



HAL
open science

Définir l'intégrale : une nécessité, des élaborations

Emmylou Haffner

► **To cite this version:**

Emmylou Haffner. Définir l'intégrale : une nécessité, des élaborations. Histoires de calcul infinitésimal - De l'étude des courbes aux dérivées et aux intégrales, Ellipses, 2022, 9782340074231. hal-03896748

HAL Id: hal-03896748

<https://hal.science/hal-03896748>

Submitted on 13 Dec 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Emmylou HAFFNER

Chapitre IX

Définir l'intégrale : une nécessité, des élaborations

(postprint)

Dans son *Habilitation*, titrée « *Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe* » [Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique]¹, soutenue en 1854 mais publiée de manière posthume en 1867, Bernhard Riemann (1826-1866), donne la définition de ce que nous appelons aujourd'hui l'intégrale de Riemann. Ce texte est ouvert par 14 pages d'analyse historique des précédentes recherches sur la représentabilité des fonctions en série trigonométrique et les travaux de Leonhard Euler (1707-1783), Jean-Baptiste le Rond d'Alembert (1717-1783), Jean-Baptiste-Joseph Fourier (1768-1830) et Johann Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805-1859), qui ont depuis largement guidé la narration de cette partie de l'histoire des mathématiques. Cette analyse remarquable inclut une réflexion fine sur les changements connus par les concepts en jeu, notamment dans les travaux de Dirichlet, ainsi que sur les liens entre représentabilité et intégrabilité des fonctions². Cela témoigne de la volonté de Riemann de placer son travail dans une tradition bien établie, tout en montrant clairement les limites et comment il peut les dépasser. Le travail de Riemann repose sur une réflexion sur la possibilité d'améliorer et d'étendre les travaux de ces auteurs, en particulier pour rendre les critères de représentabilité en série trigonométrique plus précis et en délimiter clairement les contours.

Dans ce chapitre, nous nous contenterons de considérer les questions liées à l'intégrabilité des fonctions³. Soulignons que la partie du texte de Riemann effectivement dédiée à l'intégrabilité et à la définition de ce que nous appelons aujourd'hui l'intégrale de Riemann est, en fait, assez courte, le cœur de son *Habilitation* étant (comme son nom l'indique) la représentation des fonctions en séries trigonométriques. Avant de présenter le travail de Riemann nous passerons par trois grandes étapes : en 1822, les travaux de Fourier sur la représentabilité des fonctions en séries trigonométriques (qui seront ensuite nommées séries de Fourier) qui mettent en avant l'importance de l'intégrabilité des fonctions ; en 1823, la définition de l'intégrale définie proposée par Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) dans son *Résumé des leçons données à l'École Royale polytechnique sur le calcul infinitésimal* ; en 1829 et

¹ Lors de la soutenance de l'*Habilitation*, les candidats présentaient un mémoire, l'*Habilitationschrift*, et prononçaient un cours, l'*Habilitationsvortrag*. Nous parlons ici de l'*Habilitationschrift* de Riemann. Son *Habilitationsvortrag* est le célèbre « Sur les hypothèses qui servent de base à la géométrie ».

² On parle de représentabilité d'une fonction pour la possibilité de l'écrire comme somme d'une série (par exemple, entière ou de Fourier) et d'intégrabilité lorsque l'on cherche à savoir si la fonction possède une intégrale définie et finie.

³ Sur la question des séries de Fourier, on pourra consulter les chapitres 2 et 5 de Bottazzini Umberto, *The higher calculus. A history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass*. New York : Springer, 1986 ; les chapitres 2, 14 et 15 de [15]. Nous ne considérerons que la définition de l'intégrale de Riemann et renvoyons respectivement aux chapitres 6 et 15 de ces deux ouvrages.

1837, les travaux de Dirichlet sur la représentabilité des fonctions en séries trigonométriques, et ce qu'il en ressort des questions liées à l'intégrabilité des fonctions.

Le cheminement historique que nous retraçons ici, vers l'intégrale de Riemann et au-delà, omet une partie importante de l'histoire de l'analyse qui a toutefois joué un rôle crucial dans le développement des théories de l'intégration : la résolution des équations différentielles. À défaut de pouvoir donner ici à ce sujet la place qu'il mérite, nous renvoyons la lectrice à [18] pour un tableau synthétique, et à [16] pour un panorama plus exhaustif.

LES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES DE FOURIER

La réflexion de Riemann sur les conditions d'intégrabilité des fonctions à variable réelle naît de ses recherches sur la représentabilité en série trigonométrique – un thème central pour les développements de l'analyse aux XIX^e et XX^e siècles. Riemann commence son *Habilitation* en rappelant que ce sont des recherches sur les vibrations des cordes qui ont amené Daniel Bernoulli (1700-1782), Euler et d'Alembert à considérer le développement de fonctions analytiques en séries trigonométriques. Il s'agissait alors de résoudre l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Les travaux de Fourier marquent ensuite une étape décisive des recherches sur la représentation de fonctions arbitraires en série trigonométrique. En 1822, dans sa *Théorie analytique de la chaleur*, Fourier s'intéresse à la distribution de la chaleur dans un solide. Cela l'amène à résoudre des équations aux dérivées partielles, notamment certaines dont on peut montrer que les solutions sont de la forme $v(x, y) = f(x)g(y)$ avec $f(x) = \cos(mx)$, $g(y) = e^{-my}$. Fourier en vient à affirmer que toute fonction « dont la valeur est représentée, dans un intervalle déterminé, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = X$ par l'ordonnée d'une ligne courbe tracée arbitrairement » [4, p. 231-232] peut être écrite comme série de fonctions trigonométriques, c'est-à-dire sous la forme⁴

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x)$$

avec

$$a_n = \int_{-1}^1 f(x) \cos n\pi x \, dx ; b_n = \int_{-1}^1 f(x) \sin n\pi x \, dx.$$

Fourier, ayant besoin d'un concept de fonction suffisamment général pour s'appliquer sans restriction à la situation physique qu'il étudie, définit la notion de la manière suivante :

En général, la fonction $f(x)$ représente une suite de valeurs, ou ordonnées, dont chacune est arbitraire. L'abscisse x pouvant recevoir une infinité de valeurs, il y a un pareil nombre d'ordonnées $f(x)$. Toutes ont des valeurs numériques actuelles, ou positives, ou négatives, ou nulles. On ne suppose point que ces ordonnées soient assujetties à une loi commune ; elles se succèdent d'une manière quelconque, et chacune d'elles est donnée comme le serait une seule quantité. [Ibid., p. 500]

⁴ Nous utilisons ici une notation moderne pour la série de Fourier. Dans le texte original, on trouve souvent les séries notées par exemple $a + b \cos x + c \cos 2x + \dots$, mais la notation \sum est aussi ponctuellement utilisée.

Les fonctions de Fourier sont données graphiquement et arbitrairement. S'il a été après Fourier largement accepté que les fonctions arbitraires pouvaient s'écrire sous forme de série trigonométrique, la preuve que la série de Fourier d'une fonction donnée converge effectivement vers la valeur de ladite fonction n'a été donnée que plus tard. Cauchy en propose une preuve en 1826⁵ jugée incomplète et corrigée par Dirichlet en 1829 [6].

L'étude d'une fonction périodique par les séries de Fourier comprend deux volets : une étape pour déterminer ce que l'on appelle aujourd'hui ses coefficients de Fourier, et une étape pour déterminer si la série de Fourier ainsi formée converge bien vers la fonction en question. On voit bien, donc, que l'intégrabilité des fonctions considérées est essentielle pour le calcul des coefficients. Comme l'écrit l'historien Jesper Lützen [17 p. 170], après les travaux des Bernoulli, la définition la plus largement adoptée pour l'intégration était celle du procédé inverse de la différentiation – c'est-à-dire, la recherche de primitive – et « Fourier a été le premier à changer cela ». En effet, Fourier s'était rendu compte que le calcul des coefficients de Fourier pour des fonctions arbitraires (c'est-à-dire sans expression analytique) demandait d'aller au-delà du calcul différentiel (qui nécessitait une expression analytique) et a concentré son attention sur l'intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$ – c'est lui qui propose d'indiquer les limites de l'intégration en haut et en bas du signe d'intégrale – en insistant sur le fait qu'il s'agit de l'aire entre la courbe et l'axe.

Lorsqu'en 1823 Cauchy définit l'intégrale définie, il reprend l'approche de Fourier, mais en mettant de côté la définition en termes d'aire pour en proposer une plus précise, qui lui permet aussi de prouver que l'intégrale existe effectivement pour une fonction continue par morceaux.

LES INTÉGRALES DÉFINIE ET INDÉFINIE DE CAUCHY

Cauchy est souvent présenté comme l'un des fondateurs du mouvement dit de « *rigorisation* » de l'analyse mathématique au XIX^e siècle. Cette rigorisation de l'analyse consiste essentiellement en une réorganisation de ses fondements. Celle-ci n'est pas tant guidée par des considérations philosophiques que, d'une part, par des questions interrogeant les outils analytiques – comme les séries de Fourier qui invitent à remettre en question les conceptions établies de fonction, d'intégrale, de convergence, mais également les équations différentielles, les fonctions elliptiques... – et, d'autre part, par des considérations pédagogiques. Cauchy, en particulier, dans la préface de son *Cours d'Analyse* de 1821, indique avoir « pour la plus grande utilité des élèves » fait le choix de donner aux méthodes « toute la rigueur qu'on exige en géométrie » [1, p. ij]⁶.

Au XIX^e siècle, et notamment par les travaux de Cauchy, s'opèrent des changements importants en analyse. D'une part, la pratique de l'analyse change plus généralement d'une pratique de résolution des problèmes à la mise en place d'une théorie, c'est-à-dire un ensemble de résultats, propositions, théorèmes déduits de définitions (vues comme) rigoureuses. Le XVIII^e siècle avait produit beaucoup de résultats en analyse (calcul infinitésimal, intégral, développement en séries, etc.) mais ces résultats étaient organisés dans un ordre que les mathématiciens du XIX^e siècle commencent à considérer comme insatisfaisant, en particulier à cause du manque d'une présentation systématique structurée en définitions-théorèmes. Un

⁵ Cauchy, Augustin-Louis, « Mémoire sur les développements des fonctions en séries périodiques », *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* 6, p. 603-612, 1827.

⁶ Sur les travaux de Cauchy plus généralement, on pourra se référer à Belhoste, Bruno, *Cauchy, 1789–1857 : un mathématicien légitimiste au XIX^e siècle*, Paris : Belin, 1985.

nouveau standard de rigueur largement soutenu par une réorganisation du corps des savoirs se met progressivement en place avec les travaux de Cauchy. Celui-ci a une compréhension aigüe et précise du sens des résultats et des techniques développées par ses prédécesseurs, et il restructure l'ensemble des connaissances en identifiant les propriétés à utiliser comme *définition* de manière à justifier lesdites techniques et résultats. Soulignons qu'il n'est pas question ici de la rigueur dite weierstrassienne utilisant les ε , δ , etc., pour définir les notions de l'analyse – travaux d'ailleurs postérieurs à Cauchy – mais d'un changement dans la structuration même de la théorie. D'autre part, il y avait eu, avec les travaux d'Euler, un mouvement de transition entre l'analyse comme outil pour l'étude des courbes, vers l'analyse comme une théorie des fonctions. Avec Cauchy, l'analyse devient une discipline autonome.

En 1823, en préface de ses *Leçons sur le calcul infinitésimal*, il précise, dans une critique à peine voilée de ses prédécesseurs :

Mon but principal a été de concilier la rigueur, dont je m'étais fait une loi dans mon Cours d'analyse avec la simplicité qui résulte de la considération directe des quantités infiniment petites. Pour cette raison, j'ai cru devoir rejeter les développemens des fonctions en séries infinies, toutes les fois que les séries obtenues ne sont pas convergentes et je me suis vu forcé de renvoyer au calcul intégral la formule de Taylor, cette formule ne pouvant plus être admise comme générale qu'autant que la série qu'elle renferme se trouve réduite à un nombre fini de termes et complétée par une intégrale définie. Je n'ignore pas que l'illustre auteur de la Mécanique analytique [Lagrange] a pris la formule dont il s'agit pour base de sa théorie des fonctions dérivées [chap. vii], mais, malgré tout le respect que commande une si grande autorité la plupart des géomètres s'accordent maintenant à reconnaître l'incertitude des résultats auxquels on peut être conduit par l'emploi de séries [...]. Au reste, ceux qui liront mon ouvrage, se convaincront, je l'espère, que les principes du calcul différentiel, et ses applications les plus importantes, peuvent être facilement exposés, sans l'intervention des séries. [2, Avertissement]

Dans la critique de l'approche lagrangienne se trouve le cœur du refus de Cauchy de recourir à l'algèbre et à sa supposée « généralité » [1, p. ij] pour fonder l'analyse. La « généralité de l'algèbre » est celle du travail avec des quantités indéterminées, fournissant des résultats toujours valides lorsqu'appliqués à des valeurs « déterminées » comme les nombres. Mais une telle « généralité » va, pour Cauchy, à l'encontre de la rigueur, qui demande d'ancrer les définitions dans une réalité numérique, ce qu'il propose de faire en mettant en place un nouvel édifice fondé sur les notions de limite⁷ et de continuité, et sur l'arithmétique des inégalités⁸.

Pour le sujet qui nous intéresse, soulignons que Cauchy est le premier à fonder le calcul intégral sur des bases purement analytiques, se détachant (aussi) de l'interprétation géométrique. De plus, Cauchy fait un pas important pour combler une lacune supplémentaire, celle d'une approche unifiée pour calculer les intégrales. Il propose pour la première fois une technique uniforme pour calculer l'aire sous la courbe $y = f(x)$ (avec f continue), en prouvant le lien avec les primitives de f . Il est également le premier à proposer une preuve du « théorème fondamental du calcul intégral », c'est-à-dire du lien entre intégration et dérivation.

⁷ À ce sujet, voyez le chapitre xi.

⁸ Voyez Chorlay, Renaud, « Questions of generality as probes into nineteenth-century mathematical analysis », *The Oxford Handbook of Generality in Mathematics and the Sciences*, Chemla K., Chorlay R., Rabouin D. (éds.), Oxford : OUP, p. 385-410, 2016.

La définition de l'intégrale de Cauchy repose sur la notion de fonction telle qu'il l'avait définie dans son *Cours d'Analyse* de 1821 :

Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que la valeur de l'une d'elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de variable indépendante et les autres quantités exprimées au moyen de la variable indépendante sont ce qu'on appelle des fonctions de cette variable. [Ibid., p. 20]

Cauchy travaille, pour la définition de l'intégrale définie, avec des fonctions continues par morceaux⁹.

Pour bien comprendre la définition de l'intégrale donnée par Cauchy, il faut d'abord considérer la définition des « sommes de Cauchy », que nous reproduisons entièrement :

Supposons que la fonction $y = f(x)$, étant continue par rapport à la variable x entre deux limites finies $x = x_0$ et $x = X$, on désigne par x_1, x_2, \dots, x_{n-1} de nouvelles valeurs de x interposées entre ces limites, et qui aillent toujours en croissant ou en décroissant depuis la première limite jusqu'à la seconde. On pourra se servir de ces valeurs pour diviser la différence $X - x_0$ en éléments

$$(1) \quad x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, X - x_{n-1},$$

qui seront tous de même signe. Cela posé, concevons que l'on multiplie chaque élément par la valeur de $f(x)$ correspondante à l'origine de ce même élément, savoir l'élément $x_1 - x_0$ par $f(x_0)$, l'élément $x_2 - x_1$ par $f(x_1)$, ..., enfin l'élément $X - x_{n-1}$, par $f(x_{n-1})$; et soit

$$(2) \quad S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \dots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

la somme des produits ainsi obtenus. [2, p. 122]

On reconnaît dans (1) une subdivision de l'intervalle d'intégration. Ce que l'on appelle « somme de Cauchy » est (2).

Cauchy montre ensuite que les sommes de Cauchy d'une fonction continue convergent (dans les nombres réels) vers un nombre réel. Autrement dit, lorsque les diamètres des intervalles des sommes de Cauchy tendent vers 0, la somme converge vers un nombre réel. Ce nombre est appelé *l'intégrale définie* :

*Donc, lorsque les éléments de la différence $X - x_0$ deviennent infiniment petits, le mode de division n'a plus sur la valeur de S qu'une influence insensible ; et, si l'on fait décroître indéfiniment les valeurs numériques de ces éléments, en augmentant leur nombre, la valeur de S finira par être sensiblement constante ou, en d'autres termes, elle finira par atteindre une certaine limite qui dépendra uniquement de la forme de la fonction $f(x)$ et des valeurs extrêmes x_0, X attribuées à la variable x . Cette limite est ce qu'on appelle une *intégrale définie*. [Ibid., p. 125]*

Cauchy adopte la notation introduite par Fourier pour l'intégrale définie de $f(x)$ entre x_0 et X :

⁹ Rappelons que Cauchy a défini la continuité dans le *Cours d'Analyse* en 1821.

$$\int_{x_0}^X f(x)dx.$$

L'idée de base derrière la définition des « sommes de Cauchy » était déjà présente chez un certain nombre de ses prédécesseurs. Euler utilise une telle méthode dans ses *Institutiones Calculi Integralis* (1768) pour calculer des approximations d'intégrales¹⁰, approche que l'on retrouve chez Lacroix, Legendre, et Poisson¹¹. Toutefois, comme le souligne Lützen, le traitement que propose Cauchy va bien au-delà d'une procédure d'approximation numérique, puisque cette technique devient dans son travail une véritable *définition*.

Dans la leçon suivante, Cauchy donne des formules pour déterminer des valeurs exactes ou approchées de certaines intégrales définies, et calcule un certain nombre d'exemples. C'est dans la Leçon 23, après avoir prouvé certaines propriétés algébriques fondamentales, comme la relation de Chasles, que Cauchy clarifie l'interprétation géométrique de l'intégrale :

Concevons à présent que, la limite X étant supérieure à x_0 , et la fonction $f(x)$ étant positive depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, x, y , désignent des coordonnées rectangulaires, et A la surface comprise d'une part entre l'axe des x et la courbe $y = f(x)$, d'autre part entre les ordonnées $f(x_0), f(X)$. [Op. cit, p. 136-137]

Le calcul de l'aire se fait alors par un argument géométrique dans lequel nous reconnaissons la version intégrale du théorème des accroissements finis, ce qui permet à Cauchy de montrer que $A = \int_{x_0}^X f(x)dx$, liant ainsi le calcul de l'aire sous la courbe à la définition de l'intégrale définie.

La dernière étape de définition de l'intégrale définie est celle de la généralisation de l'intégrale définie aux intégrales à bornes infinies et aux « intégrales définies singulières » (Leçons 24 et 25), c'est-à-dire les intégrales impropres et continues par morceaux. Cauchy présente le problème de la manière suivante :

Dans les leçons précédentes, nous avons démontré plusieurs propriétés remarquables de l'intégrale définie

$$(1) \int_{x_0}^X f(x)dx$$

mais en supposant : 1. que les limites x_0, X étaient des quantités finies, 2. que la fonction $f(x)$ demeurerait finie et continue entre ces mêmes limites. [...] Lorsque les valeurs extrêmes x_0, X deviennent infinies, ou lorsque la fonction $f(x)$ ne reste pas finie et continue depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, on ne peut plus affirmer que [la somme de Cauchy] ait une limite fixe, et par suite on ne voit plus quel sens on doit attacher à la notation (1) qui servait à représenter généralement la limite de [la somme de Cauchy]. [Ibid., p. 140-141]

¹⁰ C'est également l'approche qu'il utilise pour l'intégration des équations différentielles $dy = f(x)dx$ et $dy = f(x)dx$, et qui fonde ce que l'on appelle aujourd'hui la méthode d'Euler.

¹¹ À ce sujet, voyez Grabiner, Judith V., *The origins of Cauchy's rigorous calculus*, Newburyport : MIT Press, 1981 ; et Mawhin, Jean, « Présences des sommes de Riemann dans l'évolution du calcul intégral » *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, p. 117-147, 1983.

Cauchy considère donc ici des fonctions continues par morceaux qui deviennent infinies en un ou plusieurs points de l'intervalle d'intégration. Cauchy propose « d'étendre par analogie » ce qu'on appelle aujourd'hui la relation de Chasles et le passage à la limite

$$\int_{x_0}^X f(x)dx = \lim \int_{\xi_0}^{\xi} f(x)dx$$

où ξ_0 tend vers x_0 et ξ vers X . Si la fonction f est continue sur $[x_0, X]$ sauf en un point $x = a$, Cauchy propose de considérer les deux intégrales :

$$\int_{x_0}^{a-\varepsilon} f(x)dx \text{ et } \int_{a+\varepsilon}^X f(x)dx$$

et leur somme :

$$\int_{x_0}^{a-\varepsilon} f(x)dx + \int_{a+\varepsilon}^X f(x)dx$$

alors la limite de la somme est la somme des limites, qui peut être trouvée en utilisant la propriété ci-dessus. Si cette limite existe (quand ε tend vers 0), alors l'intégrale existe et est finie. Elle est appelée « intégrale définie singulière ». Cauchy généralise cette méthode à un nombre fini quelconque de telles discontinuités.

Enfin, pour effectivement obtenir une définition uniforme de l'intégrale, il faut définir les intégrales indéfinies. C'est le sujet de la Leçon 26, dans laquelle Cauchy prouve que pour une fonction $\mathcal{F}(x)$ définie par :

$$\mathcal{F}(x) = \int_{x_0}^x f(x)dx$$

alors

$$\mathcal{F}'(x) = f(x).$$

Autrement dit, l'intégrale indéfinie $\int f(x)dx$ est la solution de l'équation différentielle $dy = f(x)dx$. Cauchy établit ainsi le théorème fondamental du calcul différentiel et relie, dans le même geste, son nouveau concept d'intégrale à l'ancien.

Terminons en mentionnant la possibilité, mise en avant par Lützen [17, p. 171], d'un lien entre nouvelle définition de l'intégrale proposée par Cauchy et certains de ses travaux précédents. D'une part, Cauchy avait, quelques années auparavant, montré que la valeur de l'intégrale définie et celle de la différence entre les valeurs d'une primitive aux extrémités de l'intervalle d'intégration ne coïncidaient pas toujours avec la définition précédente¹². D'autre part, ses travaux (et ceux de Poisson) en analyse complexe l'avaient mené à prouver que les intégrales complexes peuvent dépendre des chemins d'intégration. Il est donc possible qu'ait ainsi pu émerger pour Cauchy l'idée que la définition de l'intégrale ne peut pas reposer de manière rigoureuse sur la primitive.

¹² Cauchy, Augustin-Louis, « Mémoire sur la théorie des intégrales définies » lu à l'Institut le 22 août 1814, *Mémoire présentés à l'Académie Royale des Sciences par divers savans* 2, p. 601-799, 1827.

FONCTION ET INTÉGRABILITÉ DANS LES TRAVAUX SUR LES SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES DE DIRICHLET

Dans « Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire » (1829) et sa révision allemande de 1837 « *Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen* » [Sur la représentation des fonctions arbitraires en séries trigonométriques], Dirichlet poursuit les travaux de Fourier et Cauchy sur la représentation de fonctions arbitraires en séries trigonométriques, en approfondissant le concept de fonction. Dirichlet considère en effet une fonction « entièrement arbitraire » pour laquelle n'est donnée aucune représentation explicite : aucune formule, aucune « règle de formation » par des opérations arithmétiques. Il suit ainsi la voie de Fourier, qui avait « ouvert une nouvelle carrière aux applications de l'analyse, en y introduisant la manière d'exprimer les fonctions arbitraires dont il est question » [6, p. 117]. Rappelons de plus que Dirichlet est un acteur important du renouveau de la rigueur en analyse au XIX^e siècle. Un aspect central de cette attention accrue aux questions de rigueur des définitions et raisonnements en analyse est l'insistance sur la nécessité d'identifier les propriétés nécessaires et suffisantes des objets sur et avec lesquels on travaille. C'est dans cette optique que se place la notion de fonction proposée par Dirichlet¹³ :

Nous désignons par a et b deux constantes et par x une quantité variable qui prendra graduellement toutes les valeurs entre a et b . Maintenant à tout x correspond un seul y fini, de telle sorte que quand x parcourt continument l'intervalle entre a et b , $y = f(x)$ change également graduellement. Alors y est appelé une fonction continue de x sur cet intervalle. Il n'est pas nécessaire que y soit, dans cet intervalle, dépendant de x toujours avec la même loi, donc on n'a pas besoin de penser une dépendance s'exprimant par des opérations mathématiques. Représentée géométriquement, c'est-à-dire avec x et y comme abscisses et ordonnées, une fonction continue apparaît comme une courbe continue, dont chaque abscisse comprise entre a et b correspond à un seul point. Cette définition ne prescrit pas une loi commune pour les différentes parties de la courbe ; on peut penser qu'elle est composée des morceaux les plus divers ou qu'elle est dessinée entièrement sans loi. Il s'ensuit qu'une telle fonction pour un intervalle ne doit être considérée comme définie que si elle est donnée graphiquement pour tout l'intervalle ou est sujette à des lois mathématiques qui s'appliquent aux parties individuelles de l'intervalle. Tant que l'on a déterminé une fonction seulement pour une partie de l'intervalle, la manière dont elle est prolongée sur le reste de l'intervalle est complètement laissée arbitraire. [7, p. 135-136, je traduis]

Mentionnons, qu'il ne s'agit que d'une manière parmi d'autres de concevoir une rigourisation de l'analyse. Certains acteurs importants de ce mouvement se positionnent contre le niveau de généralité adopté par Dirichlet (et, plus tard, par Riemann). Karl Weierstrass (1815-1897), en particulier, est dit avoir affirmé qu'une telle manière de concevoir la fonction était

¹³ Sur les changements du concept de fonction dans ce contexte, voyez Lützen, Jesper, « Between rigor and applications: Developments in the concept of function in mathematical analysis », *The Cambridge History of Science: The modern physical and mathematical sciences*. Nye, M. J. (éd.). Cambridge : CUP, p. 468-487, 2003.

« complètement intenable et infécond. Il est en effet impossible d'en déduire des propriétés générales des fonctions »¹⁴.

À la suite de la notion de fonction, Dirichlet considère la définition de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$, en l'introduisant comme l'aire sous la courbe entre a et b . Il rappelle ensuite la définition de ce que nous avons appelé ci-dessus la somme de Cauchy – toujours avec des sous-intervalles de taille égale [op. cit., p. 136], et donne la condition pour considérer l'intégrale comme sa limite (sans citer Cauchy). Il rappelle diverses propriétés algébriques de l'intégrale.

Dans son premier article sur les séries trigonométriques, Dirichlet était arrivé à la condition suivante pour l'intégrabilité des fonctions :

Il est nécessaire qu'alors la fonction $\varphi(x)$ [une fonction de x , ayant une valeur finie et déterminée pour chaque valeur de x entre $-\pi$ et π]¹⁵, soit telle que, si l'on désigne par a et b deux quantités quelconques comprises entre $-\pi$ et π , on puisse toujours placer entre a et b d'autres quantités r et s assez rapprochées pour que la fonction reste continue dans l'intervalle de r à s . On sentira facilement la nécessité de cette restriction en considérant que les différents termes de la série sont des intégrales définies et en remontant à la notion fondamentale des intégrales. On verra alors que l'intégrale d'une fonction ne signifie quelque chose qu'autant que la fonction satisfait à la condition précédemment énoncée. [6, p. 131-132]

Autrement dit, en termes modernes, Dirichlet affirme qu'une fonction est intégrable si, et seulement si, l'ensemble de ses discontinuités est assez rare – formellement, s'il est nul part dense. Dirichlet donne alors l'exemple bien connu de fonction non intégrable (pour lui, et qui le sera aussi pour Riemann) :

$$\varphi(x) = \begin{cases} c & \text{pour } x \in \mathbb{Q} \\ d & \text{pour } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

où c et d sont des constantes distinctes. Il conclut par les affirmations suivantes :

La fonction ainsi définie a des valeurs finies et déterminées pour toute valeur de x , et cependant on ne saurait la substituer dans la série, attendu que les différentes intégrales qui entrent dans cette série, perdraient toute signification dans ce cas. La restriction que je viens de préciser, et celle de ne pas devenir infinie, sont les seules auxquelles la fonction $\varphi(x)$ soit sujette et tous les cas qu'elles n'excluent pas peuvent être ramenés à ceux que nous avons considérés dans ce qui précède. Mais la chose, pour être faite avec toute la clarté qu'on peut désirer, exige quelques détails liés aux principes fondamentaux de l'analyse infinitésimale et qui seront exposés dans une autre note¹⁶. [Ibid., p. 132]

Ces dernières lignes de l'article de Dirichlet sont à l'origine de deux courants de recherche importants dans l'analyse du XIX^e siècle : d'une part, la construction de fonctions dites

¹⁴ Ce sont des propos tenus lors d'un cours d'introduction à la théorie des fonctions analytiques de 1878, rédigé par A Hurwitz. Voyez Dugac, Pierre, « Éléments d'analyse de Karl Weierstrass », *Archive for History of Exact Sciences* 10, p. 41-176, 1973.

¹⁵ C'est la fonction que Dirichlet se propose de développer en série trigonométrique.

¹⁶ Dirichlet n'a jamais publié ce résultat, et Paul du Bois-Reymond l'a plus tard réfuté en donnant un exemple de fonction continue dont la série de Fourier diverge en 0. Voyez du Bois-Reymond, Paul, « Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsformeln », *Abhandlungen der Mathematisch-Physicalischen Classe der K. Bayerische Akademie der Wissenschaften*, 13, p. 1-103, 1876.

pathologiques¹⁷ ; d'autre part l'étude des critères d'intégrabilité et de la possibilité de les définir de manière moins restreinte – Dirichlet conjecturant qu'il est possible d'affaiblir les conditions de continuité faites dans sa propre preuve pour généraliser son résultat. La question de l'intégrabilité retient toutefois peu l'attention jusqu'à l'*Habilitation* de Riemann, dans laquelle il identifie des conditions de continuité moins strictes pour l'intégrabilité.

LA RÉPONSE DE RIEMANN À LA QUESTION DE L'INTÉGRABILITÉ

Riemann a sans doute été l'un des mathématiciens les plus influents de la seconde moitié du XIX^e siècle. Élève de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) à Göttingen et de Dirichlet à Berlin puis à Göttingen, il a introduit en analyse, géométrie différentielle, physique mathématique et théorie des nombres, des concepts et méthodes qui ont profondément marqué les mathématiques. L'intégrale de Riemann, que nous allons présenter ici, n'est certes pas la contribution la plus saisissante de Riemann à l'analyse. Bien que les travaux d'Henri Lebesgue (1875-1941) en aient montré (et dépassé) les limites, elle est encore utilisée dans les contextes appropriés et est au cœur de l'enseignement du calcul intégral de premier cycle universitaire. L'intégrale de Riemann est introduite dans sa thèse d'*Habilitation* sur la représentabilité des fonctions en séries trigonométriques, soutenue en 1854 sous la direction de Gauss, mais publiée seulement en 1867. Soulignons que la question de l'*intégrabilité* n'est qu'une partie relativement minime (seulement 6 pages sur 45) du travail de Riemann, posant des considérations préliminaires à la question centrale qu'est la représentation en séries trigonométriques.

LA NOTION DE FONCTION

C'est dans sa thèse de doctorat sur les fondements de la théorie des fonctions complexes « *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse* » [Principes fondamentaux pour une théorie générale des fonctions d'une grandeur variable complexe], soutenue en 1851, que Riemann évoque le concept de fonction, en reprenant (presque mot pour mot) la notion très générale de fonction que l'on trouve chez Dirichlet :

Si l'on désigne par z une grandeur variable qui peut prendre successivement toutes les valeurs réelles possibles, alors, lorsqu'à chacune de ses valeurs correspond une valeur unique de la grandeur indéterminée w , l'on dit que w est une fonction de z , et, tandis que z parcourt d'une manière continue toutes les valeurs comprises entre deux valeurs fixes, lorsque w varie également d'une manière continue, l'on dit que cette fonction w est continue dans cet intervalle. Cette définition ne stipule aucune loi entre les valeurs isolées de la fonction, c'est évident, car lorsqu'il a été disposé de cette fonction pour un intervalle déterminé, le mode de son prolongement en dehors de cet intervalle reste tout à fait arbitraire. [8, p. 1-2]

Pour les fonctions à variables réelles, Riemann souligne immédiatement la possibilité de travailler avec des fonctions arbitraires par la possibilité d'en trouver une expression analytique :

¹⁷ Par exemple, celle donnée ici par Dirichlet (continue en aucun point), ou le « monstre » de Weierstrass qui est continue mais n'est différentiable en aucun point. Voyez Volkert, Klaus, « Le mathématique et le pathologique », *Philosophia Scientiæ* 12(2), p. 65-74, 2008.

[D]es recherches modernes ont fait voir qu'il existe des expressions analytiques par lesquelles toute fonction continue peut être représentée dans un intervalle donné. Il est donc indifférent de définir la dépendance de la grandeur w de la grandeur z comme donnée arbitrairement ou bien comme reposant sur des opérations de calcul déterminées. Les deux définitions sont équivalentes par suite des théorèmes auxquels nous venons de faire allusion. [Ibid., p. 2]

Pour les fonctions à variables complexes, Riemann propose « sans en démontrer la légitimité générale et suffisante pour la définition d'une dépendance exprimable par les opérations du calcul » [ibid.], la définition suivante :

Une grandeur variable complexe w est dite une fonction d'une autre grandeur variable complexe z lorsqu'elle varie avec elle de telle sorte que la valeur de la dérivée $\frac{dw}{dz}$ est indépendante de la valeur de la différentielle dz . [Ibid., p. 3]

Il est donc important pour Riemann de distinguer entre « expression » et « fonction » pour bien considérer des fonctions *arbitraires* (en particulier, qui ne sont pas données par une expression analytique), afin d'assurer la généralité du concept. Cette volonté fait partie de ce qui est souvent appelé « l'approche conceptuelle » de Riemann poursuivant les efforts de Dirichlet pour fonder les recherches sur des concepts plus abstraits, plus généraux, et contourner le recours au calcul.

Dans l'*Habilitation* de Riemann, et notamment dans sa nouvelle définition de l'intégrale, on retrouve une volonté similaire de généralité. Bien entendu, les fonctions considérées ne sont pas données par des expressions analytiques – mais c'était déjà le cas chez Fourier et Cauchy. Plus crucialement, l'approche de Riemann est explicitement motivée par un désir de généralité des définitions fondamentales : donner une définition qui soit valide et puisse s'appliquer à tous les cas possibles sans exception. L'approche de Cauchy permet d'obtenir facilement l'intégrabilité des fonctions continues par morceaux, ce sur quoi se base Dirichlet en 1829. L'idée sous-jacente était que cela suffisait pour décrire « tous les cas de la nature » [9, p. 237]. Riemann partage cette idée mais considère qu'il est tout de même important de considérer les fonctions qui ne vérifient pas le critère donné par Dirichlet. Il donne deux raisons :

En premier lieu, comme Dirichlet lui-même le remarque à la fin de son Mémoire, cet objet est intimement lié avec les principes du Calcul infinitésimal, et peut servir à porter dans ces principes une plus grande clarté et une plus grande précision. Sous ce rapport, l'étude de cette question offre un intérêt immédiat. Mais, en second lieu, l'application des séries de Fourier n'est pas restreinte aux seules recherches physiques ; on l'emploie aussi maintenant avec succès dans une branche des Mathématiques pures, la Théorie des nombres, et ici ce sont précisément les fonctions dont Dirichlet n'a pas étudié la représentation en série trigonométrique qui semblent être les plus importantes. [Ibid., p. 238]

LA DÉFINITION DE L'INTÉGRALE DE RIEMANN

La première étape du travail de Riemann sur les séries de Fourier est de considérer les conditions d'intégrabilité des fonctions. Il se penche sur « l'incertitude qui règne encore sur quelques points fondamentaux de la théorie des intégrales définies », en étudie la définition et en questionne la généralité. Pour cela, Riemann commence par reprendre la définition de la

somme de Cauchy et la modifie en ce que nous appelons aujourd'hui « somme de Riemann ». En considérant « une série de valeurs » $x_1 \dots x_{n-1}$ entre a et b , en notant δ_i les sous-intervalles de tailles variables $x_{i+1} - x_i$ (avec $x_0 = a$ et $x_n = b$), et ε_i des nombres positifs plus petits que 1, la somme de Riemann est

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1 \delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2 \delta_2) + \dots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n \delta_n).$$

Alors :

Si [la somme de Riemann] a la propriété, de quelque manière que les δ et les ε puissent être choisis, de s'approcher indéfiniment d'une limite fixe A , quand les δ tendent tous vers zéro, cette limite s'appelle la valeur de l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x) dx.$$

[*ibid.*, p. 240]

Cette définition ne s'éloigne donc pas beaucoup de celle de Cauchy. Riemann reprend ensuite la définition de l'intégrale définie singulière que nous avons présentée ci-dessus, mais exclut le reste du travail de Cauchy sur les intégrales définies singulières :

*D'autres extensions, dues à Cauchy, de la définition de l'intégrale définie dans le cas où cette définition ne découle pas des notions fondamentales qui précèdent, peuvent être commodes pour certaines classes de recherches, mais elles ne sont pas généralement admises, et l'arbitraire qui préside aux définitions de Cauchy suffirait seul à les empêcher d'être universellement acceptées. [*ibid.*, p. 240-241]*

Ce qui intéresse alors Riemann, c'est de comprendre « l'étendue et la limite de la définition précédente » :

*Posons-nous cette question : dans quels cas une fonction est-elle susceptible d'intégration ? dans quels cas ne l'est-elle pas ? [*ibid.*, p. 241]*

Riemann étudie alors les « plus grandes oscillations » de la fonction dans chaque sous-intervalle entre a et b , qu'il note D_i :

Alors la somme $\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \dots + \delta_n D_n$ doit devenir infiniment petite avec les quantités δ . Supposons que la plus grande valeur que cette somme puisse prendre, quand tous les δ sont plus petits que d , soit Δ ; Δ sera alors une fonction de d , diminuant et devenant infiniment petite avec d . Maintenant, si la somme totale des intervalles pour lesquels les oscillations sont plus grandes qu'une quantité n est s , la contribution de ces intervalles à la somme

$$\delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \dots + \delta_n D_n$$

sera évidemment égale ou supérieure à σs . On aura donc

$$\sigma s \leq \delta_1 D_1 + \delta_2 D_2 + \dots + \delta_n D_n \leq \Delta \text{ avec } s \leq \frac{\Delta}{\sigma}$$

[*ibid.*]

où $\frac{\Delta}{\sigma}$ peut être rendu infiniment petit. Cela permet alors d'énoncer la condition d'intégrabilité suivante :

Pour que la somme S converge, quand tous les δ deviennent infiniment petits, il faut non seulement que la fonction demeure finie, mais encore que la somme totale des intervalles pour lesquels les oscillations sont plus grandes que σ , quel que soit σ , puisse être rendue infiniment petite par un choix convenable de d . [Ibid., p. 241-242]

Et sa réciproque :

Si la fonction $f(x)$ est toujours finie, et si, par le décroissement indéfini de toutes les quantités δ , la grandeur totale s des intervalles dans lesquels les oscillations de la fonction sont plus grandes qu'une quantité donnée σ peut toujours être rendue infiniment petite, la somme S converge quand tous les δ tendent vers zéro. [Ibid., p. 242]

Une interprétation moderne et intuitivement facile à saisir de ce qu'écrivait Riemann, ici, est que chaque partition de l'intervalle d'intégration permet d'approximer la fonction par une fonction en escalier. Alors, si les écarts entre les différentes fonctions en escalier restent raisonnables lorsque les sous-intervalles tendent vers 0, la fonction est intégrable selon Riemann. Autrement dit, la fonction doit être bornée sur l'intervalle d'intégration $[a, b]$ et intégrable sur tout sous-intervalle de $[a, b]$. Soulignons que la définition de Riemann ne fait aucune référence à la continuité des fonctions.

Pour les « intégrales définies singulières », Riemann doit « étendre » sa définition et traiter ces intégrales séparément¹⁸ :

Si l'on étend [...] la notion d'intégrale aux cas où la fonction devient infinie, pour que l'intégration soit possible, il faudra encore que la seconde des conditions trouvées ci-dessus soit satisfaite ; mais à la place de la première, à savoir que la fonction demeure toujours finie, il faudra faire intervenir la suivante : que la fonction ne devienne infinie que lorsque son argument s'approche de certaines valeurs particulières, et que l'on obtienne une valeur limite parfaitement déterminée quand les limites des intégrations s'approchent indéfiniment de ces valeurs pour lesquelles la fonction devient infinie. [Ibid., p. 242-243]

Il propose ensuite d'appliquer sa définition aux fonctions ayant un nombre infini de discontinuités. Pour cela, il n'a pas non plus besoin de la continuité par morceaux et considère des fonctions bornées pouvant avoir des discontinuités dans tout intervalle arbitrairement petit. Pour mieux comprendre cette idée, Riemann propose de considérer l'exemple suivant. Considérons tout d'abord la fonction qui à x associe « l'excès de x sur le nombre entier le plus voisin ou zéro si x est à égale distance des deux nombres entiers les plus voisins. ». Riemann la note (x) mais pour des raisons de lisibilité, nous allons la noter $e(x)$. Elle est définie par

$$e(x) = \begin{cases} x - m, & \text{si } x \neq \frac{n}{2} \text{ avec } |x - m| < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{si } x = \frac{n}{2} \end{cases}$$

où m est un entier et n est un entier impair. Riemann définit ensuite la fonction :

¹⁸ Ce n'est pas le cas avec l'intégrale de Lebesgue, que nous évoquerons brièvement à la fin de ce chapitre.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e(nx)}{n^2}.$$

Cette fonction est discontinue en tout point $x = \frac{p}{2n}$ avec p et n premiers entre eux. En effet, la série est convergente pour tout x , et aux points $x = \frac{m}{2n}$ sa limite à droite est :

$$f(x) - \frac{1}{2n^2} \sum_i \frac{1}{(2i+1)^2} = f(x) - \frac{\pi^2}{16n^2}$$

et celle à gauche est :

$$f(x) + \frac{1}{2n^2} \sum_i \frac{1}{(2i+1)^2} = f(x) + \frac{\pi^2}{16n^2}.$$

Il y a donc un nombre infini de discontinuités (en fait, les points de discontinuité forment un ensemble dense) et pourtant, cette fonction est intégrable, comme l'explique Riemann :

Cette fonction est donc discontinue pour toute valeur rationnelle de x qui, réduite à sa plus simple expression, a un dénominateur pair ; elle est donc discontinue un nombre infini de fois dans un intervalle, si petit qu'il soit, mais de telle manière que le nombre des variations brusques qui sont supérieures à une grandeur donnée est toujours fini. Elle est pourtant susceptible d'intégration. [Op. cit., p. 244]

Pourquoi cette fonction est-elle intégrable ? Parce que, d'une part, on peut toujours trouver une limite pour tout x , et d'autre part, « le nombre des variations brusques qui sont plus grandes qu'une quantité donnée σ est toujours fini » [ibid.]. Il est donc possible d'appliquer la définition donnée par Riemann, car on peut trouver un d tel que la grandeur totale des intervalles dans lesquels se situent ces oscillations soit infiniment petite. Ainsi, nous dit Riemann :

Il importe de remarquer que les fonctions qui n'ont pas un nombre infini de maxima et de minima (auxquelles d'ailleurs n'appartient pas la fonction que l'on vient de considérer) possèdent toujours ces deux propriétés là où elles ne deviennent pas infinies, et, par suite, qu'elles sont susceptibles d'une intégration. [ibid., p. 244]

Puisque Cauchy ne considérait que les fonctions continues par morceaux, et que la définition de Riemann se débarrasse de cette restriction, il y a plus de fonctions intégrables au sens de Riemann qu'au sens de Cauchy – les fonctions Cauchy-intégrables sont même strictement comprises dans les fonctions Riemann-intégrables. Cependant, il peut être difficile, au premier abord, de comprendre *quelles* fonctions sont intégrables au sens de Riemann. Mentionnons seulement que toutes les fonctions réglées, c'est-à-dire les fonctions qui sont limite uniforme de fonctions en escalier, sont intégrables au sens de Riemann, mais ce ne sont pas les seules.

L'approche de Riemann sur les intégrales est fortement influencée par le *but* de son travail. En effet, comme l'explique l'historien Jeremy Gray [15 p. 157-158], Riemann cherchait à trouver des fonctions ayant toujours une valeur moyenne sur leur intervalle de définition tout en oscillant fortement, voire en étant discontinues. Ainsi, son intégrale peut être vue comme le calcul d'une moyenne mobile (par le théorème des valeurs intermédiaires). Une fonction peut donc être intégrable tout en n'étant pas définie en certains points et même en ayant « beaucoup » de points de discontinuités et d'oscillations – c'est le cas de l'exemple ci-dessus.

RÉCEPTION ET GÉNÉRALISATION DE L'INTÉGRALE DE RIEMANN

Esquissons les grandes lignes de la réception des travaux de Riemann sur l'intégrale de fonctions à variables réelles¹⁹. L'intégrale de Riemann est restée la définition de référence pour le calcul intégral jusqu'aux travaux de Lebesgue, après avoir été affinée par Gaston Darboux (1842-1917).

On l'a vu, la question des fondements de l'analyse est importante pour comprendre les changements dans la définition de la notion d'intégrale. Cette question a été abordée différemment selon les pays. En Allemagne, la question de ce que l'on appelle aujourd'hui « l'arithmétisation de l'analyse » est importante et bien connue, traitée par aussi bien par Weierstrass à Berlin que par Richard Dedekind (1831-1916) à Braunschweig et Georg Cantor (1845-1918) à Halle.

En Italie, Ulisse Dini (1845-1918) publie en 1877 *Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali* [Fondements pour la théorie des fonctions de variables réelles] dans lequel il considère les questions liées à la continuité des fonctions, les fonctions dérivables et intégrables, la définition de l'intégrale définie de Riemann et Darboux (que nous abordons ci-dessous) – un ouvrage unique à l'époque. Giuseppe Peano (1858-1932) continue dans cette direction avec *Calcolo Differenziale e Principii di Calcolo Integrale* [Calcul différentiel et principes du calcul intégral] (1884) et les *Lezioni di Analisi Infinitesimale* [Leçons d'analyse infinitésimale] (1893).

En France, la réception de ces questions est difficile, voire inexistante, à l'exception de Darboux jusqu'à la fin des années 1880. En 1875, dans le « Mémoire sur les fonctions discontinues » publié dans les *Annales de l'École Normale Supérieure*, Darboux introduit notamment la notion que nous appelons « somme de Darboux », qui permet d'affiner la définition de l'intégrale de Riemann. La démarche de Darboux est explicitement une démarche de rigorisation :

Dans le travail qu'on va lire, je reprends, en donnant tous les développements nécessaires, la définition de l'intégrale définie d'après Riemann, et je montre comment cette définition doit conduire à une infinité de fonctions continues n'ayant pas de dérivée. [...] Au risque d'être trop long, j'ai tenu avant tout, sans y réussir peut-être, à être rigoureux. Bien des points, qu'on regarderait à bon droit comme évidents ou que l'on accorderait dans les applications de la science aux fonctions usuelles, doivent être soumis à une critique rigoureuse dans l'exposé des propositions relatives aux fonctions les plus générales. Par exemple, on verra qu'il existe des fonctions continues qui ne sont ni croissantes ni décroissantes dans aucun intervalle, qu'il y a des fonctions discontinues qui ne peuvent varier d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires. On conçoit qu'en présence de propositions aussi singulières on éprouve le besoin d'apporter la plus grande rigueur dans les déductions et de n'admettre que les propositions les mieux démontrées. [3, p. 57-59]

Voici une version un peu modernisée de la définition de Darboux : pour une fonction réelle bornée f , dans un intervalle $[a, b]$, on considère une subdivision $s = (x_0, \dots, x_n)$ et on pose :

¹⁹ Pour des détails sur les développements de la théorie de l'intégration et de la mesure entre Riemann et Lebesgue, nous renvoyons à Hochkirchen Thomas, « Theory of Measure and Integration from Riemann to Lebesgue », *A History of Analysis*. Jahnke, H. N. (éd.). Providence/London : AMS/LMS, p. 261-290, 2003 ; ainsi qu'à [17].

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \text{ et } M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$d(f, s) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) \text{ et } D(f, s) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$$

alors si $\sup_s d(f, s) = \inf_s D(f, s)$ (ce que l'on appelle respectivement somme inférieure et supérieure de Darboux), la fonction f est intégrable (au sens de Riemann) et :

$$\int_a^b f(x) dx = \sup_s d(f, s) = \inf_s D(f, s).$$

C'est cette définition que l'on utilise le plus souvent aujourd'hui dans les cours universitaires sous le nom d'intégrale de Riemann. Pourtant, ce travail de Darboux a d'abord été accueilli froidement par la communauté mathématique française²⁰. Plus généralement, la réception des travaux sur les fondements de l'analyse est lente en France. L'historienne Hélène Gispert le montre bien dans [14], notamment par la comparaison entre les différentes éditions du *Cours d'Analyse de l'École polytechnique* de Camille Jordan (1838-1922)²¹. Dans la parution de 1882, Jordan n'inclut aucun des travaux sur les fondements de l'analyse – qu'il connaît pourtant au moins en partie, notamment la définition de l'intégrale de Riemann. De ce point de vue, il suit les pratiques des autres mathématiciens français. Dans le tome de 1887, il « corrige » certains de ces choix en ajoutant une Note titrée « Sur quelques points de la théorie des fonctions », dans laquelle il reprend notamment la définition des fonctions intégrables et de l'intégrale de Riemann, en mentionnant que cela permet d'étendre la notion d'intégrale définie au-delà des fonctions continues. Enfin, l'édition de 1893 est totalement remaniée, et prenant en compte de nombreux travaux sur les fondements de l'analyse, y compris en théorie des ensembles. Jordan y donne une définition de la notion de fonction intégrable utilisant les sommes de Darboux. Cette édition marque un tournant dans l'histoire des fondements de l'analyse en France.

Terminons en évoquant (trop brièvement) l'intégrale introduite par Lebesgue qui généralise l'intégrale de Riemann et est définie dans les *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* de 1904. Lebesgue situe explicitement sa démarche dans une volonté de pouvoir traiter plus de fonctions que ce que permet l'intégrale de Riemann :

On peut se demander, il est vrai, s'il y a quelque intérêt à s'occuper de telles complications et s'il ne vaut pas mieux se borner à l'étude des fonctions qui ne nécessitent que des définitions simples. Cela n'a guère que des avantages quand il s'agit d'un Cours élémentaire ; mais, comme on le verra dans ces Leçons, si l'on voulait toujours se limiter à la considération de ces bonnes fonctions, il faudrait renoncer à résoudre bien des problèmes à énoncés simples posés depuis longtemps. C'est pour la résolution de ces problèmes, et non par amour des complications, que j'ai introduit dans ce Livre une définition de l'intégrale plus générale que celle de Riemann et comprenant celle-ci comme cas particulier. [5, p. ix-x]

Du point de vue de son auteur, l'intégrale de Lebesgue est « plus simple » car elle « met en évidence les propriétés les plus importantes de l'intégrale, tandis que la définition de Riemann ne met en évidence qu'un procédé de calcul » [*ibid.*, p. x].

²⁰ Sur les difficultés rencontrées par Darboux pour communiquer avec les mathématiciens français sur ces questions, nous renvoyons à également à [14].

²¹ Sur l'enseignement de l'analyse en France, voyez le chapitre xi.

L'un des intérêts centraux de Lebesgue se trouve dans le théorème fondamental du calcul intégral. Rappelons informellement les deux formulations de ce théorème :

- Si F est une primitive de f , alors $F' = f$.
- Toute primitive de f est de la forme $\int_a^x f + C$.

Or des fonctions dérivables sur $[a, b]$ dont la dérivée est bornée mais n'est pas Riemann-intégrable avaient été découvertes. L'objectif de Lebesgue est de lever cette restriction de la notion d'intégrabilité pour retrouver le théorème fondamental du calcul intégral : si F est dérivable sur $[a, b]$ et si sa dérivée f est bornée sur $[a, b]$, alors, pour tout x dans $[a, b]$, elle est Lebesgue-intégrable sur $[a, x]$ et :

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Pour définir son intégrale (dans le dernier chapitre de son ouvrage), Lebesgue choisit un point de vue axiomatique :

[N]ous nous proposons d'attacher à toute fonction bornée $f(x)$, définie dans un intervalle fini (a, b) , positif, négatif ou nul, un nombre fini, $\int_a^b f(x)dx$ et qui satisfait aux conditions suivantes :

1. *Quels que soient a, b, h , on a $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x-h)dx$;*

2. *Quels que soient a, b, c , on a*

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = 0 ;$$

3. *$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \varphi(x)dx$;*

4. *Si l'on a $f \geq 0$ et $b > a$, on a aussi $\int_a^b f(x)dx \geq 0$;*

5. *On a $\int_0^1 1 \times dx = 1$;*

6. *Si $f_n(x)$ tend en croissant vers $f(x)$, l'intégrale de $f_n(x)$ tend vers celle de $f(x)$. [Ibid., p. 98-99]*

Pour comprendre intuitivement les spécificités liées au calcul de l'intégrale de Lebesgue, nous nous contenterons de citer ces paroles rapportées :

Je dois payer une certaine somme, disait-il ; je fouille dans mes poches et j'en sors des pièces et des billets de différentes valeurs. Je les verse à mon créancier dans l'ordre où elles se présentent jusqu'à atteindre le total de ma dette. C'est l'intégrale de Riemann. Mais je peux opérer autrement. Ayant sorti tout mon argent, je réunis les billets de même valeur, les pièces semblables, et j'effectue le paiement en donnant ensemble les signes monétaires de même valeur. C'est mon intégrale. [13, p. 15]

Esquissons rapidement la définition de son intégrale²². Plutôt que de découper l'aire sous la courbe en rectangles dont la base est un sous-intervalle de l'intervalle d'intégration $[a, b]$, on découpe cette aire en rectangles « horizontaux » sur l'axe des y entre les bornes inférieures et supérieures de f sur $[a, b]$. Pour une fonction f réelle positive²³, on partitionne donc l'intervalle entre les bornes de f en sous-ensembles $[y_{i-1}, y_i]$ tels que, pour x dans $[a, b]$, $y_{i-1} \leq f(x) \leq y_i$. On peut ainsi considérer les intervalles des valeurs correspondantes de x , que l'on note E_i , et pour des η_i tels que $y_{i-1} \leq \eta_i \leq y_i$, les valeurs de f dans les E_i sont infiniment proches de η_i . Lebesgue définit alors la somme

$$\sum_{i=1}^n \eta_i m(E_i)$$

avec m la mesure de Lebesgue²⁴ définie sur les intervalles réels $[a, b]$ par $m([a, b]) = b - a$. On peut montrer que cette somme a une limite déterminée. Cette limite est l'intégrale de Lebesgue, que l'on note

$$\int f(x)m(dx).$$

Pour calculer l'intégrale de Lebesgue d'une fonction (mesurable) réelle quelconque, on définit $f^+(x) = f(x)$ si $f(x) \geq 0$ (et 0 sinon) et $f^-(x) = -f(x)$ si $f(x) \leq 0$ (et 0 sinon), et on a :

$$\int f(x)m(dx) = \int f^+(x)m(dx) - \int f^-(x)m(dx).$$

Toutes les fonctions Riemann-intégrables sont Lebesgue-intégrables, mais ce ne sont pas les seules. En particulier, la fonction donnée par Dirichlet, qui n'est pas Riemann-intégrable, est Lebesgue-intégrable sur tout intervalle borné²⁵.

CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons souhaité mettre en lumière l'émergence de la question de l'intégrabilité des fonctions et les réponses apportées à cette question, avec comme horizon l'intégrale dite de Riemann, la plus classique des intégrales que l'on enseigne aujourd'hui en premier cycle universitaire.

Trois acteurs précèdent la définition donnée par Riemann : Fourier, Cauchy et Dirichlet. C'est d'abord par les travaux de Fourier et en lien étroit avec un concept de fonction de plus en plus général et abstrait, qu'apparaît la question de l'intégrabilité. Lorsque Cauchy s'en empare, c'est une volonté d'insuffler une plus grande rigueur dans les fondements de l'analyse qui l'amène à proposer une définition uniforme du concept d'intégrale (définie et indéfinie) et prouver le théorème fondamental du calcul intégral. Le travail de Lejeune-Dirichlet poursuit ceux de Fourier et Cauchy : également intéressé par les liens entre l'intégrabilité et représentabilité des fonctions et par la rigourisation de l'analyse, il joue un rôle important dans l'extension du concept

²² Nous nous appuyons sur la présentation qu'en fait Lebesgue dans « Sur le développement de la notion d'intégrale », *Revue de Métaphysique et de Morale* 34 (2), p. 149-167, 1927.

²³ Plus précisément, une fonction *mesurable* positive mais cette définition nous amènerait trop loin.

²⁴ À nouveau, le détail de la théorie de la mesure nous amènerait trop loin. Mentionnons simplement qu'il s'agit d'une manière de mesurer les sous-ensembles d'un espace euclidien, qui coïncide avec la longueur dans \mathbb{R} , l'aire dans \mathbb{R}^2 et le volume dans \mathbb{R}^3 .

²⁵ Sur les développements de la théorie de l'intégration, on pourra consulter Michel, Alain, *Constitution de la théorie moderne de l'intégration*, Paris : Vrin, 1992.

de fonction et dans la réflexion sur les conditions d'intégrabilité d'une fonction arbitraire. C'est à ces trois acteurs que souhaite répondre Riemann, lorsqu'il interroge à son tour les liens entre intégrabilité et représentabilité des fonctions. Il introduit, dans son *Habilitation*, ce que nous appelons aujourd'hui l'intégrale de Riemann. Mais la définition proposée par Riemann rencontre rapidement des limites dépassées par les travaux des analystes français, en particulier Darboux et Lebesgue au début du xx^e siècle.

Nous avons donc pu voir le mouvement conceptuel qui accompagne la réflexion autour de la définition (rigoureuse) d'une intégrale. Il est intéressant de constater que c'est en partant de ou à travers l'étude d'objets difficiles et complexes, comme les séries trigonométriques, que sont affinées ou modifiées les définitions des objets et notions plus fondamentaux – comme la fonction ou l'intégrabilité. Si ce n'est pas un phénomène rare en mathématiques, cela n'en reste pas moins un exemple intéressant du mouvement conceptuel visant à préciser, assurer et parfois étendre les définitions de base de notions déjà connues.

BIBLIOGRAPHIE

SOURCES PRIMAIRES

- [1] Cauchy, Augustin-Louis, *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique, 1ère partie. Analyse algébrique*, Paris : Debure, 1821.
- [2] Cauchy, Augustin-Louis, (*Calcul infinitésimal*) *Résumé des leçons données à l'École royale polytechnique sur le calcul infinitésimal*, tome premier, Paris : Debure, 1823.
- [3] Darboux, Gaston, « Mémoire sur les fonctions discontinues », *Ann. École Norm. Sup. (2) IV* p. 57-112, 1875.
- [4] Fourier Jean-Baptiste-Joseph, *Théorie analytique de la chaleur*, Paris : Firmin Didot, père et fils, 1822.
- [5] Lebesgue, Henri, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Paris : Gauthier-Villars, 1904.
- [6] Lejeune-Dirichlet, Johann Peter Gustav, « Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre les limites données », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 4, p. 157-169, 1829.
- [7] Lejeune-Dirichlet, Johann Peter Gustav, « Über die Darstellung ganz wirrkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen », *Repertorium der Physik*, I, p. 157-174, 1837.
- [8] Riemann, Bernhard, « Principes fondamentaux pour une théorie générale des fonctions d'une grandeur variable complexe. », [10], p. 1-60, 1851.
- [9] Riemann, Bernhard, « Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique », [10], p. 225-279, 1854.
- [10] Riemann, Bernhard. *Œuvres mathématiques de Riemann*, éd. par H. Weber & R. Dedekind, trad. L. Laugel, Paris : Gauthier-Villars, 1898.
- [11] Riemann, Bernhard, *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*, 3e édition, R. Narasimhan (éd.), Heidelberg : Springer, 1990.

SOURCES SECONDAIRES

- [13] Denjoy, Arnaud, Felix, Lucienne & Montel, Paul, « Henri Lebesgue le savant, le professeur, l'homme », *L'Enseignement Mathématique* 3(1), p. 1-18, 1957.
- [14] Gispert, Hélène, « Sur les fondements de l'analyse en France », *Archive for History of Exact Sciences*, 28, 37-106, 1983.
- [15] Gray, Jeremy, *The Real and the Complex: A History of Analysis in the 19th Century*. Cham : Springer, 2015.
- [16] Gray, Jeremy, *Change and Variations: A History of Differential Equations to 1900*. Cham : Springer, 2021.
- [17] Lützen, Jesper, « The Foundation of Analysis in the 19th Century », *A History of Analysis*, Jahnke, H. N. (éd.). Providence/London : AMS/LMS, p. 155-196, 2003.
- [18] Mawhin, Jean, « Problème de Cauchy pour les équations différentielles et théories de l'intégration : influences mutuelles », *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, p. 231-246, 1987.