



**HAL**  
open science

## Etude du graphe divisoriel 4

Pierre Mazet, Eric Saias

► **To cite this version:**

Pierre Mazet, Eric Saias. Etude du graphe divisoriel 4. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. Mathématiques., 2020, 29 (4), pp.971-975. hal-03911122

**HAL Id: hal-03911122**

**<https://hal.science/hal-03911122v1>**

Submitted on 13 Jan 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Étude du graphe divisoriel 4

Pierre Mazet et Eric Saias

## Résumé

Nous montrons qu'il existe une permutation  $f$  des entiers positifs telle que pour tout  $n \geq 2$ ,  $\text{ppcm}(f(n), f(n+1)) \leq cn(\log n)^2$ , où  $c$  est une constante positive. Cela améliore des résultats d'Erdős, Freud et Hegyvári (1983), et de Chen et Ji (2011).

## Abstract

We show that there exist a permutation  $f$  of the positive integers such that for all  $n \geq 2$ ,  $\text{l.c.m.}(f(n), f(n+1)) \leq cn(\log n)^2$ , where  $c$  is a positive constant. It improves previous results of Erdős, Freud and Hegyvári (1983), and of Chen and Ji (2011).

## 1 Introduction

Appelons chaîne-permutation du graphe divisoriel de  $\mathbb{N}^*$  (ou plus simplement chaîne-permutation) toute application bijective  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  telle que  $f(n)$  est un diviseur ou un multiple de  $f(n+1)$  pour tout entier  $n \geq 1$ . Il est facile de construire des chaînes-permutations. Voici les premières valeurs de l'une d'entre elles :

$$1 - 2 - (2 \times 3) - 3 - (3 \times 4) - 4 - (4 \times 5) - 5 - (5 \times 7) - 7 - (7 \times 8) - 8 \dots$$

On a ici  $\limsup_{n \rightarrow +\infty} f(n)/n^2 = 1/4$ . Le résultat ci-dessous montre que la convergence vers l'infini de  $f(n)$  peut être beaucoup plus lente.

### **Théorème.**

*Il existe une constante  $c_1$  et une chaîne-permutation  $f$  telles que pour tout  $n \geq 2$ , on a*

$$f(n) \leq c_1 n (\log n)^2.$$

Intéressons-nous maintenant à des permutations de  $\mathbb{N}^*$  qui ne sont pas nécessairement des chaînes-permutations. Notons  $[a, b]$  le plus petit commun multiple des entiers  $a$  et  $b$ . En 1983, Erdős, Freud et Hegyvári ont montré qu'il existe une constante  $c_2$  et une permutation  $f$  de  $\mathbb{N}^*$  telles que pour tout  $n \geq 3$ , on a

$$[f(n), f(n+1)] \leq n \exp\{c_2 \sqrt{\log n} \log \log n\}$$

(voir le théorème 3 de [2]). En modifiant légèrement la permutation choisie par Erdős, Freud et Hegyvári, Chen et Ji [1] ont montré en 2011 que l'on peut remplacer la fonction à l'intérieur de l'accolade par  $(2\sqrt{2}+o(1))\sqrt{\log n \log \log n}$ . Il découle immédiatement de notre théorème une amélioration de leur résultat.

**Corollaire.**

*Il existe une constante  $c_3$  et une permutation  $f$  de  $\mathbb{N}^*$  telles que pour tout  $n \geq 2$ , on a*

$$[f(n), f(n+1)] \leq c_3 n (\log n)^2.$$

Signalons que Tenenbaum [6] conjecture que l'on peut remplacer l'expression à droite du signe  $\leq$  dans cette dernière formule par  $n(\log n)^{1+o(1)}$ . L'exposant 1 de  $\log n$  serait alors optimal car on sait que (théorème 3 de [4]) pour toute permutation  $f$  de  $\mathbb{N}^*$ , on a

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{[f(n), f(n+1)]}{n \log n} > 0.$$

Pour établir le théorème, on utilise une construction de chaîne finie due à Tenenbaum (voir le paragraphe 4 de [6]) et un résultat relatif aux entiers à diviseurs denses (théorème 1 de [3]) (pour la définition de ces termes, voir le paragraphe suivant). Même si cela ne nous est pas utile ici, signalons au passage que le récent travail de Weingartner [7] fournit un équivalent asymptotique de la fonction de comptage des entiers à diviseurs  $y$ -denses, uniforme en  $y$ .

## 2 Notations

Appelons chaîne toute application injective  $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  telle que  $f(n)$  est un diviseur ou un multiple de  $f(n+1)$  pour tout entier  $n \geq 1$ . Appelons

aussi chaîne finie de longueur  $l$  tout  $l$ -uplet  $\mathcal{C} = a_1, a_2, \dots, a_l$  d'entiers positifs deux à deux distincts et tels que  $a_i$  est un diviseur ou un multiple de  $a_{i+1}$  pour tout entier  $i$  de l'intervalle  $[1, l - 1]$ . On notera longueur  $(\mathcal{C}) := l$ .

On note pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $P^+(n)$  (respectivement  $P^-(n)$ ) le plus grand (resp. petit) facteur premier de  $n$ . On pose de plus  $P^+(1) = 1$ .

On note

$$F(n) := \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ \max\{dP^-(d) : d|n, d > 1\} & (n \geq 2). \end{cases}$$

On dit qu'un entier est à diviseurs  $y$ -denses si  $F(n) \leq yn$ . Cette dénomination provient de l'identité

$$\frac{F(n)}{n} = \max_{1 \leq i < \tau(n)} \frac{d_{i+1}(n)}{d_i(n)}$$

où  $1 = d_1(n) < d_2(n) < \dots < d_{\tau(n)}(n) = n$  désigne la suite croissante des diviseurs de  $n$  (voir le lemme 2.2 de [5]).

### 3 Preuve du théorème

Soit  $p$  un nombre premier.

Au paragraphe 4 de [6], Tenenbaum construit une famille de chaînes finies  $\Gamma(x, p)$  pour tout réel  $x \geq 2$ . On s'intéresse ici au cas particulier  $x = 2p^2$  pour lequel on a les quatre propriétés suivantes.

$\Gamma(8, 2) = 1 - 2$ .

Pour tout  $p \geq 3$ ,  $\Gamma(2p^2, p) = 1 - p - \dots - 2$ .

Pour tout  $p$ ,  $\Gamma(2p^2, p)$  est constitué d'entiers  $m$  sans facteur carré et tels que  $m \leq 2p^2$ ,  $P^+(m) \leq p$ .

Pour tout  $p$ ,  $\Gamma(2p^2, p)$  contient tous les entiers  $m$  sans facteur carré et tels que  $F(m) \leq p^2$ .

Cette dernière propriété combinée avec le théorème 1 de [3] entraîne l'existence d'une constante  $c > 0$  telle que pour tout  $p$

$$(3.1) \quad \text{longueur}(\Gamma(2p^2, p)) \geq cp^2 / \log p.$$

Nous modifions légèrement  $\Gamma(2p^2, p)$  en considérant la chaîne finie  $\mathcal{D}(p)$  obtenue en déplaçant dans  $\Gamma(2p^2, p)$  le 1 initial pour le mettre en final, puis

en multipliant le tout par le nombre premier  $p^*$  suivant immédiatement  $p$ . On a donc pour  $p \geq 3$ ,  $\mathcal{D}(p) = p^*p - \dots - 2p^* - p^*$ .

Soit  $f_0$  la suite commençant à 1, puis obtenue par concaténation des  $\mathcal{D}(p)$ .

$$f_0 : 1 - \mathcal{D}(2) - \mathcal{D}(3) - \mathcal{D}(5) - \mathcal{D}(7) - \dots$$

On vérifie que  $f_0$  est une chaîne formée d'entiers sans facteur carré. On pose  $q_0 = 1$ .

On construit alors par récurrence une suite croissante  $(q_k)_{k \geq 0}$  de nombres égaux à 1 ou premiers et des chaînes  $f_k$  construites à partir de  $f_0$  en remplaçant, pour  $p \leq q_k$ , la chaîne finie  $\mathcal{D}(p)$  par une chaîne finie  $\mathcal{C}(p)$  à définir.

Supposons construits  $q_0 \leq q_1 \leq \dots \leq q_{k-1}$ ,  $\mathcal{C}(p)$  pour  $p \leq q_{k-1}$  ainsi donc que  $f_0, f_1, \dots, f_{k-1}$ . Si  $k$  est dans l'image de  $f_{k-1}$ , on pose  $q_k = q_{k-1}$ , il n'y a pas de nouvelle chaîne finie  $\mathcal{C}(p)$  à définir et donc  $f_k = f_{k-1}$ .

On suppose dorénavant que  $k$  n'est pas dans l'image de  $f_{k-1}$ .

On choisit  $q_k$  un nombre premier tel que  $q_k > q_{k-1}$  et

$$(3.2) \quad q_k \geq k^2.$$

On définit alors  $\mathcal{C}(p)$  pour  $q_{k-1} < p \leq q_k$  de la manière suivante.

Si  $q_{k-1} < p < q_k$ , on pose  $\mathcal{C}(p) = \mathcal{D}(p)$ .

Si  $p = q_k$ , on choisit

$$\mathcal{C}(p) = pk^2 - k - p^*pk^2 - \mathcal{D}(p).$$

Le fait que  $\mathcal{D}(p)$  est formée d'entiers sans facteur carré assure que les éléments de  $\mathcal{C}(p)$  sont deux à deux distincts et donc que  $\mathcal{C}(p)$  est une chaîne finie.

On pose alors

$$f_k : 1 - \mathcal{C}(2) - \mathcal{C}(3) - \dots - \mathcal{C}(q_k) - \mathcal{D}(q_k^*) - \mathcal{D}(q_k^{**}) - \dots$$

et on vérifie que c'est une chaîne. On définit enfin

$$f = \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k = 1 - \mathcal{C}(2) - \mathcal{C}(3) - \mathcal{C}(5) - \dots - \mathcal{C}(p) - \dots$$

et on vérifie que c'est une chaîne-permutation.

Le début de cette chaîne-permutation est formée des trois entiers  $1-6-3$ , et est suivie de la chaîne finie  $\mathcal{C}(3)$ . Soit  $n \geq 4$ ; il existe donc un nombre premier  $p$  tel que  $f(n) \in \mathcal{C}(p^*)$ . En utilisant notamment (3.2), on a

$f(n) \leq 2p^{*2}p^{**} \asymp p^3$ . Par ailleurs notons  $r$  un nombre premier générique. On a en utilisant (3.1) et le théorème des nombres premiers

$$n \geq \sum_{r \leq p} \text{longueur } (\mathcal{C}(r)) \gg \sum_{r \leq p} r^2 / \log r \asymp p^3 / (\log p)^2.$$

On en déduit que  $f(n) \ll n(\log n)^2$ . Cela conclut la démonstration du théorème.

## Références

- [1] Y.-G. CHEN and C.-S. JI. — *The permutation of integers with small least common multiple of two subsequent terms*, Acta Math. Hungarica 132 (2011), 307-309.
- [2] P. ERDÖS, R. FREUD and N. HEGYVARI. — *Arithmetical properties of permutation of integers*, Acta Math. Hungarica 41 (1983), 169-176.
- [3] E. SAIAS. — *Entiers à diviseurs denses 1*, J. Number Theory 62 (1997), 163-191.
- [4] E. SAIAS. — *Applications des entiers à diviseurs denses*, Acta Arithmetica 83 (1998), 225-240.
- [5] G. TENENBAUM. — *Sur un problème de crible et ses applications*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 19 (1986), 1-30.
- [6] G. TENENBAUM. — *Sur un problème de crible et ses applications, 2. Corrigendum et étude du graphe divisoriel*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 28 (1995), 115-127.
- [7] A. WEINGARTNER. — *Practical numbers and the distribution of divisors*, Quart. J. Maths 66 (2015), 743-758.