additivité : la limite de la mesure d'une suite croissante d'ensemble mesurable est la mesure de l'union dénombrable.

Ensuite, la praxéologie  $P_{M,2}$  (montrer une propriété d'une mesure spécifiée) figure à travers de nombreuses instances : par exemple, montrer qu'une mesure sur  $\mathbf{R}$  invariante par translation est diffuse (figure 2, question 1). La technique consiste à mobiliser les propriétés de la mesure considérée, par un raisonnement direct ou par l'absurde. La technologie  $\theta_M$  contient les propriétés générales des mesures (définition axiomatique, croissance, sous-additivité, limites croissante et décroissante) et la théorie  $\Theta_M$  les preuves de ces propriétés qui mobilisent la théorie des ensembles. Ce qui fonde le type de tâches tient de l'application de la méthode axiomatique : tirer profit, autant que possible, du point de vue généralisateur et simplificateur offert par les structures (ici la notion de mesure).

**Exercice 11.** Pour tout intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  et tout  $a \in \mathbb{R}$ , on note  $I + a = \{x + a \mid x \in I\}$ .  
Soit  $\mu$  une mesure sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  telle que

- $\mu([0, 1]) = 1$  ;
- Pour tout intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  et tout  $a \in \mathbb{R}$  on ait  $\mu(I + a) = \mu(I)$ .

Le but est de montrer que  $\mu$  est la mesure de Lebesgue.

1. Montrer  $\mu(\{x\}) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . On dit que la mesure  $\mu$  est diffuse.
2. Montrer que  $\mu([0, x]) = x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . On pourra commencer par le montrer pour tout rationnel  $x \in \mathbb{Q}_+^*$ .
3. En déduire que  $\mu = \lambda$ .

### Figure 2. Extrait d'une feuille de TD portant sur la théorie de la mesure

En définitive, nous modélisons le secteur de la théorie de la mesure par une OMR constituée de trois OML autour, respectivement, de la notion de tribu, de la définition des fonctions mesurables, et de la définition d'une mesure. Suivra le développement praxéologique du secteur de la théorie générale de l'intégration, qui dépasse le cadre de cet article.

## Présentation du dispositif d'apprentissage

La nouvelle modalité que nous proposons pour réaliser le plan de Klein pour l'intégrale est de type AER. Les étudiants travaillent en groupe de 4, à partir d'un document support (le guide d'AER) mettant en avant trois tâches et un extrait de manuel (figure 2). Ils ont pour consigne de noter sur un fichier partagé l'ensemble des questions qu'ils se posent et les éléments de réponse qu'ils peuvent apporter. Au bout de 30 minutes (par question) où les élèves travaillent en autonomie est prévue une phase de mise en commun orchestrée par l'enseignant.



Le document pose une notion, appelée mesure des aires, définie axiomatiquement comme suit : on suppose qu'il existe un sous-ensemble  $Q$  de  $\mathbf{R}^2$  qui contient les points, segments, polygones, stable par intersection et union fine. Une mesure des aires est une application  $\mu$  définie sur  $Q$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^+$  simplement additive, invariante par isométrie, et telle que la mesure du carré  $[0,1] \times [0,1]$  est 1.

Les trois tâches assignées sont :

$t_1$  : montrer que la mesure des aires est une mesure diffuse ;

$t_2$  : déterminer la mesure d'aire d'un rectangle en fonction de ses dimensions en justifiant ;

$t_3$  : en appui sur la mesure des aires, réécrire la preuve du TFA extraite du manuel (Figure 3) avec la norme de rigueur de l'université.

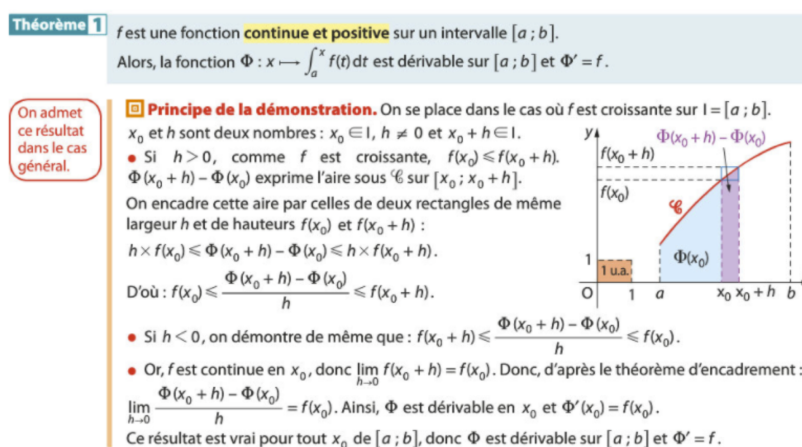


Figure 3. Preuve du TFA extraite du manuel Transmath 2012

De surcroît, le document commence par un discours de nature méta problématisant les trois tâches, dont un extrait de l'épistémologue Blanché (2009) pour éclairer le rôle des axiomatiques dans l'activité mathématique contemporaine (dégager une théorie de son substrat intuitif pour faire apparaître le schéma logique abstrait). Ce discours vient poser la question génératrice de notre AER, qui est  $Q_0$  : « comment fonder axiomatiquement la théorie intuitive des aires sur laquelle repose l'intégrale du lycée ? »

## Analyse a priori de l'AER

Nous présentons relativement à chaque tâche le question-gramme a priori décrivant la chronogénèse ainsi que le schéma herbartien explicitant la mésogénèse. Les œuvres visitées sont liées aux MPR présentés dans la section 4.

### Analyse de la première tâche

La tâche  $t_1$  pose d'emblée la question de la technique en permettant la réalisation, soit  $Q_1$  « comment démontrer que la mesure est diffuse ? ». Il s'agit de démontrer une propriété de la mesure des aires. Les ostensifs « mesure » et « diffuse » suscitent une réactivation de la praxéologie  $P_{M,2}$ , en particulier son instanciation  $t_{M,2}$  (voir partie 5) : se pose ainsi la question de l'application de la technique  $\tau_{M,2}$  dans ce nouveau contexte. L'œuvre  $\Pi_{M,2}$  (praxis de la praxéologie  $P_{M,2}$ ) est visitée, d'où  $Q_{1,1}$  :

« Quelles sont les propriétés générales des mesures qui sont encore valables dans le cadre de la mesure des aires ? » Deux sous-questions  $Q_{1,2}$  et  $Q_{1,3}$  émergent pour identifier respectivement les propriétés générales des mesures et les ressorts des démonstrations de ces propriétés. Ainsi, l'œuvre  $A_M$  (définition et propriétés générales des mesures) est visitée : la réponse  $R_{1,2}^\diamond$  coïncide avec l'œuvre  $\theta_M$  (voir 4.2) et la réponse  $R_{1,3}^\diamond$  est apportée par la visite de l'œuvre  $\Theta_M$ . Le cours de  $L_3$  joue ici le rôle de média.

L'étude des preuves permet ainsi de discriminer les propriétés des mesures générales qui s'appliquent dans le contexte particulier de la mesure des aires : l'invariance par translation et la croissance de la mesure sont conservées. Ceci constitue la réponse  $R_{1,1}$  à la question  $Q_{1,1}$  et permet la construction d'un nouveau bloc du *logos*  $\Lambda_M^*$  d'une nouvelle praxéologie  $P_{M,2}^*$  fusionnant la *praxis* de  $P_{M,2}$  avec le nouveau *logos*, qui peut être décrite comme suit :

$T_{M,2}$ : montrer une propriété d'une mesure spécifique (la mesure des aires);

$\tau_{M,2}$ : raisonner à partir des propriétés de la mesure spécifiée (ici celle des aires), par un raisonnement direct ou indirect

$\theta_M^*$ : propriétés de la mesure des aires : invariance par translation, croissance

$\Theta_M^*$ : axiomatique de la mesure des aires

Le travail de la technique est ensuite laissé aux étudiants avec la tâche : montrer que la mesure des aires ne charge pas les segments de  $\mathbf{R}^2$ , indiquée comme devoir à la maison.

Le schéma herbartien pour la première question est donc

$$[S(X;Y;Q_1) \Rightarrow M_1] \Rightarrow R_1^\heartsuit = P_{M,2}^*$$

où  $M_1 = \{Q_1, Q_{1,1}, Q_{1,2}, Q_{1,3}, R_{1,2}^\diamond, R_{1,3}^\diamond, \Pi_{M,2}, \Lambda_M, \Lambda_M^*\}$ .

L'intégralité de la praxéologie  $P_{M,2}^*$  est développée au cours de l'étude à travers la construction du milieu  $M_1$ .

### Analyse de la deuxième tâche

La deuxième tâche rencontrée dans l'AER pose explicitement  $Q_2$  : « que vaut la mesure d'aire d'un rectangle en fonction de ses dimensions ? » La tâche  $t_2$  est une instantiation de  $T_{M,1}$  : « mesurer un ensemble pour une mesure donnée » dont  $t_{M,1}$  est une autre instantiation rencontrée par les étudiants dans le contexte de la théorie de la mesure (voir 5.2). Ainsi, la *praxis*  $\Pi_{M,1}$  est la première œuvre visitée. Conformément à la réalisation de  $t_{M,1}$  (et à de nombreuses praxéologies d'analyse qui s'appuient sur l'articulation entre  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{R}$ ), les nouvelles sous-questions produites par le milieu consistent à démontrer la formule de l'aire d'un rectangle lorsque les dimensions sont des entiers, des rationnels, puis des réels positifs quelconques  $x$  et  $y$ .

Après les procédures de découpage qui mobilisent l'additivité pour le cas entier et rationnel, l'œuvre  $O_R$  (densité de  $\mathbf{Q}$  dans  $\mathbf{R}$ ) est visitée et conduit à la production d'une réponse à  $Q_2$ . La densité permet de justifier l'existence de quatre suites de rationnels  $(x_n)$ ,  $(X_n)$  et  $(y_n)$ ,  $(Y_n)$  qui convergent

respectivement vers  $x$  et  $y$ , avec  $x_n \leq x \leq X_n$  et  $y_n \leq y \leq Y_n$ ; les rectangles  $[0, x_n] \times [0, y_n]$  et  $[0, X_n] \times [0, Y_n]$  conviennent.

L'œuvre  $\theta^*_M$  est à nouveau visitée, notamment l'invariance par isométrie et la croissance de la mesure des aires, laquelle justifie de manière cruciale le passage à la limite. On obtient la réponse  $R_2^\heartsuit$  : un rectangle de côtés  $x$  et  $y$  réels a pour mesure d'aire  $xy$ .

Le schéma herbartien pour la deuxième question est :

$$[S(X;Y;Q_2) \rightleftarrows M_2] \rightsquigarrow R_2^\heartsuit$$

avec  $M_2 = \{Q_2, Q_{2,1}, Q_{2,2}, Q_{2,3}, R_{2,1}, R_{2,2}, R_{2,3}, \Pi_{M,1}, \theta^*_M, O_R\}$ . La réponse  $R_2^\heartsuit$  vient enrichir la technologie  $\theta^*_M$  avec la mesure de l'aire des rectangles.

### Analyse de la troisième tâche

La dernière tâche porte sur une réécriture de la preuve du TFA (donc la tâche  $t_L$  qui est exigible d'un élève de lycée), telle qu'elle est extraite d'un manuel scolaire (Figure 3), mais dans la norme de rigueur de l'université. Il s'agit de mobiliser le *logos*  $\Lambda^*_M$  construit dans la réalisation des tâches  $t_1$  et  $t_2$ . La question posée est  $Q_3$  : « Comment rendre rigoureuse la preuve du TFA en s'appuyant sur l'axiomatique des aires? ».

Une première sous-question, induite par la mention dans l'énoncé de propriétés éventuellement lues sur la figure, est  $Q_{3,1}$  : « où intervient la notion intuitive d'aire dans la preuve du manuel ? » L'ostensif « aire » figure dans la démonstration du manuel. Par ailleurs, l'ostensif « intégrale » renvoie à l'aire sous la courbe à travers l'œuvre  $\theta_{\text{aire}}$  (technologie qui unifie la première OML du lycée dédiée à l'aire, voir 4.1), d'où la réponse à la question  $Q_{3,1}$ .

La réponse à  $Q_3$  est alors apportée : considérons l'ensemble  $\Omega_t = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2, 0 \leq x \leq t, 0 \leq y \leq f(x)\}$  pour écrire  $\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0) = \mu(\Omega_{x_0+h} \setminus \Omega_{x_0})$  par additivité de la mesure. La croissance de  $f$  sur l'intervalle  $[x_0, x_0+h]$  justifie l'encadrement (au sens de l'inclusion) de  $\Omega_{x_0+h} \setminus \Omega_{x_0}$  par deux rectangles de largeur  $h$ , et la croissance de la mesure des aires  $\mu$ , ainsi que la mesure d'aire des rectangles, donne finalement l'encadrement attendu de  $\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0)$ . La définition du nombre dérivé et un calcul de limite par encadrement permet alors de conclure. La visite de l'œuvre  $\Lambda^*_M$  élaborée lors des deux tâches précédentes, associée à un travail de formalisation consistant à désigner les objets géométriques en jeu et à les lier à des sous-ensembles de  $\mathbf{R}^2$ , permet de pointer les propriétés de l'aire qui sont mobilisées en complétant la preuve, donc de produire  $R_3^\heartsuit$ .

Le schéma herbartien pour cette dernière question est

$$[S(X;Y;Q_3) \rightleftarrows M_3] \rightsquigarrow R_3^\heartsuit$$

avec  $M_3 = \{Q_3, Q_{3,1}, R_{3,1}, \Lambda^*_M\}$ .

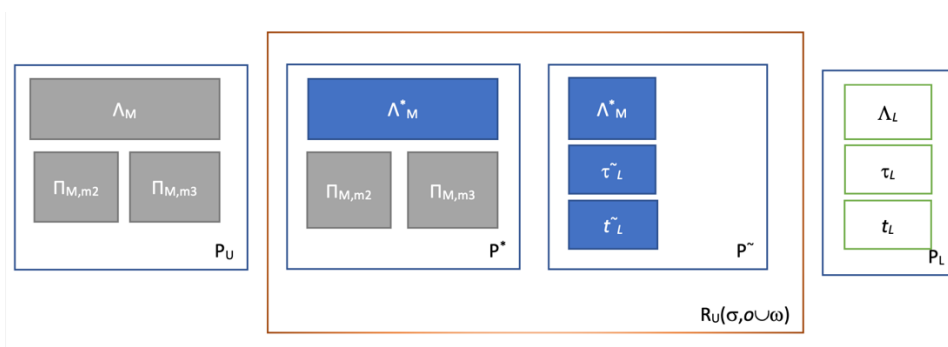
### Conclusions et perspectives

Dans cet article, nous avons montré comment les outils de la TAD peuvent permettre d'explicitier la construction de liens entre connaissances mathématiques du lycée et de l'université lors d'un processus d'étude. En effet, l'analyse a priori de notre AER sur l'intégrale, menée avec les question-grammes (chronogénèse) et le schéma herbartien (mésogénèse), met en évidence la rencontre avec des blocs

du *logos* et de la *praxis* de praxéologies mobilisant les objet  $o$  et  $\omega$  lors de l'évolution du milieu de l'étude.

Cette AER favorise le développement d'une organisation mathématique de type  $P^*$  relative à l'intégrale, avec des praxéologies universitaires de théorie de la mesure qui se trouvent modifiées pour s'adapter à l'objet  $o$ . Le temps de l'étude permet la construction d'un *logos* pertinent pour  $o$ , noté  $\Lambda_M^*$ .

La pertinence de  $P^*$  est saisie via le développement d'une organisation mathématique de type  $P^\sim$ , où cette fois une praxéologie issue du MPR relatif à  $o$  intègre le nouveau *logos*  $\Lambda_M^*$ , porteur de la norme de rigueur de l'Université. Ceci correspond à la dernière partie de l'activité, autour de la tâche  $t_3$  que l'on note désormais  $t_L^\sim$ . Bien que la tâche  $t_L^\sim$  soit isolée, le procédé de passage de  $t_L$  à  $t_L^\sim$  que décrit  $R^\heartsuit_3$  a une portée générale. Le type de tâche sous-jacent est  $T^\sim$  : justifier une *praxis*  $\Pi_L$  relative à l'intégrale du lycée vue comme une aire, selon la norme de rigueur de l'université. La technique associée à  $T^\sim$  consiste à identifier où intervient la notion intuitive d'aire, à formaliser, et enfin à identifier les axiomes et propriétés de la mesure des aires qui sont en jeu. Le *logos* est  $\Lambda_M^*$ . On peut considérer que cette praxéologie  $P^\sim$  se doit de figurer dans l'équipement praxéologique du professeur, selon la philosophie de Klein décrite dans l'introduction. D'un point de vue méthodologique et général, notre proposition d'implémentation du plan B de Klein consiste en le développement conjugué de praxéologies du type  $P^*$  et  $P^\sim$ , afin de générer le nouveau rapport que Winsløw note  $R_U(\sigma, o \cup \omega)$  (voir figure 4).



**Figure 4 – Schéma de l'implémentation proposée du plan B de Klein**

Pour revenir au cas de l'intégrale, la prochaine étape selon la méthodologie de l'ingénierie didactique consiste à analyser, avec les mêmes outils, les données empiriques recueillies lors de l'expérimentation avec les étudiants. La comparaison des question-grammes et des schémas herbartiens *a priori* et *a posteriori* permettra *in fine* de valider le dispositif, ou bien d'envisager de nouvelles évolutions à prévoir pour favoriser le développement des praxéologies  $P^*$  et  $P^\sim$ .

## Références

Blanché, R. (2009). *L'axiomatique*. Presses Universitaires de France.

Chevallard, Y., Bosch, M. (2020). Anthropological Theory of the Didactic (ATD). In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education, Second Edition* (pp. 53-61). Springer.

- Florensa, I., Bosch, M., & Gascón, J. (2015). The epistemological dimension in didactics: Two problematic issues. In Krainer, K., & Vondrová, N. (Eds.) *Proceedings of CERME9* (pp. 2635–2641).
- Hausberger, T. (2017). La dialectique objets-structures comme cadre de référence pour une étude didactique du structuralisme algébrique. *Éducation & Didactique*, Presses Universitaires de Rennes, 2017, 11 (2), pp.131-151.
- Hochmuth, R. (2022). Analysis Tasks Based on a Theorem in Nonlinear Approximation Theory. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. To appear in the INDRUM2020 Special Issue.
- Hoth, J., Jeschke, C., Dreher, A. et al. (2020) Ist akademisches Fachwissen hinreichend für den Erwerb eines berufsspezifischen Fachwissens im Lehramtsstudium? Eine Untersuchung der Trickle-down-Annahme. *Journal für Mathematik Didaktik*, 41, 329–356.
- Klein, F. (2016). Elementary mathematics from a higher standpoint: Arithmetic, algebra, analysis (Vol. 1, G. Schubring, Trans.). Springer. (Original work published 1933).
- Kilpatrick, J. (2019). A Double Discontinuity and a Triple Approach: Felix Klein's Perspective on Mathematics Teacher Education. In H.-G. Weigand et al. (Eds.), *The Legacy of Felix Klein, ICME-13 Monographs*. Springer.
- Lebesgue, H. (1935). *Sur la mesure des grandeurs. L'enseignement mathématique, Seconde édition*. Blanchard.
- Planchon, G., Hausberger, T. (2020). Un problème de CAPES comme premier pas vers une implémentation du plan B de Klein pour l'intégrale. In T. Hausberger, M. Bosch & F. Chellougui (Eds.), *Proceedings of INDRUM 2020* (pp. 153-162).
- Perrin, D. (2005). *Mathématiques d'école*. Cassini.
- Wasserman, N., Weber, K., Villanueva, M., & Mejia-Ramos, J. P. (2018). Mathematics teachers' views about the limited utility of real analysis: A transport model hypothesis. *Journal of Mathematical Behavior*, 50(1), 74-89.
- Winsløw, C. & Grønbaek, C. (2014). Klein's double discontinuity revisited: contemporary challenges for universities preparing teachers to teach calculus. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(1), 59-86.
- Winsløw, C. & Kondratieva, M. (2018). Klein's Plan B in the Early Teaching of Analysis: Two Theoretical Cases of Exploring Mathematical Links. *International Journal for Research in Undergraduate Mathematics Education*, 4, 119-138.
- Winsløw, C. (2020). Professional and academic bases of university mathematics teaching for the 21st century: the anthropological approach to practice based research. In T. Hausberger, M. Bosch & F. Chellougui (Eds.), *Proceedings of INDRUM 2020* (pp. 8-27 ).