



**HAL**  
open science

## Approche expérimentale de l'élasticité d'ordre supérieur par la diffraction de rayons X mous

Amar Chaalane, Frédéric Cherioux, Eric Joseph, Nicolas Jaouen, Horia  
Popescu, Bruno Fabre, Fabien Amiot

► **To cite this version:**

Amar Chaalane, Frédéric Cherioux, Eric Joseph, Nicolas Jaouen, Horia Popescu, et al.. Approche expérimentale de l'élasticité d'ordre supérieur par la diffraction de rayons X mous. 25ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2022, Nantes, France. hal-03869646

**HAL Id: hal-03869646**

**<https://hal.science/hal-03869646>**

Submitted on 21 Nov 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Approche expérimentale de l'élasticité d'ordre supérieur par la diffraction de rayons X mous

A. CHAALANE<sup>a</sup>, F. CHERIOUX<sup>a</sup>, E. JOSEPH<sup>a</sup>, N. JAOUEN<sup>b</sup>, H. POPESCU<sup>b</sup>, B. FABRE<sup>c</sup>, F. AMIOT<sup>a</sup>

a. Institut FEMTO-ST, CNRS-UMR 6174 / UBFC , Besançon, fabien.amiot@femto-st.fr

b. Synchrotron SOLEIL, Gif-sur-Yvette

c. ISCR, CNRS-UMR 6226 / Rennes Univ., Rennes, France

## Résumé :

*Il est bien établi que la réduction de la taille des structures mécaniques rend leur rapport surface/volume beaucoup plus important que pour les objets habituels, de sorte que leur capacité à interagir avec leur environnement est considérablement augmentée. Ce phénomène a été particulièrement utilisé dans le développement des capteurs micromécaniques, où un changement d'énergie de surface sur un côté d'une poutre induit sa déflexion. Bien que ce phénomène ait été mis en évidence pour un large éventail de molécules, la modélisation de la réponse mécanique d'une structure micromécanique à un changement d'énergie de surface a été peu étudiée. Il a été démontré que l'élasticité au second-gradient de la déformation fait naturellement apparaître l'équivalent de la tension de surface pour les solides, et semble donc particulièrement adaptée pour modéliser la déformation des solides soumis à un changement d'énergie de surface. La loi constitutive est cependant assez complexe, de sorte que l'identification expérimentale des paramètres constitutifs est un défi à relever. Les premiers résultats d'une approche originale sont rapportés dans ce document.*

## Abstract :

*It is well established that downsizing mechanical structures makes their surface-to-volume ratio much larger than for usual objects, so that their ability to interact with their environment is greatly increased. This phenomenon has been particularly used in the development of micromechanical sensors, where a change in surface energy on one side of a beam induces its deflection. Although this phenomenon has been demonstrated for a wide range of molecules, the modeling of the mechanical response of a micromechanical structure to a change in surface energy has been little studied. It has been shown that the second-strain gradient elasticity naturally gives rise to the equivalent of surface tension for solids, and thus seems particularly well suited to model the deformation of solids subjected to a change in surface energy. The constitutive law is however quite complex, so that the experimental identification of the constitutive parameters is challenging. The first results of an original approach are reported herein.*

**Mots clefs : Milieux continus généralisés ; diffraction**

# 1 Introduction

La réduction de la taille des structures mécaniques augmente significativement leur rapport surface/volume, de sorte que leur capacité à interagir avec leur environnement est considérablement augmentée. Ce phénomène a été particulièrement utilisé dans le développement des capteurs micromécaniques, où un changement de la nature chimique de la surface (typiquement par adsorption) sur un côté d'une poutre induit la déflexion de cette dernière. Si ce phénomène ait été mis en évidence pour un large éventail de molécules, la modélisation de la réponse mécanique d'une structure micromécanique à un changement d'énergie de surface a été peu étudiée. L'élasticité au second-gradient de la déformation fait naturellement apparaître l'équivalent de la tension de surface pour les solides, et semble donc particulièrement adaptée pour modéliser la déformation des solides soumis à un changement d'énergie de surface. La principale difficulté consiste alors à identifier expérimentalement les nombreux paramètres apparaissant dans la loi de comportement. On rappelle d'abord cette loi de comportement dans le cas d'un matériau isotrope et centro-symétrique, puis les caractéristiques des solutions pour des poutres dont le matériau suit cette loi de comportement. On propose ensuite une approche expérimentale originale basée sur un phénomène de diffraction. Le problème inverse permettant l'identification de quelques combinaisons des paramètres élastiques d'ordre supérieur est ensuite décrit et (partiellement) résolu en utilisant les données expérimentales obtenues au synchrotron SOLEIL.

## 2 Elasticité au second gradient de la déformation

### 2.1 Loi de comportement

Mindlin [1] a montré que pour un matériau isotrope et centro-symétrique, la densité d'énergie libre  $\mathcal{G}$  s'écrit, pour un champ de déplacement  $\mathbf{d}$  :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G} = & \frac{\lambda}{2} \epsilon_{ii} \epsilon_{jj} + \mu \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} \\
 & + a_1 \epsilon_{ijj} \epsilon_{ikk} + a_2 \epsilon_{iik} \epsilon_{kjj} + a_3 \epsilon_{iik} \epsilon_{jjk} + a_4 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk} + a_5 \epsilon_{ijk} \epsilon_{kji} \\
 & + b_1 \epsilon_{ijj} \epsilon_{kkl} + b_2 \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijl} + b_3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{jkl} + b_4 \epsilon_{ijk} \epsilon_{llk} \\
 & + b_5 \epsilon_{ijk} \epsilon_{llj} + b_6 \epsilon_{ijkl} \epsilon_{ijkl} + b_7 \epsilon_{ijkl} \epsilon_{jkli} \\
 & + c_1 \epsilon_{ii} \epsilon_{jjkk} + c_2 \epsilon_{ij} \epsilon_{ijkk} + c_3 \epsilon_{ij} \epsilon_{kkij} \\
 & + b_0 \epsilon_{ijj}
 \end{aligned} \tag{1}$$

avec  $\epsilon_{ij}$  les composantes du tenseur des déformations,  $\epsilon_{ijk}$  les composantes du tenseur  $\nabla \nabla \mathbf{d}$  et  $\epsilon_{ijkl}$  les composantes du tenseur  $\nabla \nabla \nabla \mathbf{d}$ .  $\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de Lamé, et les paramètres d'ordre supérieur

$$\begin{aligned}
 a_n, c_n, b_0 & \propto \mu l_S^2 \\
 b_n & \propto \mu l_S^4
 \end{aligned}$$

font apparaître des longueurs caractéristiques  $\propto l_S$ . Le terme linéaire proportionnel à  $\epsilon_{ijj}$  est remarquable : en l'absence de tout chargement extérieur, il permet une densité d'énergie élastique non-nulle :

$$\mathcal{G} = \frac{b_0}{2} \Delta (\operatorname{div} \mathbf{u}) \tag{2}$$

et  $b_0$ , appelé le module de cohésion, permet la définition d'une tension de surface pour les solides.

## 2.2 Comportement d'une poutre

Lorsqu'une poutre d'épaisseur  $t$  est constituée d'un matériau qui suit la loi décrite par l'Eq. (1), on montre que son champ de déplacement de flexion s'écrit [2]

$$v(x) = q_0 + \sum_{i=1}^3 \frac{q_i}{i} \left(\frac{x}{L}\right)^i + \sum_{j=1}^3 \gamma_j^+ \exp\left(\frac{x}{\lambda_{v,j}}\right) + \gamma_j^- \exp\left(-\frac{x}{\lambda_{v,j}}\right) \quad (3)$$

Les  $\alpha_{v,j} = \lambda_{v,j}^{-1}$  sont les solutions de l'équation caractéristique

$$C_{xxxx} \frac{t^2}{12} \alpha_v^6 + \left( A - \alpha_7^2 C_{xxxx} \frac{t^2}{12} + \frac{t^2}{6} \alpha_7 C_{xxxx}^{ix} \right) \alpha_v^4 + \left( K - A \alpha_7^2 + \frac{t^2}{6} \alpha_7 C_{xx}^{ix} \right) \alpha_v^2 - K \alpha_7^2 = 0 \quad (4)$$

Les coefficients  $C_{xxxx}$ ,  $\alpha_7^2$ ,  $C_{xxxx}^{ix}$  et  $C_{xx}^{ix}$  sont des combinaisons des paramètres de la loi de comportement 1.  $K$  et  $A$  dépendent de plus de  $t$ . La nature (réelle, complexe, imaginaire pure) des solutions de (4) dépend donc en général de l'épaisseur de la poutre et des paramètres décrivant le comportement. Deux familles de matériaux peuvent être distinguées si l'on se focalise sur les solutions purement imaginaires :

- Soit une solution imaginaire pure est présente quelle que soit l'épaisseur de la poutre ;
- Soit on trouve 2 solutions imaginaires pour une épaisseur inférieure à un certain seuil, et aucune solution imaginaire si l'épaisseur est plus grande.

## 3 Approche expérimentale

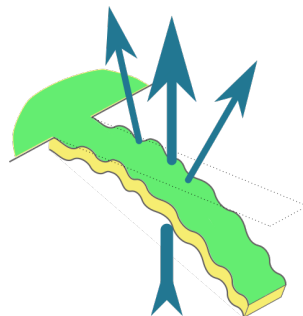


FIGURE 1 – Illustration du principe de diffraction retenu.

L'approche expérimentale proposée exploite ces composantes sinusoidales du champ de déplacement, en les utilisant comme réseau de diffraction, comme illustré sur la figure 1. On choisit d'induire la déformation en utilisant une couche greffée contenant des azobenzènes, dont la conformation est aisément contrôlée par un éclairage UV [3]. La poutre est simultanément utilisée comme réseau de diffraction pour une source de rayons X mous.

La figure 2 montre les spectres de diffraction obtenus, avec et sans éclairage UV, pour des poutres en nitrure de silicium et un faisceau incident à 850 eV. On note clairement l'apparition de pics de diffraction, traduisant le phénomène attendu.

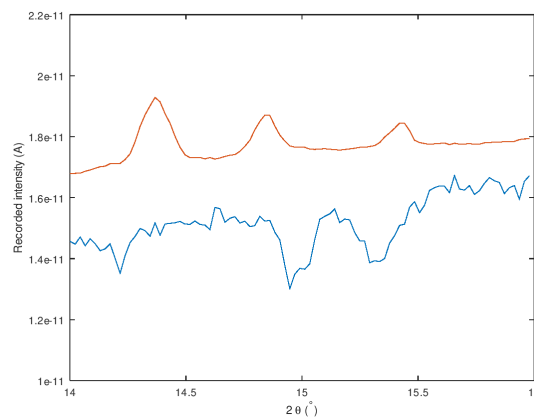


FIGURE 2 – Spectres de diffraction obtenus, avec (rouge) et sans (bleu) éclairage UV, pour des poutres en nitrure de silicium et un faisceau incident à 850 eV. Le signal sans éclairage UV est amplifié 10 fois pour faciliter la comparaison.

## 4 Problème inverse

Les pics de diffraction sont interprétés comme résultant de la déformation des poutres sous l'effet du chargement chimique de surface. Les longueurs d'ondes mesurées  $l_i$  vérifient :

$$\frac{1}{l_i^6} + 12 \frac{B_0 + B_t t^2}{C_{xxxx} t^2} \frac{1}{l_i^4} + 12 \frac{C_0 + C_t t^2}{C_{xxxx} t^2} \frac{1}{l_i^2} - 12 \frac{D_0 + D_t t^2}{C_{xxxx} t^2} = 0 \quad (5)$$

, ce qui peut se ré-écrire sous la forme d'un système linéaire

$$\mathcal{M}\mathbf{U} = \mathbf{L} \quad (6)$$

avec

$$\mathbf{U}^t = \left[ \frac{B_0}{C_{xxxx}}, \frac{B_t}{C_{xxxx}}, \frac{C_0}{C_{xxxx}}, \frac{C_t}{C_{xxxx}}, \frac{D_0}{C_{xxxx}}, \frac{D_t}{C_{xxxx}} \right] \quad (7)$$

$\mathbf{U}$  s'écrit uniquement comme la combinaison de paramètres élastiques de l'équation (1), alors que  $\mathcal{M}$  et  $\mathbf{L}$  s'écrivent à partir des seules longueurs d'ondes mesurées. Résoudre le système (6) peut donc permettre d'obtenir 6 combinaisons des paramètres élastiques. Dans le cas présent, seuls 4 pics ont pu être mesurés, de sorte que la procédure décrite permet d'identifier un espace de solutions.

## 5 Conclusion et Perspectives

On a présenté une approche expérimentale permettant en principe l'identification expérimentale de 6 combinaisons des paramètres élastiques d'ordre supérieur apparaissant dans le cadre de l'élasticité au second gradient de la déformation. Elle s'appuie sur la mesure de pics de diffraction apparaissant lorsque la surface d'une poutre est modifiée chimiquement et qu'elle est utilisée comme élément diffractant. Cette méthode a été mise en oeuvre pour du nitrure de silicium, pour lequel seuls 4 pics ont été mesurés, fournissant ainsi tout un espace de solutions. La réalisation de poutres plus fines devrait ouvrir la voie à l'identification des 6 paramètres impliqués. Nous remercions SOLEIL pour la mise à disposition de la ligne SEXTANTS dans le cadre de la proposition 20211003.

## Références

- [1] Mindlin R.D., Second gradient theory of strain and surface tension in linear elasticity, *Int. J. Solids Structures*, 1 (1965) 417–438.
- [2] Amiot F., Constitutively optimal governing equations for higher-grade elastic beams, *Eur. J. Mech. A/Solids*, 86 (2021) 104195.
- [3] Ichimura K., Oh S.-K., Nakagawa M., Light-driven motion of liquids on a photoresponsive surface, *Science*, 288 (2000) 1624.