



**HAL**  
open science

# Approches statistiques fréquentielle et bayésienne pour la synthèse entre données de maintenance et jugements d'experts

Vincent Chabridon, Merlin Keller, Emmanuel Remy, Emilie Dautrême,  
Roman Sueur

## ► To cite this version:

Vincent Chabridon, Merlin Keller, Emmanuel Remy, Emilie Dautrême, Roman Sueur. Approches statistiques fréquentielle et bayésienne pour la synthèse entre données de maintenance et jugements d'experts. Congrès Lambda Mu 23 “ Innovations et maîtrise des risques pour un avenir durable ” - 23e Congrès de Maîtrise des Risques et de Sûreté de Fonctionnement, IMdR, Oct 2022, Palaiseau (Université Paris-Saclay), France. hal-03876589

**HAL Id: hal-03876589**

**<https://hal.science/hal-03876589v1>**

Submitted on 28 Nov 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Approches statistiques fréquentielle et bayésienne pour la synthèse entre données de maintenance et jugements d'experts

Frequentist and Bayesian statistical approaches for synthesis between maintenance data and experts' judgments

CHABRIDON Vincent

EDF R&D - Département PRISME  
6 Quai Watier, 78401 Chatou, France  
firstname dot lastname at edf dot fr

KELLER Merlin

EDF R&D - Département PRISME  
6 Quai Watier, 78401 Chatou, France  
firstname dot lastname at edf dot fr

REMY Emmanuel

EDF R&D - Département PRISME  
6 Quai Watier, 78401 Chatou, France  
firstname dot lastname at edf dot fr

DAUTRÈME Émilie

EDF R&D - Département PRISME  
6 Quai Watier, 78401 Chatou, France  
firstname dot lastname at edf dot fr

SUEUR Roman

EDF R&D - Département PRISME  
6 Quai Watier, 78401 Chatou, France  
firstname dot lastname at edf dot fr

**Résumé**—La fiabilité des matériels réparables se base sur l'étude des défaillances des systèmes, en tenant compte des effets de la maintenance effectuée sur ces mêmes matériels. Parfois, le REX peut être complété par une analyse fine liée à une expertise humaine sur les matériels considérés. Le but de cette communication est de proposer une approche visant à confronter et à synthétiser, d'une part, le REX opérationnel (récolte des événements de défaillance et de maintenance), et, d'autre part, le jugement d'expert, dans le but de rendre l'analyse de fiabilité plus robuste. La démarche s'appuie sur la combinaison entre une approche statistique fréquentielle et une approche bayésienne. Si la première vise à tirer parti du REX et permet de déterminer l'échelle adéquate pour l'analyse, la seconde permet de comparer les deux sources d'information et d'évaluer la cohérence (ou l'incohérence) entre jugements d'experts et données de REX. La démarche proposée est illustrée à l'aide de données industrielles relevant de la fiabilité de matériels hydrauliques.

**Keywords**—données censurées, jugements d'experts, modélisation de la maintenance, fiabilité statistique, inférence bayésienne

**Abstract**—The reliability of repairable equipment is based on the study of system failures, taking into account the effects of the maintenance performed on this equipment. Sometimes, lifetime data can be completed by a fine analysis linked to a human expertise on the considered equipment. The purpose of this paper is to propose an approach aiming at confronting and synthesizing, on the one hand, the operational feedback (collection of failure and maintenance events), and, on the other hand, the expert judgment, in order to make the reliability analysis more robust. The approach is based on the combination of a frequentist statistical approach and a Bayesian approach. While the former aims at taking advantage of the lifetime data and allows to determine the adequate scale for the analysis, the latter allows to compare the two sources of information and to evaluate the consistency (or inconsistency) between expert judgments and lifetime data. The proposed approach is illustrated

using industrial data on the reliability of hydraulic equipments.

**Keywords**—censored data, experts' judgements, maintenance modeling, statistical reliability, Bayesian inference

## I. INTRODUCTION

En France, l'hydroélectricité constitue la deuxième source de production d'électricité (soit environ 14%) tout en étant la première à partir d'énergies renouvelables. Sur le territoire national métropolitain, EDF exploite 433 aménagements (de tailles et puissances diverses) sur les 2500 installations présentes. Dans ce contexte, la fiabilité et la maintenabilité des équipements hydrauliques constituent un enjeu clé, tant pour la sûreté d'exploitation qu'en termes de gestion des coûts.

L'étude de la fiabilité des matériels (turbines, alternateurs, etc.) s'appuie généralement sur les données issues du retour d'expérience (REX) des avaries et des maintenances. Ces données, capitalisées par les opérationnels, constituent le socle de base sur lesquelles, traditionnellement, les études statistiques de fiabilité se fondent. Toutefois, la quantité et la variabilité des données de REX est dépendante des actifs industriels considérés (types de centrales), des familles de matériels étudiées liées aux différentes technologies, ainsi que des modes de défaillance analysés. Cela entraîne une difficulté à identifier la bonne échelle à laquelle se placer pour mener une étude de fiabilité statistique pertinente (compromis entre volume et homogénéité/représentativité des données). Enfin, les installations hydrauliques étant, parfois, assez anciennes, les données associées à certains matériels peuvent

être censurées ou tronquées. Un autre enjeu statistique est de modéliser les effets de la maintenance. Une modélisation à base de processus de puissance couplée à des hypothèses sur l'efficacité de celle-ci (hypothèse "As Bad As Old" ou ABAO) permet de manipuler des expressions analytiques, et d'estimer relativement simplement l'efficacité des interventions [1].

En parallèle du REX, une autre ressource informative qualitative peut être exploitée à travers les jugements ou avis d'experts. De récents travaux ont permis, à l'aide de modèles décisionnels d'éliciter des probabilités subjectives sur la fiabilité prévisionnelle des matériels. Le protocole consiste, pour les experts, à se prononcer (de façon indirecte, voir [2]) sur des probabilités de survenue future de défaillances qui traduisent leur croyance vis-à-vis de la durée de vie résiduelle d'une machine, connaissant son état de santé actuel.

Ainsi, le but de ces travaux est de proposer une approche visant à confronter et à synthétiser, d'une part, le REX opérationnel, et, d'autre part, le jugement d'expert, dans le but de rendre l'analyse de fiabilité plus robuste. La démarche s'appuie sur la combinaison entre une approche statistique fréquentielle [1] et une approche bayésienne [3]. Si la première vise à tirer parti du REX et permet de déterminer l'échelle adéquate pour l'analyse, la seconde permet de comparer les deux sources d'information et d'évaluer la cohérence (ou l'incohérence) entre jugements d'experts et données de REX.

Cet examen du degré de cohérence entre REX et avis d'experts est illustré à travers l'application de la méthodologie à des données réelles, issues d'actifs de production exploités par EDF. Ce cas d'étude permet également de mettre en évidence l'intérêt de l'approche pour raffiner les études de fiabilité en vue de rendre plus robustes les politiques de maintenance. Les résultats présentés dans cette communication constituent une première approche de synthèse, qui devra être complétée par des travaux méthodologiques ultérieurs.

La suite de ce papier est structurée en cinq parties. La Section II recense les informations à disposition et décrit la méthodologie (en deux étapes) proposée pour traiter, de façon conjointe, ces deux sources d'information. La Section III décrit brièvement la première étape, basée sur une analyse statistique fréquentielle du REX à travers une "descente d'échelle". Ensuite, la Section IV décrit brièvement la seconde étape qui consiste en une analyse bayésienne, mêlant REX et avis d'experts. Une illustration de cette méthodologie sur des données industrielles réelles est donnée en Section V. Enfin, la Section VI vise à dresser les principales conclusions et perspectives de ce travail.

## II. DESCRIPTION DES INFORMATIONS À DISPOSITION ET MÉTHODOLOGIE PROPOSÉE

Dans le cadre de cette étude, les données de REX analysées correspondent principalement à des données relatives à des "événements", c'est-à-dire à toutes les actions de maintenance, qu'elles soient programmées (i.e., maintenances *préventives*) ou qu'elles fassent suite à des avaries (i.e., maintenances fortuites ou *correctives*). Ces événements sont reportés dans des *fiches événements exploitation* (FEE) capitalisées dans

une base de données nationale, appelée "SILEX"<sup>1</sup>, relative aux installations du parc hydraulique d'EDF. Les principales informations contenues dans SILEX (a fortiori dans les FEE) concernent le type d'incident, le type de matériel concerné, une brève description des faits ainsi que la durée de la réalisation de maintenance (voir [4] pour plus d'informations au sujet de SILEX).

### A. Brève description des données de REX

Les données à disposition concernant les événements s'inscrivent dans un intervalle temporel d'observation que l'on notera  $[t_0^{obs}, t_f^{obs}]$ . Ce qui a pu arriver "avant"  $t_0^{obs}$  ou "après"  $t_f^{obs}$  n'est pas reporté dans la base de données. Ainsi, on parlera de données "censurées à gauche (en  $t_0^{obs}$ ) et à droite ( $t_f^{obs}$ )".

Dans la suite, on s'intéressera à une famille de matériels (e.g., des turbines, des alternateurs ou des transformateurs). Chaque type de matériel est constitué de composants qui sont, eux-mêmes rassemblés sous une nomenclature générique composée de cinq *sous-ensembles* donnés en Table I. Cette classification en sous-ensembles sert à définir de façon normalisée les différents modes de défaillance des matériels.

n°	Turbine	Alternateur
1	roue	système d'excitation
2	ligne d'arbre	rotor
3	pièces fixes	stator
4	distributeur	réfrigération
5	auxiliaires mécaniques	auxiliaires

Table I  
EXEMPLES DE SOUS-ENSEMBLES POUR LES TURBINES ET LES ALTERNATEURS.

### B. Brève description des probabilités subjectives élicitées à partir d'avis d'experts

Comme dit précédemment, la nature des installations hydroélectriques et leur exploitation sont fortement liées à des considérations géographiques, historiques et techniques. Dès lors, les experts ont une connaissance accrue de leurs installations, notamment en ce qui concerne les modes de défaillance, les avaries subies et les différentes opérations de maintenance réalisées sur les aménagements. Enfin, une expertise considérable s'est aussi développée vis-à-vis des familles de matériels. L'expérience et l'expertise ainsi acquises par les exploitants et leur ingénierie constituent une source d'information complémentaire du REX, qu'il est nécessaire de traiter et de capitaliser. Récemment, une technique d'élicitation d'avis d'experts a été proposée par [2]. Ce processus a pu être automatisé dans le but d'obtenir des probabilités subjectives (ou "à dire d'experts") de défaillances en fonction de différents modes de défaillance identifiés sur des aménagements précis. Pour résumer, cette approche consiste à permettre aux experts de se prononcer (de manière indirecte) sur des probabilités de survenue de défaillances. Ces probabilités traduisent la

1. Suivi Informatisé de L'EXploitation

capacité de l'expert à se prononcer sur la durée de vie résiduelle d'une machine, connaissant son état aujourd'hui. En pratique, les experts sont invités à se prononcer vis-à-vis de trois (ou quatre) événements probabilistes discrets définis relativement à une configuration donnée (e.g., aménagement, matériel, mode de défaillance). Par exemple, des événements discrets peuvent être définis comme suit :

- $\mathcal{E}_1$  : la défaillance survient avant 5 ans ;
- $\mathcal{E}_2$  : la défaillance survient entre 5 et 10 ans ;
- $\mathcal{E}_3$  : la défaillance survient après 10 ans.

Ainsi, les probabilités discrètes subjectives associées à ces événements (notées  $\mathbb{P}(\mathcal{E}_1)$ ,  $\mathbb{P}(\mathcal{E}_2)$  et  $\mathbb{P}(\mathcal{E}_3)$ ) peuvent être obtenues. Il est important de noter que ces probabilités sont spécifiques à un mode de défaillance, un type de matériel et un aménagement donnés. On se référera à [2] pour plus de détails sur la méthodologie sous-jacente.

### C. Méthodologie proposée

L'enjeu de cette communication est de proposer une démarche méthodologique visant à confronter et à synthétiser, d'une part, le REX opérationnel, et, d'autre part, le jugement d'expert, dans le but de rendre l'analyse de fiabilité statistique plus robuste.

La démarche s'appuie sur deux étapes (voir Figure 1) :

- **Étape #1** : elle consiste en une approche *fréquentielle* (ou *fréquentiste*) visant à exploiter les données du REX jusqu'à la dernière date d'événement. L'idée est d'explorer l'ensemble du REX par une "descente d'échelle" afin de trouver l'échelle adéquate à laquelle il pourrait être pertinent de se placer afin, d'une part, de comparer REX et jugements d'experts à travers une approche bayésienne (cf. Étape #2 ci-après), mais aussi d'éventuellement comparer, sur une base commune, les approches fréquentielle et bayésienne entre elles ;
- **Étape #2** : elle consiste à adopter une approche *bayésienne*. En un mot, elle consiste à représenter par une loi de probabilité, dite "*a priori*", l'incertitude sur les paramètres du modèle statistique représentant la durée de vie du matériel. Les hyperparamètres définissant cette loi *a priori* sont choisis de manière à représenter le plus fidèlement possible l'avis d'expert fourni par la démarche d'élicitation [2]. Cette loi est ensuite actualisée au vu du REX en utilisant le théorème de Bayes, ce qui résulte en des prévisions de fiabilités intégrant les deux sources d'information.

### III. ÉTAPE 1 : APPROCHE FRÉQUENTIELLE

On considère une famille de matériels (e.g., turbines, alternateurs ou transformateurs) pour laquelle on dispose, vis-à-vis d'un mode de défaillance donné (e.g., comme spécifié dans SAPHYR), du REX SILEX d'interventions sur un périmètre fixé (e.g., soit le parc dans sa totalité, soit l'ensemble des groupes d'une même technologie, soit sur un groupe d'un aménagement donné, voire un matériel spécifique).

### A. Choix du processus de comptage

On note  $m \geq 1$  le nombre de machines du périmètre du REX SILEX considéré et  $n_j$  (avec  $j \in \{1, \dots, m\}$ ) le nombre d'interventions survenues sur chacune d'elles aux âges respectifs  $t_{i,j}$  (avec  $i \in \{1, \dots, n_j\}$ ), tels que  $t_{1,j} < t_{2,j} < \dots < t_{n_j,j}$ . On suppose que les événements ayant induit les interventions sont indépendants.

On souhaite estimer la fiabilité de ces matériels réparables. Dans la littérature, plusieurs modèles mathématiques peuvent être utilisés [1]. Dans cette communication, on considère un *processus de Poisson non-homogène* ("*non-homogeneous Poisson process*" ou NHPP) entièrement caractérisé par sa fonction d'intensité dépendante du temps, notée  $\lambda_{t,j}$ . Par définition, on a :

$$\begin{aligned} \lambda_{t,j} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\mathbb{P}(N_{t+\Delta t,j} - N_{t,j} = 1 \mid \mathcal{H}_{t,j})}{\Delta t} \right) \quad (1a) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\mathbb{P}(T_{N_{t,j}+1,j} \leq t + \Delta t \mid \mathcal{H}_{t,j})}{\Delta t} \right), \quad t \geq 0 \quad (1b) \end{aligned}$$

où  $T_{i,j}$  est la variable aléatoire associée à l'âge auquel l'intervention  $i$  survient sur la machine  $j$  et  $N_{t,j}$  la variable aléatoire définie par  $N_{t,j} = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{T_{i,j} \leq t\}}$  et associée au nombre total d'interventions réalisées sur la machine  $j$  à l'âge  $t$ . Enfin  $\mathcal{H}_{t,j}$  représente l'historique (ou "filtration" [5]) des interventions sur la machine  $j$  à l'âge  $t$ .

### B. Choix d'une forme pour l'intensité

Ainsi, le choix d'une forme (paramétrique) pour  $\lambda$  détermine le processus sous-jacent. Le cas le plus trivial vise à considérer une intensité constante  $\lambda(t) = \lambda$ , ce qui donne un *processus de Poisson homogène* ("*Homogeneous Poisson Process*" ou HPP).

Une autre hypothèse vise à considérer que  $\lambda(t)$  peut être écrite sous la forme suivante :

$$\forall t \geq 0, \lambda_t = \lambda(t) = \alpha \beta t^{\beta-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+, \beta \in \mathbb{R}^+. \quad (2)$$

Ce NHPP, dont l'intensité est une puissance du temps, s'appelle *processus en loi de puissance* (PLP pour "*Power-Law Process*" en anglais). Ce modèle demeure très utilisé [6], [7] pour des raisons de simplicité, mais aussi de modularité. En effet, en fonction de la valeur prise par le paramètre  $\beta$ , différentes situations peuvent être modélisées :

- $\beta > 1$  :  $\lambda(t)$  est croissante, ce qui implique une décroissance de la fiabilité et traduit une usure ou un vieillissement ;
- $\beta < 1$  :  $\lambda(t)$  est décroissante, ce qui implique une croissance de la fiabilité et traduit une amélioration de l'état ou un rajeunissement ;
- $\beta = 1$  :  $\lambda(t)$  est constante, ce qui implique une fiabilité stabilisée et permet de retrouver la formulation de type HPP.

Le paramètre  $\alpha$  est un paramètre d'échelle. Quant au paramètre  $\beta$ , il peut s'interpréter comme le degré de dégradation ou d'amélioration du matériel. L'usure d'un matériel sera donc caractérisée par un  $\beta$  supérieur à un 1.

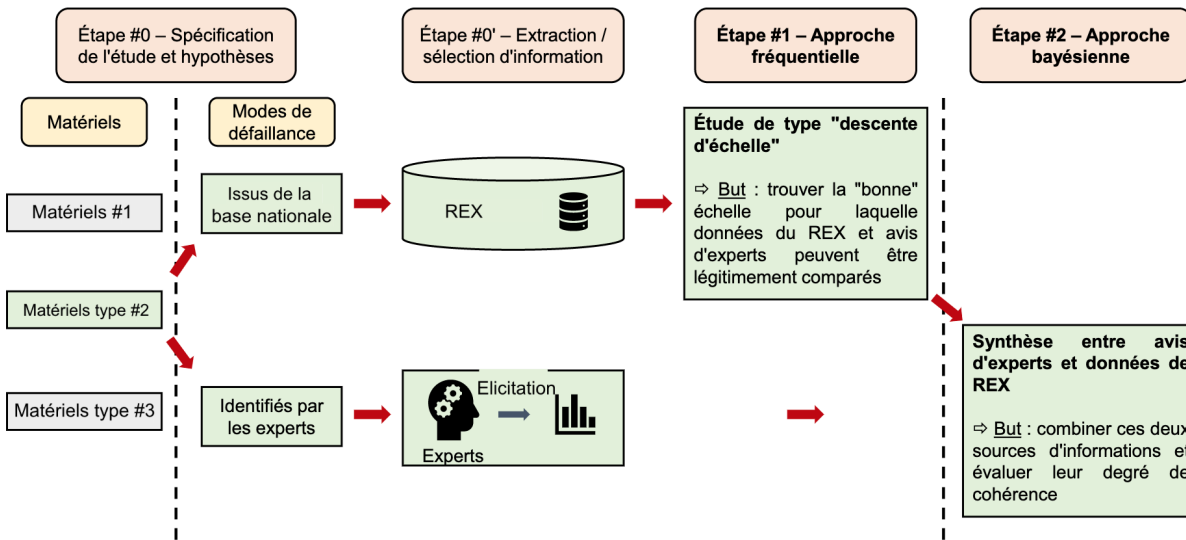


Figure 1. Schéma général de la méthodologie proposée.

### C. Choix d'un modèle de maintenance corrective

Parmi les modèles de base de maintenance corrective, on distingue généralement deux types de modèles classiques [8] :

- le modèle de *maintenance minimale* : il suppose que l'effet de la maintenance est de remettre le matériel en fonctionnement dans l'état exact où il était juste avant la défaillance. Ainsi, la maintenance est dite à "effet neutre" dans le sens où elle n'améliore ni ne dégrade l'état du matériel. Dès lors, on dit que le matériel est dans un état "*aussi mauvais que vieux*" ou "*As Bad As Old*" (ABAO) en anglais ;
- le modèle de *maintenance parfaite* : il suppose que l'effet de la maintenance est de remettre le matériel à l'état neuf. Dès lors, on dit que le matériel est "*aussi bon que neuf*" ou "*As Good As New*" (AGAN) en anglais.

D'autres modèles reposant sur une vision plus fine que ces deux hypothèses "extrêmes" peuvent être envisagés, notamment pour tenir compte d'un effet de *maintenance imparfaite*. Ces modèles (et leurs processus associés) généralisent les cas ABAO et AGAN et permettent de construire un large panel de modèles intermédiaires [8].

### D. En résumé

Ainsi, en résumé, la première étape de la méthodologie s'appuie sur une estimation fréquentielle de la fiabilité en considérant :

- un NHPP avec intensité en PLP ;
- une hypothèse ABAO sur la maintenance corrective.

Sous ces hypothèses, de nombreux calculs analytiques (non-détaillés ici par souci de concision) peuvent être menés (e.g., calcul de la vraisemblance, intervalles de confiance par delta-méthode, etc.) [9], [10]. En pratique, l'estimation a été

réalisée, sous environnement R, en s'appuyant principalement sur le paquet VAM (Virtual Age Models) développé au sein de l'Université Grenoble Alpes [11]. Cette étape va être mise en œuvre lors de l'analyse du REX par "descente d'échelle" réalisée en Section V.

### IV. ÉTAPE 2 : APPROCHE BAYÉSIENNE

Conformément à la méthodologie proposée en Figure 1, l'Étape #1 que constitue l'approche fréquentielle, et qui a pour but d'identifier la cohérence du REX en fonction de l'échelle à laquelle on étudie la fiabilité, est suivie d'une Étape #2 qui vise à mettre en œuvre une démarche dite "bayésienne". Cette étape vise à :

- 1) Approcher au mieux l'avis d'expert élicité sous la forme d'une loi de probabilité *a priori* ;
- 2) Mettre à jour la loi *a priori* élicitée ci-dessus à l'aide du REX en une loi *a posteriori* qui intègre les deux sources d'information (REX et avis d'expert) ;
- 3) Détecter d'éventuels conflits entre la loi *a priori* issue de l'élicitation d'experts et les données issues du REX.

En résumé, cette approche procède à une fusion des deux sources d'informations disponibles et permet de vérifier la cohérence de ces deux sources.

#### A. Réécriture du modèle

Sous les hypothèses adoptées précédemment, à savoir, un modèle de maintenance de type ABAO et une intensité du processus de défaillance de type loi de puissance (PLP), on peut démontrer que l'on peut se ramener à un problème d'estimation d'une loi de Weibull tronquée.

Pour ce faire, rappelons que les observations sont composées de dates de défaillances (ou "événements") collectées

dans le vecteur  $\mathbf{t}_n := (t_1 \leq \dots \leq t_n)$ , recueillies entre les dates de début et de fin d'observation, à savoir  $t_0^{\text{obs}}$  et  $t_f^{\text{obs}}$ . L'hypothèse ABAO, quant à elle, signifie que le matériel est simplement restauré à son état juste avant défaillance, ce qui veut dire que le temps à défaillance peut être décrit par une loi de probabilité unique, que l'on peut représenter par sa fonction de répartition  $F(t) := \mathbb{P}(T \leq t)$ . De plus, cette fonction de répartition est telle que la loi conditionnelle de  $t_i$  sachant  $t_{i-1}$  s'écrit :

$$F(t_i|t_{i-1}) := \frac{F(t_i) - F(t_{i-1})}{1 - F(t_{i-1})} \mathbb{1}_{\{t_i \geq t_{i-1}\}} \quad (3)$$

ou encore, en terme de densité conditionnelle :

$$f(t_i|t_{i-1}) := \frac{f(t_i)}{1 - F(t_{i-1})} \mathbb{1}_{\{t_i \geq t_{i-1}\}} \quad (4)$$

où  $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ . On a alors le résultat suivant :

**Proposition 1.** (*Loi conditionnelle des temps à défaillance*). *Supposons que la stratégie de maintenance corrective est de type ABAO. Alors, l'hypothèse selon laquelle l'intensité du processus de Poisson des défaillances est une fonction puissance, comme définie en Eq. (2) (hypothèse PLP), est équivalente à celle selon laquelle la loi de probabilité du  $i^{\text{ème}}$  temps à défaillance  $t_i$ , sachant que la dernière maintenance a eu lieu au temps  $t_{i-1}$ , suit une loi de Weibull tronquée à gauche :*

$$t_i|t_{i-1} \sim \mathcal{W}_{t_{i-1}}(\alpha, \beta) \quad (5)$$

définie par la fonction de répartition conditionnelle :

$$F_{\mathcal{W}_{t_{i-1}}}(t_i|\alpha, \beta) = 1 - \exp\left(-\alpha \left[t_i^\beta - t_{i-1}^\beta\right]\right). \quad (6)$$

△

La preuve est donnée dans [12].

## B. Rappels sur l'inférence bayésienne

a) *Théorème de Bayes et actualisation des probabilités*: Nous avons rappelé ci-dessus comment calculer la vraisemblance  $\mathcal{L}(\mathbf{t}_n|\alpha, \beta)$  des observations disponibles dans  $\mathbf{t}_n$  suivant un certain modèle paramétrique, défini par deux paramètres scalaires  $(\alpha, \beta)$ . En Section III, nous avons vu que celle-ci suffit à estimer les valeurs de ces paramètres incertains, par la méthode du MV. Ainsi, avec les notations introduites précédemment, la méthode du MV revient à résoudre le problème suivant :

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \arg \max_{\alpha, \beta} \mathcal{L}(\mathbf{t}_n|\alpha, \beta). \quad (7)$$

L'approche bayésienne vient compléter cette modélisation probabiliste des observations, conditionnellement aux paramètres, par une modélisation probabiliste de l'incertitude sur ces derniers sous la forme d'une *loi a priori* (ou *prior*) définie par sa fonction de densité, souvent notée  $\pi(\alpha, \beta)$ . Celle-ci s'interprète comme un pari probabiliste sur les valeurs possibles pour le couple  $(\alpha, \beta)$ , et est censée refléter la connaissance préalable (et subjective) de l'analyste sur le

phénomène physique étudié avant considération des données, d'où le nom de loi "*a priori*".

Pris ensemble, ces deux ingrédients de l'analyse statistique que sont la vraisemblance et le prior définissent une loi de probabilité conjointe sur les paramètres et les données. Dès lors, il devient possible de mettre à jour l'information contenue dans la loi *a priori* en la conditionnant par rapport aux données. Par le théorème de Bayes, on obtient que cette loi conditionnelle, appelée *loi a posteriori* (ou *posterior*), est donnée par :

$$\pi(\alpha, \beta|\mathbf{t}_n) = \frac{\mathcal{L}(\mathbf{t}_n|\alpha, \beta) \pi(\alpha, \beta)}{\int_{\alpha', \beta'} \mathcal{L}(\mathbf{t}_n|\alpha', \beta') \pi(\alpha', \beta')}. \quad (8)$$

On remarquera que la densité *a posteriori* des paramètres s'obtient simplement par le produit de la densité *a priori* et de la vraisemblance. Le terme au dénominateur correspond à la *constante de normalité* nécessaire pour que l'intégrale de la densité de probabilité soit égale à l'unité. En pratique, le calcul de cette constante rend les approches bayésiennes potentiellement difficiles à mettre en œuvre, car il fait intervenir une intégrale multidimensionnelle qui n'est explicite que dans quelques cas particuliers. De manière générale, on fait appel à des algorithmes d'échantillonnage stochastique, tels que les méthodes de Monte-Carlo par chaîne de Markov (ou MCMC) [13], qui permettent de générer un grand nombre de tirages dans la loi *a posteriori*, et de décrire ainsi de manière aussi complète et précise que souhaitée l'incertitude sur les paramètres d'intérêt.

## C. Choix d'une modélisation a priori et hyperparamètres

La solution technique proposée est inspirée de l'approche introduite par [3], dédiée au modèle de Weibull considéré ici. Dans un premier temps, l'idée est de définir la loi *a priori hiérarchique* suivante pour décrire l'incertitude affectant les paramètres de ce modèle probabiliste :

$$\alpha|\beta \sim \mathcal{G}(n_\nu, b(\beta)) \quad (9a)$$

$$\beta \sim \mathcal{G}\left(n_\nu, \frac{n_\nu}{\beta}\right). \quad (9b)$$

où  $\mathcal{G}(a, b)$  dénote la loi Gamma, de densité:

$$f_{\mathcal{G}}(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp(-bx) \mathbb{1}_{\{x>0\}}. \quad (10)$$

Les hyperparamètres que nous devons choisir sont :

- $n_\nu$ , qui joue le rôle d'une *taille d'échantillon virtuel* et quantifie le poids relatif de l'information *a priori* vis-à-vis d'une observation de REX ;
- $b(\beta)$ , le paramètre de taux (échelle inverse) pour  $\alpha$ , conditionnellement à  $\beta$  ;
- $\tilde{\beta}$ , le paramètre de taux pour  $\beta$ .

Dans la suite, ces paramètres sont regroupés dans le vecteur  $\nu$  tel que  $\nu := (n_\nu, b(\beta), \tilde{\beta})$ .

Par ailleurs, on suppose que l'information élicitée prend la forme de *quantiles prédictifs a priori*, notés  $(q_i, t_{q_i})_{0 \leq i \leq p}$ ,

avec  $0 < q_0 < \dots < q_p < 1$ , tels que, dans l'idéal,  $F_{\mathcal{W}}(t_{q_i}|\nu) = q_i$ , où (cf. Eq. (6)) :

$$F_{\mathcal{W}_{t_{\min}}}(t|\nu) = \int_{\alpha, \beta} F_{\mathcal{W}_{t_{\min}}}(t|\alpha, \beta) \pi(\alpha, \beta|\nu) d\alpha d\beta \quad (11)$$

est la fonction de répartition de la loi prédictive *a priori* et  $\pi(\alpha, \beta|\nu)$  dénote la densité de loi *a priori* hiérarchique et  $t_{\min}$  représente la date d'élicitation (i.e., la date de sondage des experts).

En d'autres termes, on souhaite choisir la valeur de  $\nu$  telle que les quantiles prédictifs *a priori* soient "les plus proches possibles" de ceux élicités à l'aide de l'avis d'expert. Une égalité stricte comme celle écrite en Eq. (11) est, bien entendu, impossible au vu des contraintes sur la forme paramétrique choisie pour notre prior. Cependant, [3] montre qu'il est possible d'imposer un unique quantile prédictif  $(q, t_q)$  en choisissant :

$$b(\beta) = b_q(n_v, \beta) := \left( (1 - q)^{-1/n_v} - 1 \right)^{-1} \left( t_q^\beta - t_{\min}^\beta \right). \quad (12)$$

Ce quantile doit être choisi avec soin, et nous lui donnerons dans la suite le nom de "spécification la plus digne de confiance" de l'expert, soit en anglais "*Most Trustworthy Specification*" (MTS).

Une fois cette première étape accomplie, le vecteur de paramètres à régler est réduit à :  $\nu' = (\beta, n_v)$ . Dès lors, [3] suggère de minimiser la divergence de Kullback-Leibler (KL) discrétisée entre les quantiles de loi prédictive *a priori* et ceux élicités à partir de l'avis d'expert :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\text{KL}}(\nu') &= \text{Cste} \\ &- \sum_{i=0}^p (q_{i+1} - q_i) \log (F_{\mathcal{W}}(t_{q_{i+1}}|\nu') - F_{\mathcal{W}}(t_{q_i}|\nu')) \end{aligned} \quad (13)$$

avec  $q_0 = 0$ ,  $t_{\min} = 0$ ,  $q_{p+1} = 1$  et  $t_{p+1} = \infty$ . Le choix optimal des hyperparamètres  $\nu^* := (\tilde{\beta}^*, n_v^*)$  est donc donné par :

$$\nu^* = \arg \min_{\nu} \mathcal{D}_{\text{KL}}(\nu'). \quad (14)$$

## V. APPLICATION À DES DONNÉES INDUSTRIELLES

### A. Analyse statistique fréquentielle par descente d'échelle du REX

*a) Description:* Le but de cette section est d'analyser l'évolution de l'intensité du processus d'apparition des événements défini sous les hypothèses de maintenance ABAO et de formulation PLP, estimée à partir du REX SILEX, et ce, en fonction de l'échelle à laquelle on se place. Par "échelle", on entend l'analyse du REX à différents niveaux tels que :

- échelle 1 : analyse au niveau du parc global des machines en considérant tout le REX disponible, et en supposant que chaque matériel (i.e., chaque machine) se comporte de la même manière (i.e., hypothèse i.i.d. et régime ABAO) ;
- échelle 2 : analyse au niveau du parc relatif à chaque famille de machines ;

- échelle 3 : analyse au niveau d'un site particulier, toutes machines confondues ;
- échelle 4 : analyse machine par machine pour tous les sites.

Ainsi, on pressent que, d'une part, la quantité d'information statistique exploitable diminue au fur et à mesure que l'échelle devient de plus en plus localisée, et d'autre part, que l'information devient de plus en plus spécifique et finit par caractériser de façon univoque le comportement des machines présentes sur un site donné. Ainsi, cette approche vise conjointement à étudier les limites de l'approche fréquentielle, ne serait-ce qu'à travers la simple estimation de l'intensité du processus des événements ; et à trouver une échelle intermédiaire pour laquelle les données du REX et les avis d'experts pourraient être comparés (cf. méthodologie proposée en Figure 1).

*b) Résultats:* En Figure 2 sont représentées plusieurs quantités complémentaires :

- rangée du haut : on observe l'évolution, en fonction de l'âge des machines (en nombre d'années de fonctionnement), de l'intensité estimée, ainsi que des IC calculés par delta-méthode ;
- rangée du milieu : on observe l'évolution, en fonction de l'âge, de l'écart entre les deux bornes de l'IC. L'idée ici est d'identifier visuellement le minimum de cette fonction car il correspond à l'âge pour lequel la quantité d'information statistique disponible (i.e., le nombre d'événements) est maximale ;
- rangée du bas : il s'agit du comptage du nombre d'événements en fonction de l'âge.
- de gauche à droite : on balaye les échelles 1 et 2 (pour deux parcs de machines différentes).

Après analyse de ces différents graphes, on s'aperçoit que l'évolution générale de l'intensité semble être toujours très similaire, peu importe l'échelle considérée. En revanche, on note bien l'appauvrissement en données (i.e., en nombre d'événements) lorsqu'on passe de l'échelle 1 à l'échelle 2 (e.g., pour deux parcs de machines différentes). De fait, la longueur des IC calculés par la delta-méthode augmentent.

Sur la Figure 3, l'analyse est menée à l'échelle 4. On s'aperçoit de l'hétérogénéité des comportements de chaque machine. Cette vision très localisée nous permet de comprendre que le comportement des intensités estimées à des échelles plus globales ne reflètent, en réalité, que d'une agrégation.

### B. Analyse statistique bayésienne du REX et des avis d'experts

La Figure 4 quant à elle, illustre les lois *a posteriori* marginales des paramètres incertains, en les confrontant aux lois *a priori*, sauf dans le cas du prior de Jeffreys, qui est impropre.

Ici, il est important de noter le rôle fondamental que joue le paramètre  $n_v$ . Celui-ci représente le degré de confiance que l'on accorde à l'avis d'expert au regard des données. Ainsi, un choix de  $n_v$  parmi les valeurs  $\{1, 5, 10\}$  signifie que l'avis d'expert exprimé est équivalent, respectivement, à 1, 5 ou 10 données observées. Grâce à ce mécanisme, on peut étudier,

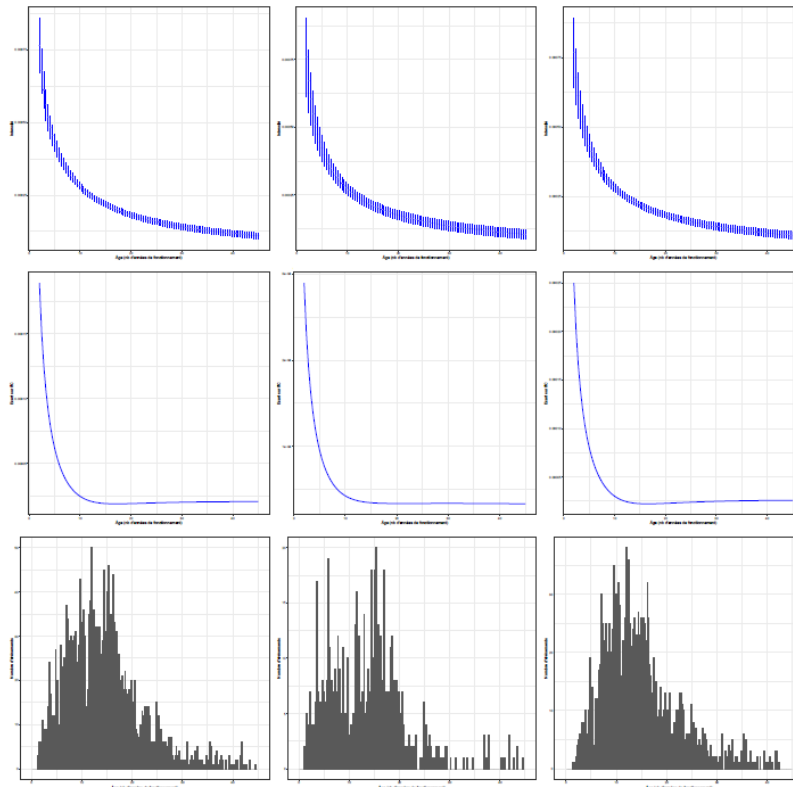


Figure 2. Évolution respective de l'intensité (haut), de l'écart sur l'IC (milieu) et du nombre d'événements (bas) en fonction de l'âge des machines (nombre d'années de fonctionnement). Tracé à différentes échelles : 1 à gauche, 2 pour deux parc de machines différentes (à gauche et droite).

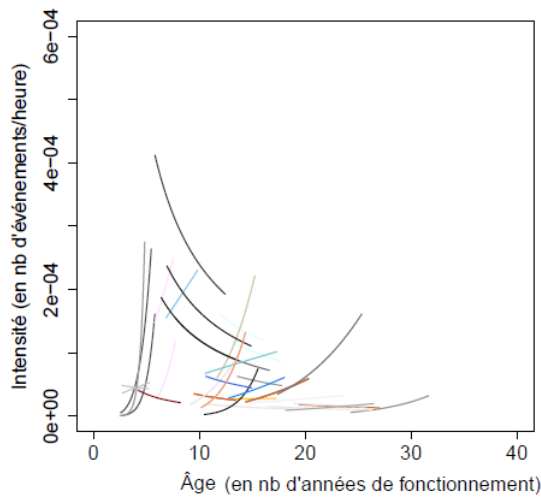


Figure 3. Analyse groupe par groupe de l'évolution de l'intensité (chaque couleur correspond à un groupe spécifique) pour tous les sites (échelle 4).

au regard des données à disposition, la sensibilité de la durée de vie résiduelle estimée vis-à-vis de la crédibilité que l'on accorde à l'avis d'expert.

Dès lors, on voit clairement en Figure 4 (colonne de gauche) que les lois *a priori* calées sur le quantile à 10 ans élicité

par avis d'expert permettent de contraindre fortement l'*a priori* non-informatif de Jeffreys et, par conséquent, les lois *a posteriori* résultantes. Ainsi, on obtient une estimation bien plus précise des paramètres incertains, et ce, même pour la valeur minimale  $n_v = 1$  de la taille d'échantillon virtuel. Enfin, dans la colonne à droite, on compare la fonction de répartition prédictive *a posteriori* aux quantiles élicités via l'approche de [2] qui ont été utilisés pour caler la loi *a priori*. On constate, comme on pouvait s'y attendre, qu'à mesure que l'on donne plus de poids à l'information apportée par ces quantiles, la fonction de répartition *a posteriori* se concentre autour de ces valeurs. On note la contraction des intervalles de crédibilité autour de la fonction de répartition moyenne *a posteriori*.

## VI. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

En conclusion, il est nécessaire de rappeler les enjeux et les grandes étapes de la méthodologie proposée dans cette communication. Tout d'abord, l'enjeu principal est de confronter, synthétiser et combiner les informations fournies par le REX d'événements de défaillance et de maintenance et les avis d'experts élicités sur des matériels spécifiques. Pour rappel, ces deux sources d'informations sont de natures différentes : globales et historiques pour le REX, et spécifiques et prospectives pour les avis d'experts.



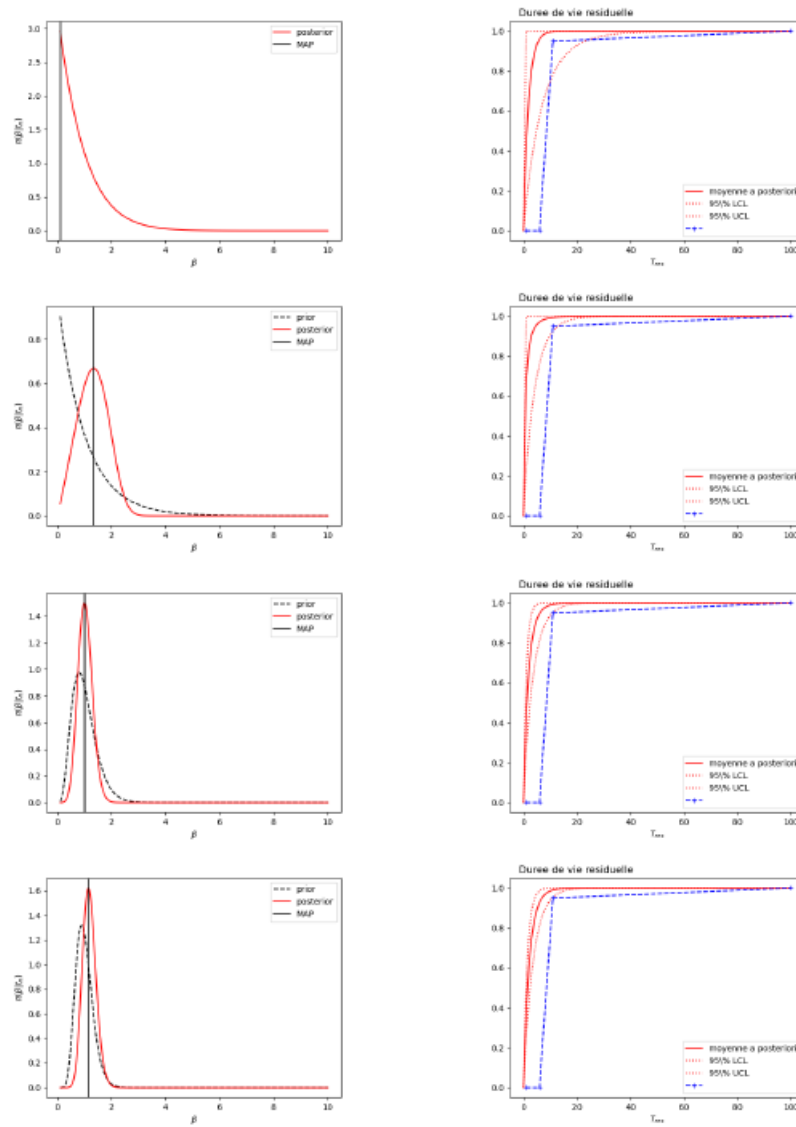


Figure 4. Densité de probabilité de  $\beta$  (gauche) et fonction de répartition de  $T_{res}$  (droite) *a posteriori*, pour un certain sous-ensemble, et pour quatre choix de loi *a priori* (de haut en bas) : prior non-informatif de Jeffreys, prior élicités sur un quantile à 10 ans pour une taille d'échantillon virtuel égale successivement à  $n_v = \{1, 5, 10\}$ .

La méthodologie proposée (voir Figure 1) correspond à deux étapes distinctes, l'Étape #1 qui consiste en une analyse fréquentielle menée à travers une descente d'échelle sur l'ensemble des données de REX et l'Étape #2 qui vise, pour une échelle donnée, à évaluer la cohérence entre l'avis d'experts et le REX à travers une démarche bayésienne.

La mise en œuvre pratique de cette méthodologie, proposée en Section V, permet de tirer plusieurs enseignements, et ce, sur chacune des deux étapes.

À travers l'analyse de descente d'échelle, il est apparu comme clair que les atouts de l'approche fréquentielle résident principalement dans sa facilité de mise en œuvre dans un contexte de grand nombre de données de REX ainsi que dans les différentes quantités auxquelles elle donne accès. En tant

qu'outil, elle permet donc de tester les limites de cohérence du REX et de baliser des échelles d'étude. Cette approche est particulièrement sensible à la quantité et à la qualité du REX.

En revanche, bien que puissante analytiquement, elle se heurte très rapidement à des difficultés numériques dans l'estimation des paramètres par méthode du maximum de vraisemblance (instabilités numériques, problèmes d'optimisation, perte de représentativité statistique) dans un contexte de REX de faible taille. De plus, elle ne permet pas facilement d'incorporer, ou de comparer les quantités estimées via le REX aux probabilités élicitées.

Enfin, il est intéressant de noter qu'elle coïncide parfaitement avec l'approche bayésienne sous l'hypothèse d'un prior non-informatif de Jeffreys. Ainsi, cela permet de corroborer la

cohérence des deux approches (fréquentielle et bayésienne).

À une échelle très locale, nous avons vu qu'une information *a priori* aussi minimale qu'un unique quantile permet de réduire significativement l'incertitude *a posteriori*. Cela est dû à la forme particulière de la loi *a priori* introduite dans [3], qui contraint la loi prédictive *a priori* de coïncider avec le quantile élicité *conditionnellement* à chaque valeur possible de  $\beta$ , ce qui est beaucoup plus fort que de l'imposer marginalement.

Un deuxième enseignement de ces travaux est que la méthode d'élicitation bayésienne proposée par [3], qui requiert de caler trois hyperparamètres de la loi *a priori* (à savoir,  $n_v$ ,  $b(\beta)$  et  $\tilde{\beta}$ ), nécessite de disposer d'au moins trois quantiles prédictifs *a priori* élicités et non contradictoires entre eux sous les hypothèses de modélisation considérées. Dans le cas contraire, comme nous l'avons vu ici, il est nécessaire de fixer certains paramètres à la main (e.g.,  $n_v = 1$  pouvant être considéré comme un choix par défaut), ou à l'inverse de supprimer certains quantiles en cas de conflit.

En conclusion, l'approche bayésienne semble toute indiquée dans un contexte où l'analyste dispose de peu de données (aussi connu sous le nom de "*small data*"), en ce qu'elle permet effectivement d'incorporer l'avis d'experts en complément de l'information fournie par le REX. En revanche, de la même façon que le processus d'élicitation fait nécessairement appel à la subjectivité des experts, l'ajustement d'une loi *a priori* sur cette information élicitée ne peut se faire de manière totalement automatisée, et nécessitera très probablement de faire des choix subjectifs, guidés par une analyse fine de l'opération de calage des hyperparamètres, ainsi que du calcul de la loi *a posteriori*.

En perspectives de ce travail exploratoire, plusieurs pistes peuvent être envisagées. En premier lieu, l'analyse fréquentielle pourrait être étendue à d'autres hypothèses moins restrictives sur le modèle d'intensité de défaillance (PLP) et sur l'hypothèse de maintenance minimale (ABAO). De plus, on pourrait imaginer réaliser une analyse de sensibilité pour étudier la robustesse des résultats bayésiens aux hypothèses considérées dans la modélisation du prior (et aux hypothèses ABAO et PLP sous-jacentes).

#### REMERCIEMENTS

Nos remerciements vont à notre collègue François Beaudouin pour son implication dans la démarche d'élicitation d'avis d'experts et à Nicolas Bousquet pour les discussions autour de ses travaux sur la modélisation de lois *a priori*. Nous remercions également le lecteur anonyme du comité de programme pour ses remarques pertinentes.

#### REFERENCES

- [1] M. Rausand and A. Høyland, *System Reliability Theory: Models, Statistical Methods, and Applications*, 2nd ed., ser. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley, 2004.
- [2] F. Beaudouin, "Modélisation de la décision : un moyen fiable d'éliciter les probabilités issues de l'expertise," in *Actes du 23ème Congrès de Maîtrise des Risques et Sécurité de Fonctionnement (Lambda-Mu 23)*, Saclay, France, 2022.
- [3] N. Bousquet, "Elicitation of Weibull priors," *ArXiv e-prints*, pp. 1–21, 2010.
- [4] C. Gaucher, C. Raynal, and A. Urieli, "Utilisation du TAL pour la consolidation des données de fiabilité issues des REX," in *Actes du 21ème Congrès de Maîtrise des Risques et Sécurité de Fonctionnement (Lambda-Mu 21)*, Reims, France, 2018.
- [5] C. Cocozza-Thivent, *Processus stochastiques et fiabilité des systèmes*, ser. Mathématiques et Applications. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1997.
- [6] T. Duane, J., "Learning curve approach to reliability monitoring," *IEEE Transactions on Aerospace*, vol. 2, no. 2, pp. 563–566, 1964.
- [7] E. Rigdon, S. and P. Basu, A., "The Power Law Process: A Model for the Reliability of Repairable Systems," *Journal of Quality Technology*, vol. 21, no. 4, pp. 251–260, 1989.
- [8] L. Doyen, "Modélisation et évaluation de l'efficacité de la maintenance des systèmes réparables," Ph.D. dissertation, Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2004.
- [9] O. Gaudoin, "Fiabilité des Systèmes Réparables, Notes de cours de Master Recherche en Mathématiques Appliquées, Université Joseph Fourier - Institut National Polytechnique de Grenoble." [Online]. Available: <https://membres-ljk.imag.fr/Olivier.Gaudoin/FiRep.pdf>
- [10] A. W. Van der Vaart, *Asymptotic Statistics*, ser. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, 1998.
- [11] L. Doyen and R. Drouilhet, "VAM, outil logiciel adaptatif et libre pour prendre en compte l'effet des maintenances et du vieillissement," in *Actes du 20ème Congrès de Maîtrise des Risques et Sécurité de Fonctionnement (Lambda-Mu 20)*, Saint-Malo, France, 2016.
- [12] V. Chabridon, M. Keller, and E. Remy, "Synthèse entre données de maintenance et probabilités subjectives pour l'étude de la fiabilité des matériels hydrauliques, 6125-3119-2020-03475-FR," EDF R&D, Tech. Rep., 2020.
- [13] C. P. Robert and G. Casella, *Monte Carlo Statistical Methods*, ser. Springer Texts in Statistics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2004.