



**HAL**  
open science

# Applications de la Logique Quantique aux Sciences Cognitives

Yannis Delmas-Rigoutsos

► **To cite this version:**

Yannis Delmas-Rigoutsos. Applications de la Logique Quantique aux Sciences Cognitives. CREA, Ecole polytechnique. 1993. hal-03888178

**HAL Id: hal-03888178**

**<https://hal.science/hal-03888178v1>**

Submitted on 7 Dec 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

# Applications de la Logique Quantique aux Sciences Cognitives

YANNIS DELMAS-RIGOUTSOS\*

2 X 1993

## Résumé

Ce texte présente les résultats d'un travail effectué dans le cadre d'un stage de recherche pour le DEA DE SCIENCES COGNITIVES lors de l'année scolaire 1992–1993. Ce stage fut supervisé par Daniel Andler du CREA, Ecole Polytechnique.

Ce travail fait suite à une conférence donnée le 17 V 1993 à l'Ecole Normale Supérieure dans le cadre du séminaire *Philosophie & Mathématiques*. On pourra se reporter au compte-rendu de cette conférence, [9]<sup>(1)</sup>, pour une introduction générale de la Logique Quantique en rapport avec la Mécanique Quantique. Elle permet de mieux comprendre cette dernière et justifie l'essentiel de son formalisme sur des bases simples. Nous ne nous intéresserons ici ni aux applications pratiques de la Logique Quantique ni à la Mécanique Quantique.

Ce texte vise à introduire l'usage de la Logique Quantique en Sciences Cognitives en insistant fortement sur l'intérêt particulier de cette logique. Dans une première partie nous introduisons l'appareil technique de la Logique Quantique, sous les angles syntaxiques, sémantiques et algébriques. Dans une seconde partie, au niveau le plus bas de modélisation, nous montrons que la Logique Quantique a un débouché naturel dans l'expression du contenu d'un réseau de neurones formels, particulièrement dans le cas d'une structure en couches. Dans une troisième partie, montant d'un degré, nous nous appliquons à étendre l'idée de vecteur de population, actuellement l'objet d'un vif intérêt en Neurophysiologie, à des données plus abstraites. Enfin, dans notre dernière partie, nous nous risquons à étudier ce qui est considéré comme le niveau le plus haut d'organisation, celui des concepts et du langage.

### Domaines abordés :

Sciences Cognitives, Logique, Neurophysiologie, Philosophie de l'esprit, Linguistique, Intelligence Artificielle, Sémantique.

### Mots clefs (primaires) :

Logique Quantique, réseaux de neurones formels, vecteur de population, concepts, prototypes.

### Mots clefs (secondaires) :

Espaces de Hilbert, vision des couleurs, apprentissage symbolique, Logique Floue, négation du substantif, *dvandvas*.

---

\*. Elève en quatrième année à l'Ecole Normale Supérieure (45, rue d'Ulm ; 75230, Paris CEDEX 05 ; France). Téléphone à l'Ecole: [33] (1) 44.32.20.65, adresse électronique: [delmas@ens.fr](mailto:delmas@ens.fr), [Yannis.Delmas-Rigoutsos@ENS.fr](mailto:Yannis.Delmas-Rigoutsos@ENS.fr) (internet), ou [delmas@FRULM63](mailto:delmas@FRULM63) (bitnet).

(1). Les crochets droits renvoient à la bibliographie située à la fin du mémoire.



« [...] Une seule remarque, mon cher: en ce monde, il est très rare que l'on arrive à quelque chose avec un dilemme. Il y a autant de nuances variées entre les sentiments et les manières d'agir que de degrés entre un nez aquilin et un nez camus.

» Tu ne m'en voudra pas si, tout en admettant ton argumentation, j'essaie cependant de me faufiler entre les deux « ou bien ».

» Ou bien tu as l'espoir de conquérir Lotte, dis-tu, ou bien, tu ne l'as pas. Bon, dans le premier cas, pousse à la réalisation de ton désir, tâche de posséder l'objet de tes vœux; dans l'autre, montre-toi homme et efforce-toi de te libérer d'un sentiment malheureux, qui ne peut que consumer toutes tes forces. — Très cher ami, voilà qui est bien dit, et bien vite dit. [...]»

Lettre de Werther à Wilhelm (8 août 1771)

*Les souffrances du jeune Werther*

Goethe



# I. Prolégomènes

## § 1. Prologue

Avant toute chose nous désirons remercier Messieurs P. Cartier et M. Loi pour la confiance que ceux-ci nous ont accordé en nous proposant de donner une conférence sur la Logique Quantique au Séminaire *Philosophie & Mathématiques*. C'est, en effet, à M. Cartier que nous devons de nous être intéressé à ce sujet, celui-ci nous ayant demandé un "exposé propre de la Logique Quantique". C'est en ayant travaillé une année sur ce domaine, en parallèle avec notre DEA DE SCIENCES COGNITIVES, que nous sont apparus, de manière saillante, un certain nombre de points de rapprochement possibles entre les Sciences Cognitives et cette logique. Nous remercions M. D. Andler d'avoir bien voulu encadrer et superviser cette étude. Nous avons du développer, par ailleurs, l'aspect philosophique des choses afin d'atteindre une intuition intellectuellement décente pour notre conférence. Au-delà de celle-ci nous avons eu le temps d'approfondir cette réflexion et de l'enrichir à la source des cours suivis dans le cadre du DEA.

Comme la base de nos réflexions est formée d'abord de la substance de ces cours, qu'il nous soit permis de rendre grâce à mes professeurs et en tout premier lieu à M. E. Brézin qui fut notre professeur de Mécanique Quantique il y a quelques années. Dans les domaines abordés ici nous nous appuyons, par ordre alphabétique, sur Messieurs A. Berthoz, M. Imbert, P. Jacob, P. Rosenstiehl, J. Ségui et Madame S. Thiria.

Dans le domaine de la Logique Quantique nous tenons à remercier pour leurs encouragements et renseignements R. Omnès, J. Sallantin et J.-J. Szcżeciniarz même s'il est à souligner que nos directions d'étude ne sont pas nécessairement les mêmes; ni nos buts, du reste.

Mais il faut certainement saluer avant tout la clairvoyance de J. von Neumann, le très glorieux père de la Logique Quantique sans qui nous serions certainement passé à coté de cet intéressant objet.

## § 2. Introduction

La Logique Quantique fut introduite peu après la première formalisation unifiée de la Mécanique Quantique. Cette dernière fut présentée par John von Neumann en 1930, unifiant la mécanique des matrices proposée par Werner Heisenberg et la mécanique ondulatoire de Erwin Schrödinger (laquelle prolongeait les idées de Louis de Broglie). Von Neumann étant un logicien de tout premier plan, il entrevit l'intérêt général que pouvait présenter cette logique issue de la Mécanique Quantique. Son article, [25]<sup>(2)</sup>, constitue l'acte de naissance de la Logique Quantique. Le passage à l'état adulte est assuré par le théorème de représentation démontré par Piron, [17], que nous exposerons plus loin. A partir de ce moment la Logique Quantique est une logique à la fois axiomatisée et représentée géométriquement: elle peut servir de base à des raisonnements et à des modélisations sérieuses et intuitives.

Ce théorème de représentation justifie qu'on conçoive la Logique Quantique comme la logique des espaces vectoriels, de même que la Logique Classique peut être conçue comme la logique des ensembles. L'application aux réseaux de neurones formels semble donc aller de soi, comme nous le verrons, même si aucune référence à ce sujet ne nous est parvenue. Nous étudierons cette utilisation possible de la Logique Quantique en premier lieu. Nous verrons plus précisément que cette logique est adaptée pour formaliser toute situation dans laquelle les objets intéressants sont les éléments d'une géométrie projective. Le cas le plus banal de géométrie projective est constitué par la modélisation du repérage d'une direction dans l'espace qui nous entoure, il est alors naturel de penser au vecteur de population utilisé en Neurophysiologie pour modéliser ce repérage indiquant un choix de direction dans le cortex moteur. Nous nous proposons, dans un second lieu, de généraliser la notion de vecteur de population à la lumière de la Logique Quantique. Enfin, la Logique Quantique s'inscrit naturellement dans le cadre général de la logique, discipline donc un des buts principaux est de donner des outils de raisonnement et de modélisation de situations. Nous étudierons ainsi, en dernier lieu, dans quelle mesure la Logique Quantique peut s'appliquer, à haut niveau, à la compréhension des concepts "naturels".

---

(2). Les crochets droits renvoient à la bibliographie située à la fin du mémoire.



## II. Présentation rapide de la Logique Quantique

### § 1. Introduction : la logique des hilberts

Par définition, la Logique Quantique (concrète) est la logique sous-jacente aux faits décrits par la Mécanique Quantique considérés comme propositions. Il s'agit d'une logique propositionnelle dont les formules sont construites à l'aide de "et", "ou", "non" (par exemple) et de propositions de base correspondant à une mesure élémentaire. Techniquement une proposition de base est la donnée d'une observable (grandeur physique "mesurable") et d'un fermé de son spectre (une zone de valeur de la "mesure"). Ainsi « la particule  $s$  est dans tel domaine d'espace  $V$  à tel instant  $t$  » est une proposition de base. Un exemple de proposition plus complexe est donné par « à l'instant  $t$ , la particule  $s$  a une position  $\vec{x}$  à  $\delta X$  près et une vitesse  $\vec{v}$  » (c'est la conjonction de « à l'instant  $t$ , la particule  $s$  a une position  $\vec{x}$  à  $\delta X$  près » et de « à l'instant  $t$ , la particule  $s$  a une vitesse  $\vec{v}$  » qui sont toutes deux des propositions de base). Dans la formalisation habituelle de la Mécanique Quantique les états possibles du système sont représentés par des vecteurs normalisés d'un espace de Hilbert (on parle, dans ce cas, de *kets*), ou, ce qui nous intéresse plus ici, par ses droites. Les observables sont représentées par des opérateurs hilbertiens sur cet espace, les états correspondant à une valeur  $\lambda$  de l'observable étant les vecteurs propres de cet opérateur de valeur propre  $\lambda$ . Ainsi, dans ce modèle, les propositions de la<sup>(3)</sup> Logique Quantique concrète correspondent aux sous-espaces de Hilbert de l'espace de Hilbert de référence.

Notre propos n'est pas ici de comprendre la structure physique de l'univers mais plutôt de dégager un outil logique de cet objet particulier : il faut faire un effort d'abstraction. D'une manière générale les logiques les plus intéressantes admettent trois type d'approches :

- L'approche syntaxique, qui consiste à édicter des règles et des axiomes, qui, moyennant une notion standard de démonstration, permettent de définir une classe de théorèmes et relations.
- L'approche algébrique, qui consiste à traiter les propositions comme des variables (propositionnelles) valant sur un (type de) structure algébrique dont les opérateurs sont les connecteurs et les relations la conséquence et l'équivalence<sup>(4)</sup>.
- Enfin, l'approche sémantique, qui consiste à présenter les modèles d'un type de logique auquel on s'intéresse.

Une logique est considérée comme réellement intéressante quand elle dispose d'une présentation algébrique ou syntaxique mise en relation avec une représentation sémantique non-*ad hoc*. Nous parlerons de la Logique Untel, avec un article défini et des majuscules, quand nous désignerons un ensemble de techniques et d'objets correspondants les uns aux autres (et relevant éventuellement de plusieurs approches) ; nous utiliserons inversement « une logique untel », avec l'article indéfini et sans majuscule, pour désigner des structures ou des systèmes mettant en œuvre la Logique Untel.

Nous nous proposons, dans cette partie, de définir la Logique Quantique selon chacune de ces trois approches en nous basant plus particulièrement sur l'approche algébrique. Cette première approche nous permet de définir une logique quantique comme un treillis orthomodulaire, notion similaire aux algèbres de Boole de la Logique Classique<sup>(5)</sup>. Pour ce qui est de l'approche syntaxique, la Logique Classique admet de nombreuses présentations de systèmes techniquement intéressants ; aucun système ne semble pourtant satisfaisant dans le cas de la Logique Quantique. Nous nous contenterons de donner à ce sujet deux systèmes, dont un original, qui peuvent présenter un intérêt pour le maniement de la Logique Quantique. Enfin, l'approche sémantique s'appuiera sur une représentation géométrique (voire picturale) des propositions, comme dans le cas de la Logique Classique.

---

(3). Le fait qu'*a priori* plusieurs espaces de référence interviennent semble demander de considérer *des* logiques quantiques concrètes. En fait tous les espaces de Hilbert se plongent dans un seul suffisamment gros, qu'il suffit en général de considérer. On dit ainsi l'espace de Hilbert et *la* Logique Quantique concrète.

(4). Dans ce traitement, l'équivalence logique correspond, dans la quasi-totalité des cas, à la relation d'égalité et la conséquence à une relation d'ordre, comme nous le verrons plus loin.

(5). Quand nous parlons de Logique Classique nos propos s'entendent de la Logique Classique Propositionnelle, même si certains se prolongent aux versions modales ou quantifiées (logique des prédicats).



## § 2. Approche algébrique : les treillis orthomodulaires

Ce paragraphe est très technique, il vise à présenter de manière précise les propriétés des Logiques Quantiques. Il est possible de le survoler en première lecture mais reste préférable de ne pas le passer complètement.

### a. Définitions

#### $\alpha$ . Les ordres avec extrémités

Dans ce mémoire les propositions seront, en général, désignées par des minuscules italiennes du début de l'alphabet :  $a, b, c, \dots$ . Ce sont des éléments d'un espace  $L$ . Comme dans les algèbres de Boole, nous noterons 0 pour « faux » et 1 pour « vrai ». Les autres notations seront introduites au fur et à mesure. Les résultats présentés ici se trouvent essentiellement dans [25], le début reprenant la théorie classique des treillis (cf. [5]).

Dans la formalisation algébrique classique d'une logique la relation la plus intéressante est certainement la conséquence, le fait d'entraîner. Nous la noterons  $\leq$ , ainsi  $a \leq b$  se lit «  $a$  entraîne  $b$  » ou «  $b$  est conséquence de  $a$  ». Cette notation se justifie par le fait que l'on suppose toujours les relations suivantes qui définissent  $\leq$  comme un *ordre —partiel—* (sur  $L$ ) :

$$\text{S1 } a \leq a \text{ (réflexivité),}$$

$$\text{S2 } a \leq b \leq c \Rightarrow a \leq c \text{ (transitivité),}$$

$$\text{S3 } a \leq b \leq a \Rightarrow a = b \text{ (antisymétrie).}$$

La dernière relation affirme le fait essentiel que nous travaillons à équivalence près. Ainsi  $a = b$  veut dire que «  $a$  équivaut à  $b$  ». C'est avec ce sens que nous entendrons l'égalité dans toute la suite.

Un fait fondamental doit être noté sur la Logique Quantique : on désire qu'elle soit le plus près possible de la Logique Classique. La raison physique de ceci est que dans les cas d'interactions importantes la mécanique devient classique ainsi que sa logique. Pour notre propos nous nous contenterons de souligner que la Logique Quantique est obtenue par la plus petite modification possible de la Logique Classique, dans un certain sens. On entend donc conserver les propriétés essentielles du « vrai » et du « faux » classique, par exemple :

$$\text{S4 } 0 \leq a \leq 1.$$

Ce qui se traduit par « le faux entraîne tout » et « tout entraîne le vrai ». En terme d'ordre, 0 est le plus petit objet et 1 le plus grand.

#### $\beta$ . Les treillis

Pour enrichir notre ensemble de propositions,  $L$ , nous avons besoin d'une conjonction et d'une disjonction. On va donc munir  $L$  d'une structure de *treillis* avec comme *infimum* le « et », noté  $\wedge$ , et comme *supremum* le « ou », noté  $\vee$ . Ceci correspond aux axiomes suivants :

$$\text{S5a } a \wedge b \leq a,$$

$$\text{S5b } a \wedge b \leq b,$$

$$\text{S5c } c \leq a \text{ et } c \leq b \Rightarrow c \leq a \wedge b;$$

$$\text{S6a } a \vee b \geq a,$$

$$\text{S6b } a \vee b \geq b,$$

$$\text{S6c } c \geq a \text{ et } c \geq b \Rightarrow c \geq a \vee b.$$

En termes d'ordre,  $a \wedge b$  est le plus grand élément inférieur à  $a$  et  $b$  à la fois. En termes logiques «  $a$  et  $b$  » est la plus faible proposition qui entraîne à la fois  $a$  et  $b$ . De même  $a \vee b$  est le plus petit élément supérieur à  $a$  et  $b$  à la fois et «  $a$  ou  $b$  » est la plus forte proposition entraînée par  $a$  et  $b$ .

**Proposition II.2.1** *Dans un treillis  $L$  les relations suivantes sont toujours vraies :*

$$L1 \quad a \wedge a = a,$$

$$L2 \quad a \wedge b = b \wedge a, \text{ et } a \vee b = b \vee a,$$

$$L3 \quad a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c, \text{ et } a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$$

$$L4 \quad a \wedge (a \vee b) = a \vee (a \wedge b) = a.$$

On retrouve dans ce cadre les équivalences classiques définissant la conséquence par l'égalité et le « et » (ou le « ou ») :

**Proposition II.2.2** *Dans un treillis  $L$  on a équivalence entre :*

- $a \leq b$ ,
- $a \wedge b = a$ ,
- et  $a \vee b = b$ .

Avec ces définitions les sous-espaces d'un espace vectoriel vont constituer un treillis. La relation  $\leq$  correspondra à l'inclusion notée  $\subset$  ou  $\subseteq$ . Si l'on note par des  $h$  les sous-espaces d'un espace  $\mathcal{H}$ ,

$$a \leq b \quad \text{correspond à} \quad h \leq h'.$$

De même la conjonction correspond à l'intersection :

$$a \wedge b \quad \text{correspond à} \quad h \cap h',$$

et la disjonction à la somme :

$$a \vee b \quad \text{correspond à} \quad h + h'.$$

Remarquons enfin que

**Proposition II.2.3** *Les sous-ensembles  $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$  d'un treillis  $L$  sont des treillis pour la relation  $\leq$  induite avec  $a$  comme plus petit élément (zéro) et  $b$  comme plus grand (un) ; ce sont des sous-treillis de  $L$ .*

### $\gamma$ . Les treillis complémentés

Nous aurons également besoin de définir une négation sur notre treillis qui corresponde à la négation logique. Nous la noterons ici  $\cdot^\perp$  pour une raison qui apparaîtra plus clairement au moment de la géométrisation. Un treillis est dit *complémenté* (ou *orthocomplémenté*) si on a :

$$L7.1 \quad a^{\perp\perp} = a,$$

$$L7.2 \quad a \wedge a^\perp = 0, \text{ et } a \vee a^\perp = 1,$$

$$L7.3 \quad a \leq b \text{ implique } a^\perp \geq b^\perp,$$

$$L7.4 \quad (a \wedge b)^\perp = a^\perp \vee b^\perp, \text{ et } (a \vee b)^\perp = a^\perp \wedge b^\perp.$$

Notons que L7.4 et L7.2b se déduisent des autres relations. Ces lois disent respectivement que :

L7.1 La négation de la négation de  $a$  est  $a$ .

L7.2 La conjonction de  $a$  et de sa négation est fausse. Dualement, la disjonction de  $a$  et de sa négation est toujours vraie. Ceci est essentiellement le tiers exclus.

L7.3 La négation renverse la relation de conséquence. Ceci est essentiellement la contraposition.

L7.4 Le « et » et le « ou » sont duals vis à vis de la négation.

Pour les sous-espaces d'un espace vectoriel il n'y a pas de notion canonique de complément, il faut pour cela faire intervenir un produit scalaire. On retrouve ici la notion d'espace de Hilbert qui est essentiellement un espace vectoriel muni d'une notion d'orthogonalité. Le complément qui nous intéresse sera précisément l'orthogonal. Un sous-espace  $h$  d'un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  est un sous-espace vectoriel fermé (c'est à dire tel que  $h^{\perp\perp} = h$ ).

On a alors la table de correspondance suivante :

notation	treillis complémenté	sous-espaces de Hilbert	logique
$\leq$	inférieur à	inclus dans	conséquence (« entraîne »)
$\wedge$	<i>infimum</i>	intersection	conjonction (« et »)
$\vee$	<i>supremum</i>	somme fermée	disjonction (« ou »)
$\cdot^\perp$	(ortho)complément	orthogonal	négation (« non »)

## δ. Les algèbres de Boole

Le cas le plus courant de treillis complémenté est celui des algèbres de Boole. Celles-ci correspondent à la Logique Classique : des variables  $a, b, c, \dots$  forment un système de Logique Classique si l'algèbre  $B = \langle a, b, \dots \rangle$  qu'ils engendrent (avec  $\wedge, \vee$  et  $\cdot^\perp$ ) est une algèbre de Boole.

**Proposition II.2.4** Dans un treillis les axiomes suivants, L6a et L6b, sont équivalents et définissent la relation de distributivité.

$$L6a \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c),$$

$$L6b \quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

On peut voir assez facilement que :

**Proposition II.2.5** L6 et L7.2 impliquent L7, et définissent une algèbre de Boole.

Nous voulons une logique moins contrainte que la Logique Classique, les diverses propositions ne formeront donc pas en général des algèbres de Boole. Cependant on veut pouvoir reconnaître facilement ce cas ; c'est pourquoi nous poserons la définition suivante : dans un treillis complémenté un ensemble  $X$  est dit composé d'éléments *compatibles* si le treillis complémenté engendré par  $X, \langle X \rangle$ , est une algèbre de Boole. On note  $a \circ b$  le fait que  $a$  et  $b$  sont compatibles.

Nous aurons également besoin d'introduire un autre opérateur (qui prendra tout son sens avec la représentation géométrique), la composition : ( $a \circ b$  se lit «  $a$  rond  $b$  »)

$$a \circ b = a \wedge (a^\perp \vee b).$$

Remarquons tout d'abord le petit lemme suivant :

**Lemme II.2.1** Dans tout treillis orthocomplémenté les relations suivantes sont équivalentes :

1.  $a \circ b = b \circ a$ ,

$$2. a \circ b = a \wedge b,$$

$$3. a \circ b \leq b,$$

**Démonstration:** On a toujours  $a \wedge b \leq a \circ b \leq a$ , donc  $1 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2$  et, par symétrie de 1,  $2 \Rightarrow 1$ . **c.q.f.d.**

Si nous notons (pour cette proposition uniquement)  $a^+ = a$  et  $a^- = a^\perp$  et si  $\varepsilon$  désigne une variable sur  $\{+, -\}$ , nous pouvons voir que :

**Proposition II.2.6** Dans un treillis orthocomplémenté  $a$  et  $b$  sont compatibles si et seulement si  $a^{\varepsilon_1} \circ b^{\varepsilon_2} = b^{\varepsilon_2} \circ a^{\varepsilon_1}$  (qui vaut alors  $a^{\varepsilon_1} \wedge b^{\varepsilon_2}$ ), pour toutes valeurs de  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ .

**Démonstration:** Supposons que  $a^{\varepsilon_1} \circ b^{\varepsilon_2} = b^{\varepsilon_2} \circ a^{\varepsilon_1} = a^{\varepsilon_1} \wedge b^{\varepsilon_2}$  et engendrons  $B = \langle a, b \rangle$ .  $B \supset B_0 = \{0, 1, a^\perp, b^\perp, a^\pm \wedge b^\pm, a^\pm \vee b^\pm\}$ , le problème est de savoir si  $B$  contient d'autres éléments.  $(a^{\varepsilon_1} \wedge b^{\varepsilon_2}) \wedge a^\pm$  vaut  $(a^{\varepsilon_1} \wedge b^{\varepsilon_2})$  ou 0, de même  $(a^\pm \wedge b^\pm) \wedge b^\pm$ . Les cas de  $(a^\pm \vee b^\pm) \vee a^\pm$  et  $(a^\pm \vee b^\pm) \vee b^\pm$  sont similaires. Par ailleurs,  $(a^\varepsilon \vee b^\pm) \wedge a^\varepsilon = a^\varepsilon$ , et, par hypothèse,  $(a^{-\varepsilon_1} \vee b^{\varepsilon_2}) \wedge a^{\varepsilon_1} = a^{\varepsilon_1} \circ b^{\varepsilon_2} = a^{\varepsilon_1} \wedge b^{\varepsilon_2}$ . En étendant aux cas duals, on trouve bien que  $B = B_0$ . Notons qu'alors les autres cas de distributivité s'examinent un à un et sont triviaux. **c.q.f.d.**

### $\varepsilon$ . La loi de modularité

L'identité modulaire est la relation :

$$L5 \text{ si } a \leq b, \text{ alors } a \vee (c \wedge b) = (a \vee c) \wedge b.$$

Si un treillis la vérifie il est dit *modulaire*.

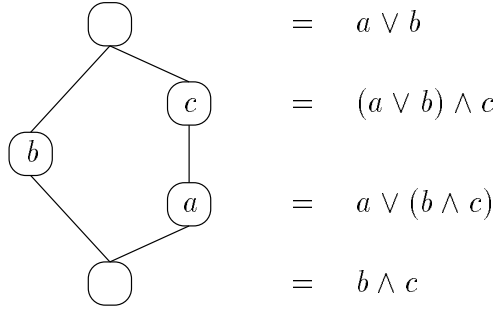
Sachant que dans tout treillis on a la relation :

$$L5a \text{ si } a \leq b, \text{ alors } a \vee (c \wedge b) \leq (a \vee c) \wedge b,$$

le problème est donc :

$$L5b=M \text{ si } a \leq b, \text{ alors } a \vee (c \wedge b) \geq (a \vee c) \wedge b.$$

Ceci revient à affirmer que l'on n'a pas, comme sous-treillis :



Une algèbre de Boole, en tant que treillis est toujours modulaire.

On peut voir (cf. [14]) que l'identité modulaire est conséquence de l'existence d'une fonction numérique "dimension",  $d$ , satisfaisant les axiomes suivants :

$$D1 \text{ si } a < b, \text{ alors } d(a) < d(b),$$

$$D2 \text{ } d(a) + d(b) = d(a \wedge b) + d(a \vee b).$$

Un espace de Hilbert de dimension finie est essentiellement un espace vectoriel de dimension finie muni d'une notion d'orthogonalité. Ceci ressemble beaucoup à l'image intuitive d'un espace vectoriel. Dans ces espaces une telle fonction existe, il s'agit précisément de la dimension ; le treillis des sous-espaces de Hilbert, qui est également le treillis des sous-espaces vectoriels sera donc modulaire. Ceci devient faux en dimension infinie pour une raison que nous ne détaillerons pas. Dans le cas classique cette fonction de dimension correspond à la taille des ensembles utilisées pour représenter les propositions, qu'il s'agisse de mesure, de probabilité ou de cardinal.

**στ. L'orthomodularité**

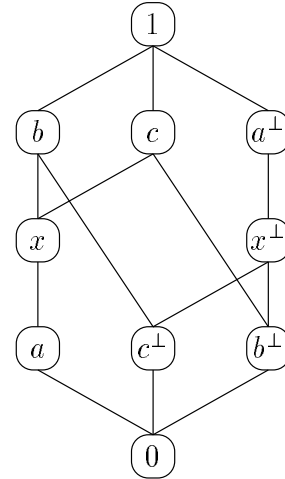
Conformément à ce que nous avons dit plus haut nous dirons que  $a$  et  $b$  sont *compatibles*,  $a \circ b$ , si  $\langle a, b \rangle$  est une algèbre de Boole (à 2, 4, 8, ou 16 éléments). Si  $a$  et  $b$ ,  $a \leq b$ , engendrent une algèbre de Boole, il s'agit de : (des éléments pouvant être égaux)

$$\{0, a, a^\perp \wedge b, b, b^\perp, a \vee b^\perp, a^\perp, 1\}.$$

**Proposition II.2.7** *Si  $a \leq b$ , pour que  $a \circ b$ , il faut et il suffit que  $b \circ a = a$  et  $a^\perp \circ b^\perp = b^\perp$ . Une seule de ces propositions n'est pas suffisante.*

**Démonstration:** La nécessité est claire puisque dans une algèbre de Boole  $x \circ y = x \wedge y$ . Pour la réciproque, on remarque que les formules à plus d'un connecteur se ramènent à des formules à un connecteur au plus, par récurrence. Ainsi les éléments ci-dessus forment-ils un sous-treillis. On peut alors vérifier case par case la table de ce treillis et voir qu'il s'agit (d'un quotient) de l'algèbre de Boole à huit éléments (facile mais fastidieux).

Une seule des relations n'est pas suffisante, comme le montre l'exemple ci-contre (cf. [17]) où l'on a bien  $a^\perp \circ b^\perp = a^\perp \wedge b^\perp = b^\perp$ , mais où  $b \circ a = b \wedge c = x$ . **c.q.f.d.**



On introduit la loi suivante dite de *modularité faible* ou loi d'*orthomodularité* :

$$P \text{ si } a \leq b, \text{ alors } a \circ b.$$

Un treillis satisfaisant cette loi est dit *treillis orthomodulaire*. D'après la proposition précédente on peut également exprimer (P) sous la forme suivante, [11] :

$$OM \text{ si } a \leq b, \text{ alors } b \circ a = a.$$

Cette forme nous montre qu'un treillis modulaire est *a fortiori* orthomodulaire. En effet si  $a \leq b$  et si le treillis est modulaire  $a \vee (x \wedge b) = (a \vee x) \wedge b$ , ce qui donne, en remplaçant  $x$  par  $b^\perp$ ,

$$a = a \vee 0 = a \vee (b^\perp \wedge b) = (a \vee b^\perp) \wedge b = b \circ a.$$

Ainsi on peut aussi appeler *faiblement modulaires* les treillis orthomodulaires, en suivant Piron, [17]. Le nom « orthomodulaire » vient de ce que (OM) est un affaiblissement de la loi de modularité au cas où le troisième terme est l'orthocomplément de l'un des termes extrêmes.

**b. Les treillis orthomodulaires**

Pour nous une *logique quantique* sera, par définition, un treillis orthomodulaire. Nous nous proposons ici d'étudier plus précisément ces structures en mettant l'accent sur la relation de compatibilité, qui est centrale, et sur le problème de la distributivité.

**α. Les compléments relatifs**

Le grand intérêt des treillis orthomodulaires est qu'ils admettent la notion de complément relatif. Démontrons d'abord le petit lemme suivant :

**Lemme II.2.2** *Dans tout treillis orthomodulaire, on a*

$$a \leq x \leq b \quad \Rightarrow \quad a \vee (x^\perp \wedge b) = (a \vee x^\perp) \wedge b.$$

**Démonstration:** On a, dans tout treillis (vu plus haut) :  $a \vee (x^\perp \wedge b) \leq (a \vee x^\perp) \wedge b$ . Ce qui nous donne :  $[(a \vee x^\perp) \wedge b] \circ [a \vee (x^\perp \wedge b)] = a \vee (x^\perp \wedge b)$ . Soit  $[a \vee (x^\perp \wedge b) \vee ((a \vee x^\perp) \wedge b)^\perp] \wedge (a \vee x^\perp) \wedge b = a \vee (x^\perp \wedge b)$ . Or  $[\dots \vee \dots]$  vaut  $a \vee (x^\perp \wedge b) \vee b^\perp \vee (x \wedge a^\perp)$ , soit  $(a^\perp \circ x^\perp)^\perp \vee (b \circ x)^\perp$  qui se réduit à  $x^\perp \vee x^\perp$  donc à 1. **c.q.f.d.**

Nous sommes donc en mesure d'affirmer que :

**Proposition II.2.8** *L'application  $x \mapsto (a \vee x^\perp) \wedge b$  est une orthocomplémentation sur tout sous-treillis  $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$  si et seulement si le treillis est orthomodulaire, soit  $a \leq b \Rightarrow b \circ a = a, \forall a, b \in L$ .*

**Démonstration:** Notons  $x' = (a \vee x^\perp) \wedge b$  pour  $a \leq x \leq b$ . La nécessité est triviale : si  $\cdot'$  est un orthocomplément sur  $[a, b]$ , on a  $b' = a$ , soit précisément  $b \circ a = a$ .

Pour la réciproque, d'après la proposition précédente on a  $x'' = a \vee (x'^\perp \wedge b) = a \vee [((a^\perp \wedge x) \vee b^\perp) \wedge b]$ , soit  $a \vee (b \circ (a^\perp \wedge x))$  or  $(a^\perp \wedge x) \leq b$  donc ceci donne  $a \vee (a^\perp \wedge x)$  soit  $x$ . Ainsi  $x'' = x$ . De plus  $x' \wedge x = (a \vee x^\perp) \wedge b \wedge x = x \circ a = a$ . Enfin, si  $x \leq y$ , on a  $a \vee y^\perp \leq a \vee x^\perp$ , puis  $y' \leq x'$  par croissance de  $\wedge$  et  $\vee$ . **c.q.f.d.**

Cette propriété de ces logiques permet le minimum nécessaire pour pouvoir parler de contexte et négliger au besoin des phénomènes inconnus, ce qui est crucial pour une logique digne de ce nom. Se placer sur le sous-treillis  $[a, b]$  revient à se placer dans l'hypothèse où  $a$  est faux (resp. représente tout ce qui est faux) et où  $b$  est vrai (resp. représente tout ce qui est vrai) ; ce théorème dit que les propositions considérées forment bien un treillis orthocomplémentaire pour le complément le plus naturel : le complément relatif  $x' = (a \vee x^\perp) \wedge b = a \vee (x^\perp \wedge b)$ . Le fait le plus important est que cette notion de complément relatif est cohérente :

**Proposition II.2.9** *Dans un treillis orthomodulaire  $L$ , tout segment  $[a, b]$  est lui-même un treillis orthomodulaire pour l'orthocomplément défini plus haut :  $x \mapsto x' = (a \vee x^\perp) \wedge b$ . Si, de plus,  $[x, y] \leq [a, b] \leq L$ , alors l'orthocomplément défini sur  $[x, y]$  à partir de  $[a, b]$  est le même que celui défini à partir de  $L$ .*

**Démonstration:** Pour prouver la seconde assertion il faut vérifier que si  $z \in [x, y]$ ,  $(x \vee z') \wedge y = (x \vee z^\perp) \vee y$ . Pour prouver la première la précédente suffit en prenant  $z = y$ .

En développant  $(x \vee z') \wedge y$ , on trouve  $(x \wedge (a \vee z^\perp) \wedge b) \vee y$ , soit, puisque  $x \leq b$ ,  $(x \wedge (a \vee z^\perp) \wedge b) \vee y$ . Or, si  $a \leq x$ , on a  $a \circ x$ , et de même  $a \circ z$ , donc  $a \circ z^\perp$ , ainsi  $a \vee (x \wedge z^\perp) = (a \vee x) \wedge (a \vee z^\perp) = x \wedge (a \vee z^\perp)$ . De là  $(x \wedge z') \vee y = a \vee (x \wedge z^\perp) \vee y = (x \wedge z^\perp) \vee y$ , puisque  $a \leq y$ . **c.q.f.d.**

Les conséquences de cette proposition sont considérables pour toute application à une modélisation des concepts ou des faits : cette propriété nous permet de raisonner sous hypothèses. Si l'on admet que la réalité descriptible quantiquement forme un treillis  $L$ , on peut se restreindre à une partie de la réalité  $L' \leq L$  sans même s'inquiéter de ce que peut être  $L$  : les éléments de  $L$  hors de  $L'$  n'interfèrent pas dans sa structure. Dit autrement, et plus dans la ligne de notre proposition, une partie de la réalité possible, au sens d'un sous-système parmi les possibles obtenu en faisant des hypothèses, se comporte du point de vue logique comme si elle était la réalité.

### β. Le problème de la distributivité

Pour bien poser le problème, il est nécessaire de voir le théorème général suivant, qui décrit les relations qui peuvent exister entre deux éléments :

**Proposition II.2.10** *Dans tout treillis orthomodulaire les relations suivantes sont équivalentes :*

1.  $a \circ b = b \circ a$ ,
2.  $a \circ b = a \wedge b$  soit  $a \wedge (a^\perp \vee b) = a \wedge b$ ,
3.  $a \circ b \leq b$ ,
4.  $a \circ b^\perp = b^\perp \circ a$ ,
5.  $b^\perp = (b^\perp \vee a) \wedge (b^\perp \vee a^\perp)$ ,
6.  $b = (b \wedge a) \vee (b \wedge a^\perp)$ ,
7.  $(a \wedge b) \vee (a \wedge b^\perp) \vee (a^\perp \wedge b) \vee (a^\perp \wedge b^\perp) = 1$ .
8.  $(a \vee b) \wedge (a \vee b^\perp) \wedge (a^\perp \vee b) \wedge (a^\perp \vee b^\perp) = 0$ .

9. une quelconque des 24 relations de distributivité non-triviales entre  $a$ ,  $a^\perp$ ,  $b$ , et  $b^\perp$ ,

10.  $\langle a, b \rangle$  est une algèbre de Boole (soit  $a \supset b$ ).

**Démonstration:** On a déjà  $1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3$  par le lemme II.2.1. Si l'on a  $1 \Rightarrow 4$ , alors  $4 \Rightarrow 1$ , par symétrie. On peut tirer de  $1 \Leftrightarrow 4$  le fait que  $1 \Leftrightarrow a^\perp \circ b^\perp = b^\perp \circ a^\perp$ , on peut alors considérer toute relation pour sa duale. Mais alors, parmi les 24 relations de distributivité, on peut se restreindre à l'étude de 2 et 5. Comme 10 équivaut à la conjonction de toutes les relations de distributivité, on aura alors  $1 \Leftrightarrow 10$ . Il nous suffit donc de démontrer  $1 \Rightarrow 5 \Rightarrow 4$  et  $6 \Leftrightarrow 7$ .

Comme  $b^\perp \leq a \vee b^\perp$ , on a  $(a \vee b^\perp) \circ b^\perp = b^\perp$ , soit  $(a \vee b^\perp) \wedge ((a^\perp \wedge b) \vee b^\perp) = b^\perp$ . Supposons 1, on a  $b \circ a = (a \vee b^\perp) \wedge b = a \wedge b$ , ainsi  $(a \vee b^\perp) \wedge (a^\perp \vee b^\perp) = b^\perp$ . Donc  $1 \Rightarrow 5$ .

Supposons 5, soit  $(a \vee b^\perp) \wedge (a^\perp \vee b^\perp) = b^\perp$ . On en déduit  $a \wedge (a^\perp \vee b^\perp) \leq b^\perp$ , soit  $a \circ b^\perp \leq b^\perp$ , qui équivaut à 4 par le lemme déjà cité (II.2.1). Donc  $5 \Rightarrow 4$ .

Supposons 6,  $(a \wedge b) \vee (a \wedge b^\perp) \vee (a^\perp \wedge b) \vee (a^\perp \wedge b^\perp)$  vaut alors  $a \vee a^\perp = 1$ . Donc  $6 \Rightarrow 7$ .

On sait que, dans tout treillis,

$$(b \wedge a) \vee (b \wedge a^\perp) \leq b \leq (b \vee a) \wedge (b \vee a^\perp).$$

Donc,

$$[(b \vee a) \wedge (b \vee a^\perp)] \circ [(b \wedge a) \vee (b \wedge a^\perp)] = (b \wedge a) \vee (b \wedge a^\perp).$$

En développant le second terme du  $\wedge$  le plus extérieur (obtenu par développement du  $\circ$ ) on trouve exactement l'expression qui, selon 7, vaut 1. Si l'on suppose 7 on a donc

$$(b \vee a) \wedge (b \vee a^\perp) = (b \wedge a) \vee (b \wedge a^\perp)$$

qui vaut donc  $b$  en comparant avec l'inégalité ci-dessus. Ainsi  $7 \Rightarrow 6$ . **c.q.f.d.**

Si nous avons vu plus haut que la relation de distributivité ne se caractérisait pas en une formule dans le cas général, cette proposition nous montre que dans le cas des treillis orthomodulaires la distributivité entre éléments issus de deux propositions  $a$  et  $b$  est ou bien triviale ou bien équivalente à une relation simple comme  $a \circ b \leq b$ .

Un autre enseignement de cette proposition est que, dans un treillis orthomodulaire, deux éléments ou bien ne vérifient que des propositions triviales, ou bien sont compatibles. Nous entendons par proposition triviale celles obtenues en supprimant les termes identiques et les simplifications élémentaires entre les littéraux<sup>(6)</sup> et leurs négations. Ce sont aussi celles qui correspondent aux réductions obtenues à l'aide des axiomes de treillis orthocomplémenté. Ceci justifie donc la remarque faite plus haut selon laquelle la Logique Quantique est, dans un sens, la plus simple extension de la Logique Classique; ceci peut aussi se justifier sur un plan plus complexe qui nécessite un appareil conceptuel bien plus important (pour notre part, nous passons par une "intuition physique").

## $\gamma$ . Le problème de la compatibilité

Afin de bien voir le lien avec la géométrie et de mieux visualiser la notion de compatibilité, introduisons les notations suivantes.  $a \perp b$  désignera le fait que  $a \leq b^\perp$ , qui correspond, en termes logiques, au fait que «  $a$  entraîne non- $b$  ». Cette relation est symétrique et désigne le fait d'être contradictoire et correspondra à l'orthogonalité. On notera également  $a = b \oplus c$  le fait que  $a = b \vee c$  avec  $b \perp c$ . En termes logiques ceci correspond au fait que  $a$  se décompose en  $b$  et  $c$  qui sont contradictoires. Ce nouvel opérateur,  $\oplus$ , correspondra à une décomposition orthogonale dans nos espaces de Hilbert.

La relation de compatibilité s'exprime particulièrement bien en termes de cette *somme orthogonale* :

**Proposition II.2.11** Dans un treillis orthomodulaire  $a \supset b$  équivaut au fait qu'il existe  $a'$ ,  $b'$  et  $c$  tels que  $a = a' \oplus c$ ,  $b = b' \oplus c$ , et  $a' \perp b'$ .

**Démonstration:** Supposons que  $a = a' \oplus c$ ,  $b = b' \oplus c$ , et  $a' \perp b'$ , alors  $a \circ b = a \wedge ((a'^\perp \wedge c^\perp) \vee c \vee b')$ , soit  $a \wedge ((c^\perp \circ a')^\perp \vee b')$ . Or  $a' \leq c^\perp$ , donc  $c^\perp \circ a' = c^\perp \wedge a' = a'$ , donc  $a \circ b = a \wedge (a'^\perp \vee b')$ . De plus  $b' \leq a'^\perp$ , donc  $a \circ b = a \wedge a'^\perp = a'^\perp \circ c$ . Enfin  $c \leq a'^\perp$ , donc  $a \circ b = c \leq b$ .

---

(6). Dans une formule construite sur  $a, b, c$ , etc. les littéraux sont les groupes  $a, a^\perp, b, b^\perp$ , etc.

Pour la réciproque supposons que  $a \circ b$ . Soient  $a' = a \wedge b^\perp$ ,  $b' = a^\perp \wedge b$ , et  $c = a \wedge b$ . Par la proposition précédente on a  $a = (a \wedge b^\perp) \vee (a \wedge b)$ , soit  $a = a' \vee c$ , de même  $b = b' \vee c$ . On a  $a \wedge b^\perp \leq b^\perp$ , donc  $a' \perp b$ . En particulier,  $a' \perp b'$  et  $a' \perp c$ . De même  $b' \perp c$ . **c.q.f.d.**

La somme orthogonale correspond au *ou exclusif* ou *union disjointe* du cas classique (noté  $\mathbb{W}$  ou  $\Delta$ ). Cette décomposition correspond, dans le cas classique à

$$a \vee b = \overbrace{(a \wedge \neg b) \mathbb{W} (a \wedge b)}^a \mathbb{W} \underbrace{(\neg a \wedge b)}_b.$$

Même si cette tripartition ne s'étend pas au cas quantique il est possible de réaliser canoniquement des bipartitions :

**Proposition II.2.12** *Si  $a \leq b$ ,  $b$  se décompose en deux éléments orthogonaux :  $b = a \oplus a'$  où  $a' = b \wedge a^\perp$ . Ainsi, dans le cas de  $a$  et  $b$  quelconques, nous avons :*

$$b = b \wedge a \oplus b \circ a^\perp.$$

*De même, on peut orthogonaliser une disjonction quelconque : si  $a$  et  $b$  sont donnés*

$$a \vee b = a \oplus a^\perp \circ b.$$

**Démonstration:** La première assertion est facile. La seconde s'obtient en remplaçant  $a$  par  $b \wedge a$  et la troisième en remplaçant  $b$  par  $a \vee b$ . **c.q.f.d.**

On peut déduire de cette décomposition un fait qui donnera plus loin la linéarité de la projection et qui compense, en quelque sorte, la non-distributivité de  $\wedge$  par rapport à  $\vee$  :

**Théorème II.2.1** *Dans les treillis orthomodulaires on a pour tous  $a, b$  et  $p$  la relation*

$$p \circ (a \vee b) = p \circ a \vee p \circ b.$$

**Démonstration:** D'après la proposition précédente nous savons que  $p^\perp \vee a$  vaut  $p^\perp \oplus p \circ a$ , de même  $p^\perp \vee b = p^\perp \oplus p \circ b$ , ainsi  $p^\perp \vee a \vee b = p^\perp \vee p \circ a \vee p \circ b$ . Donc  $p \circ (a \vee b) = p \wedge (p^\perp \vee (p \circ a \vee p \circ b))$ . Or  $p \circ a$  et  $p \circ b$  sont inclus dans  $p$ , donc  $p \circ (a \vee b) = p \circ a \vee p \circ b$ . **c.q.f.d.**

Enfin, comme il est de tradition en Logique, on veut pouvoir traiter les relations entre éléments de façon déductive plutôt qu'algébrique. Connaissant certaines relations entre propositions, on veut disposer d'un système permettant d'en inférer de nouvelles.

Par définition, dans un treillis orthomodulaire nous avons la relation

$$a \leq b \quad \Rightarrow \quad a \circ b.$$

Celle-ci peut alors se prolonger en calculs sur la compatibilité grâce à la

**Proposition II.2.13** *Dans un treillis orthomodulaire, si  $a_i \circ b$  pour tout  $i \in I$ , alors*

$$\begin{aligned} b \circ \bigvee_{i \in I} a_i & \quad \text{et} \quad b \circ \bigwedge_{i \in I} a_i, \\ b \wedge (\bigvee_{i \in I} a_i) &= \bigvee_{i \in I} b \wedge a_i \quad \text{et} \quad b \vee (\bigwedge_{i \in I} a_i) = \bigwedge_{i \in I} b \vee a_i, \\ & \quad b \circ a_i^\perp. \end{aligned}$$

*pour peu que ces opérations soient définies (ce qui est toujours le cas si le treillis est complet).*

**Démonstration:** On a  $b \leq \bigwedge_{i \in I} b \vee a_i$ , donc  $b \vee \left( b^\perp \wedge \bigwedge_{i \in I} b \vee a_i \right) = \bigwedge_{i \in I} b \vee a_i$ . Or  $b \circ a_i$ , donc  $b^\perp \circ a_i \leq a_i$ , ainsi  $\bigwedge_{i \in I} b \vee a_i \leq b \vee \bigwedge_{i \in I} a_i$ . De plus l'inverse est toujours vrai, d'où la première assertion. La seconde assertion découle de la première par dualité.

Par ce qui précède on a  $b \circ \bigwedge_{i \in I} a_i = \bigwedge_{i \in I} b \circ a_i$ . Donc ceci est inférieur à  $\bigwedge_{i \in I} a_i$ , d'où la compatibilité.

La dernière relation découle de la proposition II.2.10. **c.q.f.d.**



### § 3. Approche syntaxique : la Logique Quantique

Nous donnons ici des règles vérifiées par la Logique Quantique. On peut non seulement démontrer que toutes ces règles sont bien valides mais également voir que toute démonstration à partir d'elle revient à utiliser la structure de treillis orthomodulaire des propositions quantiques.

Nous donnerons d'abord un système “*user friendly*” présenté par P. Gibbins. Nous proposerons ensuite un système plus axé sur la notion de compatibilité.

#### a. La Logique Quantique “*user friendly*” de P. Gibbins

Les règles que nous donnons ci-dessous sont telles que présentées dans [11] (faisant suite à [15] et [8]). Les  $\Gamma$  représentent des ensembles de propositions utilisées comme contextes (ou parties de contexte), les minuscules grecques représentent des propositions. De plus l'implication, que nous n'avons pas introduite, est ici notée  $\rightarrow$ . Enfin,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \vdash \beta$  indique que  $\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_n$  entraîne  $\beta$ .

<i>Règle d'affirmation</i>	(A)		
Inférer $\alpha \vdash \alpha$ .			
<i>Modus Ponens</i>	(MP)	<i>Modus Tollens</i>	(MT)
De $\Gamma \vdash \alpha$ et $\Gamma' \vdash \alpha \rightarrow \beta$		De $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ et $\Gamma' \vdash \neg\beta$	
inférer $\Gamma, \Gamma' \vdash \beta$ .		inférer $\Gamma, \Gamma' \vdash \neg\alpha$ .	
<i>Double Négation</i>	(DN)	<i>ou</i>	
De $\Gamma \vdash \alpha$		De $\Gamma \vdash \neg\neg\alpha$	
inférer $\Gamma \vdash \neg\neg\alpha$ .		inférer $\Gamma \vdash \alpha$ .	
<i>Preuve Conditionnelle</i>	(CP)	<i>Définition de <math>\rightarrow</math></i>	
De $\alpha \vdash \beta$		Par définition $\alpha \rightarrow \beta = \neg\alpha \vee (\alpha \wedge \beta)$ .	
inférer $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ .			
$\wedge$ -introduction	( $\wedge I$ )	$\wedge$ -élimination	( $\wedge E$ )
De $\Gamma \vdash \alpha$ et $\Gamma' \vdash \beta$		De $\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta$	
inférer $\Gamma, \Gamma' \vdash \alpha \wedge \beta$ .		inférer $\Gamma \vdash \alpha$ ou $\Gamma \vdash \beta$	
$\vee$ -introduction	( $\vee I$ )	$\vee$ -élimination	( $\vee E$ )
De $\Gamma \vdash \alpha$ ou $\Gamma \vdash \beta$		De $\Gamma \vdash \alpha \vee \beta, \alpha \vdash \gamma$ et $\beta \vdash \gamma$	
inférer $\Gamma \vdash \alpha \vee \beta$ .		inférer $\Gamma \vdash \gamma$ .	
<i>Reductio ad Absurdum</i>	(RAA)		
De $\alpha \vdash \beta \wedge \neg\beta$			
inférer $\vdash \neg\alpha$ .			

On se convainc assez facilement que ces règles sont valides et (en se fatiguant un peu plus) complètes par rapport à la définition en termes de treillis orthomodulaires de la Logique Quantique<sup>(7)</sup> si l'on pose

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n \vdash \beta \iff \bigwedge_{i=1}^n \alpha_i \leq \beta.$$

Une critique importante doit cependant être faite au sujet de ce système : sa forme ressemblant à la forme classique fait oublier l'extrême restriction portée à l'emploi de la preuve conditionnelle : elle doit se faire hors de tout contexte. Ajouté à cela une définition de  $\rightarrow$  à partir des autres connecteurs est donnée qui fausse complètement le jeu du système déductif en intégrant une part algébrique ici

(7). On peut se reporter pour le détail à l'article [11], même si les théorèmes que nous avons donnés plus haut permettent d'alléger considérablement les démonstrations.

irréductible<sup>(8)</sup>. Le même genre de problème se retrouve au niveau de la réduction par l'absurde (c'est en fait le même problème). En résumé, ce système ne présente pas de bonnes propriétés mathématiques; il n'est pas impossible, cependant, qu'il permette un jour d'établir quelque résultat.

## b. Une présentation privilégiant la compatibilité

Nous allons maintenant proposer un autre système déductif<sup>(9)</sup> évitant quelques écueils du précédent. Il ne lui sera cependant pas possible de contrecarrer les problèmes inhérents à la Logique Quantique.

### α. Présentation du système

Nous commencerons par la règle d'affirmation et les règles associées à la relation de compatibilité; les règles structurelles habituelles sont supposées (affaiblissement, contraction et permutation).

*Règle d'affirmation* (A)  
Inférer  $a \vdash a$ .

<i>◊-introduction</i> :	(◊I)	<i>Symétrie de ◊</i>
De $b \wedge (\neg b \vee a) \vdash a$		De $a \circ b$
inférer $a \circ b$		inférer $b \circ a$

<i>Compatibilité de la conjonction</i> :	(◊ <sub>∧</sub> )	<i>Compatibilité de la disjonction</i> :	(◊ <sub>∨</sub> )
De $a \circ b$ et $a \circ b'$		De $a \circ b$ et $a \circ b'$	
inférer $a \circ b \wedge b'$		inférer $a \circ b \vee b'$	

*Compatibilité de la négation* : (◊<sub>¬</sub>)  
De  $a \circ b$   
inférer  $a \circ \neg b$

Notons que les trois dernières règles peuvent se résumer en la règle suivante, où  $\varphi$  et  $\psi$  désignent des formules construites sur les propositions entre crochets (on parle de combinaisons "booléennes") :

$$\frac{a_1, \dots, a_m \circ b_1, \dots, b_n}{\varphi[a_1, \dots, a_m] \circ \psi[b_1, \dots, b_n]} \circ_B$$

La notation  $\frac{X}{Y} R$  se lit « par la règle  $R$  inférer  $Y$  à partir de  $X$  ».

Pour le système complet nous utilisons encore les majuscules grecques pour désigner des groupes de propositions et nous ajoutons la notation  $\Gamma \circ \Delta$  pour indiquer que  $\forall g \in \Gamma, \forall d \in \Delta, g \circ d$ .

Nous posons alors :

*coupure* :

$$\frac{\Gamma \vdash a, \Delta \quad \Gamma', a \vdash \Delta' \quad \bigwedge \Gamma \circ \bigvee \Delta \quad a \circ \bigvee \Delta \text{ ou } \bigwedge \Gamma'}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta'} \text{CUT}$$

*règles de la conjonction* :

$$\frac{\Gamma, a, b \vdash \Delta}{\Gamma, a \wedge b \vdash \Delta} \wedge_g \quad \frac{\Gamma \vdash a, \Delta \quad \Gamma' \vdash b, \Delta' \quad a, b \circ \bigvee \Delta \vee \bigvee \Delta'}{\Gamma, \Gamma' \vdash a \wedge b, \Delta, \Delta'} \wedge_d$$

(8). En Logique Classique il n'est pas rare de voir posée par définition l'implication comme valant  $\neg \cdot \vee \cdot$ ; ceci n'a rien de problématique, une traduction élémentaire faisant tout rentrer dans l'ordre. Ici une telle traduction n'est pas possible.

(9). Aucun système n'a été rencontré dans la littérature consultée ni n'est mentionné par l'ouvrage récent de P. Gibbins, [12], qui ressemble à celui-ci.

règles de la disjonction :

$$\frac{\Gamma, a \vdash \Delta \quad \Gamma', b \vdash \Delta' \quad a, b \circ \bigwedge \Gamma \wedge \bigwedge \Gamma'}{\Gamma, \Gamma', a \vee b \vdash \Delta, \Delta'} \vee_g \quad \frac{\Gamma \vdash a, b, \Delta}{\Gamma \vdash a \vee b, \Delta} \vee_d$$

règles de la négation :

$$\frac{\Gamma \vdash a, \Delta \quad a \circ \bigvee \Delta}{\Gamma, \neg a \vdash \Delta} \neg_g \quad \frac{\Gamma, a \vdash \Delta \quad a \circ \bigwedge \Gamma}{\Gamma \vdash \neg a, \Delta} \neg_d$$

### β. Validité et complétude

Observons d'abord que ce système est valide :

**Théorème II.3.1** *Le système précédent est valide dans le cadre de la Logique Quantique. Autrement dit, toutes les règles de ce système sont correctes les variables étant considérées comme des éléments d'un treillis orthomodulaire donné, les séquents  $\Gamma \vdash \Delta$  étant lu comme les relations  $\bigwedge \Gamma \leq \bigvee \Delta$  de ce treillis et les autres symboles étant interprétés de manière naturelle.*

**Démonstration:** La règle d'affirmation correspond à la réflexivité de  $\leq$ . Nous avons vu de plus, plus haut, que  $a \circ b$  est bien équivalent à  $b \wedge (\neg b \vee a) \leq a$  (soit  $b \circ a \leq a$ ) ; d'où la validité de la  $\circ$ -introduction. La symétrie de  $\circ$  découle de sa définition. Les règles de compatibilité des connecteurs logiques sont l'expression logique de la proposition II.2.13. Pour terminer avec les évidences, notons que  $\wedge_g$  et  $\vee_d$  sont simplement conséquences des notations.

Pour la coupure supposons que nous avons  $g \leq a \vee d$  et  $g' \wedge a \leq d'$ . Ainsi  $g \wedge g' \leq g' \circ (a \vee d) = g' \circ a \vee g' \circ d$ . Comme  $g' \circ d$ , on a  $g' \circ d \leq d$ . Si l'on suppose, de plus, que  $a \circ g'$ , on a  $g' \circ a = g' \wedge a \leq d'$ . L'hypothèse  $a \circ d$  est duale.

Pour ce qui est de  $\vee_g$  le procès est similaire : nous avons  $g \wedge a \leq d$  et  $g' \wedge b \leq d'$  donc

$$g \wedge g' \wedge (a \vee b) \leq (g \wedge g') \circ (a \vee b) = (g \wedge g') \circ a \vee (g \wedge g') \circ b.$$

Si  $a \circ g \wedge g'$ , nous avons  $(g \wedge g') \circ a = (g \wedge g') \wedge a \leq g \wedge a \leq d$ , et de même pour  $b$ . Le cas de  $\wedge_d$  est dual de celui-ci.

Pour ce qui est de  $\neg_d$ , nous avons  $g \leq a \vee d$  ainsi

$$g \wedge a^\perp \leq (a \vee d) \wedge a^\perp = a^\perp \circ d,$$

soit bien  $\dots \leq d$  puisque  $a \circ d$  (et donc  $a^\perp \circ d$ ). La règle  $\neg_g$  est la duale de celle-ci. **c.q.f.d.**

Remarquons ensuite, avant de démontrer la complétude, un fait très important : si l'on suppose toutes les propositions compatibles deux à deux, les règles que nous avons données deviennent très précisément les règles de la déduction naturelle (classique).

Épurons maintenant les règles relatives aux connecteurs pour faire disparaître toute référence à la compatibilité ; nous trouvons :

*coupure :*

$$\frac{\Gamma \vdash a \quad a \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta'} \text{CUT'}$$

*règles de la conjonction :*

$$\frac{\Gamma, a, b \vdash \Delta}{\Gamma, a \wedge b \vdash \Delta} \wedge_g \quad \frac{\Gamma \vdash a \quad \Gamma' \vdash b}{\Gamma, \Gamma' \vdash a \wedge b} \wedge'_d$$

*règles de la disjonction :*

$$\frac{a \vdash \Delta \quad b \vdash \Delta'}{a \vee b \vdash \Delta, \Delta'} \vee'_g \quad \frac{\Gamma \vdash a, b, \Delta}{\Gamma \vdash a \vee b, \Delta} \vee_d$$

*règles de la négation :*

$$\frac{\Gamma \vdash a}{\Gamma, \neg a \vdash} \neg'_g \quad \frac{a \vdash \Delta}{\vdash \neg a, \Delta} \neg'_d$$

On retrouve dans ce cas les axiomes de treillis orthocomplémenté. Notre remarque précédente nous conduit au fait que si  $a \supset b$ , alors toute les formules construites sur  $a$  et  $b$  sont compatibles et donc  $b \circ a \vdash a$  est démontrable dans ce système puisque démontrable en déduction naturelle. Comme, de plus,  $b \circ a \leq a \Rightarrow a \supset b$  a été posé comme une règle, nous avons démontré le

**Théorème II.3.2** *Notre système déductif pour la Logique Quantique est valide et complet vis à vis de (i.e. équivalent à) la présentation axiomatique des treillis orthomodulaires.*

### γ. Conséquence principale

L'intérêt majeur de ce système est de démontrer un fait que nous n'avions pas établi dans le cadre algébrique (cadre dans lequel il serait même un peu fastidieux à énoncer) :

**Théorème II.3.3** *Si des propositions quantiques  $a, b, c, \dots$  sont compatibles alors les formules construites à partir d'elles forment une algèbre de Boole.*

Ce théorème, qui n'avait été vu que dans le cas de deux propositions, nous affirme donc que toute déduction classique est valide pour des formules construites à partir de propositions compatibles. Inversement tout résultat atteint en Logique Quantique sur ces éléments restera vrai classiquement<sup>(10)</sup>.

### δ. Avantages et inconvénients

Comme nous l'avons déjà indiqué, l'intérêt opératoire de ce genre de systèmes est tout à fait aléatoire compte tenu de la gestion difficile des contextes. Le système que nous venons de présenter, basé sur le système de déduction naturelle classique, introduit des conditions de compatibilité à tous les endroits problématiques. L'intérêt de se baser sur la déduction naturelle plutôt que sur l'un des deux extrêmes, calcul des séquents ou déduction libre<sup>(11)</sup>, est que l'ajout de la coupure est relativement anodin. Ces deux systèmes auraient complètement exclu que le système soit effectivement utilisable. Dans la pratique nous avons progressé par rapport à P. Gibbins, mais fort peu : ici tous les contextes sont présents mais nombreux sont ceux qui dépendent de contraintes de compatibilité. Ceci n'est dû qu'à la Logique Quantique, peu appropriée à ce genre d'exercices.

Un intérêt théorique peut exister cependant. En effet, d'une part, ce système montre qu'une déduction naturelle est possible en indiquant précisément quelles sont les règles possibles avec ou sans la compatibilité. D'autre part, ce genre de raisonnement consistant à faire travailler deux systèmes (l'un déductif travaillant au niveau de connecteurs logiques, l'autre gérant une relation d'équivalence ou de compatibilité entre formules) se rapproche de méthodes employées en déduction naturelle arithmétique, où l'on adjoint une théorie de l'égalité entre nombres au système déductif proprement dit, procédé qui a eu, dans ce cas, un certain bonheur.

## § 4. Approche sémantique : une vision géométrique des Logiques Classique et Quantique

Nous nous proposons ici d'établir un parallèle entre la présentation de la Logique Classique comme logique des ensembles (représentés par des "patates") et une présentation de la Logique Quantique comme logique des espaces de Hilbert (schématisés par des lignes, trapèzes, etc. dans les cas de petites dimensions). Pour ce faire nous allons, dans un premier paragraphe, présenter très rapidement la Logique Classique sous cet angle en insistant sur les points qui changeront avec le passage à la Logique Quantique. Celle-ci sera présentée sous une forme géométrique dans un second paragraphe. Nous n'aborderons cependant pas le problème de probabilités qui malgré son intérêt dépasse notre propos.

### a. La Logique Classique comme logique de l'ensembliste

Ce paragraphe reprend essentiellement, en la précisant, la seconde partie de notre conférence, [9] (à la question près des probabilités). Nous rappelons que nous entendons par « Logique Classique » la Logique Classique Propositionnelle (non-modale).

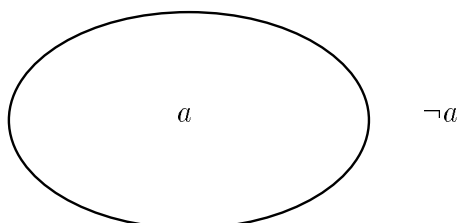
(10). Ceci reste vrai dans le cas général si l'on ne s'intéresse qu'aux relations de type  $\varphi \leq \psi$ .

(11). Pour une mise en parallèle des trois types de systèmes déductifs, on peut se reporter à [16].

### α. La version simple: les “patates”

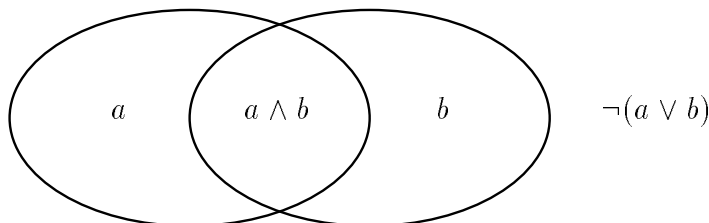
L’outil utilisé habituellement pour représenter des formules de la Logique Classique est le diagramme de Venn. Dans cette méthode, on représente les formules par des dessins d’ensembles. Des régions d’une feuille de papier font en général très bien l’affaire. Dans la pratique ces dessins ont une forme ovale peu régulière ce qui leur vaut le surnom de « patates ».

Ainsi, si l’on veut représenter la relation qui lie une formule  $a$  la plus générale avec sa négation (que nous noterons ici  $\neg a$ ), on pourra tracer par exemple :



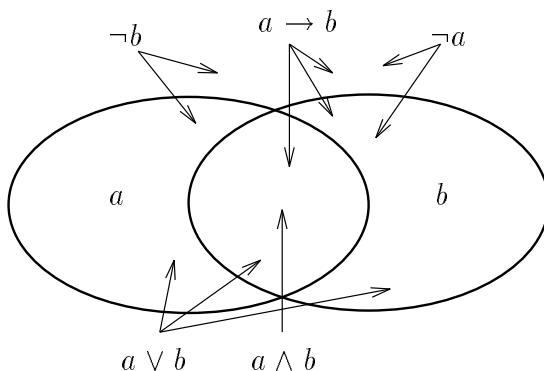
Dans ce diagramme  $a$  est représenté par l’intérieur de l’ellipse et  $\neg a$  par son extérieur.

On peut également représenter des formules complexes en fonction de constituants plus simples par cette méthode. Dans la figure suivante, par exemple,



si la formule  $a$  est représentée par l’intérieur de l’ellipse de gauche et la formule  $b$  par l’intérieur de celle de droite, la conjonction «  $a$  et  $b$  », que nous notons  $a \wedge b$ , sera représentée par l’intérieur de la lentille intersection des deux zones précédentes. De même leur disjonction «  $a$  ou  $b$  », que nous notons  $a \vee b$ <sup>(12)</sup>, le sera par l’union des deux zones elliptiques.

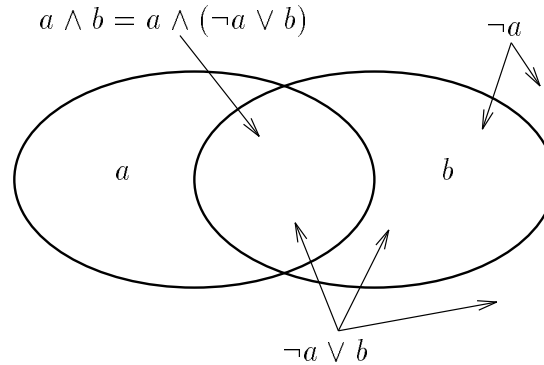
Toutes les régions délimitées par les deux ellipses représentent une formule et inversement toute formule construite à partir de  $a$  et  $b$  comme propositions élémentaires trouve sa représentation dans une zone de ce schéma. On a représenté dans la figure ci-dessous les formules constructibles les plus simples (sauf « vrai » qui correspond à tout le plan et « faux » qui correspond à l’ensemble vide), soit les négations  $\neg a$  et  $\neg b$  de  $a$  et  $b$ , leur conjonction  $a \wedge b$ , leur disjonction  $a \vee b$ , et l’implication  $a \rightarrow b$ .



La figure suivante montre un exemple de calcul d’une représentation de formule. La formule  $a \wedge (\neg a \vee b)$  (lire «  $a$  et «  $b$  ou non  $a$  » ») est ainsi décomposée : On indique d’abord les zones correspondant à  $a$  et  $b$

(12). On emploie souvent en logique un  $\vee$  pour représenter le « ou », ceci nous vient du latin *vel* (« ou » inclusif par opposition à *aut* qui est plus exclusif).

(ici les deux ellipses). De la représentation de  $a$  on déduit la représentation de  $\neg a$ . De celle de  $\neg a$  et  $b$  on déduit celle de  $\neg a \vee b$ . De cette dernière et de celle de  $a$  on a enfin la représentation de  $a \wedge (\neg a \vee b)$ . On voit d'ailleurs qu'il s'agit de la même représentation que  $a \wedge b$ ; ceci est normal.



### β. La version évoluée: les algèbres de Boole

Si l'on veut dire les choses plus mathématiquement, les ensembles ne seront plus des zones du plan mais des ensembles de points. En fait de manière plus fine qu'avec des ensembles mathématiques, la Logique Classique peut se retrouver par l'intermédiaire des algèbres de Boole.

Ces algèbres sont l'abstraction algébrique de la notion d'"anneau" des sous-ensembles d'un ensemble  $X$  donné sous le seul angle qui intéresse la représentation logique: la relation d'inclusion ainsi que les opérations et constantes associées (la complémentation, l'intersection, la réunion, le sous-ensemble vide et le sous-ensemble plein). Nous avons les correspondances suivantes :

algèbres de Boole		sous-ensembles	
notation	sens	sens	notation
0	élément minimal (zéro)	partie vide	$\emptyset$
1	élément maximal (un)	partie pleine	$X$
$a \leq b$	inférieur à	inclus dans	$A \subset B$
$\neg a = 1 - a$	négation de	complémentaire de	$\mathcal{C}A = X - A$
$a \wedge b = a \cdot b$	conjonction (produit)	intersection	$A \cap B$
$a \vee b$	disjonction	(ré)union	$A \cup B$
$a + b$	« ou » exclusif (somme)	union disjointe	$A \Delta B$

Nous avons présenté une version axiomatique des algèbres de Boole comme treillis distributifs complémentés, ce que sont effectivement les anneaux de parties d'un ensemble.

On peut voir que toute démonstration de Logique Classique sur la base de certaines hypothèses correspond à des identités entre des éléments d'une algèbre de Boole déterminés par les hypothèses. Par

exemple, si on définit  $a \rightarrow b$  par  $\neg a \vee b$ , la règle de contraposition correspondra alors à la relation

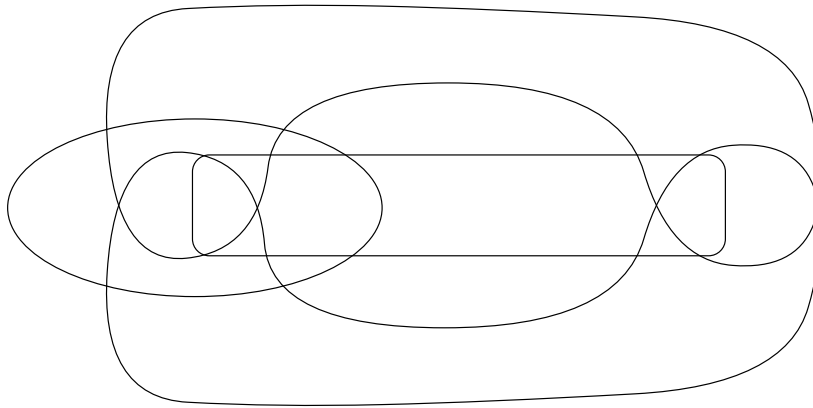
$$a \rightarrow b = \neg b \rightarrow \neg a.$$

Cette relation vient de ce que  $\neg b \rightarrow \neg a$  vaut, par définition,  $\neg\neg b \vee \neg a$ , donc  $b \vee \neg a$  soit  $\neg a \vee b$ , qui est bien  $a \rightarrow b$ , par définition. On parle parfois de *calculs logiques* pour ce genre de calculs effectués dans des algèbres de Boole.

### γ. Le théorème de représentation de Stone

En quittant les dessins pour les ensembles abstraits nous nous sommes ouvert la possibilité de raisonner sur des exemples de taille infinie et variés par la forme. En passant aux algèbres de Boole nous avons franchi une étape en autorisant tous les outils habituels de l'algèbre mais nous avons *a priori* perdu l'aspect intuitif que pouvait recouvrir la notion d'ensemble.

En fait un théorème, maintenant classique, dû à Stone, [22]<sup>(13)</sup>, nous permet de rétablir l'intuition : toute algèbre de Boole peut être représentée comme anneau de parties d'un certain ensemble  $X$  (on peut même être beaucoup plus précis que cela !). C'est ce théorème qui justifie que l'on affirme que la *Logique Classique est la logique des ensembles* : toute relation générale vraie pour des parties d'un ensemble est vraie en Logique Classique après traduction et, inversement, toute relation vraie en Logique Classique est vraie pour des parties d'un ensemble. De plus, quand un nombre fini de propositions interviennent pour modéliser une situation, des dessins à l'aide de "patates" peuvent être réalisés et servir de preuve<sup>(14)</sup>. Bien entendu, ces dessins ne sont aisément réalisables que pour un petit nombre de variables propositionnelles. La figure ci-dessous présente le cas de quatre variables, déjà fort confus.



### b. La Logique Quantique comme logique du linéaire

Nous nous proposons ici d'introduire la Logique Quantique comme logique du linéaire<sup>(15)</sup> en introduisant l'équivalent approprié des diagrammes de Venn. Comme pour la Logique Classique la vision géométrique de cette logique est profonde : elle peut se baser sur le théorème de représentation de Piron.

#### α. La version simple: les espaces vectoriels de dimension finie

Nous avons vu que les espaces vectoriels de dimension finie (en fait les hilberts de dimension finie, car il nous faut une notion d'orthogonalité) constituent des modèles de la Logique Quantique. Ceci nous permet donc de représenter des propositions quantiques par des espaces vectoriels. Un problème se pose alors immédiatement : de quelle dimension peuvent être et doivent être ces représentations ? Peut-on

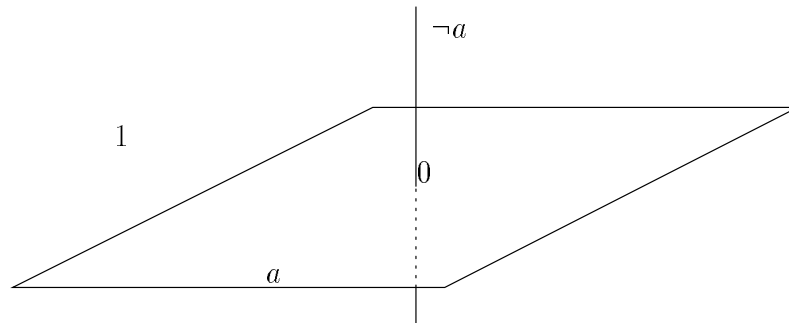
(13). Nous donnons ici une indication bibliographique inutile : ce sujet est traité dans tout les livres de Logique Mathématique.

(14). De plus, le théorème de compacité garantit qu'en Logique Classique, même si un nombre infini de propositions peut être nécessaire pour modéliser une situation, seul un nombre fini est nécessaire pour prouver une relation donnée.

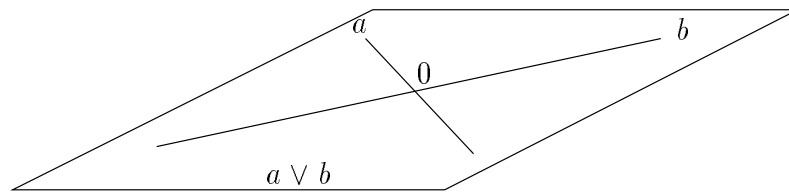
(15). Nous disons « logique du linéaire » plutôt que « logique linéaire », qui serait plus adapté, pour éviter toute confusion avec la Logique Linéaire. Si l'on voulait être rigoureux, le terme idéal serait « logique projective » ; malheureusement, peu de gens savent ce qu'est un espace projectif !

représenter toutes les situations? Comme dans le cas classique on peut, pour répondre à une question dont la démonstration emploie les formules  $a_1, \dots, a_n$ , n'employer que les dessins qui ne réduisent pas ces formules. Le seul problème est qu'ici il faut faire attention au problème de l'orthogonalité. Pour en finir avec les problèmes, nous noterons que pour passer de la représentation au dessin concret sur une feuille de papier se pose le problème des objets de dimension supérieure à quatre (on a même besoin de la dimension infinie pour certains problèmes de Mécanique Quantique). Précisons maintenant de manière simple et concrète cette représentation.

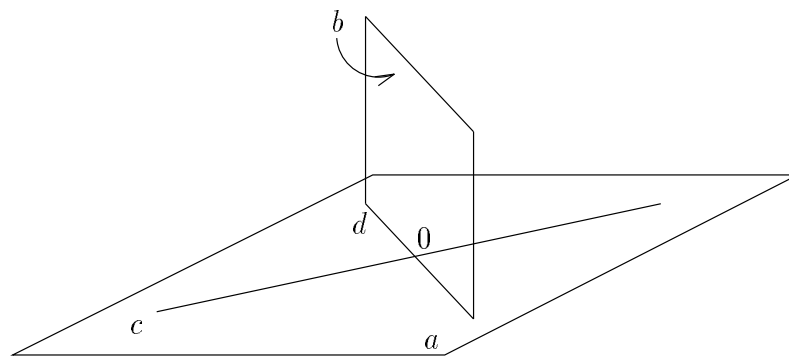
Notons que comme nous parlons d'espaces vectoriels tous ces espaces contiennent 0, qui représente le « faux ». L'espace maximal de représentation représente, lui, le « vrai », 1. Si cet espace de Hilbert de référence est « notre » espace à 3 dimensions, et si  $a$  est un plan,  $\neg a$  (« non  $a$  ») sera la droite orthogonale à  $a$  (passant par 0) :



Si  $a$  et  $b$  sont deux droites, leur disjonction,  $a \vee b$  sera le plan qui les contient :



Dans la figure suivante nous avons  $c \leq a$  et  $d = a \wedge b$ , par exemple.  $c \leq a$ , signifie en termes d'espaces que  $c$  est inclus dans  $a$ , et en termes logiques que  $c$  implique  $a$ . De même,  $d = a \wedge b$ , signifie en termes d'espaces que  $d$  est l'intersection de  $a$  et  $b$  et en termes logiques que  $d$  est équivalent à «  $a$  et  $b$  ».



Nous voyons également que  $b \perp c$ , soit  $b \leq \neg c$  ou  $c \leq \neg b$  (si l'espace de référence est l'espace à trois dimensions, on aura même  $c = \neg b$ ). Ceci correspond au fait que  $b$  et  $c$  sont orthogonaux, ou, du point de vue logique, qu'il correspondent à des propositions contradictoires.

Dans la précédente figure nous avons repéré que

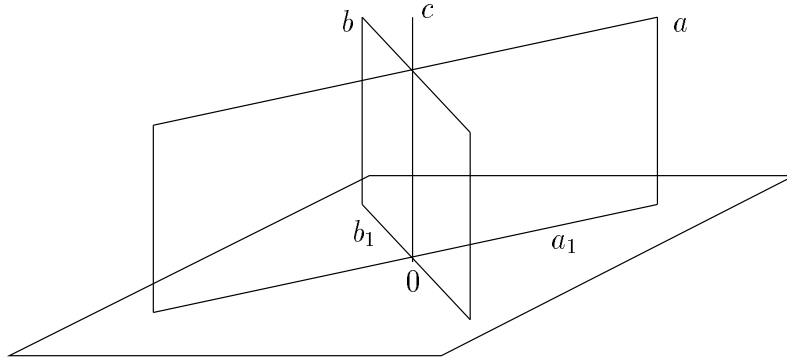
$$\begin{cases} a = c \vee d, \\ b \wedge a = d \text{ et} \\ c \perp b. \end{cases}$$



Nous pouvons déduire de cela, pour des propositions quantiques, que  $a \circ b$ <sup>(16)</sup>. Plus précisément, si nous reprenons la caractérisation que nous avons donnée de la compatibilité, on pourra dire que  $a$  et  $b$  sont compatibles si :

$$\begin{cases} a = a_1 \oplus c & (\text{soit } a = a_1 + c \text{ et } a_1 \perp c), \\ b = b_1 \oplus c & (\text{soit } b = b_1 + c \text{ et } b_1 \perp c), \text{ et} \\ a_1 \perp b_1. \end{cases}$$

Ce qui se représente schématiquement par la figure ci-dessous.

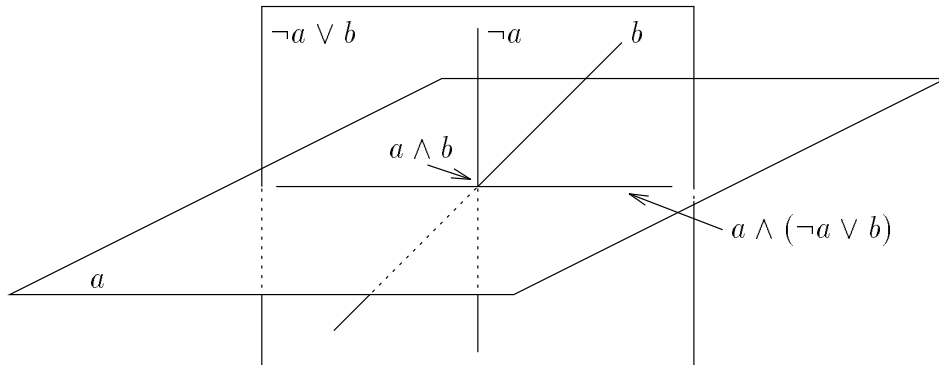


En termes simples  $a$  et  $b$  sont compatibles si ils peuvent s'exprimer comme combinaisons d'éléments deux à deux orthogonaux. En fait, on se le rappelle, des éléments orthogonaux peuvent être vus comme des propositions classiques disjointes ; on retrouve ainsi le fait que des propositions quantiques se comportent entre elles comme des propositions classiques (i.e. elles sont compatibles) si et seulement si elles sont des disjonctions d'éléments d'une famille de propositions classiques élémentaires.

Nous avons vu également plus haut que l'on peut approcher les liens qui lient classique et quantique par le truchement de la relation de distributivité. Nous avons vu que la distributivité de  $\wedge$  et  $\vee$  pour  $a$ ,  $b$  et leur dérivés peut être caractérisée par la relation

$$a \circ b = a \wedge b, \text{ soit } a \wedge (\neg a \vee b) = a \wedge b.$$

Essayons donc d'interpréter géométriquement ce connecteur  $\circ$ .



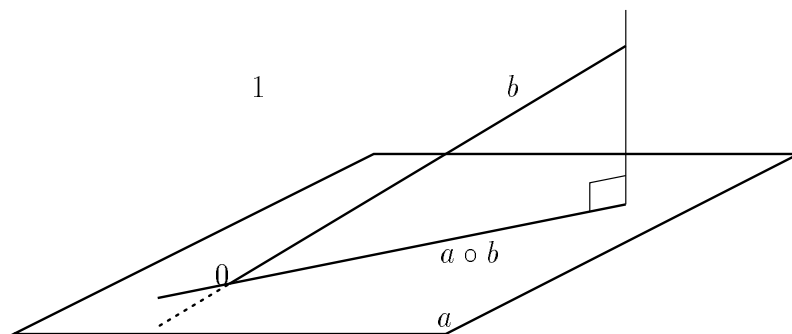
Cette figure<sup>(17)</sup> nous suggère que cette opération  $\circ$  est l'opérateur de projection orthogonale (ce qui justifie sa notation). Démontrons le :

**Démonstration:** Soit  $\xi$  un élément de  $b$ . Comme  $\mathcal{H} = a \vee a^\perp$ ,  $\xi$  se décompose de manière unique en  $\xi = \alpha + \alpha'$  où  $\alpha \in a$  et  $\alpha' \in a^\perp$ . On a alors  $a \cap (a^\perp + x) = a \cap (a^\perp + \alpha) = \alpha$ . **c.q.f.d.**

(16). Il est ici le lieu d'insister sur le fait que  $a$  et  $b$  ne sont PAS orthogonaux (car cette relation implique que  $a \wedge b = 0$ ), mais seulement *perpendiculaires*. Cette notion, qui correspond à notre relation de compatibilité, doit être bien distinguée de l'orthogonalité. C'est pour cette raison que nous éviterons d'employer le terme de « perpendiculaire ».

(17). Il s'agit d'une figure en dimension quatre que nous avons projetée le long de  $a \wedge b$  (qui est donc représenté par l'origine sans pour autant être supposé nul).

On a donc la représentation suivante



et on peut dire que  $a$  et  $b$  sont compatibles quand la projection orthogonale de l'un sur l'autre est leur intersection. Là encore, nous retrouvons la condition de n'avoir que des angles droits entre nos sous-espaces.

Ayant reconnu dans  $\circ$  la projection orthogonale, nous pouvons tirer une expression explicite de la mise en contexte au sens quantique. En effet, classiquement nous disons qu'il est le cas que  $a$  dans un certain contexte  $\gamma$  si la conjonction  $\gamma \wedge a$  est vraie ; ici le problème sera plus compliqué, car nous avons plusieurs possibilité pour prolonger le cas classique : nous pouvons aussi bien poser  $\gamma \wedge a$  que  $\gamma \circ a$ .

Notons tout d'abord que l'on retrouve dans les deux cas le problème classique de la réduction au contexte : il peut advenir que  $a \wedge b = a \wedge \neg b$  ou que  $a \circ b = a \circ \neg b$ . La solution est dans les deux cas de ne s'intéresser qu'au complément relatif de  $b$  dans  $a$ . La différence avec le cas classique apparaît avec le principe de retour à la réalité par disjonction de contextes contradictoires : ainsi nous avons en Logique Classique  $(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge b) = b$  ; en Logique Quantique, par contre, cette relation demande que le contexte  $a$  soit compatible avec la proposition  $b$ . Dans le cas général nous avons seulement :

$$\begin{cases} (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge b) \leq b, \\ (a \circ b) \vee (\neg a \circ b) \geq b. \end{cases}$$

Par contre  $\circ$  présente l'énorme avantage que (ATTENTION ! l'opérateur  $\circ$  n'est PAS commutatif)

$$b = b \circ (a \vee \neg a) = b \circ a \vee b \circ \neg a.$$

C'est à dire que, modulo  $b$ , on a bien « vrai » pour  $a \vee \neg a$  si l'on entend le contexte  $b$  comme la mise en facteur de  $b \circ \cdot$ , ce qui est faux pour  $b \wedge \cdot$ . C'est pour cette raison que le contexte est, par défaut, compris comme construit à l'aide de la projection.

### $\beta$ . La version évoluée: les espaces de Hilbert

Nous ne nous étendrons guère sur la version évoluée de ce que nous avons présenté. Nous nous contenterons de dire que, au delà des figures, un espace de Hilbert est une généralisation de la notion d'espace vectoriel de dimension finie ou infinie et admettant une notion d'orthogonalité (définie par un produit scalaire<sup>(18)</sup>). De plus un espace de Hilbert est, par définition, complet. Il en résulte que si  $h$  est un sous-espace de Hilbert (sous-espace vectoriel qui est un espace de Hilbert), il sera fermé, et donc  $h^{\perp\perp} = h$ . Cette propriété est cruciale pour l'utilisation logique de ces objets.

Il est assez facile de vérifier que les sous-espaces d'un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  munis de l'opération d'orthogonalisation forment un treillis orthomodulaire. En fait, si l'on se restreint à la dimension finie, on peut même démontrer que ce treillis orthocomplémenté est modulaire. Par ailleurs les considérations que nous avons eu au sujet de la compatibilité, de la distributivité et de la projection orthogonale au point  $\alpha$  restent valides.

(18). On parle plutôt de produit hilbertien, particulièrement dans les cas où l'on travaille avec des nombres complexes.

## γ. Le théorème de représentation de Piron

Les espaces de Hilbert jouissent d'une propriété qui les rend excessivement simples à décrire : les seules dimensions<sup>(19)</sup> possibles de ceux-ci sont  $0, 1, 2, \dots, n, \dots, \aleph_0$ <sup>(20)</sup>. et tous les espaces de Hilbert d'une dimension donnée sont isomorphes entre eux (on dit parfois L'espace de Hilbert pour l'espace de Hilbert de dimension infinie à isomorphisme près). Si l'on sait que de telles structures admettent souvent une axiomatisation simple, il est tentant de se poser la question de savoir si la Logique Quantique ne fournirait pas une description de ces modèles<sup>(21)</sup>.

La réponse (affirmative) à ce problème est fournie par un théorème de représentabilité dû à Piron, [17]<sup>(22)</sup>. Très similaire au théorème de Stone de la Logique Classique, il affirme que tout système de propositions quantiques (dénombrable) peut être considéré comme issu d'une géométrie projective. Ces géométries projectives sont essentiellement des algèbres de sous-espaces, et l'on sait qu'elles sont représentables comme des ensembles de sous-espaces d'un espace de Hilbert. En fait, tout système de propositions quantiques (dénombrable) peut être considéré comme un sous-treillis orthocomplémenté d'un seul et même espace de Hilbert.

Ceci justifie que nous considérons que **la Logique Quantique est la logique de la linéarité**, précisément la logique des espaces de Hilbert, de même que **la Logique Classique est la logique des ensembles**, précisément la logique des algèbres de Boole.

## § 5. Conclusion : le sens des symboles

Nous en arrivons à ce qui est souvent considéré comme la question essentielle qu'il faut poser à une logique : « Mais que veut dire votre formalisme? ». Cette question est, en fait souvent comprise comme « Que veulent dire les connecteurs? ». Nous doutons fort qu'une telle question admette une réponse satisfaisante. Nous en voulons pour preuve les diverses options proposées pour rendre compte du "sens" des quantificateurs :

- Pour certains le sens des connecteurs est le même en Logique Quantique qu'en Logique Classique ; seules changent des relations plus complexes telles que la distributivité (qui est placée à un niveau plus élevé).

Pour cela ils se basent sur le fait que, dans la définition axiomatique, les règles proposées pour  $\wedge$ ,  $\vee$ , et  $\neg$  sont les mêmes qu'en Logique Classique et que seule la loi de distributivité est remplacée par l'orthomodularité.

- Pour d'autres, c'est, bien entendu, le sens de  $\wedge$  et  $\vee$  qui change, le sens de  $\neg$  restant identique.

Pour se justifier ils se basent sur une analyse de la distributivité (laquelle ne concerne pas  $\neg$  de manière visible).

- A l'opposé il y a ceux qui pensent que c'est celui de  $\neg$  mais pas celui de  $\wedge$  et  $\vee$ .

Ce point est très intéressant, il se base sur un phénomène que nous n'avons pas utilisé et qui est qu'on ne dispose en général que de la structure de treillis et que contrairement aux algèbres Boole les treillis orthomodulaire (non booléens) admettent plusieurs négations, chacune pouvant être préférée pour telle ou telle situation<sup>(23)</sup>.

(19). La dimension d'un espace est le cardinal (unique) de ses bases. Quand nous parlerons de base pour un espace de Hilbert il s'agira par défaut d'une base hilbertienne (dans la définition de laquelle les combinaisons peuvent être infinies).

(20). L'aleph zéro,  $\aleph_0$ , désigne l'infini dénombrable; il s'agit du cardinal de  $\mathbb{N}$ , l'ensemble des entiers naturels.

(21). Bien entendu, comme cette logique ne parle que de sous-espaces, il ne peut s'agir que de l'axiomatisation du treillis des sous-espaces.

(22). On se reportera avantageusement à [24] également.

(23). Il y a en fait une autre justification que celle que nous donnons ici proposée par Bell & Hallett, [1]. Pour ceux-ci  $\wedge$  et  $\vee$  sont semblables car on a toujours

$$\begin{cases} a \vee b = c & \iff & \{x : c \leq x\} = \{x : a \leq x\} \cup \{x : b \leq x\} \\ a \wedge b = c & \iff & \{x : c \leq x\} = \{x : a \leq x\} \cap \{x : b \leq x\} \end{cases}$$

alors que

$$a = \neg b \iff \{x : a \leq x\} = \{x : x \wedge b = 0\}$$

- On trouve également ceux qui affirment que c'est le sens de  $\vee$  qui change, ceux de  $\wedge$  et  $\neg$  restant fixes.

La vision géométrique est le meilleur support de cette opinion : La négation peut être vue comme un complément, généralisant le cas classique. Le  $\wedge$  est l'intersection, exactement comme dans le cas classique. Reste donc le  $\vee$  qui passe d'une simple union à une notion plus générale englobant une idée d'intermédiaire.

- Comme variation sur ce thème on peut penser que  $\vee$  et  $\neg$  changent, le  $\wedge$  restant fixe.

Pour cela on joint l'argument précédent avec le fait que la négation n'a pas de définition canonique (troisième argument).

- Enfin, pour faire bonne mesure, d'aucuns pensent que tout change en Logique Quantique, ou plus précisément que le sens de tous les connecteurs change, toute modification de l'emploi de l'un interférant sur le sens des autres.

Si ces points de vue sont tous intéressants, en tout cas pour tel ou tel problème donné, il est douteux qu'on parvienne à extraire une "sémantique" meilleure que les autres dans l'absolu. Bien plus intéressante semble la voie qui vise à acquérir une intuition du fonctionnement du système dans son ensemble, par exemple en se basant sur une vision géométrique.

Liée à cette option géométrique reste la possibilité de se concentrer sur la relation de compatibilité. En effet, quand on peut voir que deux propositions sont compatibles, celles-ci se comportent, entre elles, de manière classique ; inversement, quand on ne le peut pas, pratiquement aucune relation ne peut être vérifiée autre que triviale. Le système axiomatique que nous avons proposé plus haut semble alors une bonne méthode pour aborder les raisonnements de ce type. Il est ainsi concevable de traiter un nombre de propositions qui aurait rendu un schéma illisible.

---

n'est vraie qu'en Logique Classique. Cette justification n'est pas très élégante : les deux premières formules ne sont que des tours pédants d'affirmer que  $\wedge$  et  $\vee$  sont des bornes supérieures et inférieures et la troisième n'est *a priori* qu'une caractérisation de la négation. Il aurait été plus judicieux de faire valoir l'incaractérisabilité de la négation.



### III. Les réseaux de neurones formels

Les réseaux de neurones formels, d'une manière très large, constituent une des solutions naturelles au problème de l'“intelligence artificielle” : ce sont des machines à optimiser. Les neurones qui constituent les réseaux sont issus d'une schématisation extrême des neurones réels les plus simples. Leur activité se résume essentiellement à trois points :

1. Somme des entrées (qui sont les sorties d'autres neurones),
2. Ecoulement d'une unité de temps,
3. Fonction de réaction : combinaison d'un seuillage et d'une saturation.

Leur méthode de traitement des problèmes classe les réseaux de neurones dans la rubrique des systèmes apprenant sur des exemples. Même si des propositions existent qui permettent d'entrer de l'information symbolique, ceci ne se fait qu'au niveau des neurones en représentant des propositions par ceux-ci, [23]. Inversement, on est assez peu capable de comprendre l'information stockée dans un réseau particulier.

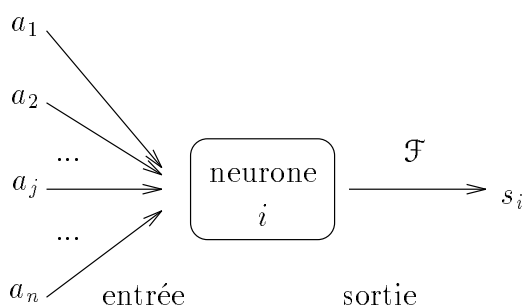
Notre propos sera ici de présenter une autre manière de voir les réseaux de neurones s'appuyant sur la Logique Quantique. Cette méthode ne vise pas tant à décrire l'information présente dans un réseau particulier, qu'à présenter les réseaux de neurones comme des systèmes quantiques (au sens de la Logique Quantique). Nous présentons rapidement, dans une première partie, les réseaux de neurones formels en couches en insistant sur la linéarité. Dans une seconde partie une interprétation quantique des opérations effectuées par ces réseaux est explorée. Enfin, en dernière partie nous donnons quelques pistes pour d'autres interprétations possibles utilisant la Logique Quantique.

#### § 1. Les réseaux de neurones formels en couches

Ce paragraphe constitue une présentation rapide de ces réseaux abordant l'angle qui va nous intéresser par la suite.

##### a. L'élément de base : le neurone

Un neurone formel, dans sa formulation générale, est un élément effectuant des calculs simples visant à produire à chaque unité de temps une sortie sur la donnée d'un certain nombre d'entrées. Bien entendu, cette définition ne répond pas à l'emploi exact qui en est fait : la plupart des applications pratiques et des résultats théoriques concernent un type bien particulier de neurones que nous nous proposons de décrire ici.



Tout d'abord un neurone, notons le  $i$ , dispose d'un certain nombre d'entrées,  $a_j$ , et d'une sortie,  $s_i$ . Ces voies seront utilisées pour communiquer avec d'autres neurones au sein de réseaux.

On définit en général l'état d'un neurone,  $e_i$ , comme étant la somme pondérée

$$e_i = \sum_j w_{i,j} . a_j - \vartheta_i$$

où  $w_{i,j}$  est un poids donné attaché à l'entrée  $j$  du neurone  $i$ , appelé *poids synaptique*, et où  $\vartheta_i$  est un nombre appelé *seuil* du neurone.

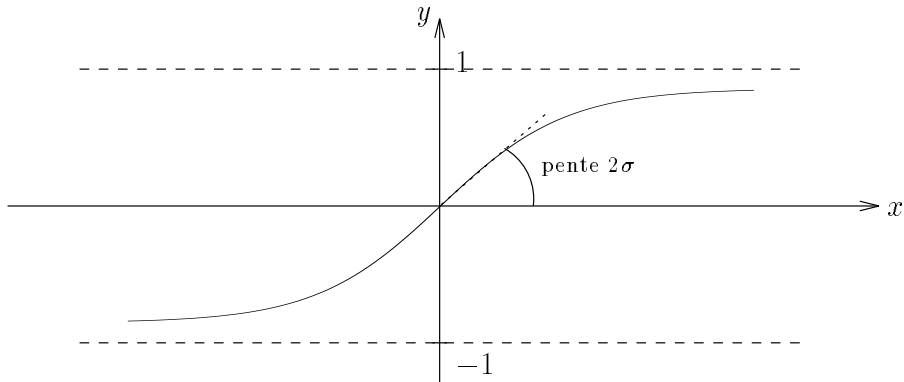
La sortie est calculée comme fonction de l'état par

$$s_i = \mathcal{F}(e_i).$$

où  $\mathcal{F}$  est une *fonction de saturation*. En général, on prend pour  $\mathcal{F}$  une fonction sigmoïde<sup>(24)</sup>

$$\mathcal{F}_\sigma(t) = \frac{1 - \mathbf{e}^{-\sigma t}}{1 + \mathbf{e}^{-\sigma t}} = \frac{2}{1 + \mathbf{e}^{-\sigma t}} - 1$$

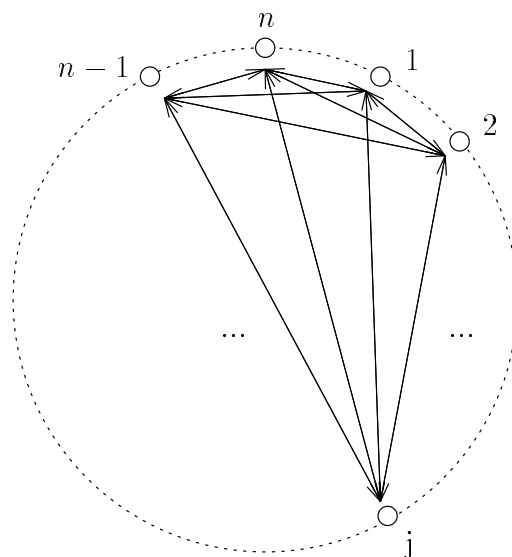
où  $\sigma$  est appelé la tension de la sigmoïde ( $1/\sigma$  peut être vu comme une température). Ces fonctions ont l'allure suivante.



Divers paramètres sont susceptibles d'évoluer au cours de la période d'apprentissage : la tension  $\sigma$  des saturations peut évoluer au cours du temps (par exemple dans les cas de recuit simulé) et les poids synaptique évoluer selon une fonction d'erreur (il s'agit de l'apprentissage proprement dit). Nous ne nous intéresserons pas ici à ces paramètres : nous étudierons les neurones et réseaux figés dans un état d'apprentissage donné.

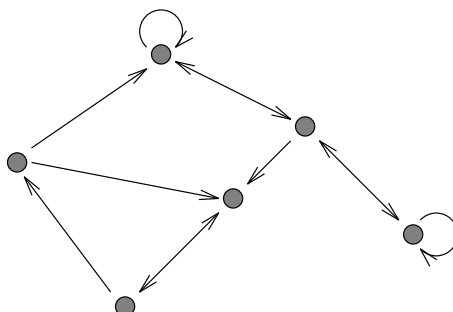
### b. Description des réseaux en couches

Le réseaux le plus général est la donnée d'une série  $1, 2, \dots, n$  de neurones tous connectés les uns aux autres la sortie  $s_i$  du neurone  $i$  constituant l'entrée  $a_i$  de tous les neurones pour l'unité de temps suivante. On parle pour ce réseau de réseau totalement connecté. On peut le symboliser par la figure suivante.



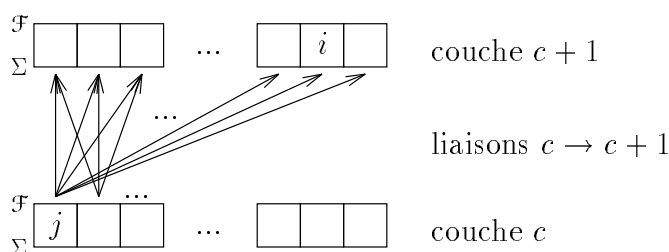
(24). Il arrive que l'on prenne l'identité plutôt que des fonctions de saturation; les neurones sont alors dits linéaires et leur étude est complètement triviale puisque le réseau se réduit à un simple opérateur linéaire. Nous écartons ce cas.

Dans la pratique il est souvent inutile d'avoir une connexion totale, on demande *a priori* seulement que certaines connexions soient établies, d'autres pouvant être inexistantes. Ce modèle rentre comme cas particulier du cas précédent en considérant qu'une connexion inexistante est une connexion de poids synaptique nul sur le neurone d'arrivée. On peut symboliser ce type de réseaux par la figure suivante.



Souvent, on demande que les connexions soient hiérarchisées, c'est-à-dire que le graphe orienté correspondant aux connexions (non nulles) ne comporte pas de circuit<sup>(25)</sup>. Dans la pratique, si l'on n'est pas intéressé par le nombre d'unités de temps qui existent entre tel et tel neurone et quitte à rajouter des neurones de relais, ce type de réseaux peut se mettre sous la forme de réseau en couches. Ceci peut être réalisé en ajoutant deux sommets fictifs au graphe du réseau l'un se mettant à la sortie des neurones n'ayant que des entrées (puits) et l'autre à l'entrée des neurones n'ayant que des sorties (sources) ; le graphe résultant admet alors une orientation bipolaire qui détermine des couches (voir [20], par exemple). C'est ce type de réseaux qui nous intéressera particulièrement.

Un réseau est dit *en couches* quand l'ensemble de ses neurones est partitionné en classes (appelées couches), ces couches étant munies d'un certain ordre, lequel doit être préservé par les connexions : un neurone  $j$  ne peut envoyer sa sortie comme entrée d'un neurone  $i$  que si le neurone  $j$  est dans une couche  $c$  et le neurone  $i$  dans la couche  $c + 1$ .



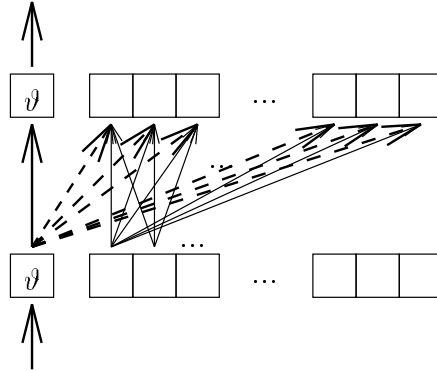
Les seules synapses existant au niveau de la couche  $c$  sont donc celles en direction de la couche  $c + 1$  et celles en provenance de la couche  $c - 1$ . Par extension on considère les points d'entrée du réseau comme une couche numérotée 0.

### c. Linéarisation du problème

Pour terminer avec la position du modèle de travail nous noterons qu'il est possible de supposer que nos neurones sont à seuil nul (nous avons supposé dans notre définition des neurones l'existence de seuils  $\vartheta_i$ ). Pour ce faire il suffit d'ajouter une unité virtuelle au réseau qui fournisse, quelle que soit l'entrée par ailleurs, une valeur  $\vartheta$  fixée (non-nulle). On remplace alors le seuillage par une synapse de poids  $-\vartheta_i/\vartheta$  avec cette unité. Pour respecter la structure en couches, il est possible d'ajouter un neurone de relais de cette valeur à chaque couche :

(25). Un circuit est un parcours non vide d'arêtes s'emboîtant les unes à la suite des autres et menant d'un sommet à lui-même.

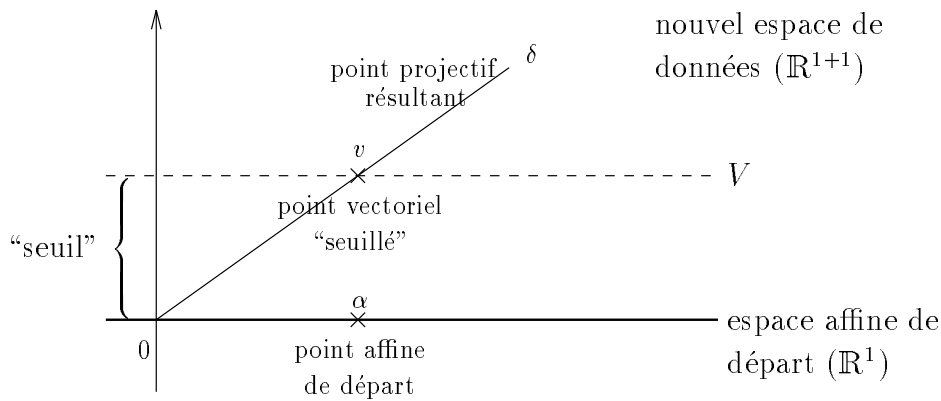




La fin de ce paragraphe bien que plus technique revêt une certaine importance et peut donner une bonne intuition de certains phénomènes.

Si du point de vue informatique ce changement est banal et tout à fait anodin, il n'en va pas de même pour l'interprétation quantique. Ceci relève d'un point que nous ne voulons pas trop développer, la transition de l'affine au projectif; nous nous contenterons de donner l'idée générale. Dans tout ce que nous avons fait jusqu'à présent, nous avons traité d'espaces vectoriels, donc passant par 0, plus précisément nous avons utilisé sans le dire des géométries projectives (géométries dont l'élément de base, le "point", est la droite vectorielle); or le cas qui nous intéresse relève en première analyse plus de la géométrie affine, où les droites sont sans attache particulière. En fait le changement de seuil assure le passage de la seconde à la première. En effet, en annulant les seuils, nous avons employé la méthode habituelle<sup>(26)</sup> de plongement de  $\mathbb{R}^n$ , l'espace affine de dimension  $n$ , dans  $\mathbb{P}^n = P(\mathbb{R}^{n+1})$ , l'espace projectif de dimension  $n$  (constitué des droites de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , l'espace vectoriel de dimension  $n + 1$ ).

Schématisons cela sur une figure de dimension  $n = 1$  afin de mieux voir ce qui se produit :



Le premier point ( $\alpha$ ) est celui de l'espace de départ, c'est un point affine de  $\mathbb{R}^n$  ( $\mathbb{R}^1$  sur la figure). En ajoutant une coordonnée constante on trouve un point  $v$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  ( $\mathbb{R}^{1+1}$  sur la figure). Comme tous ces points se situent sur l'hyperplan affine  $V$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , à chaque droite  $\delta = (0v)$  correspond un seul point  $\alpha$  et réciproquement. La transformation  $\alpha \mapsto \delta$  que nous venons de détailler est précisément celle que nous utilisons pour éliminer le seuil. Ainsi éliminer un seuil est exactement plonger un espace affine  $A$  dans l'espace projectif correspondant  $\mathbb{P}(\mathbb{R} \oplus A)$ .

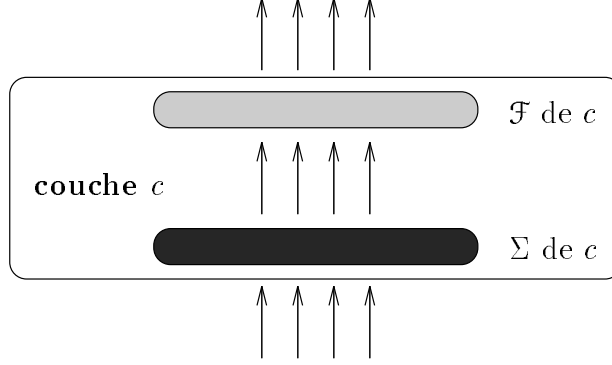
L'hyperplan à l'infini de cet espace projectif est constitué des éléments pour lesquels la coordonnée ajoutée vaudrait 0, donc ne contient l'image d'aucun des éléments de départ. Ainsi le passage dans un espace projectif est-il purement un changement de représentation: de type "affine" les points deviennent de plein droit des droites, soit les propositions quantiques que nous cherchons.

(26). Voir au besoin Bourbaki, [6], *Algèbre II*, §9, n<sup>os</sup> 5,6 et 8 (pp. 132 sqq.) pour plus de détails.

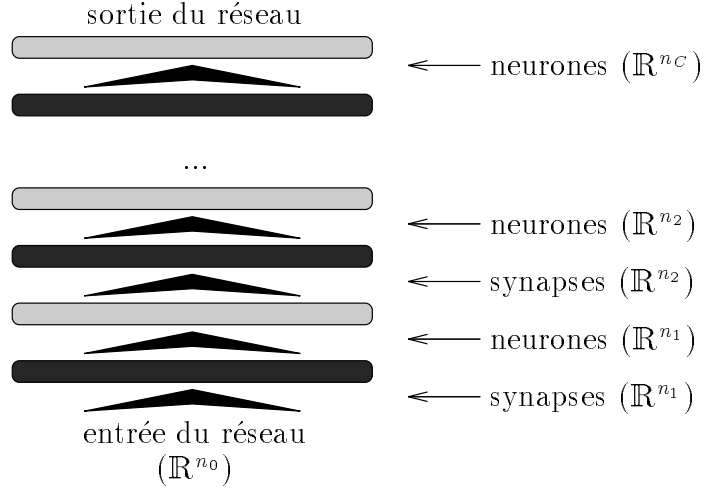
## § 2. Les neurones et les propositions quantiques

### a. Vue générale: les réseaux décomposés en opérateurs

Observons globalement un réseau de neurones tel que nous l'avons réduit au paragraphe précédent. Ce réseau peut être considéré comme une succession alternée de deux types de transformations: des opérations linéaires et des saturations. Les opérations linéaires sont effectuées par les synapses, et les saturations ont lieu au sein des neurones.



Au niveau d'un neurone l'information pertinente est constituée d'un scalaire; ainsi une couche de neurones correspond à un vecteur de  $\mathbb{R}^{n_c}$  (si on note  $n_c$  le nombre de neurones de la couche  $c$ ). De même l'information présente au niveau des synapses de sortie de cette couche (à la sortie des fonctions de saturation) constitue également un vecteur de  $\mathbb{R}^{n_c}$ . Nous avons donc globalement pour le réseau la succession suivante (schématiquement):



Si on note  $n_0$  le nombre d'entrées,  $C$  le nombre de couches,  $n_{C+1}$  le nombre de sorties du réseau,  $\sigma_c \in \Sigma_c = \mathbb{R}^{n_c}$  l'état au niveau des synapses et  $\nu_c \in N_c = \mathbb{R}^{n_c}$  l'état au niveau des neurones, nous avons:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \text{entrée} & & \text{couche 1} & & & \dots & & \text{couche } C & & \text{sortie} \\
 \nu_0 & \mapsto & \sigma_1 & \mapsto & \nu_1 & \mapsto & \sigma_2 & \mapsto & \dots & \mapsto & \sigma_C & \mapsto & \nu_C & \mapsto & \sigma_{C+1} \\
 \mathbb{R}^{n_0} & \rightarrow & \mathbb{R}^{n_1} & \rightarrow & \mathbb{R}^{n_1} & \rightarrow & \mathbb{R}^{n_2} & \rightarrow & \dots & \rightarrow & \mathbb{R}^{n_C} & \rightarrow & \mathbb{R}^{n_C} & \rightarrow & \mathbb{R}^{n_{C+1}}
 \end{array}$$

Et si l'on regroupe par couche les entrées on obtient

$$\sigma_c = O_c \cdot \nu_{c-1}$$

où  $O_c \in \mathcal{M}_{n_c \times n_{c-1}}(\mathbb{R})$  est un opérateur linéaire. De même  $\nu_c$  s'obtient de  $\sigma_c$  par saturation selon certaines directions. C'est sur cette réduction que nous allons maintenant porter plus particulièrement notre attention.

## b. Vue rapprochée: les neurones comme propositions quantiques

### α. Position des propositions quantiques

Nous l'avons vu ces réseaux agissent essentiellement par couches successives et il serait illusoire de vouloir dire plus sans connaître l'allure des fonctions de saturation. Ainsi, une direction peut être fortement exagérée par un opérateur et immédiatement après réduite par une fonction de saturation. Nous nous restreindrons donc ici à des fonctions de saturation sigmoïdes (avec leur limite qu'est la fonction signe<sup>(27)</sup>, que nous considérerons comme la sigmoïde de tension infinie).

Dans ce cas vont être mis en corrélation les directions de saturation (qui correspondent à la base canonique de notre espace de représentation) et les images des vecteurs précédents par les transformations linéaires. Tel quel il est douteux d'y voir quoi que ce soit ; introduisons une terminologie quantique en appelant proposition quantique les droites correspondant à la base canonique<sup>(28)</sup> des espaces  $\mathbb{R}^{n_c}$  que nous avons définis plus haut,  $(e_i^c)$  (nous verrons plus loin que cette base n'est pas la plus intéressante). Un état d'une couche est un vecteur dans cet espace, et après la transformation décrite au point III.1.c, seule sa direction compte : nous nous retrouvons donc avec une droite que nous pouvons donc considérer comme une proposition quantique atomique  $p_c$ , combinaison des précédentes<sup>(29)</sup>.

### β. Les opérateurs linéaires en termes quantiques

Voyons donc maintenant dans quels termes se présente le réseau. Nous avons en entrée une proposition quantique  $p_0$  (représentée par le vecteur  $\nu_0$ ) dans un espace de référence  $\mathbb{R}^{n_0}$ . La première transformation que rencontrera cette donnée sera la première couche de synapse.

La transformation que subira  $p_0$  en ce point n'est pas essentiellement différente que celle que subira tout vecteur de  $\mathbb{R}^{n_0}$ , en particulier les vecteurs de base. Nous avons que

$$\nu_0 = \sum_{i=1}^{n_0} x_i \cdot e_i^0,$$

ainsi son transformé sera

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n_0} x_i \cdot O_1(e_i^0).$$

Les éléments importants sont les transformés des vecteurs de base,  $O_1(e_i^0)$ . Ces vecteurs sont dans  $\mathbb{R}^{n_1}$  donc se décomposent selon la base canonique de cet espace :

$$O_1(e_i^0) = \sum_{j=1}^{n_1} w_{i,j}^1 \cdot e_j^1.$$

Ainsi cette transformation linéaire apparaît comme une définition des propositions quantiques de la couche  $c - 1$  en terme de celles de la couche  $c$ .

Cette opération s'effectuera ainsi au niveau de toutes les couches de synapses. Cependant, si elle offre un intérêt, celui-ci reste extrêmement réduit sans le secours des fonctions de saturation, comme nous l'avons indiqué plus haut, qui vont, au niveau de chaque couche de neurones, transformer encore notre proposition quantique-état du système.

### γ. Les saturations en termes quantiques

C'est ainsi qu'après la première transformation ce sont les termes dans lesquels est définie la donnée qui auront changé : elle n'est plus exprimée en terme des  $(p_i^0)$  mais des  $(p_i^1)$ . C'est alors au sein du même espace  $\mathbb{R}^{n_1}$  que va s'effectuer la seconde transformation : la saturation. Il est bien important de remarquer que cette transformation a lieu à l'intérieur d'un même espace de représentation

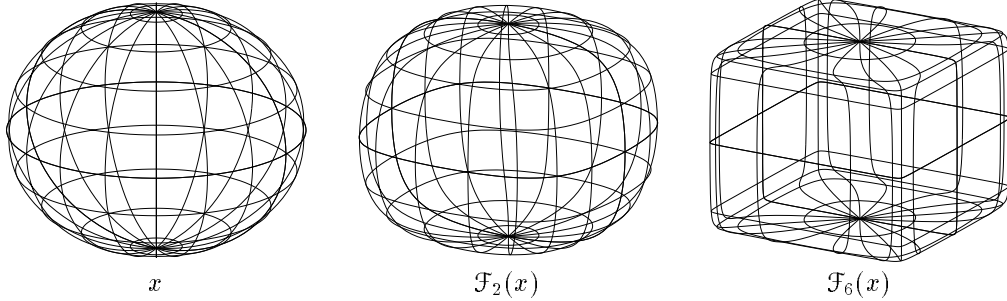
---

(27). La fonction signe vaut  $-1$  sur les réels négatifs,  $+1$  sur les positifs et  $0$  en  $0$ .

(28). La base canonique de  $\mathbb{R}^{n_c}$  est la suite  $e_1^c = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $e_2^c = (0, 1, 0, \dots, 0)$ , ...,  $e_{n_c}^c = (0, \dots, 0, 1)$ .

(29). Pour combiner des propositions quantiques il faut ou bien choisir des vecteurs sur chaque droite-proposition, ou bien revenir dans l'espace affine de départ, ce qui revient à prendre comme vecteur celui de coordonnée ajoutée égale au seuil.

Afin de mieux faire comprendre le rôle des fonctions de saturation nous représentons la sphère unité telle quelle, puis transformée par des fonctions de saturation de tension 2 placées le long des trois directions canoniques, puis enfin transformée par des fonctions de saturation de tension 6 de même orientation :



L'opération apparaît nettement : placer des saturations le long des axes a tendance à transformer les sphères en cubes d'autant plus que leur rayon est plus important. Accessoirement ces fonctions introduisent de la non-linéarité et bornent les valeurs des éléments ; nous négligerons ce fait étant donné que nous avons linéarisé le problème : au lieu de considérer que la donnée est plus ou moins grosse, nous pouvons considérer que la fonction de saturation est plus ou moins tendue<sup>(30)</sup>.

Observons encore notre figure pour voir la déformation introduite par de telles saturations dans notre espace de représentation considéré comme une logique quantique sachant que la sphère modifiée dans les seconde et troisième figures est paramétrée de la même manière que dans la première : il apparaît que les lignes de notre représentation ont tendance à se rapprocher des coins du cube. L'action principale de la saturation est de faire tendre les directions vers les directions diagonales (nous appellerons ainsi les directions déterminées par les diagonales du cube unité). Les coordonnées des vecteurs tendent en effet vers  $-1$  ou  $1$ .

Ces directions diagonales ne sont en rien orthogonales quand la dimension est supérieure à 2 ; cependant, si on les considère comme des propositions quantiques en effectuant une abstraction par rapport à leur plongement réel dans  $\mathbb{R}^{n_c}$ , on voit que l'effet de la saturation va être de rendre le système plus classique en ce sens qu'il va éliminer les intermédiaires qui peuvent exister entre ces  $2^{n_c-1}$  directions. On peut donc considérer qu'il existe un espace abstrait de représentation quantique (de dimension  $2^{n_c-1}$ ) qui représente ces espaces comme des droites deux à deux orthogonales. La saturation est alors une transformation de  $\mathbb{R}^{n_c}$  dans cet espace  $\mathbb{R}^{2^{n_c-1}}$ . Il faut alors, pour interpréter l'opération linéaire suivante composer avec  $O_{c+1}$  une transformation linéaire de  $\mathbb{R}^{2^{n_c-1}}$  dans  $\mathbb{R}^{n_c}$ , l'interprétation de la couche suivante se faisant en termes de cette transformation composée.

## 8. Conclusion : interprétation "quantique" d'une couche de réseau

Nous sommes maintenant en mesure de présenter une interprétation complète en termes de Logique Quantique de l'activité d'un réseau de neurones : une fois définie une structure en couches et séparé le seuil de chaque neurone par couche, nous pouvons considérer les espaces de valeur de chaque couche comme des espaces projectifs, chaque valeur de la couche étant un élément de cet espace, une droite en termes d'espaces vectoriels ou de Hilbert, ou encore une proposition en termes de Logique Quantique. On peut alors interpréter l'opérateur linéaire constituant la "zone d'entrée" de chaque couche comme une définition des propositions d'une couche en termes de la suivante. Enfin, la "zone de sortie", réalisée un peu au gré du programmeur, sans théorie propre, peut s'interpréter, mais de manière moins heureuse comme une tension vers des directions diagonales fixées. Quitte à changer d'espace de représentation cette dernière partie peut également s'interpréter comme une "classicismation" dans l'espace des propositions quantiques constituées par les directions diagonales précédentes.

(30). En fait, ceci ne peut réellement être fait que si les données fournies au réseau sont calibrées. Si ce n'est pas le cas, notre analyse n'est valable qu'au delà de la première couche de neurones, cette dernière devant être considérée comme une couche d'appropriation des entrées.

### § 3. Conclusion : autres approches possibles

Le système d'interprétation que nous avons donné, même s'il est théoriquement recevable, présente, il faut bien l'avouer, une certaine obscurité, et, en tout cas, manque d'aisance pour son emploi. Certes la logique classique n'arrive pas jusque là et a, dans cette voie, baissé les bras ; cependant, il est à se demander s'il ne serait pas plus profitable de repenser ces systèmes d'apprentissage et d'adaptation. Comme à peu près tout ce qui n'est pas restreint marche, ce domaine est, bien évidemment des plus prolifiques ; nous nous contenterons donc de quelques remarques.

Tout d'abord, l'adaptation la plus patente du système consisterait à modifier les fonctions de saturation. En effet, nous avons vu que celles-ci transforment un espace qui s'interprète bien en dimension  $n$  en un espace de représentation essentiellement de dimension  $2^{n-1}$ . Il est connu<sup>(31)</sup>, de plus, que la capacité de discrimination d'un réseau n'augmente pas en  $\Theta(2^n)$  mais reste de l'ordre de sa taille. Il serait donc plus judicieux de rester en termes quantique et de poser comme fonction de saturation une fonction qui rende plus ou moins classique le système en faisant tendre les directions quelconques vers des directions orthogonales (et non les directions diagonales). Un tel système pourrait encore être organisé en couches successives alternant une redéfinition des termes du problèmes (opérateur linéaire) et une "classicismation".

Dans une autre voie des systèmes de représentation de connaissance ont été mis au point qui utilisent la Logique Quantique comme logique de traitement<sup>(32)</sup>. Un des avantages de cette logique est de pouvoir définir des combinaisons de propositions, ce qui peut s'avérer intéressant pour tel ou tel problème (en partie) théorisé.

Enfin, mais cela n'est pas forcément très simple, il doit être possible d'étendre généreusement la construction de G. Towell, [23], dans un cadre quantique ; sachant que la partie classique actuelle peut être étendue, simplifiée et systématisée<sup>(33)</sup>.

---

(31). N'ayant pas de référence précise, nous renvoyons au cours de Mme Thiria.

(32). J. Sallantin travaille dans cette voie. On peut consulter notamment [21].

(33). Nous avons effectué, dans le cadre du cours de Mme Thiria, un exposé présentant la thèse de G. Towell, [23].

## IV. Les vecteurs de population

Nous essayons ici de généraliser une notion qui jouit actuellement de la faveur des spécialistes étudiant les aires motrices du Primate: le vecteur de population. Nous présenterons d'abord cette modélisation, en lui adjoignant un exemple de traitement proche: la perception des couleurs. Nous tenterons pour chaque exemple une présentation en termes quantiques. Ceci nous fournira les bases d'une généralisation.

### § 1. Introduction : la stratégie des vertébrés

Quand on connaît encore imparfaitement un domaine d'objets que l'on côtoie fréquemment il est difficile de se rendre bien compte de ce qui est important dans son fonctionnement et quel rôle précis a quel élément. Il est donc souvent très utile d'observer d'autres domaines d'objets afin de voir surgir les différences: c'est ainsi que l'ethnologie a pu nourrir la sociologie. De même il est parfois enrichissant de regarder le câblage neurologique des invertébrés pour saisir plus précisément certaines particularités de celui des vertébrés.

La première chose frappante dans l'organisation neurologique des invertébrés est l'existence presque systématique de neurones géants et de gros neurones, en petit nombre, connectés en un grand nombre de points et qui traitent presque seuls certaines fonctions clés. En regard de cela, on peut noter que les groupes d'invertébrés comptent fréquemment un très grand nombre d'individus. A l'opposé de cette stratégie invertébrée nous trouvons la stratégie des vertébrés où la moindre structure neurale comporte un grand nombre de petits neurones effectuant des tâches identiques. De manière corrélée, et si l'on exclut l'Homme moderne, les groupes d'individus sont d'une taille très modeste.

L'établissement des structures corticales de traitement de l'information chez les vertébrés doit donc suivre cette logique. Les traitements auront généralement à leur disposition un grand nombre de neurones et devront optimiser leur tâche sur cette donnée. Les avantages les plus nets sont un gain considérable en précision (on peut segmenter l'espace de représentation) et en robustesse (on peut confronter les résultats de structures effectuant des calculs proches ou identiques).

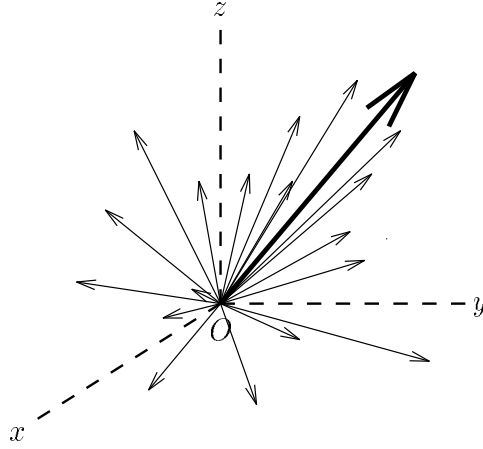
### § 2. Deux procès physiologiques sous l'angle "quantique"

#### a. La direction dans une aire motrice

Le vecteur de population apporte sa contribution pour ce qui est de savoir ce qu'est une direction d'action (de mouvement d'un bras par exemple) et permet de faire se rejoindre trois conceptions issues de la psychologie naïve, de la neurophysiologie et de la psychologie expérimentale.

En premier lieu, la psychologie naïve nous suggère la pertinence d'une notion de direction d'action (direction dans laquelle le sujet lance sa main pour atteindre un objet, par exemple). Cette direction est vue comme une direction d'espace repérée dans le référentiel du sujet. Sur un autre plan, la neurophysiologie, travaillant au niveau du neurone a permis de localiser dans les aires motrices du Primate des zones excitées sélectivement en fonction de la direction choisie. Mais le lien restait à établir qui permettait de faire émerger une direction de l'excitation de neurones sélectifs à des directions précises. Enfin la psychologie expérimentale avait émis un modèle dit de rotation mentale expliquant les déplacements angulaires de la direction cible: pour la psychologue, il existe une direction mentale qui tourne (grossièrement à vitesse constante) d'une direction donnée à la direction cible. Ce modèle s'appuyait sur une étude de temps de latence.

L'apport de la théorie du vecteur de population est de donner explicitement la direction choisie par le sujet connaissant l'état d'excitation des neurones du cortex moteur localisé précédemment. Pour plus de détails nous renvoyons à [10]; cet article, introductif, présente également un certain nombre de références bibliographiques.



Dans cette formalisation on observe une série de neurones,  $i \in P$ , présents dans une aire du cortex moteur connue pour indiquer le choix de direction d'action du (bras du) sujet. Nous donc affaire à un groupe ou *population de neurones*,  $P$ , dont les niveaux d'excitation, ou *activations*,  $a_i$ , sont mesurés. On observe pour chaque neurone  $i$  une direction de prédilection  $\vec{x}_i$  : le neurone est préférentiellement excité quand la direction réellement choisie,  $\vec{x}$ , est proche de  $\vec{x}_i$ . Approximativement, son activité est donnée par<sup>(34)</sup> :

$$a_i = \vec{x} \cdot \vec{x}_i.$$

Par définition le *vecteur de population* est défini par

$$\vec{x}_P = \sum_{i \in P} a_i \cdot \vec{x}_i;$$

et la théorie du même nom affirme que ce vecteur  $\vec{x}_P$  approche de manière très satisfaisante la direction  $\vec{x}$  effectivement choisie par le sujet.

Dans la pratique de nombreux neurones traitent ce type d'information, aussi leur répartition est uniforme avec une assez bonne précision. Ainsi mathématiquement le vecteur de population,  $\vec{x}_P$ , approche-t-il très bien le vecteur effectif,  $\vec{x}$  (à la norme près, s'entend) :

$$\vec{x}_P \simeq \alpha \cdot \vec{x}.$$

Pour être plus précis il faudrait ajouter pour chaque neurone un coefficient correspondant, *grosso modo*, à l'inverse de la densité relative d'éléments préférant une direction proche, soit

$$\frac{1}{\sum_{j \in P} |\vec{x}_i \cdot \vec{x}_j|}.$$

Si l'on veut être mathématiquement exact, il faudrait prendre

$$\vec{x}_P = \sum_{i \in P} a_i \cdot \vec{\xi}_i$$

où la matrice  $(\vec{\xi}_i)$  est une inverse à gauche de la matrice  $(\vec{x}_i)$ , la formule simple du vecteur de population n'étant correcte (à la limite) que pour un grand nombre de neurones répartis de manière homogène. Dans ce cas l'erreur que l'on fait ainsi est certainement inférieure à l'approximation faite en supposant que  $a_i = \vec{x} \cdot \vec{x}_i$ .

---

(34). Nous notons  $\vec{x} \cdot \vec{y}$  le produit scalaire des vecteurs  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$ , soit la somme des produits de leurs coordonnées correspondantes :  $\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos(\widehat{\vec{x}, \vec{y}})$ .

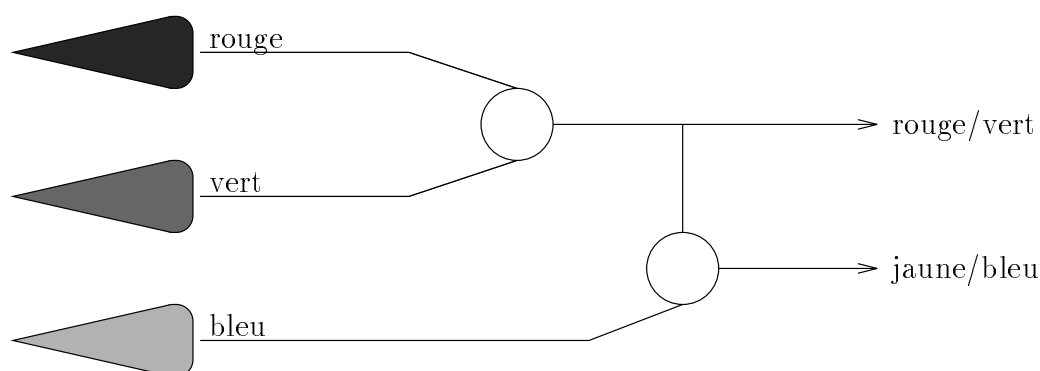
Comme nous l'avons déjà précisé, la "stratégie" des vertébrés veut qu'ils disposent d'un grand nombre de neurones pour chaque tâche, ce processus fonctionnera donc de façon d'autant plus exacte et simple. Le gain le plus évident se fera au niveau de la robustesse puisque plus les neurones sont nombreux plus on peut se permettre d'erreurs au niveau de certains d'entre eux. Si l'on a un point de vue classique, ces neurones fonctionnent en "démocratie" : la direction globale est choisie par le plus grand nombre, les erreurs ponctuelles sont noyées dans la masse et les petites erreurs systématiques corrigées par des effets statistiques. Cependant on voit bien que ce système est encore plus "démocratique" que ce qu'on a l'habitude d'entendre par ce mot : conformément à la vision quantique des choses, la décision collective n'est pas la plus représentée des "opinions" mais une moyenne de ces "opinions". Le vecteur de population manie l'art du consensus.

Pour en terminer avec cet exemple nous remarquerons que ce modèle à été extrêmement fructueux dans des études faites sur des petits singes (*monkeys*) sur lesquels il a permis de visualiser le phénomène de rotation mentale. Le vecteur de population, calculé par un ordinateur sur la base des données fournies par les électrodes placées sur des neurones du cortex étudié, se déplaçait en effet graduellement d'une direction donnée à la direction cible. Ceci confirmait donc les expériences précédentes des psychologues réalisées sans accès direct à l'information.

Malgré ce succès il faut rester conscient des limitations de ce modèle, principalement sa restriction à la tâche considérée, restriction que nous allons nous attacher à lever en partie.

## b. La distinction des couleurs

Nous ne détaillerons pas tous les processus intervenant dans la vision des couleurs<sup>(35)</sup> et nous contenterons de donner les grandes lignes. Au tout début de la chaîne informative nous trouvons les photorécepteurs. Ceux qui nous intéressent principalement sont les cônes, lesquels sont pourvus de trois types de pigments photosensibles (grossièrement avec pic de sensibilité respectivement dans le rouge, dans le vert et dans le bleu). Chaque type de pigment agit grossièrement comme un filtre passe-bande. Précisément il réagit d'autant plus qu'il reçoit plus d'énergie dans des fréquences plus proche de sa zone de plus forte sensibilité. Ces photorécepteurs déchargent d'autant moins que plus d'énergie est absorbée par le pigment. Ainsi l'information reçue est codée en énergie et non pas en couleur ou en fréquence. A partir des trois types de données il faut donc récupérer une information de couleur et une information d'intensité. Grossièrement la couleur est calculée selon le principe suivant.



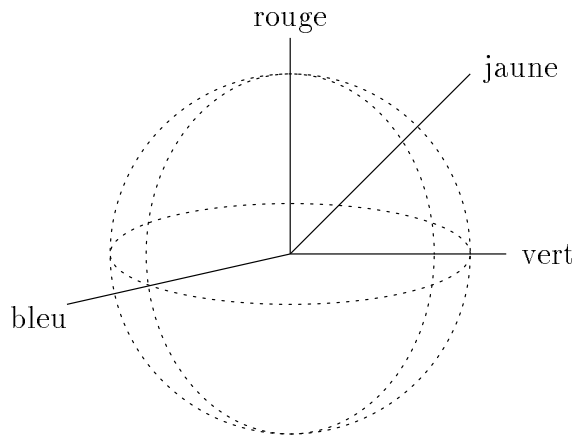
L'opposition rouge/vert est calculée par différence entre des cônes "rouges" et des cônes "verts", de même l'opposition jaune/bleu est obtenue par différence entre la somme rouge+vert et les cônes "bleus".

Exprimés en termes quantiques, ces deux paramètres permettent de se faire une idée de la raison pour laquelle les couleurs ne sont pas psychologiquement situées "en ligne" mais "en cercle". Sur la figure suivante nous avons donc représenté les quatre paramètres principaux (le rouge et le vert, le

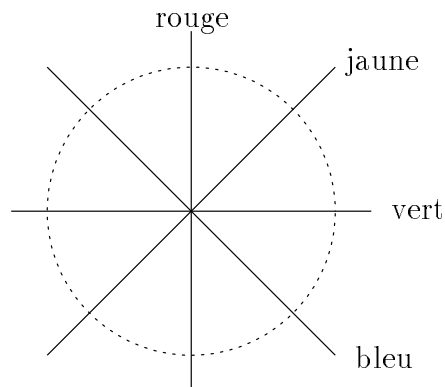
(35). Il est important de distinguer dans ce qui suit la notion de « couleur » des physiciens et celle des psychologues. Nous emploierons systématiquement le mot « fréquence » pour le premier sens, le mot « couleur » étant réservé à la perception chromatique.



jaune et le bleu) en considérant que le jaune est le rouge plus le vert :



Nous avons deux plans non-orthogonaux qui correspondent à deux oppositions fondamentales classant les couleurs (même si nous ne connaissons pas de mot pour les désigner). Nous avons ainsi une représentation naturelle des couleurs comme triangle sphérique (portion de calotte déterminée par trois grands cercles), d'où la représentation habituelle en triangle des couleurs. On remarque que les quadrants comprenant des coordonnées négatives ne recouvrent aucune réalité physique, on peut donc projeter une des trois couleurs sur un quadrant inutile de son orthogonal (en veillant à ne pas introduire de recouvrement) :



Nous retrouvons ainsi le cercle des couleurs, bien connu des peintres (à la différence près que les couleurs apparaissent deux fois ici en des positions opposées).

Le fait important, du point de vue logique, est que les mêmes propositions quantiques ont été conservées ; seul l'espace servant de contexte a changé. Dans l'exemple ci-dessus on a ainsi décidé de poser que le bleu était du vert moins du rouge, ce qui changeait l'espace de représentation de nos propositions, passant ainsi de

$$\begin{cases} h_R, h_V, h_B, h_J \leq \mathcal{H}, \\ h_J \leq h_R \vee h_V, \\ h_B \perp h_R \vee h_V, \text{ donc } h_B \perp h_J, \end{cases}$$

à

$$\begin{cases} h_R, h_V, h_B, h_J \leq \mathcal{H}, \\ h_B, h_J \leq h_R \vee h_V, \\ h_B \perp h_J. \end{cases}$$

Comme dans l'exemple de la direction choisie par une aire motrice, le principe de stabilisation par moyennage de nombreux éléments reste valable : une couleur est déterminée par de l'information provenant de plusieurs photorécepteurs. Ceux-ci n'auront donc pas besoin d'être syntonisés précisément : la cohérence de l'information viendra de la robustesse de la méthode.

### § 3. Une nouvelle formulation

Dans les deux sections précédentes nous avons observé un phénomène similaire que nous pouvons ainsi résumer : dans une modalité donnée, dont on a pu décrire de manière vectorielle l'espace de valeur, des éléments propres associés à des neurones ou à des groupes de neurones ont pu être décrits comme des propositions quantiques, l'élément pertinent pour le sujet étant la proposition résultant de la moyenne de celles-ci.

De plus cette organisation apparaît, chez les vertébrés, comme simple à réaliser puisque s'appuyant sur un trait physiologique simple : l'abondance de matériel neuronal. A ce niveau, une structure en propositions quantiques se présente comme plus naturelle que la représentation classique. Enfin, si l'on se laisse guider par l'interprétation du chapitre précédent, avec toutes les précautions nécessaires puisque les neurones formels ne ressemblent que d'assez loin aux neurones réels, nous voyons qu'une unique couche de neurones peut suffire à entretenir ce type d'information, dont la "moyenne" peut être effectuée en une seule couche ensuite.

Il est donc à supposer que ce type de modélisation de l'information codée dans nos connexions neurales sera amené à se développer. A défaut d'être utilisé par les neurophysiologistes eux-mêmes, il sera certainement possible d'ajouter aux deux interprétations données ici celles de nouveaux modèles.

D'autre part, à rebours des neurophysiologues, les psychologues et les philosophes de l'esprit ont dans cette modélisation quantique un outil leur permettant de parler "d'en haut" des objets qui les intéressent particulièrement, indépendamment de l'implémentation neurologique de ceux-ci, tout comme les psychologues avaient découvert le choix de direction et la représentation des couleurs avant que celles-ci soient élucidés physiologiquement. C'est dans cette direction que nous nous proposons maintenant de nous diriger.



## V. Les concepts naturels

### § 1. Introduction : le “biotope” des concepts

Nous ne nous proposons pas ici de définir finement la notion de concept, comme on peut s’y attendre pour un mémoire de DEA ; nous travaillerons, par contre, sur une notion que nous garderons volontairement imprécise, pour deux raisons essentielles. D’une part, nous n’aurons pas besoin de plus pour traiter des points qui nous intéresseront. D’autre part, il est vraisemblable que le genre de remarques que nous ferons sont applicables à des objets qui ne sont pas qualifiables du terme de « concept » (du moins pas de manière claire).

Ce bémol étant porté à la clef, nous nous intéresserons principalement à étudier quelques points qui peuvent justifier de l’emploi de la Logique Quantique comme logique sous-jacente aux concepts. Nonobstant cette visée, nous ne nous permettrons pas ici de prétendre que la Logique Quantique présente une certaine naturalité pour l’expression des concepts ; nous proposons uniquement un outil conceptuel qui vise à mieux comprendre ceux-ci. Il est possible que la Logique Quantique bénéficie effectivement de cette naturalité, nous en sommes même persuadé ; cependant, aucune preuve tangible ne va dans ce sens, aussi nous nous contenterons d’affirmer que la **Logique Quantique est plus naturelle pour l’étude des concepts que la Logique Classique**, cette dernière gommant un certain nombre de phénomènes importants. Il faudra bien se garder de faire jouer à la Logique Quantique le rôle que l’on a pu assigner à la Logique Classique : de l’énorme intérêt normatif qu’elle peut présenter on a voulu déduire que cette logique s’applique universellement à la réalité et à tout raisonnement correct ; c’est oublier que la logique n’est qu’un outil de modélisation et que un raisonnement fait dans son cadre n’est valide que s’il y a adéquation entre les objets réels (ici les faits) et les objets du modèle (ici les propositions). La physique nous a appris que la Logique Classique ne pouvait plus être considérée comme la logique des faits réels ; elle perdait ainsi sa position éminente au profit de la Logique Quantique, laquelle peut d’ailleurs perdre ce titre à tout instant.

Nous nous proposons d’introduire la problématique justifiant le recours à la Logique Quantique au fur et à mesure de la présentation d’exemples qui l’illustrent. La vision quantique des choses sera proposée au cours de cette présentation pour être discutée en détail dans le paragraphe suivant.

### § 2. Exemples et problèmes

#### a. Les têtards, les crapauds et les paradoxes sorites

Le terme de paradoxe sorite fut forgé par Cargile sur la base du mot grec  $\sigma\omega\rho\acute{o}\varsigma$ , *tas*, [7]. Ce type de paradoxe vise à mettre en lumière le problème de la frontière entre  $A$  et non- $A$  ; l’exemple type en est le « paradoxe du batracien » :

Soit un bocal rempli d’eau, contenant un têtard et filmé par une caméra (à 24 images par seconde). Au bout de trois semaines de tournage nous avons 43 545 600 images et une grenouille [resp. un crapaud]. Ce nombre les rend certes difficiles à analyser mais on peut être certain que la première image représente un têtard et la dernière une grenouille [resp. un crapaud].

Donc, logiquement, dans la série, on sait qu’il existe une image de têtard immédiatement suivie par une image de grenouille [resp. de crapaud].

Or vraiment ! Comment les distinguer ?

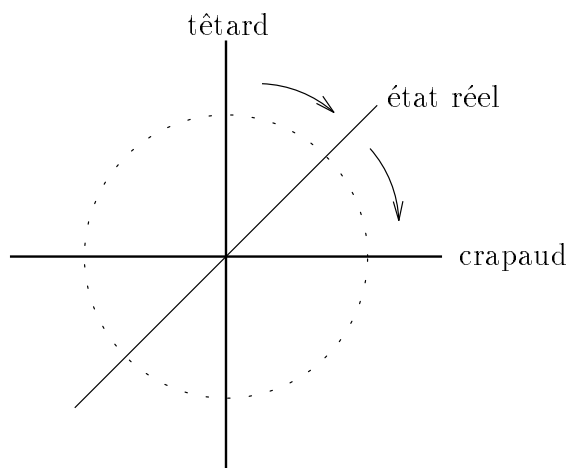
La réponse la plus naturelle est de postuler que l’on peut être “plus ou moins” crapaud. On retrouve ici les requêtes de “la” logique floue. L’inconvénient de celle-ci tient en ce qu’elle est plutôt un cadre qu’une réalité, plus un langage qu’une réelle logique<sup>(36)</sup>. Dans la pratique la Logique Floue est l’espoir de pouvoir utiliser un « plus ou moins » sur des propositions. La Logique Quantique, elle, modélise un

---

(36). En fait nos propos sont légèrement partiels. Il existe effectivement une Logique Floue, même si elle est quasiment dénuée de toute propriété mathématique. Celle-ci se définit comme la logique sous-jacente aux relations entre ensembles flous, soit une définition sémantique ; c’est malheureusement la méthode de définition, ce qui explique le faible intérêt théorique de la chose en propre. Pour obtenir des éléments utilisables d’un point de vue théorique, il faut replacer la Logique Floue dans un cadre plus général d’autres logiques de même type. Le problème essentiel de la Logique Floue n’est, cependant, pas théorique, il est pratique : les gens qui en parlent et/ou l’utilisent ne se réfèrent pas à l’objet mais à une certaine vision... “en flou”, précisément. L’ensemble ressemble plus à une réaction de rejet face au « carcan » de la

« plus ou moins », même s'il n'est pas toujours facile de l'exprimer en chiffres. Nous nous proposons de l'illustrer sur cet exemple.

Le problème de la frontière est très lié au problème de la négation. La solution de la Logique Floue est de dire que quand on est  $A$  à  $n\%$  on est « non- $A$  » à  $(100 - n)\%$ , que le « et » est le minimum des pourcentages et le « ou » le maximum (des fonctions plus complexes sont parfois envisagées qui ne changent rien au problème). La Logique Quantique, elle, ne pose pas *a priori* de rapports quantitatifs même si on peut en retrouver *a posteriori* dans les angles que fait la propositions considérée avec des éléments définis.



Dans cette optique on retrouve la vision des concepts comme prototypes : le « crapaud » comme le « têtard » sont deux absolus dont compte plus la proximité à l'état réel que le fait de le contenir comme sur-classe (relation de subsumption).

Naturellement le concept de « crapaud » ne devra pas être représenté en général par un espace de dimension 1 (une droite), de même que son « contraire » ; nous ne l'avons fait ici que pour le problème particulier qui nous a occupé. Ceci peut être également utile pour des besoins de schématisation. Il faut généralement poser au moins autant de dimensions que l'on veut distinguer de paramètres plus ou moins indépendants, comme la présence d'une queue, la transparence du corps, etc... Chacun de ces paramètres définit dans un rapport qui lui est propre la conformité au prototype. On le voit, nous sommes loin de pouvoir définir simplement la conjonction de propriétés simplement à partir de mesures d'angles,...

## b. Le rouge, le vert et la négation des couleurs

Le cas des couleurs paraît plus facile à traiter, étant plus proche, peut être, de l'idée que l'on se fait des prototypes. Nous mettrons plus ici l'accent sur le problème de savoir ce qu'est la négation.

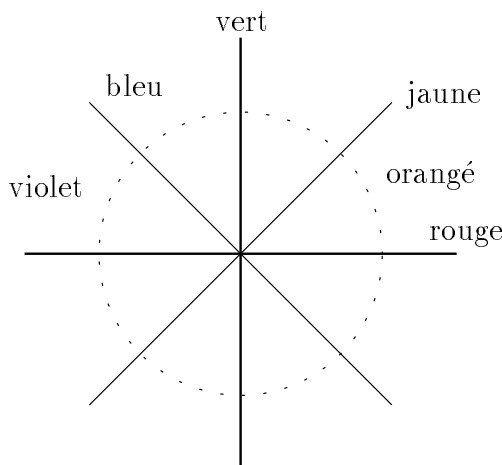
Si nous disposons les couleurs selon le « cercle chromatique » (une sphère serait plus exacte, voir la partie précédente), on peut considérer que « rouge » correspond à une certaine zone du disque. Immédiatement resurgit le problème de la frontière : comment faire pour admettre que soit « rouge » une couleur et ne le soit pas une couleur imperceptiblement différente ? Là encore nous pouvons supposer que l'on dispose d'un prototype du « rouge » et d'un prototype du « non-rouge », l'écart de proximité entre les deux définissant de « combien » une certaine couleur est rouge. Le problème revient encore à savoir ce qu'est le « non-rouge » ; il est incontournable.

Conformément à la Logique Classique, nous pourrions prendre pour « non-rouge » « tout ce qui n'est pas rouge » ; mais cela nous amènera certainement à prendre comme « non-rouge » des choses imperceptiblement différentes du « rouge ». Dans l'optique de la Logique Quantique, il peut être intéressant de

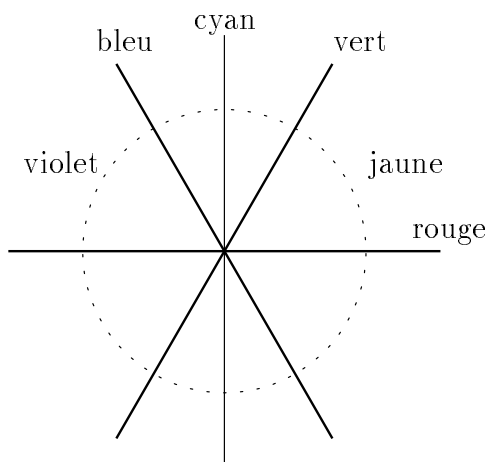
---

Logique Classique. Indépendamment de cela, cette logique peut présenter de nombreux intérêts pratiques, du pilotage de machine à laver le linge à la publicité pour appareils photographiques.

prendre pour « non-rouge » la signification « vert ».



L'important est de noter que, dans cette optique, plusieurs possibilités s'offrent à nous qui sont permises par le fait que la négation n'est pas unique dans un treillis orthomodulaire (ou que les espaces vectoriels admettent plusieurs produits scalaires) : nous avons choisi « vert » qui correspond à la décomposition physiologique (rouge/vert, jaune/bleu) ou à la décomposition classique rouge/jaune/bleu<sup>(37)</sup> ; mais nous aurions pu choisir « cyan » qui correspond à la décomposition télévisuelle rouge/vert/bleu,



ou encore « bleu » qui correspond à une décomposition chaud/froid... Une infinité de possibilités se présentent qui peuvent être plus ou moins adaptées à tel ou tel problème.

Bien entendu, dans cette optique quantique, le  $\vee$  ne correspond plus à l'intuition classique : il s'agit maintenant plutôt d'interpréter  $a \vee b$  comme «  $a$ ,  $b$ , ou tout ce qu'on peut avoir comme concepts intermédiaires ».

### c. L'irrationnel, le rationnel et la négation des substantifs

Nous venons de voir que dans certains cas il peut être intéressant de faire varier la négation d'un concept ; inversement, il peut être intéressant de voir des cas où la négation habituelle d'un concept est « naturellement » plus proche d'une négation quantique : la négation des substantifs.

La négation, en français comme dans d'autres langues, agit de manière très différente sur les substantifs et sur les verbes. Si nous reprenons l'exemple de notre batracien (cf. V.2.a), la négation la plus intéressante de « être un crapaud » n'est pas « ne pas être un crapaud », mais se rapproche plus

(37). On peut se reporter à la discussion de la partie IV sur ce thème.

de « être un non-(encore-)crapaud ». Cet exemple n'est pas le plus franc, mais il montre bien que la négation linguistique des substantifs a quelque chose de plus absolu que celle des verbes, cette dernière étant ressentie comme plus proche de la négation classique. Bien sûr, l'éducation et la culture ambiante luttent contre ce fait et peuvent le rendre assez peu visible, d'autant que déjà, comme nous l'avons vu, tout un *continuum* peut exister, au sein de la Logique Quantique, entre une négation classique (quand les divers paramètres intervenant sont parfaitement compatibles) et une négation ressentie comme plus quantique (dès que certains points saillants sont incompatibles, au sens de la Logique Quantique).

Revenons dans le domaine de la linguistique. On sait qu'en indo-européen existe un préfixe de négation des substantifs dont l'idée va, semble-t-il, plus loin qu'une simple négation classique<sup>(38)</sup>. Ce préfixe est *av-* en grec (et reste vivant en grec moderne), *in-* en latin (et reste vivant dans les langues romanes), *an-* en sanskrit, *un-* dans les langues germaniques (il reste vivant en anglais, allemand, néerlandais (au moins)). Les domaines indo-européens où l'idée est la plus forte (à notre connaissance) sont certainement le grec et le sanskrit : on pensera au mot *anarchie*, qui nous vient du Grec, et à l'idée de *non-violence* qui a eu un certain bonheur en Inde (le mot sanskrit est *ahimsā*). Ainsi l'*an-arch-ie* n'est pas simplement le fait qu'il n'y ait pas de gouvernement mais va plus loin, se réfère à une certaine *négation* de la notion d'état (négation précisément, mais dans le sens habituel et non pas "logique"). De même, être *non-violent*, n'est pas le simple fait de ne pas être *violent*, mais d'adhérer à une théorie qui rejette la *violence*, "sous toutes ses formes". Ainsi la négation du substantif, au moins dans ces langues, et au moins pour un certain nombre de cas, ne doit pas être visualisée par la négation au sens classique, mais par la *negatio* latine. Le rapport est plus celui qui peut relier les verbes *aio* et *nego*<sup>(39)</sup> : une opposition.

Nous concluons ce propos par le vœu pieux que si l'« irrationnel » ne peut être éliminé, il cède au moins la place au « non-rationnel ».

#### d. Le blé, l'avoine et la croissance des concepts

Un bon modèle est, en Logique comme ailleurs, un modèle simple. Le problème est toujours, bien entendu, de savoir ce que veut dire « simple ». Un modèle d'une réalité physique n'est certainement pas simple quand il est simple à décrire mais bien plutôt quand il est simple à réaliser, à implémenter pour être plus précis, si l'on veut bien emprunter ce mot aux informaticiens. Ceci admet un pendant au niveau biologique : plus un système, pour une performance donnée, est simple, plus il aura tendance à apparaître tôt. Un bref calcul de probabilité montre d'ailleurs que cette relation n'est pas linéaire : si on est un peu plus simple, on a des chances d'apparaître beaucoup plus tôt.

Les faits de la nature étant ce qu'ils sont, l'espèce humaine semble être la première à avoir atteint son niveau de raffinement des concepts. Même si d'autres espèces ont un appareil intellectuel similaire (par ordre de plausibilité on peut citer : l'Homme de Néanderthal, le Bonobo, le Chimpanzé, le Dauphin, etc.) qu'ils n'ont peut être pas pu développer pour des raisons d'"outillage" (phonation, usage évolué des mains, etc.) il n'en reste pas moins infiniment probable que cet appareil est implémenté de manière similaire voire identique ; ainsi notre système de traitement des concepts doit il être, pour l'efficacité constatée, le système qui peut s'implémenter le plus simplement.

C'est en se basant sur la partie IV que l'on peut fonder la simplicité du système des propositions quantique pour la définition des concepts. Ceci N'IMPLIQUE PAS que le traitement des concepts soit produit par des réseaux de petite profondeur tout comme le choix d'une direction d'action peut faire intervenir des éléments de décision très complexes ; par contre, ceci autorise à penser comme vraisemblable une définition corticale simple de ceux-ci. Il reste à justifier que ce modèle est utile et explicatif puisqu'il est acquis qu'il englobe la Logique Classique. Nous nous proposons à ce titre d'illustrer le mécanisme de séparation des concepts.

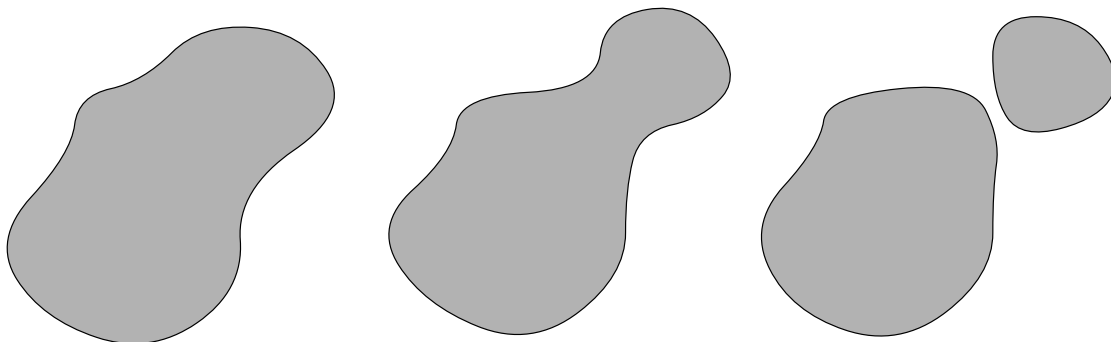
Il est notable que, dans une certaine mesure, ce mécanisme peut se schématiser dans tous les cas

---

(38). Ce même phénomène existe certainement dans d'autres familles de langues dont nous ne parlerons pas ici du seul fait de notre ignorance.

(39). cf. Benveniste, [3], livre 3, chapitre 6, *Le vocabulaire latin des signes et présages*.

par une représentation classique :



Cependant on retrouve là un problème que nous avons déjà pu opposer à la Logique Floue : ce schéma est construit à partir de distances supposées inscriptibles dans le plan ; or nous n'avons aucune idée de ce que peut être la "forme" d'un concept. Il est plus simple de supposer un système purement quantique où chaque paramètre est plus ou moins présent. Un concept devient alors un sous-espace vectoriel de l'espace des paramètres.

Prenons un exemple concret de différenciation de concepts : la distinction entre blé et avoine. Un rat des villes voyant un champ de céréales décrètera certainement qu'il s'agit d'un champ de blé. A l'opposé, le rat des champs fait parfaitement, et dès le premier coup d'œil, la différence entre un champ de blé et un champ d'avoine, par exemple. Fréquemment, entre l'un et l'autre, nous connaissons d'abord la catégorie générale de céréale « blé » que nous affinons en même temps que nous nommons d'anciennes sous-classes. Par la suite, même si nous savons faire la différence entre un pied de blé et un pied d'avoine, nous pouvons toujours employer le terme blé pour désigner sa famille à condition que le contexte s'y prête. C'est un peu la même idée qui préside au fait que le terme *corn* désigne dans les pays anglo-saxons (le grain de) la céréale commune (le blé en Grande Bretagne, l'avoine en Ecosse et en Irlande et le maïs en Amérique et en Australie). Le fameux déboire que connut l'Europe à ce sujet après guerre montre bien que des personnes connaissant la distinction entre les désignés général et restreint sont à même de les confondre.

Ce phénomène se comprend certainement mieux si l'on admet que sont fixés un certain nombre de paramètres, dont certains certainement très complexes, qui évoluent très lentement. Ces paramètres déterminent, en tant que propositions quantiques, un espace de Hilbert  $\mathcal{H}^{(40)}$ . On peut alors présenter notre concept général (« céréale herbacée » p.e.) comme un sous-espace  $h$  de  $\mathcal{H}$ , comprenant lui-même des sous-espaces correspondant aux concepts particuliers  $h_1$  (« blé ») et  $h_2$  (« avoine »). Plaçons nous maintenant dans le cas d'une personne connaissant la différence entre blé et avoine, c'est-à-dire telle que

$$h_1 \vee h_2 \leq h \leq \mathcal{H} \quad \text{et} \quad h_1 \neq h_2,$$

mais qui dans le contexte qui nous intéresse néglige, pour une raison ou une autre, consciemment ou non, un certain nombre de paramètres. Les paramètres restants déterminent un autre espace de Hilbert

$$\mathcal{H}' < \mathcal{H}$$

dans lequel les concepts qui nous intéressent seront définis par

$$\begin{aligned} \text{« céréale herbacée » : } h' &= \mathcal{H}' \circ h, \\ \text{« blé » : } h'_1 &= \mathcal{H}' \circ h_1 \text{ (qui reste inclus dans } h'), \\ \text{et « avoine » : } h'_2 &= \mathcal{H}' \circ h_2 \text{ (inclus également dans } h'). \end{aligned}$$

On voit qu'alors  $h'_1$ ,  $h'_2$  et  $h'$  peuvent devenir très proches voire confondus ; dans ce cas on dira plus facilement l'un pour l'autre et le mot le plus courant sera vraisemblablement choisi.

(40). Dans la pratique cet espace sera de dimension finie. Il pourra cependant être intéressant de considérer qu'il puisse, *a priori*, être infini ; ceci afin de traiter plus exactement les cas présentant un nombre important de dimensions.



A la lumière de ceci nous voyons que l'apprentissage de la différence entre blé et avoine provient du concours de deux phénomènes : d'une part, une évolution des concepts et, d'autre part, un apprentissage de la pertinence de tel ou tel paramètre (comme par exemple « avoir des barbes »). L'apprentissage de paramètres détermine l'espace des paramètres  $\mathcal{H}$  et sert de contexte général ; tandis que l'évolution des contextes (particuliers) fait varier la définition des sous-espaces représentant les concepts. Pour rendre compte de la différenciation des noms des concepts qui survient au moment où deux concepts se séparent il n'est pas invraisemblable de supposer que les noms correspondent à des sous-espaces de l'espace des concepts (en termes classiques, un nom correspond à une classe d'éléments conceptuels).

### e. Les fruits, les légumes et les *dvandvas*

Nous avons vu que plusieurs concepts pouvaient émerger d'un concept qui les regroupaient, d'une certaine manière ; on peut se demander également comment plusieurs concepts peuvent se réunir et essayer d'aborder l'équivalent de l'union de deux concepts. La première manière à laquelle on pense de regrouper deux concepts passe par le truchement des éléments linguistiques « ou », pour les propriétés, et « et », pour les individus. Comme on peut s'y attendre, ce regroupement, s'il est le plus simple à utiliser, est certainement le plus difficile à analyser puisqu'il emploie toutes les ressources intellectuelles humaines ; nous observerons donc de préférence une construction linguistique aussi intéressante que (relativement) rare : le *dvandva*<sup>(41)</sup>.

Benveniste définissait ainsi<sup>(42)</sup> le *dvandva*, « paire » en sanskrit :

« [...] Il s'agit de mots doubles dont les deux composants sont en asyndète, simplement juxtaposés, l'un et l'autre soit au pluriel, soit plus fréquemment au duel. Les deux termes, étroitement associés forment une unité conceptuelle. Ce type est illustré en védique par *Mitra Varunā* qui unifie les deux dieux juxtaposés ; *dyāvā pṛthivī* (*dyaus/pṛthivī*) « ciel-terre » ou encore *mātā-pitarā(u)* « les deux, père et mère ». Le *dvandva* subsume l'unicité du concept en ses deux espèces distinctes. »

En plus des exemples classiques du védique *mitrāvāruṇā*, *pitārāmātārā* (réversible en *mātārāpitārā*) et *dyāvāpṛthivī*, nous retrouvons, plus proche de nous, le mot grec *νυχθήμερον* « (durée de) nuit + jour » (encore en usage, *ἡμερονύκτιον* est aussi attesté), ou le latin *Patres conscripti* qui désignait les membres du Sénat (nous préférons écarter cet exemple du fait que, d'une part, sa nature de *dvandva* est discutée, et d'autre part, notre analyse ne semble pas lui être applicable). En français moderne il faudrait certainement considérer comme *dvandva* la locution *Messieurs Dames*<sup>(43)</sup>.

Le premier trait frappant est que cette union n'est pas extensive, donc ne correspond pas à un « ou » classique. Certes *νυχθήμερον* désigne bien la « réunion » de la nuit et du jour, mais non seulement celle-ci : il y a plus dans *νυχθήμερον* que dans *νύξ* (*νυκτός*) « nuit » et *ἡμέρα* « jour ». Nous avons l'idée de jour, de nuit, mais également toutes ces périodes indéfinissables qui sont entre les deux : le *νυχθήμερον* désigne 24 heures. De même, quand nous saluons ces *Messieursdames* à l'entrée de la boulangerie, nous ne saluons pas d'une part les messieurs et d'autre part les dames, mais bien globalement toutes les personnes présentes. Ici on pourrait objecter que la disjonction est extensionnelle puisqu'une personne est « ou bien » un homme « ou bien » une femme ; ce serait une erreur : la locution *Messieurs Dames* fonctionne même si l'on ne sait pas le genre des personnes présentes, ni même le nombre exact de ces personnes dans les différents genres. Nous disons ainsi également *Messieurs Dames* (les deux éléments au pluriel) quand la population de la boulangerie est composée d'un homme et de trois femmes, d'un homme et d'une femme, ou de la boulangerie et d'une personne de sexe indéterminé.

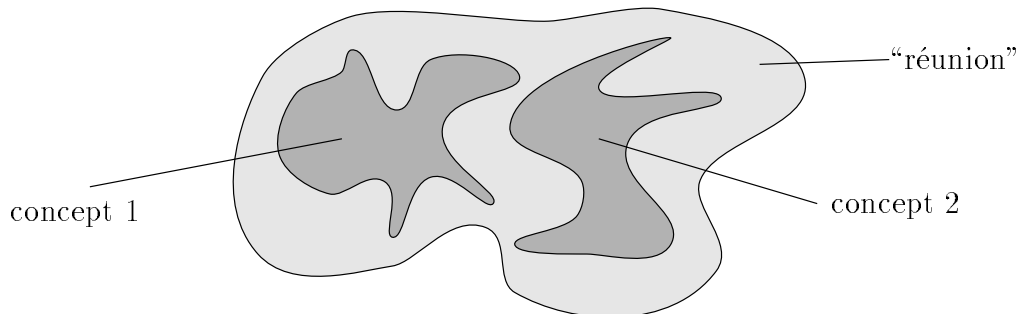
Très proches des *dvandvas* nous trouvons quelques locutions composées de deux mots reliées par le copulatif *et* mais fonctionnant souvent comme un seul mot. L'exemple le plus courant en est certainement *fruízélégumes*. L'idée de « *fruízélégumes* » est, là encore, plus large que celles réunies de *fruits* et de *légumes* ; le même phénomène que précédemment est à l'œuvre : le sens de la « paire » est plus

(41). cf. [4], p. 147

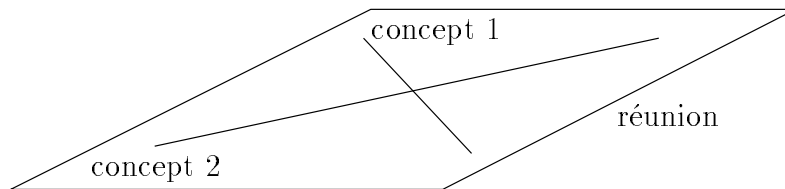
(42). cf. [2], livre 3, chapitre 1, *La tripartition des fonctions*, p. 287 sq.

(43). En français écrit il s'agit de deux mots, l'appellation de *dvandva* n'est donc pas absolument correcte.

large que celui de ses composantes, et ceci dans le même sens, la compréhension de possibilités intermédiaires, même si celle-ci sont extensivement nulles (n’ont pas d’individu représentant). la situation, vue classiquement, paraît un peu confuse (cf. figure)



tandis qu’une présentation quantique peut donner un support plus adapté :



#### f. La société, l’individu et l’extensionnalité logique

Ce problème nous mène directement au problème plus général de l’expression de l’extensionnalité logique. L’extensionnalité logique est le fait que si  $q = \bigvee_i p_i$  et si les  $p_i$  et  $r$  sont atomiques<sup>(44)</sup> alors  $r \leq q$  implique que  $r = p_i$  pour un certain  $i$ . La formalisation habituelle des objets extensionnel est la notion d’ensemble utilisée en Mathématiques : un ensemble ne vaut que pour ses éléments (qui sont essentiellement les parties atomiques du système formé par ses parties). Une proposition extensionnelle est et n’est que son extension définie comme ses occurrences de satisfaction.

Dans tout ce qui touche à la pensée humaine, on cherche en général à disposer de propositions non-extensionnelles, le “sens” de celles-ci étant nommé leurs intensions. Evidemment, personne ne sait ce que sont les intensions même si chacun dispose d’un certain nombre de requêtes à formuler à leur égard. De même que la Logique Floue est surtout l’espoir de quantifier la satisfaction d’une proposition, l’intension est surtout l’espoir de remplacer des occurrences par du sens ; il est fort douteux que ceci puisse se faire de manière uniforme.

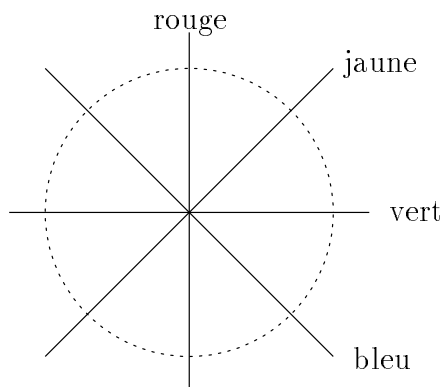
La partie importante du sens réside plus fortement dans le choix du système formel modélisant un problème que dans des propriétés formelles des propositions. Ces dernières ne sont que des outils permettant de posséder et de transmettre un savoir ; c’est certainement cette raison qui les fait apparaître comme plus tangibles. Il en va de même, par exemple, des principes relationnels qui régissent une société : connus de tous, au sens de la maîtrise, et quasiment jamais explicités il sont souvent inconnus, au sens de la connaissance verbalisée ou théorique. Les choses que l’on mentionne le plus souvent (à l’exception près des ouvrages de sociologie) sont précisément celles qui varient d’un individu à l’autre : elle sont importantes au niveau de l’individu, mais ne sont pas l’essence de la société (même si celle-ci émerge du comportement de celui-la). Nous retrouvons la remarque que nous avons faite plus haut au sujet des vertébrés : la connaissance visible et explicite est parfois très différente de l’essence des choses. La critique est similaire à celle qu’avait formulé Chomsky opposant sa vision de la grammaire, connaissance d’un individu, à la grammaire antérieure, mi-normative mi-descriptive. On peu citer encore le cas de la Mécanique Classique : l’ellipticité des orbites planétaires est une conséquence de cette théorie. Elle fait sens et éclaire un aspect du modèle ; étant vérifié, ce fait rend plus plausibles les hypothèses de

(44). Une proposition  $a$  est atomique si  $a \neq 0$  et si  $b < a$  implique que  $b = 0$ . Les atomes d’un système logique sont ses éléments minimaux pour la relation de déduction.

modélisation comme la loi de la gravitation universelle. C'est cette loi qui est le choix, donc le sens, et ses conséquences sont ce qui permet de le saisir. En Logique, un système logique, par exemple donné sous la forme de règles de déduction et d'hypothèses, constitue un choix, donc une prise de parti sur la réalité, et ses conséquences, c'est-à-dire les démonstrations (plutôt que les théorèmes), permettent de mieux comprendre ce qu'on a réellement choisi.

Pour la Logique Quantique comme pour les autres systèmes, raisonner à système fixe fait oublier que l'essentiel du sens est dans le choix du système. Ainsi si l'on battit un système classique autour de deux faits  $A$  et  $B$ , en imaginant que la Mécanique Quantique décrive notre Univers, cela signifie que l'on suppose  $A$  et  $B$  compatibles; autrement dit, cela implique un choix, éventuellement inconscient, extrêmement fort sur  $A$  et  $B$ . Ainsi le sens de «  $A$  ou  $B$  » ne doit pas tellement être cherché dans cette proposition particulière mais bien plutôt dans le sens de  $A$ , le sens de  $B$  et l'image qui gouverne le « ou » du système employé.

Ici la disjonction est fortement non-extensionnelle, mais le dire intensionnel ne semble pas exact et, dans tous les cas, apporte moins d'information que la représentation géométrique par la somme de sous-espaces. De plus, cette image a l'avantage de préciser *de quelle manière* ce «  $A$  ou  $B$  » est non-extensionnel : comme les cas que nous avons observés l'indiquent on peut le considérer comme recouvrant l'idée intuitive de «  $A$ ,  $B$ , et tout une série d'intermédiaires ». Ainsi dans la représentation en plan des couleurs nous avons la figure :



Il est effectivement possible, si l'on raisonne avec des filtres, de considérer que le jaune est intermédiaire entre le rouge et le vert, et, si l'on raisonne avec des lumières que le bleu est intermédiaire entre le rouge et le vert. Malheureusement, il n'est pas clair que cela se fasse si simplement dans le cas général. Là encore, l'image du plan engendré par deux droites est plus parlante.

### § 3. Conclusions

Nous avons vu, au fil des questions posées par les points ci-dessus apparaître plusieurs éléments de la Logique Quantique que nous nous proposons ici de rassembler.

Nous avons pu voir plusieurs fois au cours de cette étude que la disjonction présente un fort aspect non-extensionnel, que nous nous garderons bien de qualifier d'intensionnel. Nous avons discuté ceci au point f. Cette propriété nous est apparue comme présentant un intérêt pour aborder le problème de la modélisation de la disjonction de concepts pour la relation de subsomption (point d). Prolongements naturels des concepts, les substantifs présentent une forme de construction qui peut également bénéficier de cette approche : le *dvandva* (point e).

Comme il se doit, cette conception de la disjonction n'est pas isolée ; elle implique une certaine conception des propositions elles-mêmes. Celles-ci, en effet, se visualisent mieux, non pas comme décrivant exactement une situation factuelle, mais plutôt comme représentant des prototypes propositionnels dont les faits sont plus ou moins proche (point a). Ceci permet de se défaire de problèmes de définitions de frontières et de négation, inessentiels à certaines questions.

Nous avons vu que le problème de la frontière et celui de la négation sont très liés. La frontière étant "floue", il peut être intéressant de s'interroger sur l'unicité de la négation. De fait, nous avons vu

en première partie que les logiques quantiques admettent plusieurs négations à chaque fois qu'elles ne se réduisent pas à des logiques classiques. Il a été noté à ce propos qu'il peut être très enrichissant de pouvoir jouer sur la variabilité de la négation (point b).

Si ce jeu de définition de négation peut paraître arbitraire, nous avons étudié (point c) que les négations de substantifs, particulièrement dans des langues anciennes comme le grec ou le sanskrit, peuvent se rapprocher plus d'une négation en termes de prototypes. La négation apparaît alors plus comme une opposition que comme un complémentaire.

Tous ces aspects, *combinés* aux approches possibles algébriques, sémantiques et syntaxiques, montrent bien l'intérêt de la Logique Quantique en tant qu'outil de modélisation.

Comme les autres sciences, la Logique se doit d'explorer les modèles théoriques vraisemblables d'explication de ses phénomènes objectifs<sup>(45)</sup>. C'est dans cette approche que nous avons essayé d'agencer la Logique Quantique à la conception habituelle des "concepts". Nous voulons croire que notre approche a éclairé les deux termes du débat et, en tout cas, a contribué à lever le voile d'étrangeté qui couvrait les concepts. Ceux-ci ne sont pas des objets si mystérieux et risquent fort, malgré leur considérable richesse d'emploi, de se révéler d'une grande simplicité (descriptive) de structure.

---

(45). Putnam défendit la thèse que la Logique devait être considérée comme une science empirique en se fondant, notamment, sur la Logique Quantique. On peut voir à ce sujet ses articles [18] et [19], ou le commentaire de Gibbins, dans [12] (Gibbins mentionne, à raison, quelques inexactitudes techniques présentes chez Putnam).



## VI. Conclusion générale

Après nous être intéressé à la Logique Quantique en général, nous avons essayé, au cours de ce DEA d'appliquer ses notions aux domaines d'étude de la cognition présentant des points de rapprochement avec cette Logique. Ceci nous a amené à affiner et personnaliser la présentation de cette logique, notamment en lui adjoignant un système déductif puissant et en présentant sous une forme picturale simple des propriétés mathématiques plus profondes. Ceci nous a également amené à nous intéresser à une interprétation quantique de certaines opérations des réseaux de neurones formels, et, avec moins de satisfaction, au fonctionnement global d'un tel réseau. Ceci nous a conduit à proposer une formulation unique et extensible de deux modèles neurophysiologiques, le vecteur de population et la représentation des couleurs. Au plus haut degré ceci nous a également porté à étudier en quelle manière la Logique Quantique, toujours comme cadre de modélisation, pouvait aider à comprendre les concepts et certaines relations les reliant.

Même si ces travaux sont restés à l'état d'ébauche, que ce soit le fait de limitations de temps, de connaissances, de capacités ou simplement le fait que la Logique Quantique elle-même ne se prête à l'exercice que dans une certaine mesure, il apparaît que celle-ci permet de mieux exprimer certaines notions que ne le permettraient d'autres logiques dont la Logique Classique (dans l'état actuel de nos connaissances). Nous espérons donc que ce fait, particulièrement saillant dans nos deux derniers chapitres, convaincra que même si elle peut être trop complexe pour être utilisée comme outil théorique par le novice la Logique Quantique peut être de bon secours comme outil conceptuel. Les Sciences Cognitives n'ont, en effet aucun intérêt ni à la suprématie, parfois bornée, de la Logique Classique (partant certainement du principe qu'il est plus simple d'étudier une situation exprimée en terme simples que la situation réelle) ni au contrecoup qui veut que l'on soit submergé par une foule de logiques toutes plus exotique les unes que les autres. Le second est naturel pour les chercheur visant à élucider ces logiques mais se conjugue difficilement aux efforts parallèles. Le premier part certes du bon sentiment qu'il faut raisonner juste et de l'équation

$$\text{« raisonnement juste »} = \text{« logique »}$$

où la "logique" est, bien évidemment, celle appris à l'école : la Logique Classique (dans les bons cas) ; cependant, le mauvais clou est bien enfoncé dans la culture scientifique et philosophique ambiante que la logique de raisonnement est nécessairement la logique de modélisation. La logique classique est souvent vue comme la "logique du réel", expression qui, si on lui donne le sens naïf, est fausse et qui, si l'on fouille un peu n'a aucun sens absolu.

Admettant plusieurs systèmes théoriques (présentés au premier chapitre) et fondée en importance comme logique des faits réels selon la Mécanique Quantique, la Logique Quantique dispose de lettres de noblesses suffisantes pour mériter l'intérêt des chercheurs en Sciences de la Cognition.



## Bibliographie

- [1] J. BELL ET M. HALLETT, Logic, quantum logic and empiricism, *Philosophy of Science* **19** (1982), pages 355–379.
- [2] E. BENVENISTE, *Vocabulaire des institutions indo-européennes. I: économie, parenté, société.*, collection *Le sens commun*, Editions de Minuit, 1969.
- [3] ———, *Vocabulaire des institutions indo-européennes. II: pouvoir, droit, religion.*, collection *Le sens commun*, Editions de Minuit, 1969.
- [4] ———, *Problèmes de linguistique générale, 2*, chapitre XI, Fondements syntaxiques de la composition nominale, pages 145–162, collection *Tel*, Gallimard, 1974.
- [5] G. BIRKHOFF, Lattices in applied mathematics, in *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, American Mathematical Society, 1961.
- [6] N. BOURBAKI, *Eléments de Mathématique, Algèbre I à III*, diffusion CCLS, 1970.
- [7] J. CARGILE, *Paradoxes: a Study of Form and Predication*, Cambridge University Press, 1979.
- [8] N. J. CUTLAND ET P. F. GIBBINS, A regular sequent calculus for quantum logic in which  $\wedge$  and  $\vee$  are dual, *Logique et Analyse* **99** (1982), pages 221–248.
- [9] Y. DELMAS-RIGOUTSOS, La Logique Quantique, in *Comptes rendus du Séminaire Philosophie & Mathématiques*, IREM Paris-Nord, à paraître.
- [10] A. P. GEOGOPOULOS, M. TAIRA ET A. LUKASHIN, Cognitive neurophysiology of the motor cortex, *Science* **260** (1993), pages 47–52.
- [11] P. F. GIBBINS, A user-friendly quantum logic, *Logique et Analyse* **112** (1985), pages 353–362.
- [12] ———, *Particles and Paradoxes*, Cambridge University Press, 1987.
- [13] J. W. GOETHE, *Les souffrances du jeune Werther*, collection *Garnier-Flammarion*, Flammarion, 1968. (traduction de la version de 1786 par J.-F. Angelloz).
- [14] SH. MAEDA, Dimension functions on certain general lattices, *J. of Sc. Hiroshima Un.* **A19** (1955), pages 211–237.
- [15] H. NISHIMURA, Sequential method in quantum logic, *Journal of Symbolic Logic* **45** (1980), pages 339–352.
- [16] M. PARIGOT, Free deduction: an analysis of “computations” in classical logic, in *Logic Programming*, A. Voronkov (édité par), pages 361–380, *Lecture Notes in Computer Science* volume 592, Springer Verlag, 1992. 2nd Russian Conference on Logic Programming, 1991.
- [17] C. PIRON, Axiomatique quantique, *Helvetica Physica Acta* **37** (1964), pages 439–468.
- [18] H. PUTNAM, The logic of quantum mechanics, in *Mathematics, Matter and Method: Philosophical Papers Vol. I*, pages 174–197, Cambridge University Press, 1979.
- [19] ———, ‘Two dogmas’ re-visited, in *Realism and Reason: Philosophical Papers Vol. III*, pages 87–97, Cambridge University Press, 1983.
- [20] P. ROSENSTIEHL ET R. E. TARJAN, Rectilinear planar layouts and bipolar orientations of planar graphs, *Discrete & Computational Geometry* **1** (1986), pages 343–353.
- [21] J. SALLANTIN ET TH. VAN DER PYL, Représentation de connaissances dans une logique non distributive, *Structures de l’information*, mai 1981. Rapport de recherche CNRS.



- [22] M. H. STONE, The theory of representation for Boolean algebras, *Transactions of the American Mathematical Society* **40** (1936), pages 37–111.
- [23] G. TOWELL, *Symbolic Knowledge and Neural Networks: Insertion, Refinement and Extraction*, PhD thesis, University of Wisconsin, Madison, 1991.
- [24] V. S. VARADARAJAN, *Geometry of Quantum Theory, Vol. I*, Van Nostrand Company, Inc., Princeton, 1968.
- [25] J. VON NEUMANN ET G. BIRKHOFF, The logic of quantum mechanics, *Annals of Mathematics* **37** (1936), pages 823–843.

## Table des matières

<b>I. Prolégomènes</b>	<b>5</b>
§ 1. Prologue . . . . .	5
§ 2. Introduction . . . . .	5
<b>II. Présentation rapide de la Logique Quantique</b>	<b>7</b>
§ 1. Introduction : la logique des hilberts . . . . .	7
§ 2. Approche algébrique: les treillis orthomodulaires . . . . .	8
a. Définitions . . . . .	8
$\alpha$ . Les ordres avec extrémités . . . . .	8
$\beta$ . Les treillis . . . . .	8
$\gamma$ . Les treillis complémentés . . . . .	9
$\delta$ . Les algèbres de Boole . . . . .	10
$\varepsilon$ . La loi de modularité . . . . .	11
$\sigma\tau$ . L'orthomodularité . . . . .	12
b. Les treillis orthomodulaires . . . . .	12
$\alpha$ . Les compléments relatifs . . . . .	12
$\beta$ . Le problème de la distributivité . . . . .	13
$\gamma$ . Le problème de la compatibilité . . . . .	14
§ 3. Approche syntaxique : la Logique Quantique . . . . .	16
a. La Logique Quantique “ <i>user friendly</i> ” de P. Gibbins . . . . .	16
b. Une présentation privilégiant la compatibilité . . . . .	17
$\alpha$ . Présentation du système . . . . .	17
$\beta$ . Validité et complétude . . . . .	18
$\gamma$ . Conséquence principale . . . . .	19
$\delta$ . Avantages et inconvénients . . . . .	19
§ 4. Approche sémantique : une vision géométrique des Logiques Classique et Quantique . . . . .	19
a. La Logique Classique comme logique de l'ensembliste . . . . .	19
$\alpha$ . La version simple: les “patates” . . . . .	20
$\beta$ . La version évoluée : les algèbres de Boole . . . . .	21
$\gamma$ . Le théorème de représentation de Stone . . . . .	22
b. La Logique Quantique comme logique du linéaire . . . . .	22
$\alpha$ . La version simple: les espaces vectoriels de dimension finie . . . . .	22
$\beta$ . La version évoluée : les espaces de Hilbert . . . . .	25
$\gamma$ . Le théorème de représentation de Piron . . . . .	26
§ 5. Conclusion : le sens des symboles . . . . .	26
<b>III. Les réseaux de neurones formels</b>	<b>29</b>
§ 1. Les réseaux de neurones formels en couches . . . . .	29
a. L'élément de base : le neurone . . . . .	29
b. Description des réseaux en couches . . . . .	30
c. Linéarisation du problème . . . . .	31
§ 2. Les neurones et les propositions quantiques . . . . .	33
a. Vue générale : les réseaux décomposés en opérateurs . . . . .	33
b. Vue rapprochée : les neurones comme propositions quantiques . . . . .	34
$\alpha$ . Position des propositions quantiques . . . . .	34
$\beta$ . Les opérateurs linéaires en termes quantiques . . . . .	34
$\gamma$ . Les saturations en termes quantiques . . . . .	34
$\delta$ . Conclusion : interprétation “quantique” d'une couche de réseau . . . . .	35
§ 3. Conclusion : autres approches possibles . . . . .	36

<b>IV. Les vecteurs de population</b>	<b>37</b>
§ 1. Introduction : la stratégie des vertébrés . . . . .	37
§ 2. Deux procès physiologiques sous l'angle "quantique" . . . . .	37
a. La direction dans une aire motrice . . . . .	37
b. La distinction des couleurs . . . . .	39
§ 3. Une nouvelle formulation . . . . .	41
<b>V. Les concepts naturels</b>	<b>43</b>
§ 1. Introduction : le "biotope" des concepts . . . . .	43
§ 2. Exemples et problèmes . . . . .	43
a. Les têtards, les crapauds et les paradoxes sorites . . . . .	43
b. Le rouge, le vert et la négation des couleurs . . . . .	44
c. L'irrationnel, le rationnel et la négation des substantifs . . . . .	45
d. Le blé, l'avoine et la croissance des concepts . . . . .	46
e. Les fruits, les légumes et les <i>dvandvas</i> . . . . .	48
f. La société, l'individu et l'extensionnalité logique . . . . .	49
§ 3. Conclusions . . . . .	50
<b>VI. Conclusion générale</b>	<b>53</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>55</b>
<b>Table des matières</b>	<b>57</b>

