



**HAL**  
open science

# Progrès technique et limites à la croissance dans le cadre d'une économie circulaire

Marc Germain, Philippe L. Toint

► **To cite this version:**

Marc Germain, Philippe L. Toint. Progrès technique et limites à la croissance dans le cadre d'une économie circulaire. 2022. hal-03887913

**HAL Id: hal-03887913**

**<https://hal.science/hal-03887913>**

Preprint submitted on 7 Dec 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Progrès technique et limites à la croissance dans le cadre d'une économie circulaire

Marc Germain\* et Philippe Toint†

Juin 2021

## Résumé

Cet article étudie les interactions entre progrès technique et limites bio-physiques à la croissance dans le cadre d'une économie pourvue de ressources en matière et en énergie, dont les productivités sont bornées supérieurement. L'économie est circulaire au sens où les déchets dus à l'activité sont recyclés comme matière exploitable. La ressource énergétique est renouvelée par un flux d'énergie extérieur. Le progrès technique est borné et peut être de quatre types, selon qu'il affecte l'usage ou l'extraction de chacune des deux ressources.

Une économie en développement commence par croître avant de nécessairement décroître vers un état stationnaire déterminé par l'apport extérieur d'énergie. Autrement dit, une croissance monotone vers l'état stationnaire est exclue. Cet équilibre existe à condition que le rapport entre quantité totale de matière et flux d'énergie externe soit suffisamment élevé.

L'économie subit un profond changement structurel pendant son développement, au sens où une part sensiblement plus importante du capital doit être consacrée à l'extraction d'énergie au détriment de l'extraction/transformation de la matière. A long terme, seul le progrès technique améliorant l'efficacité dans l'usage de l'énergie a un impact positif sur l'activité, les autres formes de progrès n'ayant qu'un effet transitoire. Le progrès technique se révèle surtout favorable s'il améliore simultanément l'usage et l'extraction des deux ressources.

## Abstract

This article studies the interactions between technical progress and bio-physical limits to growth in the context of an economy with material and energy resources, whose productivities are limited above. The economy is circular in the sense that the waste from activity is recycled as usable material. The energy resource is renewed by an external energy flow. Technical progress is bounded and can be of four types, depending on whether it affects the use or extraction of each of the two resources.

A developing economy begins by growing before necessarily decreasing towards a stationary state determined by the external energy flow. In other words, monotonous growth towards the stationary state is excluded. This equilibrium exists provided that the ratio between the total amount of matter and the external energy flow is sufficiently high.

The economy undergoes a profound structural change during its development, in the sense that a significantly larger share of capital must be devoted to the extraction of energy at the expense of the extraction/processing of matter. In the long run, only technical progress that improves efficiency in energy use has a positive impact on activity, with other forms of progress having only a transitory effect. Technical progress is especially favourable if it simultaneously improves the use and extraction of both resources.

Mots clés : progrès technique, limites à la croissance, économie circulaire, énergie

JEL: C61, C63, O41, Q20, Q57

---

\*Univ. Lille, CNRS, IESEG School of Management, UMR 9221 - LEM - Lille Économie Management, F-59000 Lille, France et IRES, Université de Louvain.

†Namur Center for Complex Systems (naXys), Université de Namur.

# 1 Introduction

Le but de cet article est d'étudier les interactions entre progrès technique et limites bio-physiques à la croissance dans le cadre d'une économie pourvue de ressources en matière et énergie. Elles sont toutes deux renouvelables mais dans des sens différents : la première est renouvelée par un flux naturel externe (le flux solaire), tandis que la deuxième est renouvelée par le recyclage des déchets produits par l'économie.

La littérature qui intègre le recyclage des déchets dans le cadre de modèles de croissance n'est pas neuve. Les contributions peuvent être distinguées en deux catégories selon que le recyclage est ou n'est pas explicitement modélisé comme une activité économique. Dans la première catégorie, le recyclage est considéré comme un moyen de lutter contre (i) les pollutions qui accompagnent les déchets (à l'exemple de George et al. (2015) et Boucekine et El Ouardighi (2016)) ou (ii) la raréfaction de la ressource suite à son exploitation (à l'exemple de Lafforgue-Rougé (2018)<sup>1</sup>). Dans la deuxième catégorie, le recyclage est naturel et le coût de la ressource se limite à son extraction (à l'exemple de Fagnart et Germain (2011) et Germain (1991)).

Les contributions peuvent également être distinguées selon qu'elles prennent en compte ou ignorent la loi de la conservation de la matière. Sauf exception, celles qui appartiennent à la première catégorie l'ignorent, alors que celles qui appartiennent à la deuxième en tiennent compte.

Dans le contexte d'une économie pourvue de ressources naturelles limitées, une croissance indéfinie de la production est théoriquement possible à condition que les productivités de ces ressources puissent croître elles aussi indéfiniment. Au niveau particulier de la matière, cela suppose asymptotiquement une dématérialisation totale des biens produits.

En revanche, si l'on tient compte des lois de la physique, il est exclu que les contenus (direct et indirect) en énergie et en matière d'un bien produit soient nuls (même asymptotiquement), impliquant que les productivités des ressources sont bornées supérieurement. Il est alors établi que la croissance indéfinie de l'économie est impossible (Anderson (1987), Germain (1991), Kryziak (2006), Fagnart et Germain (2011)). Celle-ci ne peut tendre *au mieux* que vers un état stationnaire. En vertu de la loi de conservation de la matière, cet état est idéal (et donc en pratique inatteignable) au sens où il caractérise une économie *parfaitement circulaire* : les déchets produits par l'activité sont entièrement recyclés, sans perte de matière (Cullen, 2017).

Le présent article ne modélise pas explicitement le recyclage, mais tient compte de la loi de la conservation de la matière. Par rapport à la littérature susmentionnée, il présente l'originalité de distinguer deux ressources naturelles, l'une fournissant l'énergie et l'autre la matière. Ces ressources ont des usages complémentaires : l'énergie sert à faire fonctionner le capital productif de l'économie, qui sert lui-même à extraire les ressources et à transformer la matière en produits finis.

Etant donné que les facteurs de production ont des usages fondamentalement différents, ils sont supposés complémentaires. Toutefois, leur productivité est susceptible d'évoluer avec le progrès technique. Le fait qu'il y a deux ressources qui nécessitent chacune du capital pour être extraites et transformées permet de distinguer quatre types de progrès technique : (i) en terme de dématérialisation de la production, (ii) au niveau de l'usage de l'énergie, (iii) au niveau de l'extraction de matière et (iv) au niveau de l'extraction d'énergie. Le but principal de cet article est d'étudier l'impact de ces différentes formes de progrès technique, ainsi que de leur combinaison, sur la trajectoire de l'économie, tant au niveau de la phase transitoire que de l'état stationnaire de long terme.

La structure de cet article est la suivante. La section 2 présente les équations du modèle. La section 3 étudie l'état stationnaire et détermine les conditions de son existence. L'analyse théorique de la dynamique du modèle en l'absence de progrès technique est présentée à la section 4, avec un résultat de convergence locale. La section 5 présente les simulations numériques : d'abord la simulation de référence, puis les variantes avec les différentes formes de progrès technique. La section 6 résume les principaux résultats.

---

<sup>1</sup>Ces auteurs fournissent une revue récente de la littérature relative au premier cas.

## 2 Le modèle

Le modèle est celui d'une économie décentralisée et fermée, avec deux ressources naturelles en énergie et en matière. Elles sont toutes deux renouvelables mais dans des sens différents : la première est renouvelée par un flux naturel externe tandis que la deuxième est renouvelée par le recyclage des déchets produits par l'économie.

La production d'un bien à tout faire résulte de la transformation de la matière extraite, au moyen de capital alimenté par de l'énergie. Une partie de la production est consommée, le reste étant investi dans la reproduction et l'accumulation du capital. Le modèle est dynamique, mais la dépendance par rapport au temps est omise afin d'alléger les équations.

La production de biens  $y$  (le PIB) a un contenu en matière  $m$ , selon l'équation :

$$y = \frac{m}{\mu} \quad (1)$$

où  $\mu > 0$  mesure le contenu matière d'une unité de bien.

L'évolution du stock de capital est déterminée par l'équation :

$$k' = sy - dk \quad (2)$$

où  $s$  est le taux d'épargne (la fraction de la production de biens investie dans du nouveau capital) et  $d$  désigne le taux de dépréciation du capital.  $s$  et  $d$  sont compris entre 0 et 1. Par souci de simplicité, ces paramètres sont supposés exogènes et constants. Le capital se répartit entre extraction/transformation de matière et extraction d'énergie :

$$k = k_m + k_x \quad (3)$$

Le capital  $k$  et la consommation d'énergie  $x$  sont complémentaires :

$$x = \phi k \quad (4)$$

où  $\phi$  est l'intensité énergétique du capital (autrement dit, la quantité d'énergie pour faire fonctionner une unité de capital).

L'extraction d'une quantité  $x$  d'énergie obéit à la fonction de production suivante :

$$x = \sqrt{a_x k_x R} \quad (5)$$

où  $k_x$  et  $R$  désignent respectivement le capital dévolu à l'extraction d'énergie et le stock d'énergie et  $a_x$  est un paramètre de productivité.

L'évolution du stock d'énergie est déterminée par l'équation :

$$R' = F - x \quad (6)$$

avec la condition initiale  $R(0) = R_0$ .  $F$  est le flux naturel qui reproduit la ressource (par exemple le flux solaire).

La ressource de matière  $M$  est constituée d'un stock fourni par la nature (par exemple des minerais), non renouvelé naturellement mais alimenté par les déchets issus du contenu en matière de la consommation  $c = [1 - s]y$  et de la dépréciation du capital. Ce stock de matière est exploité et alimente l'économie. Son évolution est déterminée par l'équation :

$$M' = \mu [[1 - s]y] + dK - m \quad (7)$$

avec la condition initiale  $M(0) = M_0$ . On observe qu'en l'absence de recyclage des déchets,  $M$  se comporte comme une ressource non renouvelable.  $K$  est la quantité de matière contenue dans le stock de capital  $k$  et  $m$  est la quantité extraite de matière.  $K$  évolue selon l'équation :

$$K' = \mu sy - dK \quad (8)$$

Comme tous les investissements successifs se déprécient exponentiellement au taux constant  $d$ , il en va de même du stock de capital  $k$ , ainsi que de son contenu en matière  $K$ . Il importe de remarquer que  $K \neq \mu k$ , sauf dans le cas particulier où  $\mu$  est constant.

L'extraction d'une quantité de matière  $m$  obéit à la fonction de production suivante :

$$m = \sqrt{a_m k_m M} \quad (9)$$

où  $k_m$  désigne le capital dévolu à l'extraction de matière et  $a_m$  est un paramètre de productivité. Les fonctions (5) et (9) sont des fonction de production Cobb-Douglas à rendements d'échelle constants.

Les équations (7) et (8) impliquent que

$$M' + K' = \mu y - m = 0$$

en vertu de (1). Il en découle que :

$$M + K = \Omega \quad (10)$$

où  $\Omega$  est une constante qui désigne la quantité totale de matière dans le système formé par l'économie et son environnement. Elle se répartit entre celle qui est dans la nature ( $M$ ) et celle qui est dans le stock de capital ( $K$ ). L'équation précédente traduit le principe de conservation de la matière au sein du système économie-environnement.

Les équations précédentes forment un système de 9 équations (1), (2), (3), (4), (5), (6), (8), (9) et (10) à 9 inconnues,  $y, k, x, m, k_m, k_x, R, M, K$ , avec les conditions initiales  $k_0, R_0, K_0$ . Toutes les variables sont à valeurs positives. De même, les paramètres exogènes  $s, \mu, d, \phi, a_m, a_x, \Omega, F$  sont tous strictement positifs. Alors que  $s, d, \Omega, F$  sont constants,  $\mu, \phi, a_m, a_x$  sont susceptibles de varier au cours du temps en fonction du progrès technique (PT) supposé exogène.

Le système peut être réduit aux seules variables de stock. Les relations (1), (2), (8) impliquent en effet que

$$k' = \frac{s}{\mu} m - dk \quad (11)$$

$$K' = sm - dK, \quad (12)$$

tandis que, au vu de (4) et (6),

$$R' = F - \phi k, \quad (13)$$

Notons que si  $k$  est solution de (11),  $K(0) = \mu k(0)$  et  $\mu$  constant, alors  $K = \mu k$  est solution de (12), une propriété que nous utiliserons plus loin. Au vu de (3), (5) et (9),

$$\begin{aligned} k &= \frac{m^2}{a_m M} + \frac{x^2}{a_x R} \\ &= \frac{m^2}{a_m [\Omega - K]} + \frac{[\phi k]^2}{a_x R}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$m^2 = a_m [\Omega - K] \left[ k - \frac{[\phi k]^2}{a_x R} \right]$$

Au final, on obtient le système différentiel suivant :

$$k' = \frac{s}{\mu} \sqrt{a_m [\Omega - K] \left[ k - \frac{[\phi k]^2}{a_x R} \right]} - dk \quad (14)$$

$$K' = s \sqrt{a_m [\Omega - K] \left[ k - \frac{[\phi k]^2}{a_x R} \right]} - dK \quad (15)$$

$$R' = F - \phi k \quad (16)$$

Quatre variables *relatives* (au sens où il s'agit de rapports de variables en niveau) sont les suivantes :

- taux d'extraction énergétique :

$$E_x = \frac{x}{R} \quad (17)$$

- taux d'extraction de la matière :

$$E_m = \frac{m}{M} \quad (18)$$

- part du capital énergétique :

$$\kappa = \frac{k_x}{k} \quad (19)$$

- part du capital dans la matière totale :

$$\beta = \frac{K}{\Omega} \quad (20)$$

Ces quatre variables sont comprises entre 0 et 1.

## 3 L'état stationnaire

### 3.1 Détermination

Dans cette section, les paramètres technologiques  $\mu, \phi, a_m, a_x$  sont égaux à leurs valeurs asymptotiques. Celles-ci sont strictement positives et finies car quel que soit le paramètre considéré, le progrès technique est supposé borné. En particulier, il faut (i) une quantité finie de matière pour fabriquer un bien et (ii) une quantité finie d'énergie pour faire fonctionner une unité de capital. En conséquence, comme  $\phi > 0$  et que le stock d'énergie est fini, il ne peut y avoir de croissance indéfinie de  $y$  et de  $k$ . Un raisonnement similaire s'applique pour la matière.

Soit  $\omega = \frac{\Omega}{F}$  le rapport entre les dotations en matière et en énergie de l'économie. L'état stationnaire (ES) du système est caractérisé par les équations suivantes :

- La relation (6) donne que

$$x_* = F \quad (21)$$

L'énergie consommée par l'économie s'ajuste à l'apport d'énergie extérieur.

- La relation (13) donne que

$$k_* = \frac{F}{\phi} \quad (22)$$

Le capital augmente si  $\phi \downarrow$ , autrement dit si l'efficacité de l'usage de l'énergie augmente.

- Les relations (2) et (22) donnent que  $sy_* = dk_*$  et donc que

$$y_* = \frac{d}{s\phi} F \quad (23)$$

La production augmente comme le capital si  $\phi \downarrow$ . Si  $k_*$  ne dépend pas du taux d'épargne, la production diminue si  $s \uparrow$  (atteindre un niveau de capital donné avec un taux d'épargne plus élevé suppose une production moindre). Un fait remarquable est que le capital et la production ne dépendent pas des autres paramètres technologiques  $\mu, a_m, a_x$ .

- Les relations (11) et (22) donnent que

$$m_* = \frac{d\mu}{s\phi} F \quad (24)$$

L'extraction de matière se comporte comme la production, tout en dépendant aussi du contenu de matière par unité de bien  $\mu$ . On remarque que  $m_*$  ne dépend pas du paramètre d'efficacité  $a_m$ .

- La relation (12) implique que  $K_* = \frac{sm_*}{d}$  et donc que

$$K_* = \frac{\mu}{\phi} F = \mu k_* \quad (25)$$

Comme  $\mu$  tend vers une constante, le contenu en matière du capital est homogène à l'ES.

- La relation (10) implique que  $M_* = \Omega - K_*$  et donc que

$$M_* = \Omega - \frac{\mu}{\phi} F = \left[ \omega - \frac{\mu}{\phi} \right] F. \quad (26)$$

La ressource de matière est une fonction décroissante du contenu matériel du capital (lui-même déterminé par  $\mu$  et  $\phi$ ) et une fonction croissante du rapport des dotations  $\omega$ .

- La relation (9) implique que  $k_{m*} = \frac{m_*^2}{a_m M_*}$  et, en conséquence, en utilisant (24) et (26),

$$k_{m*} = \frac{\left[ \frac{d\mu}{s\phi} F \right]^2}{a_m \left[ \Omega - \frac{\mu}{\phi} F \right]} = \frac{\left[ \frac{d\mu}{s\phi} \right]^2 F}{a_m \left[ \frac{\Omega}{F} - \frac{\mu}{\phi} \right]} \quad (27)$$

Le capital dévolu à l'extraction/transformation de la matière dépend des paramètres comme  $m_*$ . Il est en outre une fonction inverse du paramètre d'efficacité  $a_m$  (une plus grande efficacité permet de mobiliser moins de capital pour extraire une quantité de matière donnée) et du rapport des dotations  $\omega$  (à apport d'énergie donné, disposer de plus de matière facilite son exploitation).

- L'équation (3) donne que  $k_{x*} = k_* - k_{m*}$  et donc, par (22), que

$$k_{x*} = \frac{F}{\phi} - \frac{\left[ \frac{d\mu}{s\phi} \right]^2 F}{a_m \left[ \frac{\Omega}{F} - \frac{\mu}{\phi} \right]} = \left[ \frac{1}{\phi} - \frac{\left[ \frac{d\mu}{s\phi} \right]^2}{a_m \left[ \frac{\Omega}{F} - \frac{\mu}{\phi} \right]} \right] F. \quad (28)$$

Comme  $k_{x*} = k_* - k_{m*}$ , la dépendance aux paramètres du capital dévolu à l'énergie est à l'opposé de celle du capital dévolu à la matière. La seule exception concerne  $\phi$  : si l'intensité du capital augmente, les trois stocks  $k_*$ ,  $k_{m*}$ ,  $k_{x*}$  diminuent.

- l'équation (5) donne que  $R_* = \frac{x_*^2}{a_x k_x} = \frac{F^2}{a_x k_x}$  et donc, par (21) et (28),

$$R_* = \frac{F}{a_x \left[ \frac{1}{\phi} - \frac{\left[ \frac{d\mu}{s\phi} \right]^2}{a_m \left[ \frac{\Omega}{F} - \frac{\mu}{\phi} \right]} \right]} \quad (29)$$

La dépendance du stock d'énergie aux paramètres est à l'opposé de celle de  $k_{x*}$ . En outre, ce stock est une fonction inverse de l'efficacité dans l'extraction d'énergie  $a_x$ .

- Les relations (17), (29) et (21) impliquent que

$$E_{x*} = a_x \left[ \frac{1}{\phi} - \frac{\left[ \frac{d\mu}{s\phi} \right]^2}{a_m \left[ \frac{\Omega}{F} - \frac{\mu}{\phi} \right]} \right] \quad (30)$$

Le taux d'extraction d'énergie se comporte comme  $k_{x*}$ . Il est en plus une fonction croissante du paramètre d'efficacité  $a_x$  (l'énergie est d'autant plus facile à exploiter que  $a_x$  est grand). Il est aussi une fonction croissante de  $\omega$  (à apport d'énergie donné, disposer de plus de matière facilite son exploitation, ce qui permet d'affecter plus de capital à l'énergie).

- On déduit de (18), (24) et (26) que  $E_{m*} = \frac{\frac{d\mu}{s\phi}}{\frac{\Omega}{F} - \frac{\mu}{\phi}}$ , ce qui donne

$$E_{m*} = \frac{d\mu}{s\phi} \frac{1}{\frac{\Omega}{F} - \frac{\mu}{\phi}} \quad (31)$$

Le taux d'extraction de matière dépend de  $s, \phi, \mu$  comme la consommation de matière  $m_*$ . Ce taux est aussi une fonction décroissante de  $\omega$  : à apport d'énergie donné, disposer de plus de matière n'affecte pas l'activité mais permet d'alléger la pression sur la ressource.

- les équations (19) et (22) impliquent que  $\kappa_* = \frac{\frac{1}{\phi} - \frac{\left[\frac{d\mu}{s\phi}\right]^2}{a_m\left[\frac{\Omega}{F} - \frac{\mu}{\phi}\right]}}{1/\phi}$ , et donc que

$$\kappa_* = 1 - \frac{\left[\frac{d\mu}{s}\right]^2}{a_m\phi\left[\frac{\Omega}{F} - \frac{\mu}{\phi}\right]} \quad (32)$$

La part du capital affectée à l'énergie dépend des paramètres comme le taux d'extraction d'énergie  $E_{x*}$ , sauf au niveau de  $a_x$  dont il ne dépend pas (car il s'agit d'un rapport de deux variables qui n'en dépendent pas).

- Les équations (20) et (25) donnent que

$$\beta_* = \frac{\mu F}{\phi\Omega}. \quad (33)$$

La part de la matière incorporée dans le capital est proportionnelle à celui-ci et au contenu en matière d'une unité de bien. Elle est en revanche une fonction décroissante de la matière disponible (car l'activité est déterminée par l'apport extérieur d'énergie).

### 3.2 Analyse

A l'ES, on constate que :

- toutes les variables en niveau  $x, k, y, m, k_x, k_m, M, R, K$  sont proportionnelles à  $F$ . En revanche, elle ne dépendent pas de  $\Omega$ .

- les variables relatives  $E_x, E_m, \kappa, \beta$  sont fonctions du rapport  $\omega = \frac{\Omega}{F}$ .

Ce qui précède conduit aux conclusions suivantes :

- la détermination du système à l'ES obéit à la séquence suivante :

apport externe d'énergie  $\rightarrow$  activité économique  $\rightarrow$  consommation de matière

En d'autres termes, si la quantité de matière est suffisante pour atteindre l'ES, le facteur décisif dans la détermination de l'activité est l'apport extérieur en énergie.

- un progrès technique permettant une plus grande efficacité dans l'extraction d'une ressource est neutralisé par la baisse du stock de cette ressource et demeure sans effet sur les variables économiques.

- les effets du PT sont asymétriques, selon qu'il affecte (i) l'efficacité de l'extraction ( $a_m$  ou  $a_x$ ), (ii) le contenu en matière de la production  $\mu$  ou (iii) l'intensité énergétique de l'usage du capital  $\phi$ . Le cas (i) n'a pas d'effet sur l'activité et se traduit par une plus grande exploitation du stock d'énergie. Le cas (ii) n'a pas d'impact sur l'activité mais allège la pression de l'économie sur la ressource de matière. Le cas (iii) est le seul qui favorise l'activité, mais il affecte négativement la ressource d'énergie.

### 3.3 Contraintes sur les paramètres

Pour qu'un ES soit admissible, il faut (i) que toutes les variables soient positives et (ii) que les variables relatives  $E_x, E_m, \kappa, \beta$  soient comprises entre 0 et 1. A partir de ces contraintes, on peut montrer que le rapport des dotations  $\omega = \frac{\Omega}{F}$  doit obéir aux inégalités suivantes (cfr. Annexe 7.1) :

$$\max \left\{ \frac{\mu}{\phi} \left[ \frac{\mu}{a_m} \left[ \frac{d}{s} \right]^2 + 1 \right], \frac{\mu}{\phi} \left[ \frac{d}{s} + 1 \right] \right\} \leq \omega \quad (34)$$

Cette inégalité découle de (28) avec  $k_{x*} \geq 0$  et (31) avec  $E_{m*} \leq 1$ .

Si  $\phi < a_x$ , il faut en outre que :

$$\omega \leq \frac{\mu}{\phi} \left[ \frac{\frac{\mu}{\phi} \left[ \frac{d}{s} \right]^2}{a_m \left[ \frac{1}{\phi} - \frac{1}{a_x} \right]} + 1 \right] \quad (35)$$

inégalité qui découle de (30) avec  $E_{x*} \leq 1$ .



## 4 Dynamique avec paramètres constants

### 4.1 Le diagramme de phase

Dans le cas particulier où les paramètres technologiques  $\mu, \phi, a_m, a_x$  sont constants (pas de PT), le système dynamique (14),(15),(16) se réduit aux deux équations (14) et (16) avec  $K = \mu k$ .

Dans l'orthant positif  $\langle R, k \rangle = \{(k, R) \in \mathfrak{R}^2 | k \geq 0 \text{ et } R \geq 0\}$ , les isoclines nulles  $k' = 0$  et  $R' = 0$  conduisent aux équations suivantes (cfr. Annexe 7.2) :

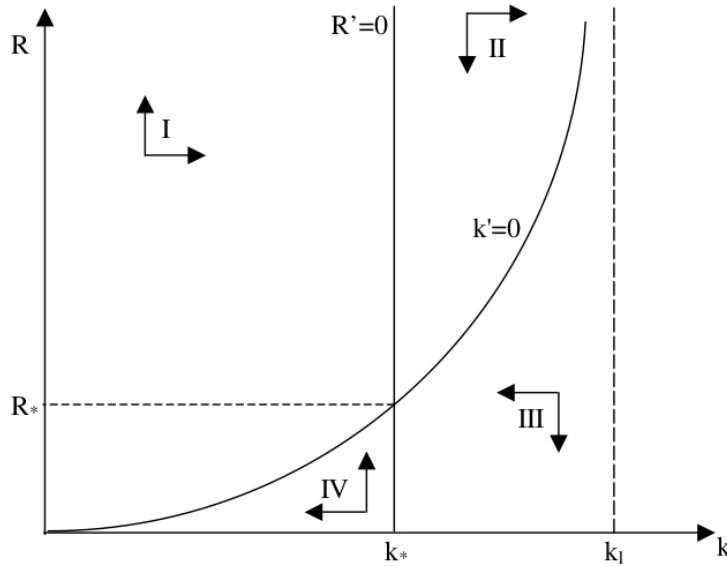
$$L_k \equiv R(k) = \frac{\phi^2 k}{a_x \left[ 1 - \frac{1}{a_m} \left[ \frac{d\mu}{s} \right]^2 \frac{k}{\Omega - \mu k} \right]} \quad (36)$$

$$L_R \equiv k = \frac{F}{\phi} \quad (37)$$

$L_R$  est une verticale tandis que  $L_k$  est une fonction continue définie sur l'intervalle  $[0, k_l]$ , nulle à l'origine, continue, monotone croissante, avec une asymptote verticale en  $k = k_l = \frac{\Omega}{\mu \left[ \frac{\mu}{a_m} \left[ \frac{d}{s} \right]^2 + 1 \right]}$ .

Ces isoclines découpent l'orthant  $\langle R, k \rangle$  en quatre régimes notés I à IV (cfr. Figure 1) et leur intersection détermine l'ES. L'allure des isoclines  $L_k$  et  $L_R$  implique que s'il existe, l'ES est unique.

Figure 1: Diagramme de phase



Le diagramme de phase montre que la convergence peut être monotone ou cyclique. Si elle est monotone, l'ES ne peut être atteint que via les régimes I et III.

### 4.2 Trajectoire d'une économie en développement

On est intéressé par une économie en développement qui augmente son capital et sa production en exploitant ses ressources. Elle est initialement caractérisée par un stock de ressource énergétique  $R_0$  élevé et un stock de capital faible  $k_0$ , tels que

$$R_0 > R_* \text{ et } k_0 < k_* \quad (38)$$

Dans le diagramme de phase (cfr. Figure 1), l'économie est donc située en  $t = 0$  dans le régime I, en haut à gauche de l'ES. L'économie étant peu développée, l'essentiel de la matière est dans le stock  $M_0$  (autrement dit  $M_0 \gg \mu k_0$ ), sous la forme de matière vierge.

Le diagramme montre alors que la trajectoire commence par une augmentation simultanée de  $k$  et  $R$ . Après un temps  $t_R$  où  $k = k_*$  et  $R' = 0$ , le système passe dans le régime II. Le capital continue de croître mais la ressource énergétique commence à décliner. L'extraction d'énergie  $x$  subit donc deux forces contradictoires (cfr. (5)). Au temps  $t_k$ , la deuxième force (la baisse de  $R$ ) finit par l'emporter sur la première (la hausse de  $k$ ). L'extraction d'énergie ne suit plus et force le déclin du capital. Le système passe dans le régime III.

Deux types de trajectoire sont alors possibles (cfr. Figure 1) :

(A) la trajectoire converge asymptotiquement vers l'état stationnaire sans quitter le régime III, auquel cas la convergence est monotone au sens où  $k'$  et  $R' < 0, \forall t$ .

(B)  $R'$  devient nul en un temps fini  $t_R$ , auquel cas  $R$  passe par un minimum. Le diagramme de phase indique alors que le système rentre dans le régime IV où  $k' < 0$  et  $R' > 0$ . La poursuite de la décroissance de l'économie permet à la ressource énergétique de se reconstituer.

Dans le cadre d'une trajectoire B, il arrive un moment où la reconstitution de  $R$  est suffisante pour permettre au capital de croître à nouveau. Le système quitte le régime IV et se retrouve à nouveau dans le régime I. Une fois dans ce régime, la trajectoire se poursuit par un nouveau cycle.

D'où les conclusions suivantes :

- partant des conditions initiales décrites par (38), une économie en développement commence par croître avant de *nécessairement* décroître et de tendre vers l'ES (de façon monotone ou cyclique). Une trajectoire caractérisée par une croissance monotone du capital vers son niveau stationnaire est exclue.

- Lors de cette phase transitoire, le retournement de  $R$  précède *nécessairement* celui de  $k$ .

- Etant donné (10) avec  $K = \mu k$ , l'évolution du stock de matière est symétrique à celle de  $k$ .

### 4.3 Analyse locale

L'analyse de la dynamique autour de l'ES permet d'établir que le système converge vers l'ES une fois qu'il en est proche (cfr. Annexe 7.3 pour les détails mathématiques). L'équation caractéristique associée à la linéarisation des équations (14) et (16) avec  $K = \mu k$  s'écrit :

$$\theta^2 - \left[ \frac{s}{\mu} \frac{\partial m}{\partial k} - d \right] \theta + \phi \frac{s}{\mu} \frac{\partial m}{\partial R} = 0$$

dont le discriminant vaut :

$$\rho = \left[ \left[ \alpha \frac{\partial m}{\partial k} - 1 \right]^2 - \frac{4\phi\alpha}{d} \frac{\partial m}{\partial R} \right] d^2 \quad (39)$$

où on a posé  $\alpha = \frac{s}{d\mu}$ . Les racines de l'équation s'écrivent :

$$\hat{\theta} = \frac{d}{2} \left[ \left[ \alpha \frac{\partial m}{\partial k} - 1 \right] \pm \sqrt{\left[ \alpha \frac{\partial m}{\partial k} - 1 \right]^2 - \frac{4\phi\alpha}{d} \frac{\partial m}{\partial R}} \right]$$

Elles sont réelles si  $\rho \geq 0$  et complexes sinon<sup>2</sup>.

Si  $\rho < 0$ , il y a convergence (cyclique) si  $\frac{\partial m}{\partial k} < \frac{1}{\alpha}$ , ce qui est bien le cas suffisamment près de l'ES. En effet, on vérifie à l'ES que :

$$\left. \frac{\partial m}{\partial k} \right|_* = \frac{1}{\alpha} - \frac{\mu f}{2\alpha\phi} - \frac{a_m\alpha\phi}{2f} \quad (40)$$

où  $f = \frac{F}{M_*} = \frac{1}{\omega - \frac{F}{\phi}} > 0$ .

Si  $\rho \geq 0$ , (40) et le fait que  $\frac{\partial m}{\partial R} > 0$  garantissent que les deux racines sont négatives. Dès lors, la convergence vers l'ES est monotone.

<sup>2</sup>A l'Annexe 7.3, une condition sur les paramètres est établie qui garantit que les racines sont réelles à l'ES.

## 5 Simulations

### 5.1 Calibration

Les simulations suivantes visent à éclairer les interactions entre les différentes formes de PT et les limites en terme de ressources naturelles auxquelles l'économie est confrontée. Sauf exception, les paramètres du modèle ne sont pas "observés" mais calibrés de façon à respecter les contraintes (34) et (35) et à obtenir des valeurs des variables relatives raisonnables. Comme les valeurs à l'ES des variables en niveau  $k_*, x_*, y_*, m_*, R_*, M_*, K_*, k_{m*}, k_{x*}$  sont linéairement proportionnelles à l'apport extérieur d'énergie  $F$ , le système peut être caractérisé à un facteur d'échelle près. On normalise donc  $F$  à 1, ce qui implique que toutes les variables en niveau sont exprimées par unité du flux  $F$ .

A la manière de Meadows et al. (2012), les valeurs numériques n'ont pas beaucoup d'intérêt en elles-même et c'est surtout l'allure des trajectoires qui compte. La procédure de calibration est décrite à l'Annexe 7.4.

### 5.2 Simulation de référence (SR)

Pour mémoire, on est intéressé par une économie en développement, initialement caractérisée par un stock de ressource  $R_0$  élevé et un stock de capital faible  $k_0$  (par rapport à leurs niveaux de long terme). Les valeurs des paramètres et conditions initiales sont les suivantes :  $d = 0.05, s = 0.25, \mu = \phi = 1, a_m = 0.0444, a_x = 0.319, \omega = 2.5, k_0 = K_0 = 0.522, R_0 = 32.725$ . La SR est caractérisée par la constance des paramètres technologiques (pas de PT) et illustrée par les Figures 2.a-h.

Ces figures montrent que les variables ont des trajectoires non monotones. Elles montrent également que les variables se retournent à des moments différents.

Au début de la simulation, même si l'économie est en croissance, son empreinte énergétique est encore suffisamment faible pour que  $R$  croisse (Fig. 2.b). Mais cela ne dure pas, et assez rapidement,  $R$  atteint un maximum en  $t = t_R$ , avant d'amorcer une longue décroissance parce que la demande d'énergie de l'économie dépasse l'apport extérieur d'énergie.

Vu (4), la croissance du capital exige toujours plus d'énergie. Malgré la baisse de  $R$  et vu (5) et (19), cette exigence peut être satisfaite pendant un temps grâce à la double croissance de  $k$  et  $\kappa$  (Fig. 2.a et e).

Vu (10), la croissance du capital se traduit par une baisse du stock de matière  $M$ . Vu (9) et (19), la baisse de  $M$ , couplée avec la hausse de  $\kappa$ , finit par peser sur la croissance de  $m$  et  $y$  qui se retournent à leur tour en  $t = t_m$ .

Les équations (1), (2), (3), (9) et (19) impliquent que  $k' = \frac{s}{\mu} \sqrt{a_m [1 - \kappa] k M} - \delta k$  et, par conséquent, que

$$g_k = \frac{k'}{k} = \frac{s}{\mu} \sqrt{\frac{a_m [1 - \kappa] M}{k}} - \delta \quad (41)$$

Depuis le début de la simulation, le taux de croissance du capital  $g_k$  est affecté négativement par la hausse de  $k$  et de  $\kappa$  et par la baisse de  $M$ . Il finit par s'annuler en  $t = t_k$  et devient négatif ensuite.

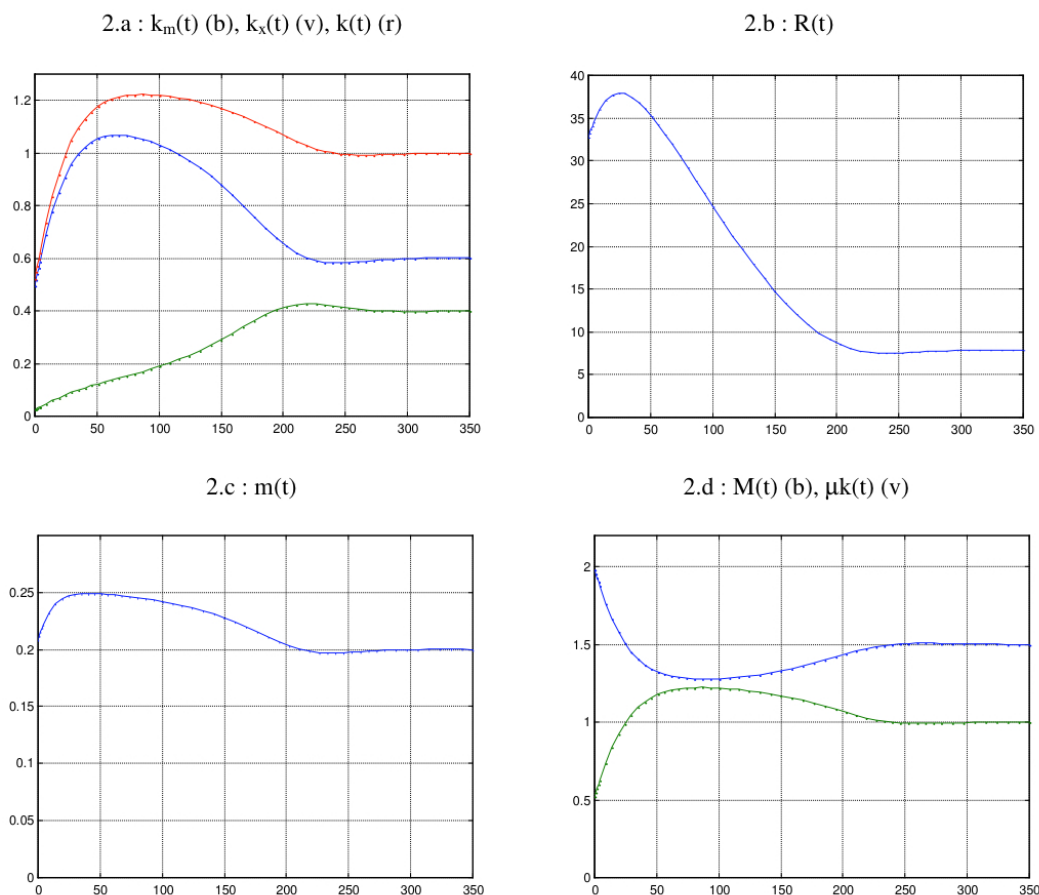
Les deux allocations du capital  $k_m$  et  $k_x$  ne se retournent cependant pas en même temps que  $k$ . La Figure 2.e montre que  $\kappa$  est croissant au moment où  $k' = 0$ . Comme  $k_m = [1 - \kappa] k$  et  $k_x = \kappa k$ , il en découle que  $k'_m(t_k) = -\kappa(t_k)' k(t_k) < 0$  et  $k'(t_k) = \kappa'(t_k) k(t_k)$ . En conséquence,  $k_m$  et  $k_x$  se retournent respectivement en  $t_{k_m}$  et  $t_{k_x}$ , avec  $t_{k_m} < t_k < t_{k_x}$ , autrement dit avant et après  $k$ , ce que confirme la Figure 2.a.

La relation (9) donne que  $m \sim k_m M$ . Or (10) implique que  $M \sim -k$ . Donc  $M$  est décroissant depuis le début et atteint son minimum en  $t_k$ . Comme  $t_{k_m} < t_k$ , on a  $M'(t_{k_m}) < 0$ . En conséquence,  $m'(t_{k_m}) = k_m(t_{k_m}) M'(t_{k_m}) < 0$ . Il en découle que  $m$  se retourne avant  $k_m$ , ce que confirment les Figures 2.a et c. En résumé, on a la séquence de retournements suivante :

$$t_R < t_m < t_{k_m} < t_k < t_{k_x} \quad (42)$$

Quand  $k$  atteint son maximum, la consommation énergétique  $x$  est supérieure au flux énergétique naturel (normalisé à 1). Vu (4), la décroissance de  $k$  entraîne celle de  $x$ , mais tant que  $x > 1, R$

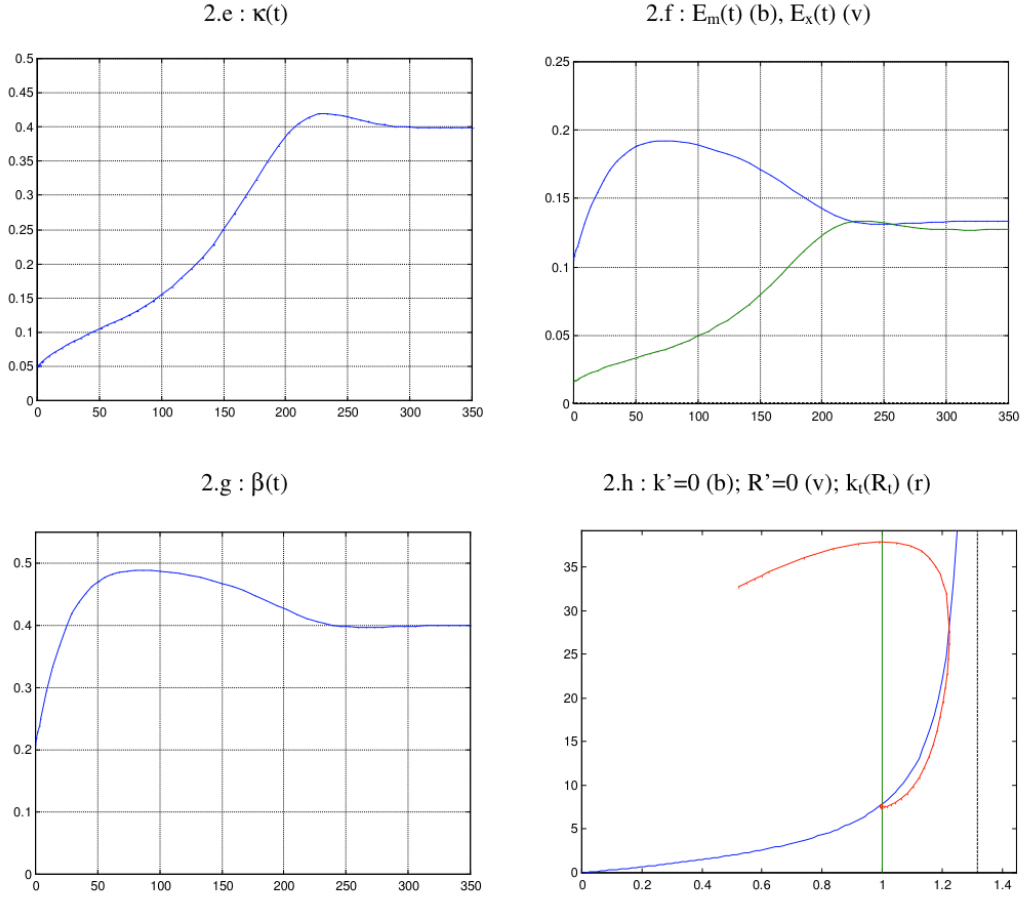
Figure 2: Simulation de référence – absence de progrès technique (b : bleu ; v : vert ; r : rouge)



continue de décroître. Pour contrebalancer cette baisse, l'économie doit continuer d'augmenter la part du capital dévolu à l'extraction énergétique. Au niveau de la détermination de  $g_k$ , l'influence (négative) de cette hausse de  $\kappa$  l'emporte sur celles (positives) de la baisse de  $k$  et de la hausse de  $M$ , ce qui fait que  $g_k$  demeure négatif. Cette décroissance de  $R$  et de  $k$  ne s'arrête que quand la consommation énergétique a retrouvé un niveau soutenable correspondant à l'apport externe d'énergie.

Les Figures 2.a-g montrent que toutes les variables sont plus ou moins stabilisées en  $t \approx 250$ . Par rapport à l'état initial, le stock de capital a augmenté et les stocks de ressources ont diminué. La production baisse malgré la hausse du capital car celle-ci est plus que neutralisée par la baisse des stocks de ressource. La Figure 2.e montre qu'un profond changement structurel a eu lieu, puisque l'économie consacre une part beaucoup plus importante de son capital à l'exploitation de l'énergie. La Figure 2.f montre que les taux d'extraction restent toujours inférieurs à 20% durant la trajectoire. La décroissance de l'économie survient alors même que ces taux sont très loin de 1. Ce résultat suggère que les limites à la croissance proviennent bien plus du changement structurel que de l'épuisement des ressources.

Figure 2: Simulation de référence (suite)



### 5.3 Progrès technique

Dans ce modèle, le PT peut intervenir au niveau de l'extraction et de l'utilisation des deux ressources, en modifiant les paramètres  $\mu, \phi$  (à la baisse) ou  $a_m, a_x$  (à la hausse) au cours du temps. Formellement, ceux-ci évoluent selon l'équation logistique suivante :

$$p' = g_p \left[ 1 - \frac{p}{p_*} \right] p \quad (43)$$

où  $p \in \{\mu, \phi, a_m, a_x\}$ ,  $p(0)$  est donné,  $p_*$  désigne la valeur asymptotique de  $p$  et  $g_p$  détermine la vitesse avec laquelle  $p$  tend vers  $p_*$ . Toutes les valeurs sont positives. Le rapport  $\frac{|p(0)-p_*|}{p(0)}$  mesure le *potentiel de PT* en début de simulation.

On commence par étudier successivement les quatre formes de PT *unidimensionnel* (au sens où un seul paramètre varie, les autres restant constants). Dans toutes les simulations ci-dessous,  $g_p$  prend les trois valeurs suivantes : 0 qui correspond à la SR (absence de PT), 0.015 et 0.03 qui correspondent respectivement à un potentiel de PT (à peu près) réalisé en 300 et 150 ans. On étudie ensuite l'impact d'un PT *multidimensionnel* qui affecte l'ensemble des paramètres.

### 5.3.1 Baisse de $\mu$ (V1)

La première forme de PT se traduit par la dématérialisation de la production, autrement dit par la baisse du contenu en matière d'une unité de bien. Un exemple de dématérialisation est le remplacement de certains matériaux par d'autres plus légers, par exemple dans l'industrie automobile. La variante V1 suppose que  $\mu$  obéit à l'équation (43) avec  $p = \mu, \mu_* = 0.75, \mu(0) = 1$ . Le fait que  $0 < \mu_*$  exclut une dématérialisation totale. Notons que  $\mu_* = 0.75$  est quasi à la limite de ce qui est possible en matière de dématérialisation<sup>3</sup>. V1 est illustrée par les Figures 3.a-f. Dans ces figures comme dans les suivantes, les courbes bleue, verte et rouge correspondent respectivement à  $g_p = 0, 0.015, 0.03$ .

Par rapport à la SR, le PT permet en début de simulation une croissance beaucoup plus forte de la production  $y$  (qui ne se confond plus avec  $m$ ) et du capital  $k$  (Fig. 3.a-b). La demande énergétique étant en conséquence plus forte,  $R$  atteint son maximum plus tôt et décline sensiblement plus vite (Fig. 3.c). Il en résulte un déplacement du capital entre secteurs beaucoup plus brutal, comme en témoigne l'évolution de  $\kappa$  (Fig. 3.e). Le déplacement est d'autant plus brutal que  $g_\mu$  est élevé.

Cette évolution est encore moins durable que dans le cadre de la SR. Et on assiste à la même séquence de retournements que celle décrite par (42). Cette séquence est nettement plus contractée dans le temps (l'écart  $t_{k_x} - t_R$  est sensiblement plus faible) et sauf exception, les variables passent par leur maximum respectif plus tôt. Leur décroissance est également plus prononcée. Le déplacement du capital au détriment du secteur manufacturier se traduit par un effondrement de  $k_m$  (Fig. 3.d) et partant de  $m$ , mais aussi de  $y$  malgré la baisse continue de  $\mu$ . Dans le cadre de cette simulation, les effets (négatifs) sur la production du changement structurel l'emportent largement sur ceux (positifs) du PT.

A long terme, les figures confirment l'analyse de l'ES (cfr. section 3). Par rapport à la SR, l'ES se déplace vers le bas dans l'orthant  $\langle k, R \rangle$  (Fig. 3.f). Le PT n'a aucun effet sur  $y_*$  et  $k_*$ . Cela s'explique par le fait que ces valeurs ne sont pas influencées par le contenu en matière  $\mu_*$ . En revanche, il réduit l'extraction de matière  $m_*$  et a des effets contrastés sur les ressources, dans la mesure où il conduit à une hausse de  $M_*$  et à une baisse de  $R_*$ .

### 5.3.2 Gains d'efficacité énergétique (V2)

La deuxième forme de PT se traduit par une augmentation de l'efficacité énergétique dans l'utilisation du capital. Un exemple de ce progrès est l'augmentation du rendement des moteurs. La variante V2 suppose que  $\phi$  obéit à l'équation (43) avec  $p = \phi, \phi_* = 0.9, \phi(0) = 1$ . Le fait que  $0 < \phi_*$  exclut une productivité infinie de l'énergie. Notons que  $\phi_*$  ne peut pas être choisi trop bas, car alors un ES admissible n'existe plus<sup>4</sup>. V2 est illustrée par les Figures 4.a-f.

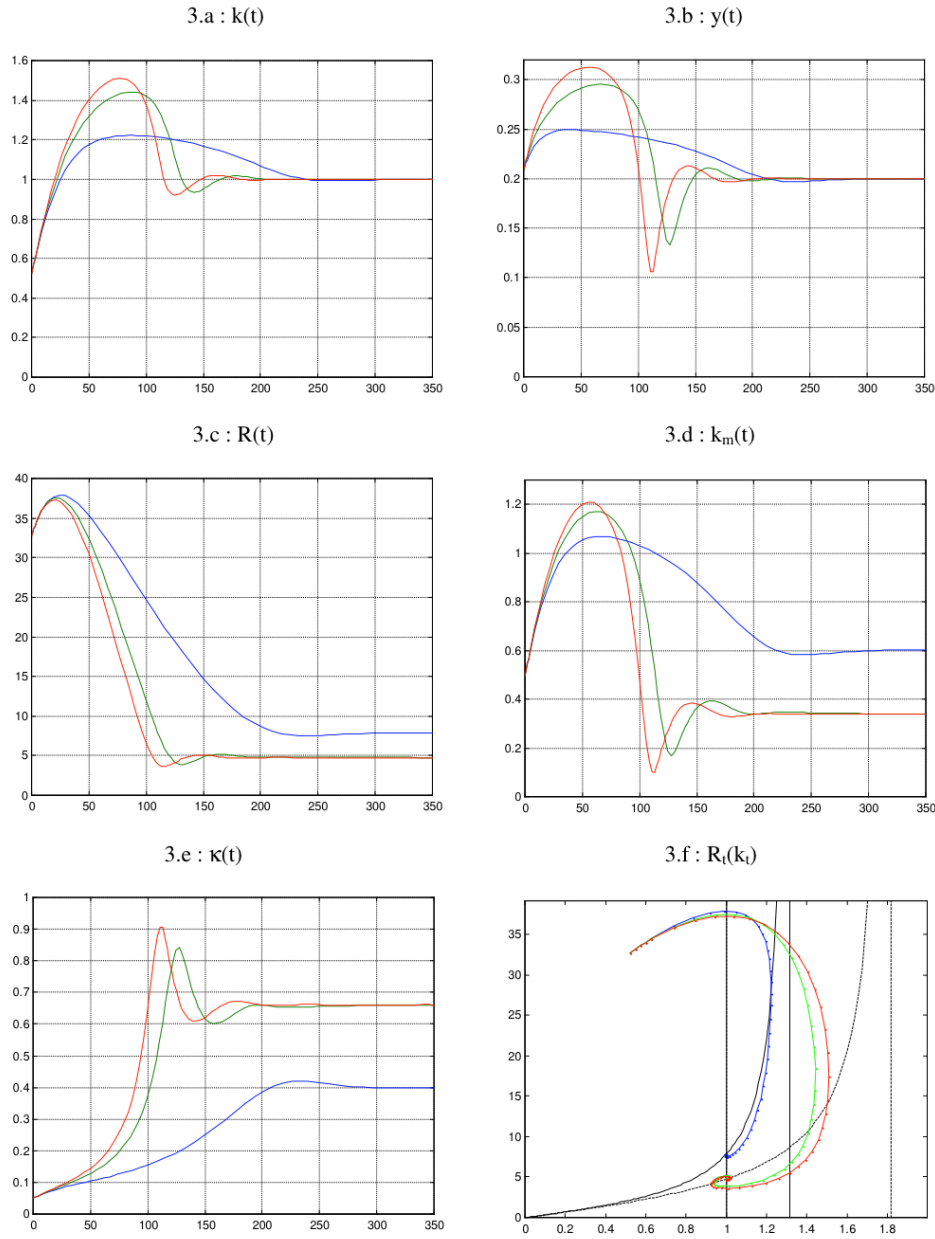
Le début des trajectoires de la production  $y$  (qui se confond avec  $m$ ) et du capital  $k$  est très similaire en présence ou en l'absence de PT (Fig. 4.a-b). Comme le montre la Figure 4.d, les gains d'efficacité énergétique dans l'utilisation du capital permettent de réduire la consommation énergétique  $x$  (qui ne se confond plus avec  $k$ ). En conséquence,  $R$  atteint son maximum plus tard et décline plus lentement (Fig. 4.c). Il en résulte un déplacement du capital entre secteurs plus lent, comme en témoigne l'évolution de  $\kappa$  (Fig. 4.e).

La baisse des stocks de ressource finit par peser sur la croissance. Comme dans le cadre de la SR, on assiste à la même séquence de retournements que celle décrite par (42). Cette séquence est nettement plus étendue dans le temps (l'écart  $t_{k_x} - t_R$  est sensiblement plus élevé) et les variables passent par leur maximum respectif plus tard. Leur décroissance est également plus lente et moins prononcée. Contrairement à V1, il n'est plus question d'effondrement et V2 ressemble plus à SR qu'à V1.

<sup>3</sup>Il existe pour  $\mu_*$  un seuil d'admissibilité,  $\underline{\mu}_*$ , en dessous duquel les trajectoires observées ne sont pas admissibles, car il arrive un moment où certaines contraintes (par exemple  $\kappa \leq 1$ ) sont violées. Le fait que l'ES existe ne garantit donc pas que toutes les trajectoires qui y convergent soient admissibles.

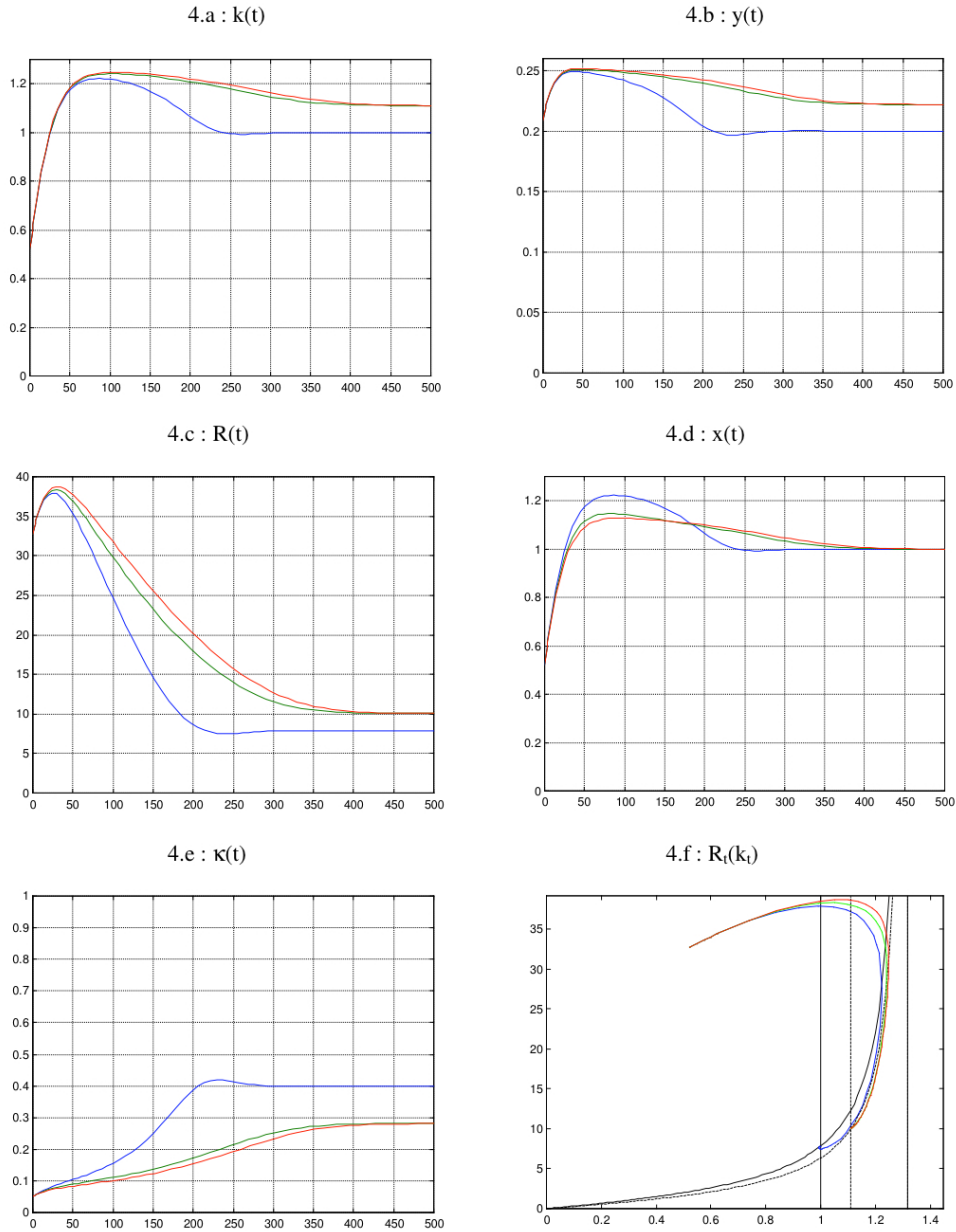
<sup>4</sup>(34) est violée si  $\phi$  est trop faible. La valeur minimale de  $\phi_*$  est déterminée par  $\underline{\phi}_* = \frac{\mu}{\omega} \left[ \frac{\mu}{a_m} \left[ \frac{d}{s} \right]^2 + 1 \right]$ . Avec la paramétrisation de référence,  $\underline{\phi}_* = 0.76$ .

Figure 3: Variante 1 - dématérialisation de la production



La convergence vers l'ES est plus lente que pour la SR, et elle est d'autant plus lente que  $\phi$  est faible (autrement dit que le potentiel de PT est élevé). A long terme, les figures confirment l'analyse de l'ES (cfr. section 3). Par rapport à la SR, l'ES se déplace vers le haut et vers la droite dans l'orthant  $\langle k, R \rangle$  (Fig. 4.f). Le PT a un effet positif sur  $y_*$  et  $k_*$ . Ces valeurs sont en effet influencées par l'intensité énergétique du capital  $\phi$ , que le PT affecte directement. Celui-ci a des effets contrastés sur les ressources, dans la mesure où il conduit à une baisse de  $M_*$  et à une hausse de  $R_*$ .

Figure 4: Variante 2 - augmentation de l'efficacité énergétique dans l'usage du capital

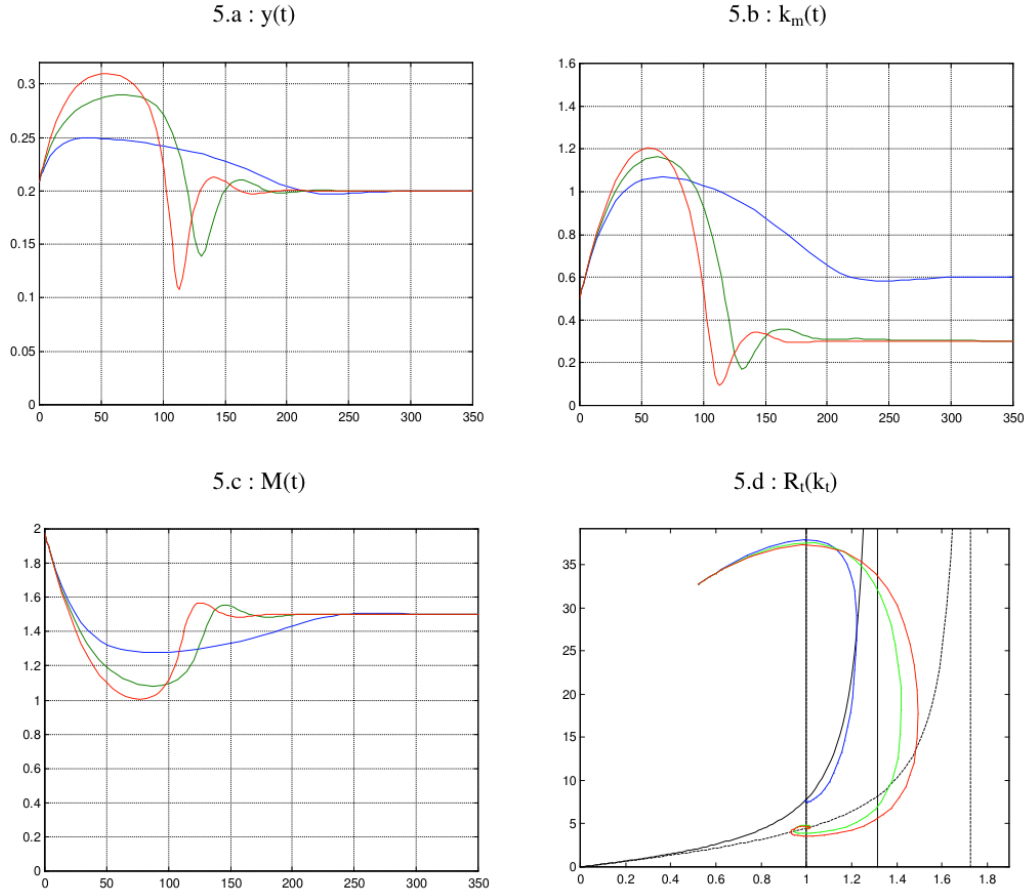


### 5.3.3 Augmentation de $a_m$ (V3)

La troisième forme de PT se traduit par une hausse continue de l'efficacité avec laquelle on extrait la matière. Un exemple de ce progrès est le perfectionnement des techniques permettant d'exploiter des minerais toujours moins concentrés ou plus inaccessibles. La variante V3 suppose que  $a_m$  obéit à l'équation (43) avec  $p = a_m$ ,  $a_m(0) = 0.0444$ ,  $a_{m*} = 2a_m(0)$ . Notons que  $a_{m*}$  ne peut pas être choisi trop élevé (pour la même raison qu'expliqué à la note 3). V3 est illustrée par les Figures 5.a-d.



Figure 5: Variante 3 - progrès technique au niveau extraction de matière



Dans l'ensemble, V3 conduit à des trajectoires et des conclusions similaires à celles de V1, où le PT se traduisait par une dématérialisation de la production. En particulier, après une phase de croissance, on observe (pour les mêmes raisons que dans le cadre de V1) un effondrement de la production de matière  $m$  (qui se confond avec  $y$ ) et de  $k_m$  (cfr. Fig. 5.a-b)<sup>5</sup>. Une exception concerne le stock de matière  $M$  (cfr. Fig. 5.c). Comparé à SR, une plus grande efficacité dans l'extraction de matière conduit à une baisse plus rapide de  $M$  pendant la première partie de la simulation et au même stock à long terme (comparée à SR, V1 n'impliquait en revanche pas de baisse plus rapide de  $M$  et conduisait à un niveau stationnaire plus élevé). L'augmentation de  $a_m$  se traduit par une autre différence : la séquence (42) est légèrement modifiée au sens où le retournement de  $m$  suit ou coïncide avec celui de  $k_m$  (alors que dans le cas de SR, il le précède).

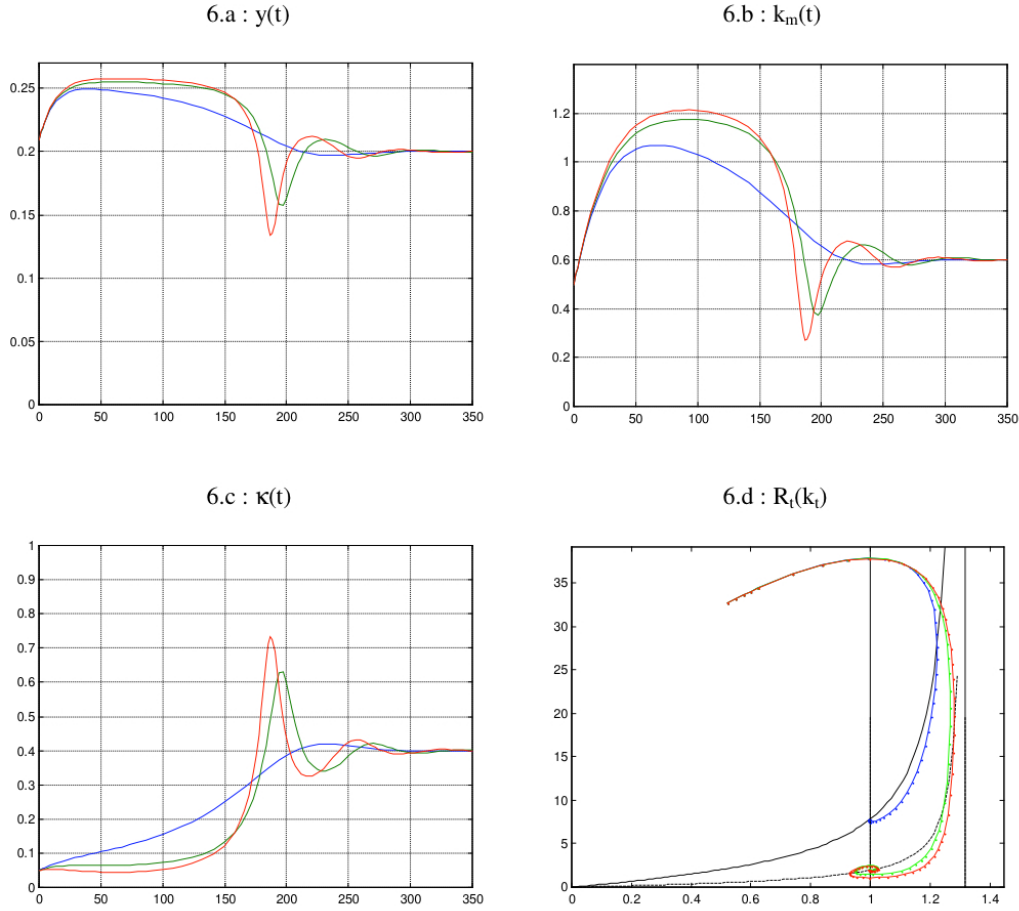
A long terme, les résultats sont similaires à ceux observés pour V1 (cfr. Fig. 5.d).

### 5.3.4 Augmentation de $a_x$ (V4)

La quatrième forme de PT se traduit par une hausse continue de l'efficacité avec laquelle on extrait l'énergie. L'évolution des techniques permettant d'exploiter des gisements d'énergie fossile autrefois inexploitable et la hausse des rendements des énergies renouvelables en constituent des exemples. La variante V4 suppose que  $a_x$  obéit à l'équation (43) avec  $p = a_x, a_x(0) = 0.319, a_{x*} = 4a_x(0)$ . Notons que  $a_{x*}$  ne peut pas être choisi trop élevé (pour la même raison qu'expliqué à la note 3). V4 est illustrée par les Figures 6.a-d.

<sup>5</sup>En comparaison avec les Figures 3.b,d, l'effondrement a l'air moins prononcé, mais c'est parce que  $\mu_*$  est plus

Figure 6: Variante 4 - progrès technique au niveau extraction d'énergie



Dans l'ensemble, V4 conduit à des trajectoires et des conclusions similaires à celles de V1 et V3. En particulier, après une phase de croissance, on observe (toujours pour les mêmes raisons) un effondrement de la production de matière  $m$  (qui se confond avec  $y$ ) et de  $k_m$  (cfr. Fig. 6.a-b)<sup>6</sup>. Cet effondrement survient plus tard, après une sorte de plateau qui suit lui-même la phase de croissance initiale. Le changement structurel mesuré par  $\kappa$  survient plus tard et de façon plus brutale comparé à SR (cfr. Fig. 6.c). On assiste à la même séquence de retournements (42) que celle observée dans le cadre de la SR. Cette séquence est cependant plus contractée dans le temps (l'écart  $t_{k_x} - t_R$  est sensiblement plus faible). Sauf  $k_x$  et  $R$ , les variables passent par leur maximum respectif plus tard. A long terme et comme dans le cadre de V3, le PT affecte négativement le stock d'énergie et laisse le stock de matière inchangé.

### 5.3.5 Progrès technique multiforme (V5)

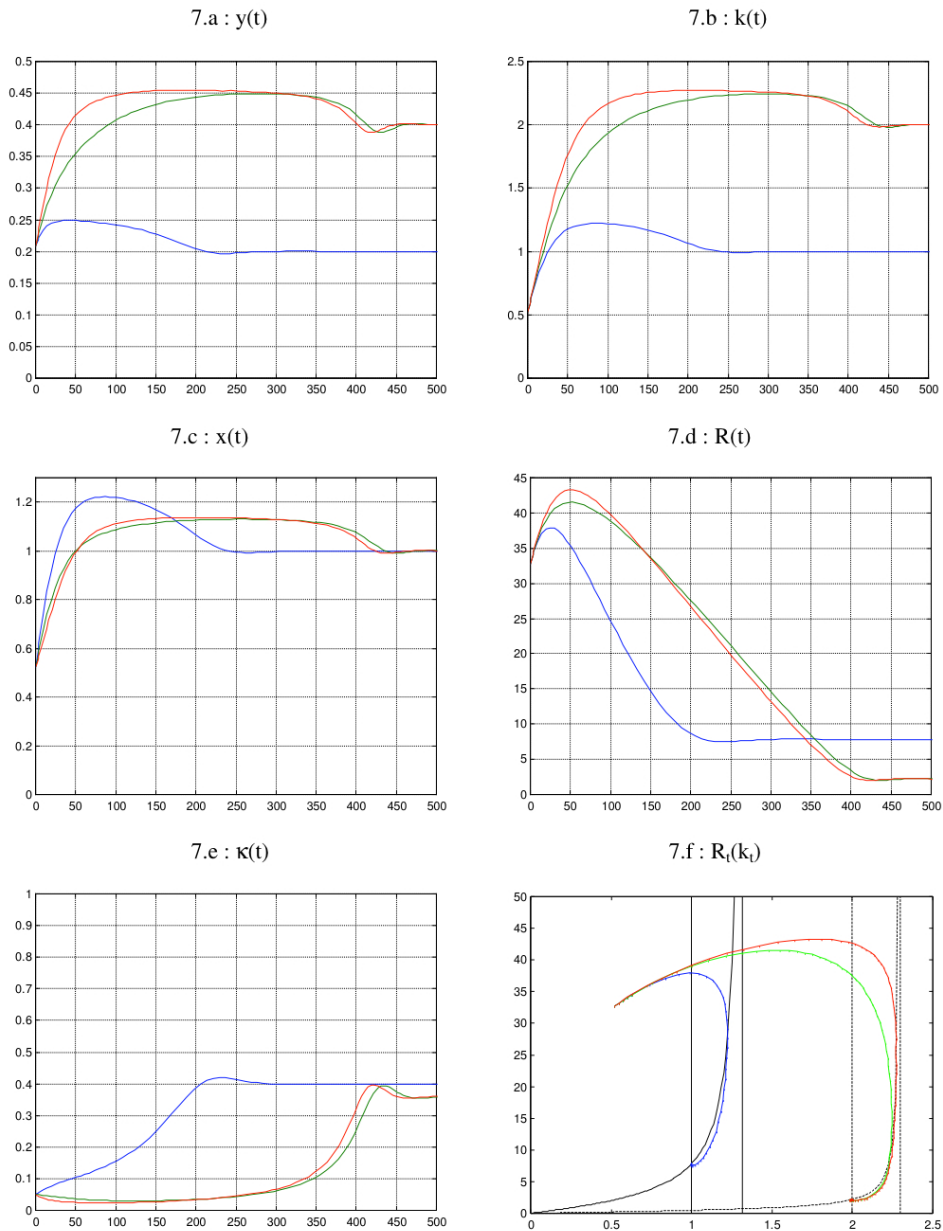
La dernière simulation combine les quatre formes de PT étudiés ci-dessus. Autrement dit, les quatre paramètres  $\mu, \phi, a_m, a_x$  évoluent tous selon l'équation (43). Les valeurs initiales de ces paramètres se confondent avec leurs valeurs de la SR, tandis que leurs valeurs limites sont respectivement :  $\mu_* = .8, \phi_* = 0.5, a_{m*} = 2.5a_m(0), a_{x*} = 2.5a_x(0)$ . A nouveau, celles-ci ne peuvent

proche de  $\underline{\mu}_*$  que ne l'est  $a_{m*}$  de  $\overline{a_{m*}}$ .

<sup>6</sup>En comparaison avec les Figures 3.b,d, l'effondrement a l'air moins prononcé, mais c'est parce que  $\mu_*$  est plus proche de  $\underline{\mu}_*$  que ne l'est  $a_{x*}$  de  $\overline{a_{x*}}$ .

être choisies n'importe comment car des potentiels de PT trop élevés conduisent à des trajectoires inadmissibles. On constate cependant qu'un PT multiforme permet à l'intensité énergétique de l'usage du capital  $\phi$  de baisser sensiblement plus que dans le cadre de V2 (où les autres paramètres restaient constants). Cette propriété est intéressante du point de vue de l'activité économique puisqu'on a vu que seul le PT modifiant  $\phi$  affecte positivement la production  $y$  et le capital  $k$  à l'ES. V5 est illustrée par les Figures 7.a-f.

Figure 7: Variante 5 - progrès technique multiforme



Pendant la première partie de la simulation, le PT permet par rapport à SR une croissance plus rapide et plus prolongée de la production  $y$  et du capital  $k$  (Fig. 7.a-b). L'extraction de matière a le même profil, au contraire de l'extraction d'énergie qui croît moins vite grâce au fort potentiel de PT au niveau de  $\phi$  (Fig. 7.c). Il en résulte des évolutions contrastées des stocks de ressources :

$M$  et  $R$  sont respectivement plus et moins exploitées par rapport à SR (Fig. 7.d). Au niveau de l'affectation du capital, on observe que  $\kappa$  évolue très peu (Fig. 7.e). Cependant, le PT finissant par s'épuiser, il permet de moins en moins de contrecarrer la raréfaction des ressources. Il en découle en deuxième partie de simulation une stagnation suivie d'une décroissance de la production et du capital. Celle-ci est cependant de faible ampleur par rapport à l'ampleur de la croissance enregistrée en début de simulation, permettant ainsi à ces variables de converger vers des valeurs stationnaires sensiblement supérieures à leurs valeurs initiales. L'épuisement du PT au niveau de  $\phi$  implique une consommation d'énergie qui finit par être supérieure à celle de SR. Il arrive alors un moment où, comparé à SR, les *deux* ressources sont plus exploitées (un fait nouveau par rapport aux simulations précédentes). Pour soutenir la consommation d'énergie malgré la baisse continue de  $R$ , l'économie se doit en conséquence de consacrer une part toujours plus élevée du capital à l'extraction d'énergie (comme dans les simulations précédentes). Comme le montre la Fig. 7.e, le changement structurel ne s'amorce vraiment qu'en deuxième partie de simulation.

A long terme et par rapport à la SR, le PT permet à l'économie de tendre vers un état stationnaire caractérisé par une production, un stock de capital et une extraction de matière plus élevés, et par des stocks de ressource plus bas (Fig. 7.f). Il en découle des taux d'extraction sensiblement plus élevés. Comme dans le cadre des simulations précédentes, le changement structurel conduit à une affectation du capital nettement à l'avantage du secteur énergétique.

## 6 Conclusion

Les principaux résultats de cet article sont les suivants. L'état stationnaire existe à condition que le rapport entre quantité totale de matière et flux d'énergie externe soit suffisamment élevé. Dès lors que c'est le cas, l'état stationnaire est unique et c'est le flux d'énergie externe qui détermine le niveau d'activité économique (en particulier la production de biens et le stock de capital), niveau qui détermine à son tour la consommation de matière.

A l'état stationnaire, on observe que :

- La production de biens et le stock de capital sont des fonctions croissantes du flux d'énergie externe et de l'efficacité énergétique du capital, mais sont indépendants des autres paramètres technologiques.
- Une plus grande dématérialisation des biens produits ou une plus grande efficacité dans l'extraction d'une ressource n'a pas d'influence sur l'activité économique. Seule une plus grande efficacité dans l'usage de l'énergie a un effet favorable sur la production et le capital.
- Les effets du progrès technique sur les stocks de ressource sont contrastés selon le paramètre qu'il modifie. Une plus grande dématérialisation épargne la ressource de matière, mais implique une plus grande exploitation du stock d'énergie. Le contraire se produit suite à une plus grande efficacité dans l'usage de l'énergie. Une plus grande efficacité dans l'extraction d'une ressource laisse la ressource de matière inchangée et diminue celle d'énergie.

L'analyse dynamique montre qu'une économie en développement (c-à-d initialement caractérisée par un stock de capital faible et par des ressources abondantes) commence par croître avant de nécessairement décroître vers l'état stationnaire de façon monotone ou cyclique. Autrement dit, une croissance monotone de l'économie vers l'état stationnaire est exclue.

Quelque soit la simulation considérée, la comparaison de l'état stationnaire avec l'état initial montre aussi que l'économie subit un profond changement structurel pendant son développement, au sens où une part sensiblement plus importante du capital doit être consacrée à l'extraction d'énergie au détriment de l'extraction/transformation de la matière.

Les simulations confirment que les trajectoires des variables en niveau (production, capital, consommation de matière, stocks de ressource) sont non monotones. Elles montrent également que ces variables ne se retournent pas en même temps. L'amorce de la décroissance de l'économie est progressif : alors que certaines variables se sont retournées (par exemple la production), d'autres continuent à croître pendant un certain temps avant de se retourner à leur tour (par exemple le capital). Les résultats de ce paragraphe ne sont pas sans rappeler ceux de l'ouvrage bien connu de Meadows et al. (2012).

Si certaines formes de progrès technique n'ont pas d'effet sur la production et le capital à long terme (c-à-d à l'état stationnaire), les simulations montrent qu'elles ont un impact pendant la phase transitoire. Si le progrès technique est unidimensionnel (c-à-d qu'il ne modifie qu'un seul paramètre technologique), il n'augmente la production et le capital que s'il améliore l'efficacité de l'usage de l'énergie. Son potentiel est cependant borné supérieurement. Dans les autres cas, l'effet positif sur ces grandeurs est transitoire et est suivi tôt ou tard d'une correction dans l'autre sens. Si le potentiel de progrès technique est proche de sa limite (au delà de laquelle les trajectoires deviennent inadmissibles), cette correction peut se traduire par un véritable effondrement de l'activité.

Le progrès technique se révèle surtout favorable s'il est multidimensionnel, c-à-d s'il modifie simultanément plusieurs paramètres technologiques. Dans ce cas en effet, les progrès en terme de dématérialisation ou d'extraction de ressources permettent un potentiel de progrès technique plus élevé en terme d'efficacité dans l'usage de l'énergie. Or c'est ce dernier qui permet d'accroître durablement l'activité économique.

Le modèle élaboré dans cet article est susceptible de nombreux développements. Deux développements possibles qui en amélioreraient la pertinence en terme d'économie circulaire sont les suivants. Le premier viserait à augmenter le réalisme du recyclage de matière en le considérant comme une activité économique distincte de l'extraction et nécessitant également du capital. Le second serait de prendre en compte les effets de la pollution liée à l'accumulation de déchets, ce qui permettrait de faire du recyclage un outil de politique environnementale.

## 7 Annexes

### 7.1 Contraintes sur $\omega$

Toutes les variables doivent être positives. Si  $\omega = \frac{\Omega}{F}$ , alors (26) donne que

$$\omega > \frac{\mu}{\phi}.$$

Cette inégalité et (31) impliquent alors que  $E_{m*} > 0$ . En outre, (28) donne que  $\frac{1}{\phi} \geq \frac{\left[\frac{d\mu}{s\phi}\right]^2}{a_m\left[\frac{\Omega}{F} - \frac{\mu}{\phi}\right]}$ , ce qui implique que  $a_m\left[\omega - \frac{\mu}{\phi}\right] \geq \phi\left[\frac{d\mu}{s\phi}\right]^2$  et donc que  $\omega \geq \frac{\phi}{a_m}\left[\frac{d\mu}{s\phi}\right]^2 + \frac{\mu}{\phi}$ , et finalement que

$$\frac{\mu}{\phi}\left[\frac{\mu}{a_m}\left[\frac{d}{s}\right]^2 + 1\right] \leq \omega. \quad (44)$$

Il faut que les taux d'extraction soient inférieurs ou égaux à 1. L'équation (31) donne que  $\frac{d\mu}{s\phi}\frac{1}{\omega - \frac{\mu}{\phi}} \leq 1$  et donc que  $\frac{d\mu}{s\phi} \leq \omega - \frac{\mu}{\phi}$ . On obtient donc que

$$\frac{\mu}{\phi}\left[\frac{d}{s} + 1\right] \leq \omega. \quad (45)$$

Les relations (44) et (45) conduisent bien à (34). (30) et  $E_{x*} \leq 1$  impliquent  $a_x\left[\frac{1}{\phi} - \frac{\left[\frac{d\mu}{s\phi}\right]^2}{a_m\left[\omega - \frac{\mu}{\phi}\right]}\right] \leq 1$ , ce qui implique que  $\frac{1}{\phi} - \frac{1}{a_x} \leq \frac{\left[\frac{d\mu}{s\phi}\right]^2}{a_m\left[\omega - \frac{\mu}{\phi}\right]}$ . Si  $\frac{1}{\phi} \leq \frac{1}{a_x}$ , c'est-à-dire  $a_x \leq \phi$ , l'inégalité précédente est toujours satisfaite. Sinon, elle implique que  $\omega - \frac{\mu}{\phi} \leq \frac{\left[\frac{d\mu}{s\phi}\right]^2}{a_m\left[\frac{1}{\phi} - \frac{1}{a_x}\right]}$ , et donc que

$$\omega \leq \frac{\mu}{\phi}\left[\frac{\frac{\mu}{\phi}\left[\frac{d}{s}\right]^2}{a_m\left[\frac{1}{\phi} - \frac{1}{a_x}\right]} + 1\right], \quad (46)$$

qui correspond à (35).

Il faut que  $0 < \kappa_* < 1$ . Au vu de (32),  $\kappa_* < 1$ . Par ailleurs,  $0 < \kappa_*$  implique  $\left[\frac{d\mu}{s}\right]^2 < a_m\phi \left[\omega - \frac{\mu}{\phi}\right]$  et, par conséquent,  $\frac{1}{a_m\phi} \left[\frac{d\mu}{s}\right]^2 + \frac{\mu}{\phi} < \omega$ , ce qui donne  $\frac{\mu^2}{a_m\phi} \left[\frac{d}{s}\right]^2 + \frac{\mu}{\phi} < \omega$  et on retrouve (44). Ce résultat assure alors que  $k_{x^*} > 0$  et  $R_{x^*} = \frac{F^2}{a_x k_{x^*}} > 0$ , ce qui implique finalement que  $E_{x^*} > 0$ .

## 7.2 Dérivation de (36) et (37)

Il découle de (14) et (16) avec  $K = \mu k$  que :

-  $R' = 0$ , et donc  $F = \phi$  et  $k = F/\phi$ .

-  $k' = 0$  donne que  $\frac{s}{\mu} \sqrt{a_m [\Omega - \mu k] \left[k - \frac{[\phi k]^2}{a_x R}\right]} = dk$ , ce qui donne que  $a_m [\Omega - \mu k] \left[k - \frac{[\phi k]^2}{a_x R}\right] = \left[\frac{d\mu k}{s}\right]^2$ , et donc que  $[\Omega - \mu k] \left[1 - \frac{\phi^2 k}{a_x R}\right] = \frac{k}{a_m} \left[\frac{d\mu}{s}\right]^2$ , ce qui implique que  $1 - \frac{\phi^2 k}{a_x R} = \frac{1}{a_m} \left[\frac{d\mu}{s}\right]^2 \frac{k}{\Omega - \mu k}$  et par conséquent que  $\frac{\phi^2 k}{a_x R} = 1 - \frac{1}{a_m} \left[\frac{d\mu}{s}\right]^2 \frac{k}{\Omega - \mu k}$ . Donc  $R = \frac{\phi^2 k}{a_x \left[1 - \frac{1}{a_m} \left[\frac{d\mu}{s}\right]^2 \frac{k}{\Omega - \mu k}\right]}$ . Le dénominateur

de cette dernière fraction doit être positif, ce qui suppose que  $\frac{1}{a_m} \left[\frac{d\mu}{s}\right]^2 \frac{k}{\Omega - \mu k} < 1$ , et donc que  $\frac{1}{a_m} \left[\frac{d\mu}{s}\right]^2 k < \Omega - \mu k$ , ou encore que  $\left[\frac{\mu}{a_m} \left[\frac{d}{s}\right]^2 + 1\right] \mu k < \Omega$ , c'est-à-dire que

$$k < k_l = \frac{\Omega}{\mu \left[\frac{\mu}{a_m} \left[\frac{d}{s}\right]^2 + 1\right]}. \quad (47)$$

L'intervalle de variation de  $k$  admissible dans l'orthant  $\langle k, R \rangle$  est donc  $[0, k_l]$ .

## 7.3 Analyse dynamique locale

Il découle de (14) et (16) avec  $K = \mu k$  que :

$$\begin{aligned} k' &= \frac{s}{\mu} m(k, R) - dk \\ R' &= F - \phi k \end{aligned}$$

où  $m(k, R) = \sqrt{a_m M(k) k_m(k, R)} = \sqrt{a_m [\Omega - \mu k] \left[k - \frac{[\phi k]^2}{a_x R}\right]}$ .

Le jacobien s'écrit :

$$J = \begin{bmatrix} \frac{s}{\mu} \frac{\partial m}{\partial k} - d & \frac{s}{\mu} \frac{\partial m}{\partial R} \\ -\phi & 0 \end{bmatrix}$$

D'où l'équation caractéristique associée :

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{cc} \theta - \left[\frac{s}{\mu} \frac{\partial m}{\partial k} - d\right] & -\frac{s}{\mu} \frac{\partial m}{\partial R} \\ \phi & \theta \end{array} \right| &= \theta \left[ \theta - \frac{s}{\mu} \frac{\partial m}{\partial k} + d \right] + \phi \frac{s}{\mu} \frac{\partial m}{\partial R} \\ &= \theta^2 - \left[ \frac{s}{\mu} \frac{\partial m}{\partial k} - d \right] \theta + \phi \frac{s}{\mu} \frac{\partial m}{\partial R} = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant vaut :

$$\begin{aligned} \rho &= \left[ \frac{s}{\mu} \frac{\partial m}{\partial k} - d \right]^2 - 4\phi \frac{s}{\mu} \frac{\partial m}{\partial R} \\ &= \left[ \frac{s}{d\mu} \frac{\partial m}{\partial k} - 1 \right]^2 d^2 - 4\phi \frac{ds}{d\mu} \frac{\partial m}{\partial R} \\ &= \left[ \left[ \alpha \frac{\partial m}{\partial k} - 1 \right]^2 - \frac{4\phi\alpha}{d} \frac{\partial m}{\partial R} \right] d^2 \end{aligned} \quad (48)$$

où on a posé  $\alpha = \frac{s}{d\mu}$ . Or

$$\frac{\partial m}{\partial k} = \frac{a_m}{2m} \left[ \frac{\partial M}{\partial k} k_m + M \frac{\partial k_m}{\partial k} \right]. \quad (49)$$

Mais, par (10),

$$\frac{\partial M}{\partial k} = -\frac{\partial K}{\partial k} = -\mu$$

parce que  $K = \mu k$ . Substituant dans (49), on obtient que

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial k} &= \frac{a_m}{2m} \left[ -\mu k_m + M \left[ 1 - \frac{2[\phi k]^2}{a_x R k} \right] \right] \\ &= \frac{a_m}{2m} \left[ -\mu k_m + M \left[ 1 - \frac{2k_x}{k} \right] \right] \quad (\text{par (5) et (4)}) \\ &= \frac{a_m}{2m} \left[ -\mu k_m + M \left[ 1 - 2\frac{k - k_m}{k} \right] \right] \quad (\text{par (3)}) \\ &= \frac{a_m}{2m} \left[ -\mu k_m + M \left[ \frac{2k_m}{k} - 1 \right] \right] \\ &= \frac{a_m}{2m} \left[ \left[ \frac{2M}{k} - \mu \right] k_m - M \right] \\ &= \frac{a_m}{2} \left[ \left[ \frac{2M}{k} - \mu \right] \frac{m}{a_m M} - \frac{M}{m} \right] \quad (\text{par (9)}). \end{aligned} \quad (50)$$

De plus, par (10),

$$\frac{\partial M}{\partial R} = -\frac{\partial K}{\partial R} = -\frac{\partial}{\partial R}(\mu k) = 0$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial R} &= \frac{a_m}{2m} M \frac{\partial k_m}{\partial R} \quad (\text{par (9)}) \\ &= \frac{a_m}{2m} M \frac{[\phi k]^2}{a_x R^2} \quad (\text{par (3) et (5)}) \\ &= \frac{a_m}{2m} M \frac{k_x}{R} \quad (\text{par (5) et (4)}) \end{aligned}$$

qui est positif. Or (5) donne que  $R = \frac{x^2}{a_x k_x}$  et donc que  $\frac{k_x}{R} = \frac{k_x}{\frac{x^2}{a_x k_x}} = a_x \left[ \frac{k_x}{x} \right]^2$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial R} &= \frac{a_m}{2m} M a_x \left[ \frac{k_x}{x} \right]^2 \\ &= \frac{a_m a_x}{2m} M \left[ \frac{k - k_m}{x} \right]^2 \end{aligned} \quad (51)$$

Posons  $f = \frac{F}{M_*}$ . Alors, à l'ES, on obtient à partir de (21), (22) et (24) que

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial m}{\partial k} \right|_* &= \frac{a_m}{2} \left[ \left[ \frac{2\phi M}{F} - \mu \right] \frac{F}{a_m M} - \frac{M}{F} \right] \\ &= \frac{a_m}{2} \left[ \frac{2}{a_m \alpha} - \frac{\mu F}{a_m \alpha \phi M} - \frac{\alpha \phi M}{F} \right] \\ &= \frac{1}{\alpha} - \frac{\mu f}{2\alpha \phi} - \frac{a_m \alpha \phi}{2f}. \end{aligned}$$

En utilisant (21), (22), (9) et (24), on a aussi que

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial m}{\partial R} \right|_* &= \frac{a_m a_x}{2 \frac{F}{\alpha \phi}} M \left[ \frac{\frac{F}{\phi} - \frac{[\frac{F}{\alpha \phi}]^2}{a_m M}}{F} \right]^2 \\
&= \frac{a_m a_x}{2 \frac{F}{\alpha \phi}} M \left[ \frac{1}{\phi} - \frac{[\frac{1}{\alpha \phi}]^2 F}{a_m M} \right]^2 \\
&= \frac{a_m a_x \alpha \phi}{2f} \left[ \frac{1}{\phi} - \frac{f}{a_m [\alpha \phi]^2} \right]^2
\end{aligned}$$

La définition (48) implique alors que  $\rho > 0$  si

$$\left[ \alpha \left. \frac{\partial m}{\partial k} \right|_* - 1 \right]^2 > \frac{4\phi\alpha}{d} \left. \frac{\partial m}{\partial R} \right|_*,$$

c'est à dire si

$$\left[ \alpha \left[ \frac{1}{\alpha} - \frac{\mu f}{2\alpha\phi} - \frac{a_m \alpha \phi}{2f} \right] - 1 \right]^2 > \frac{4\phi\alpha}{d} \frac{a_m a_x \alpha \phi}{2f} \left[ \frac{1}{\phi} - \frac{f}{a_m [\alpha \phi]^2} \right]^2$$

ou encore si

$$\left[ \frac{\mu f}{2\phi} + \frac{a_m \alpha^2 \phi}{2f} \right]^2 > \frac{2a_m a_x [\alpha \phi]^2}{df} \left[ \frac{1}{\phi} - \frac{f}{a_m [\alpha \phi]^2} \right]^2.$$

Le terme entre crochets à droite étant positif car proportionnel à  $\frac{k_x}{x}$ , il en découle que

$$\frac{\mu f}{2\phi} + \frac{a_m \alpha^2 \phi}{2f} > \sqrt{\frac{2a_m a_x}{df}} \left[ \alpha - \frac{f}{a_m \alpha \phi} \right] \quad (52)$$

où pour mémoire  $f = \frac{F}{M_*}$  et  $\alpha = \frac{s}{d\mu}$ . Le paramètre le plus facile à isoler est  $a_x$ . On déduit de (52) que

$$\mu f^2 + a_m \alpha^2 \phi^2 > 2\phi f \sqrt{\frac{2a_m a_x}{df}} \left[ \alpha - \frac{f}{a_m \alpha \phi} \right] > \sqrt{\frac{8a_m a_x f}{d}} \left[ \alpha \phi - \frac{f}{a_m \alpha} \right],$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{\frac{8a_m a_x f}{d}} < \frac{\mu f^2 + a_m \alpha^2 \phi^2}{\alpha \phi - \frac{f}{a_m \alpha}},$$

ce qui donne

$$a_x < \frac{d}{8a_m f} \left[ \frac{\mu f^2 + a_m \alpha^2 \phi^2}{\alpha \phi - \frac{f}{a_m \alpha}} \right]^2.$$

Si cette inégalité est satisfaite, les racines sont réelles.

## 7.4 Calibration

La procédure de calibration expliquée ci-dessous concerne la SR, pour laquelle les paramètres technologiques  $\mu, \phi, a_m, a_x$  sont constants. Elle se résume comme suit :

- $s$  est "observé" et  $d$  est estimé à partir de la littérature;
- les valeurs  $\mu, \phi, F$  sont normalisées à 1;
- on choisit des valeurs plausibles à l'ES pour  $\beta_*, \kappa_*, E_{x*}$ ;
- connaissant  $d, s, \mu, \phi, F, \beta_*, \kappa_*, E_{x*}$ , on calibre les paramètres  $\omega, a_x, a_m$ ;
- les conditions initiales  $k_0, R_0, K_0$  sont calibrées sur base de valeurs raisonnables pour le taux de croissance  $g_0 = \frac{k'_0}{k_0}$  et le partage du capital  $\kappa_0$  initiaux.



### 7.4.1 Paramètres

- La Banque Mondiale renseigne pour ces dernières années un taux d'épargne au niveau mondial autour de 25%, qui sera la valeur retenue ici. Donc  $s = 0.25$ .
- Pour la Zone Euro, la BCE estime la durée de vie moyenne du capital autour de 20 ans (BCE, 2006). Pour le Canada, Baldwin et al. (2005) estiment cette durée de vie entre 25 ans pour les bâtiments et 11 à 15 ans pour les machines et équipements. La valeur retenue ici est de 20 ans. Si la dépréciation est exponentielle, le taux de dépréciation est l'inverse de la durée de vie moyenne. En conséquence,  $d = 0.05$ .
- Les valeurs à l'ES des valeurs en niveau  $k_*, x_*, y_*, m_*, R_*, M_*, K_*, k_{m*}, k_{x*}$  sont linéairement proportionnelles à  $F$ . Le système peut être caractérisé à un facteur d'échelle près et on ne perd donc pas en généralité à supposer que

$$F = 1$$

autrement dit, que toutes ces variables sont exprimées par unité du flux  $F$ . Il en découle que le rapport de dotations  $\omega = \Omega$ .

- $\mu$  et  $\phi$  sont des indices d'intensité en matière et en énergie. On normalise leurs valeurs dans le cadre de la SR en les fixant à l'unité. Donc  $\mu = \phi = 1$ .
- Vu ce qui précède et grâce à (21), (22), (23), (24), on obtient pour la SR :

$$x_* = k_* = 1, y_* = m_* = 0.2$$

- La matière du système se répartit entre la ressource et le capital. On choisit  $\beta_* = \frac{K}{\omega} = \frac{\mu k}{\omega} = 0.4$  (la part du capital dans la masse totale). Comme  $\omega = M + \mu k = M + \mu/\phi$ , il en découle que

$$M_* = \frac{1 - \beta}{\beta} \frac{\mu}{\phi} = 1.5 \quad (53)$$

et

$$\omega = \frac{\mu}{\beta\phi} = 2.5 \quad (54)$$

En conséquence :

$$E_{m*} = \frac{m_*}{M_*} = 0.1333 \quad (55)$$

- On choisit  $\kappa_* = 0.4$ . Cette valeur est similaire à celle obtenue par Dale et al. (2012, p.164) et légèrement inférieure à celle de Germain (2020, p.211), qui tourne autour de 0.5.
- On peut calibrer  $a_m$  via (32), qui implique que  $\frac{[\frac{d\mu}{s}]^2}{a_m \phi [\omega - \frac{\mu}{\phi}]} = 1 - \kappa_*$  et donc

$$a_m = \frac{\left[\frac{d\mu}{s}\right]^2}{[1 - \kappa_*] \phi \left[\omega - \frac{\mu}{\phi}\right]} = 0.0444 \quad (56)$$

- La valeur de  $E_{x*}$  qui sépare les racines réelles et complexes vaut :

$$\widehat{E}_x = \frac{d \left[1 + \frac{s}{d} E_{m*} [1 - \kappa_*]\right]^2}{8\kappa_* [1 - \kappa_*]} = 0.0510 \quad (57)$$

Cette formule est obtenue à l'annexe suivante. On choisit  $E_{x*} = 2.5\widehat{E}_x = 0.1276$ , de façon à obtenir des taux d'extraction asymptotiques similaires pour les deux ressources dans le cadre de la SR.

- On peut alors calibrer  $a_x$  : en effet, (5) à l'ES implique que  $1 = \sqrt{a_x k_{x*} R_*}$  et donc  $a_x = \frac{1}{k_{x*} R_*} = \frac{1}{\kappa_* k_* \frac{\mu}{E_{x*}}}$ , ce qui donne

$$a_x = \frac{\phi E_{x*}}{\kappa_*} = 0.319 \quad (58)$$

## 7.4.2 Conditions initiales

On calibre les conditions initiales en se donnant un taux de croissance  $g_0 = \frac{k'_0}{k_0}$  et un partage du capital  $\kappa_0$  initiaux :

-  $g_0 = 0.05$ ;  $\kappa_0 = 0.03$

- Les relations (1), (2), (9) donnent que  $g_0 = \frac{k'_0}{k_0} = \frac{sm_0}{\mu k_0} - d = \frac{s}{\mu} \sqrt{\frac{a_m k_{m0} M_0}{k_0^2}} - d = \frac{s}{\mu} \sqrt{a_m [1 - \kappa_0] \frac{M_0}{k_0}} -$

$d$  et donc que  $\sqrt{a_m [1 - \kappa_0] \frac{M_0}{k_0}} = [g_0 + d] \frac{\mu}{s}$ . On déduit alors que  $\left(\frac{M_0}{k_0}\right) = \frac{[g_0 + d] \frac{\mu}{s}}{a_m [1 - \kappa_0]}$ . Or (10) avec

$\Omega = \omega$  implique que  $\left(\frac{M_0}{k_0}\right) = \frac{\omega}{k_0} - \mu$  et donc  $\frac{\omega}{k_0} = \left(\frac{M_0}{k_0}\right) + \mu$ , ce qui donne  $k_0 = \frac{\omega}{\left(\frac{M_0}{k_0}\right) + \mu} =$

$$\frac{\omega}{\frac{[g_0 + d] \frac{\mu}{s}}{a_m [1 - \kappa_0]} + \mu} = 0.522.$$

- En conséquence,  $K_0 = \mu k_0 = 0.522$ .

- Les équations (5) et (4) impliquent que  $\phi = \sqrt{\frac{a_x k_{x0} R_0}{k_0^2}} = \sqrt{\frac{a_x \kappa_0 R_0}{k_0}}$  et donc  $\phi^2 = \frac{a_x \kappa_0 R_0}{k_0}$  ce qui

donne  $R_0 = \frac{\phi^2 k_0}{a_x \kappa_0} = 32.725$ .

## 7.5 Dérivation de (57)

On omet l'indice \* pour alléger les écritures. L'équation (50) donne que  $\frac{\partial m}{\partial k} = \frac{a_m}{2} \left[ \frac{2M}{k} - \mu \right] \frac{E_m}{a_m} - \frac{1}{E_m}$ . Alors à l'ES,

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial k} &= \frac{a_m}{2} \left[ \left[ \frac{2 \frac{d\mu}{s\phi E_m}}{1/\phi} - \mu \right] \frac{E_m}{a_m} - \frac{1}{E_m} \right] \\ &= \frac{a_m}{2} \left[ \left[ 2 \frac{d}{sE_m} - 1 \right] \frac{\mu E_m}{a_m} - \frac{1}{E_m} \right] \\ &= \left[ 2 \frac{d}{sE_m} - 1 \right] \frac{\mu E_m}{2} - \frac{a_m}{2E_m} \\ &= \frac{1}{\alpha} - \frac{\mu E_m}{2} - \frac{a_m}{2E_m} \quad (\text{car } \alpha = \frac{s}{d\mu}). \end{aligned}$$

Mais on déduit de (55) et (26) que

$$E_m = \frac{\frac{d\mu}{s\phi}}{M} = \frac{\frac{d\mu}{s\phi}}{\omega - \frac{\mu}{\phi}} = \frac{1}{\alpha} \phi \left( \omega - \frac{\mu}{\phi} \right), \quad (59)$$

et donc, au vu de (56),

$$\frac{\partial m}{\partial k} = \frac{1}{\alpha} - \frac{\mu E_m}{2} - \frac{1}{2\alpha} \left( \frac{1}{1 - \kappa} \right) = \frac{1}{\alpha} \left[ 1 - \frac{1}{2[1 - \kappa]} \right] - \frac{\mu E_m}{2} = \frac{1 - 2\kappa}{2\alpha [1 - \kappa]} - \frac{\mu E_m}{2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - 2\kappa}{\alpha [1 - \kappa]} - \mu E_m \right].$$

D'autre part, à l'ES, (51) implique

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial R} &= \frac{a_m a_x}{2E_m} \left[ \frac{\kappa k}{x} \right]^2 \quad (\text{par (51), (55) et (19)}) \\ &= \frac{1}{2E_m} \frac{d\mu}{s} \left( \frac{E_m}{1 - \kappa} \right) \frac{\phi E_x}{\kappa} \left[ \frac{\kappa k}{x} \right]^2 \quad (\text{par (59) et (58)}) \\ &= \frac{1}{2\alpha} \left( \frac{1}{1 - \kappa} \right) \frac{\phi E_x}{\kappa} \left[ \frac{\kappa}{\phi} \right]^2 \quad (\text{car } \alpha = \frac{s}{d\mu}) \\ &= \frac{E_x}{2\alpha \phi} \left( \frac{\kappa}{1 - \kappa} \right). \end{aligned}$$

Alors la définition (48) implique que  $\rho > 0$  si

$$\left[ \frac{\alpha}{2} \left[ \frac{1 - 2\kappa}{\alpha [1 - \kappa]} - \mu E_m \right] - 1 \right]^2 > \frac{4\phi \alpha}{d} \frac{E_x}{2\alpha \phi} \frac{\kappa}{1 - \kappa}$$

c'est à dire si

$$\left[ \frac{1-2\kappa}{2[1-\kappa]} - \frac{\alpha\mu E_m}{2} - 1 \right]^2 > \frac{2E_x}{d} \left( \frac{\kappa}{1-\kappa} \right),$$

ou encore si

$$\left[ \frac{1-2\kappa - \alpha\mu E_m [1-\kappa] - 2[1-\kappa]}{2[1-\kappa]} \right]^2 > \frac{2E_x}{d} \left( \frac{\kappa}{1-\kappa} \right),$$

ce qui revient à demander que

$$[1 + \alpha\mu E_m [1-\kappa]]^2 > \frac{8E_x}{d} \kappa [1-\kappa]$$

c'est-à-dire que

$$E_x < \hat{E}_x = \frac{d [1 + \frac{s}{d} E_m [1-\kappa]]^2}{8\kappa [1-\kappa]}.$$

Cette dernière inégalité détermine donc un plafond pour  $E_x$  afin que les racines soient réelles.

## 8 Bibliographie

Anderson C. (1987). "The production process : inputs and wastes", *Journal of Environmental Economics and Management*, 14, 1-12.

Baldwin J., Gellatly G., Tanguay M., Patry A. (2005). "Estimating depreciation rates for the productivity accounts", OCDE. <https://www.oecd.org/sdd/productivity-stats/35409605.pdf>.

Boucekkine R. et El Ouardghi F. (2016). "Optimal growth with polluting waste and recycling", in *Dynamic Perspectives of Managerial Decision Making, Essays in Honor of Richard Hartl*, H.Dawid et al. (Eds), Springer-Verlag, 109-126.

Cullen J. (2017), "Circular Economy. Theoretical Benchmark or Perpetual Motion Machine?", *Journal of Industrial Ecology*, 21(3), 483-486.

Dale M., Krumdieck S. , Bodger P. (2012). "Analysis global energy modelling - A biophysical approach (GEMBA). Part 2: Methodology", *Ecological Economics*, 73, 158-167.

ECB (2006), "Estimates of the Euro Area capital stock", *ECB Monthly Bulletin*, European Central Bank (2006), pp. 45-47.

Fagnart J-F et Germain M. (2011). "Quantitative versus qualitative growth with recyclable resource", *Ecological Economics*, 70, 929-941.

George D., Chi-ang Lin B. et Chen Y. (2015). "A circular economy model of economic growth", *Environmental Modelling & Software*, 73, 60-63.

Germain M. (1991). "Le principe de conservation de la matière dans le cadre du modèle de Harrod-Domar", *Revue Economique*, 42 (5).

Germain M. (2020). "Limits to growth and structural change", *Structural Change and Economic Dynamics*, 55, 204-221.

Krysiak F. (2006). "Entropy, limits to growth, and the prospects for weak sustainability", *Ecological Economics*, 58 (1), 182-191.

Lafforgue G. et Rougé L. (2018). "A dynamic model of recycling with endogenous technological breakthrough". FAERE Working Paper 2018.14.

Meadows, D., Randers, J. et Meadows, D. (2012). "Les limites à la croissance (dans un monde fini)", Ed. Rue de l'Echiquier.