



HAL
open science

λ -quiddité et sous-groupes engendrés par un nombre algébrique

Flavien Mabilat

► **To cite this version:**

Flavien Mabilat. λ -quiddité et sous-groupes engendrés par un nombre algébrique. 2023. hal-03869421v2

HAL Id: hal-03869421

<https://hal.science/hal-03869421v2>

Preprint submitted on 21 Apr 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

λ -QUIDDITÉ ET SOUS-GROUPES ENGENDRÉS PAR UN NOMBRE ALGÈBRIQUE

FLAVIEN MABILAT

RÉSUMÉ. Lors de son travail consacré aux frises de Coxeter, M. Cuntz a initié l'étude de la notion de λ -quiddité et a posé le problème de l'étude de cette dernière sur certaines sous-parties de \mathbb{C} . L'objectif de ce texte est d'apporter quelques nouveaux éléments de réponse dans le cas de divers sous-groupes monogènes de $(\mathbb{C}, +)$ engendrés par un nombre algébrique. En particulier, on étudiera les cas des sous-groupes engendrés par $a + b\sqrt{k}$.

ABSTRACT. During his work devoted to Coxeter's friezes, M. Cuntz initiated the study of the notion of λ -quiddity and raised the problem of the study of this over some subsets of \mathbb{C} . The objective of this text is to bring some new elements of response in the case of some cyclic subgroups of $(\mathbb{C}, +)$ generated by an algebraic number. In particular, we will study the cases of subgroups generated by $a + b\sqrt{k}$.

Mots clés : λ -quiddité; groupe modulaire; sous-groupe monogène; nombre algébrique

Classification : 05A05

« *L'homme intelligent se mesure à ce qu'il sait ne pas comprendre.* »
Édouard Herriot, *Notes et Maximes*

1. INTRODUCTION

Apparus au tout début des années soixante-dix sous la plume du mathématicien britannique H. S. M. Coxeter afin d'étudier les formules de Gauss associées au Pentagramma mirificum (voir [4]), les frises de Coxeter se sont rapidement affranchies de leur rôle d'outil intermédiaire. Aujourd'hui, elles constituent un objet d'étude à part entière dont les ramifications couvrent une myriade de sujets différents (voir par exemple [15]). Ceci explique que de très nombreux travaux soient consacrés à ces objets et à leurs applications. En particulier, un des principaux levier d'action pour étudier ces derniers est la considération de l'équation matricielle ci-dessous :

$$M_n(a_1, \dots, a_n) := \begin{pmatrix} a_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -Id.$$

En effet, les solutions de cette équation sont celles qui sont utilisées dans la construction des frises de Coxeter (voir [1] et [6] proposition 2.4). On va ici s'intéresser en particulier à la généralisation ci-dessous de l'équation évoquée précédemment :

$$(E) \quad M_n(a_1, \dots, a_n) = \pm Id.$$

Key words and phrases. λ -quiddity; modular group; cyclic subgroup; algebraic number.

L'étude des matrices $M_n(a_1, \dots, a_n)$ est d'autant plus intéressante qu'elles interviennent dans de multiples branches des mathématiques, notamment dans l'étude des fractions continues ou du groupe modulaire (voir par exemple [16]).

Les solutions de cette équation matricielle sont nommées λ -quiddités. Afin d'obtenir une description complète de ces dernières sur un ensemble donné R , on introduit une notion d'irréductibilité dont le but est de réduire l'étude des solutions de (E) à un nombre restreint d'éléments. L'objectif naturel est alors de connaître l'ensemble des λ -quiddités irréductibles sur R , ou de façon plus modeste d'avoir des informations sur celles-ci.

Dans cette optique, on dispose déjà de certains résultats. V. Ovsienko a obtenu une construction récursive des solutions de (E) sur \mathbb{N}^* (voir [16] Théorèmes 1 et 2) tandis qu'un certain nombre de résultats ont été démontrés pour le cas des anneaux $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ (voir [9, 11, 12, 13]). Cependant, la plupart des théorèmes de classification concernent des sous-ensembles de \mathbb{C} , en lien avec un problème ouvert soulevé par M. Cuntz (voir [5] problème 4.1). On dispose ainsi d'une description complète des λ -quiddités irréductibles sur \mathbb{N} (voir [5] Théorème 3.1), sur \mathbb{Z} (voir [6] Théorème 6.2), sur $\mathbb{Z}[\alpha]$ (voir [10] Théorème 2.7) et sur certains sous-groupes monogènes de $(\mathbb{C}, +)$, notamment ceux engendrés par \sqrt{k} (voir [14]). Afin d'avoir une présentation complète, la plupart de ces résultats seront rappelés dans la section 3.2.

Notre objectif dans ce texte est de poursuivre l'étude initiée dans [14] en obtenant de nouveaux résultats de classification des λ -quiddités irréductibles sur certains sous-groupes monogènes de $(\mathbb{C}, +)$. Pour effectuer cela, on commencera par rappeler dans la section 2 les définitions dont on aura besoin dans la suite et on donnera quelques éléments préliminaires dans la section 3. Ensuite, on démontrera dans la section 4 deux premiers résultats de classification utilisant les éléments conjugués d'un nombre algébrique, dont un concernant les $a + b\sqrt{k}$. Pour terminer, on prouvera dans la dernière partie un résultat permettant d'obtenir facilement toutes les λ -quiddités irréductibles sur un sous-groupe monogène dont le générateur appartient à une région donnée du plan complexe.

2. DÉFINITIONS ET RÉSULTATS PRINCIPAUX

Dans cette section, on va fournir les éléments essentiels de ce texte. Dans un premier temps, on va rappeler l'ensemble des définitions et des notations dont on aura besoin dans la suite. Dans un second temps, on énoncera les résultats principaux qui seront démontrés dans les sections suivantes. Dans tout ce texte, R est un sous-magma de \mathbb{C} , c'est-à-dire une sous-partie de l'ensemble des nombres complexes stable par addition. Si $w \in \mathbb{C}$, on note $\langle w \rangle := \{kw, k \in \mathbb{Z}\}$, le sous-groupe de $(\mathbb{C}, +)$ engendré par w . On commence par définir formellement le concept de λ -quiddité.

Définition 2.1 ([5], définition 2.2). *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que le n -uplet (a_1, \dots, a_n) d'éléments de R est une λ -quiddité sur R de taille n si (a_1, \dots, a_n) est une solution de (E) , c'est-à-dire si (a_1, \dots, a_n) vérifie $M_n(a_1, \dots, a_n) = \pm Id$. En cas d'absence d'ambiguïté, on parlera simplement de λ -quiddité.*

En vue de l'étude des λ -quiddités, on rappelle les deux définitions ci-dessous :

Définition 2.2 ([5], lemme 2.7). *Soient $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, (a_1, \dots, a_n) un n -uplet d'éléments de R et (b_1, \dots, b_m) un m -uplet d'éléments de R . On définit l'opération suivante :*

$$(a_1, \dots, a_n) \oplus (b_1, \dots, b_m) := (a_1 + b_m, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n + b_1, b_2, \dots, b_{m-1}).$$

Le $(n + m - 2)$ -uplet ainsi obtenu est appelé la somme de (a_1, \dots, a_n) avec (b_1, \dots, b_m) .

Exemples. On considère ici $R = \mathbb{Z}$. On a :

$$- (-1, 2, 4) \oplus (3, 0, 1) = (0, 2, 7, 0);$$

- $(-2, 1, 3, 1) \oplus (2, 3, 1) = (-1, 1, 3, 3, 3)$;
- $(2, 1, 0, 2) \oplus (1, -3, 2, 5, 1) = (3, 1, 0, 3, -3, 2, 5)$;
- $n \geq 2$, $(a_1, \dots, a_n) \oplus (0, 0) = (0, 0) \oplus (a_1, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_n)$.

\oplus est une opération non commutative et non associative (voir [20] exemple 2.1). En revanche, elle est particulièrement utile pour l'étude des λ -quiddités car elle vérifie la propriété remarquable suivante : si (b_1, \dots, b_m) est une λ -quiddité sur R alors la somme $(a_1, \dots, a_n) \oplus (b_1, \dots, b_m)$ est une λ -quiddité sur R si et seulement si (a_1, \dots, a_n) est une λ -quiddité sur R (voir [5, 20] et [9] proposition 3.7).

Définition 2.3 ([5], définition 2.5). *Soient (a_1, \dots, a_n) et (b_1, \dots, b_n) deux n -uplets d'éléments de R . On dit que $(a_1, \dots, a_n) \sim (b_1, \dots, b_n)$ si (b_1, \dots, b_n) est obtenu par permutations circulaires de (a_1, \dots, a_n) ou de (a_n, \dots, a_1) .*

On vérifie aisément que \sim est une relation d'équivalence sur l'ensemble des n -uplets d'éléments de R (voir [20], lemme 1.7). Par ailleurs, si un n -uplet d'éléments de R est une solution de (E) alors tout n -uplet d'éléments de R qui lui est équivalent est aussi une solution de (E) (voir [5] proposition 2.6). Muni de ces définitions, on peut définir la notion d'irréductibilité précédemment évoquée.

Définition 2.4 ([5], définition 2.9). *Une λ -quiddité (c_1, \dots, c_n) sur R avec $n \geq 3$ est dite réductible s'il existe une λ -quiddité (b_1, \dots, b_l) sur R et un m -uplet (a_1, \dots, a_m) d'éléments de R tels que*

- $(c_1, \dots, c_n) \sim (a_1, \dots, a_m) \oplus (b_1, \dots, b_l)$,
- $m \geq 3$ et $l \geq 3$.

Une λ -quiddité est dite irréductible si elle n'est pas réductible.

Remarque. Dans le cas où $0 \in R$, $(0, 0)$ est une λ -quiddité sur R . Cependant, celle-ci n'est jamais considérée comme étant irréductible.

Une fois cette notion définie, l'objectif principal de l'étude de l'équation (E) est d'obtenir une description complète des solutions irréductibles. On possède déjà un certain nombre de résultats de classification des λ -quiddités irréductibles, dont plusieurs abordent le cas des sous-groupes monogènes (voir [5, 10, 14] ainsi que la section 3.2). En particulier, l'un de ces résultats résout entièrement la question de la classification pour le cas des sous-groupes engendrés par un nombre transcendant, c'est-à-dire un nombre qui n'est racine d'aucun polynôme non nul à coefficients entiers. Notre premier objectif est donc naturellement d'avoir des informations pour les sous-groupes engendrés par un nombre algébrique. Cette étude nous permettra notamment de démontrer le résultat suivant.

Théorème 2.5. *Soit $w \in \mathbb{C}$ algébrique. Si w a un élément conjugué de module supérieur à 2 alors l'ensemble des λ -quiddités irréductibles sur $\langle w \rangle$ est :*

$$\{(0, kw, 0, -kw), (kw, 0, -kw, 0); k \in \mathbb{Z}\}.$$

Avec ce résultat, on déduira le résultat de classification ci-dessous :

Théorème 2.6. *Soit $(a, b, k) \in \mathbb{Z}^3$ avec $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $k \geq 2$. On suppose que $a + b\sqrt{k} \neq \pm 1$. L'ensemble des λ -quiddités irréductibles sur $\langle a + b\sqrt{k} \rangle$ est :*

$$\{(0, l(a + b\sqrt{k}), 0, -l(a + b\sqrt{k})), (l(a + b\sqrt{k}), 0, -l(a + b\sqrt{k}), 0), l \in \mathbb{Z}\}.$$

Ces deux théorèmes sont démontrés dans la section 4. Notons par ailleurs que les résultats de classification déjà connus (voir section 3.2) permettent de considérer les cas exclus dans le théorème précédent et donc de régler entièrement la question de la classification pour ces sous-groupes.

On s'intéressera pour terminer aux cas de certains nombres complexes non réels en démontrant le résultat ci-dessous :

Théorème 2.7. *Soit $w = a + ib \in \mathbb{C}$. On suppose que $|ab| \geq 1$. L'ensemble des λ -quiddités irréductibles sur $\langle w \rangle$ est :*

$$\{(0, kw, 0, -kw), (kw, 0, -kw, 0); k \in \mathbb{Z}\}.$$

Ce théorème est prouvé dans la section 5.

3. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Le but de cette partie est de collecter un certain nombre d'éléments utiles pour la suite et d'énoncer plusieurs théorèmes de classification précédemment évoqués. On en profitera également pour fournir quelques éléments plus généraux sur les solutions de l'équation (E).

3.1. Premiers résultats. On débute cette section en donnant la liste des λ -quiddités sur \mathbb{C} lorsque $1 \leq n \leq 4$.

Proposition 3.1 ([6], exemple 2.7). — (E) n'a pas de solution de taille 1.

- (0, 0) est la seule solution de (E) de taille 2.
- (1, 1, 1) et (−1, −1, −1) sont les seules solutions de (E) de taille 3.
- Les solutions de (E) pour $n = 4$ sont les 4-uplets suivants $(-a, b, a, -b)$ avec $ab = 0$ (c'est-à-dire $a = 0$ ou $b = 0$) et (a, b, a, b) avec $ab = 2$.

Pour obtenir les λ -quiddités de petites taille sur un sous-magma R de \mathbb{C} , il suffit d'adapter la proposition précédente aux éléments appartenant à R . Par exemple, si $0 \notin R$ alors il n'existe pas de λ -quiddité de taille 2 sur R .

Proposition 3.2 ([14], proposition 3.3). *Soient G un sous-groupe de \mathbb{C} .*

- i) *Une λ -quiddité sur G de taille supérieure à 5 contenant 0 est réductible.*
- ii) *Si $1 \notin G$ alors les λ -quiddités sur G de taille 4 sont irréductibles.*

Afin de classer les solutions de (E), on a besoin d'informations sur les composantes de ces dernières. Pour cela, on dispose notamment du théorème ci-dessous qui est un ingrédient central des preuves de la plupart des résultats de classification :

Théorème 3.3 (Cuntz-Holm, [6] corollaire 3.3). *Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ une λ -quiddité. $\exists (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $i \neq j$, tels que $|a_i| < 2$ et $|a_j| < 2$.*

Remarques. i) La constante 2 donnée dans le théorème précédent est optimale. En effet, pour tout $\epsilon \in]0, 2]$, on peut construire une λ -quiddité sur \mathbb{R} dont toutes les composantes sont de module supérieur à $2 - \epsilon$ (voir [10] proposition 3.5).

ii) En revanche, il n'existe pas de constante s pour laquelle il existe nécessairement une composante plus grande que s , même si ces dernières sont toutes non nulles. En effet, posons pour tout $n \geq 2$,

$$v_n = 2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \text{ et } B_n = \begin{pmatrix} v_n & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $\epsilon > 0$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$. Ainsi, il existe $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, tel que $0 < v_n < \epsilon$. Le polynôme caractéristique de B_n est $\chi_{B_n}(X) = \det(B_n - XId) = X^2 - v_n X + 1$. Le discriminant de ce polynôme est $\Delta = v_n^2 - 4 < 0$. Donc, χ_{B_n} a deux racines complexes conjuguées x_1 et x_2 avec :

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{v_n + i\sqrt{4 - v_n^2}}{2} \\
 &= \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + i\sqrt{\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^2} \\
 &= \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + i\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (\text{car } \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \geq 0) \\
 &= ie^{-\frac{i\pi}{n}}.
 \end{aligned}$$

B_n a deux valeurs propres distinctes : $ie^{-\frac{i\pi}{n}}$ et $-ie^{\frac{i\pi}{n}}$. Ainsi, B_n est diagonalisable et $(B_n)^{2n} = (-1)^n Id$. Donc, le $2n$ -uplet formé uniquement de $2\sin(\frac{\pi}{n})$ est une λ -quiddité sur \mathbb{R} dont toutes les composantes sont non nulles et inférieures à ϵ .

Dans la suite, on utilisera également une formule donnant les coefficients de la matrice $M_n(a_1, \dots, a_n)$ à l'aide de déterminants. Pour cela, on donne les notations suivantes :

On pose $K_{-1} = 0$ et $K_0 = 1$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. On note

$$K_n(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & & & & \\ & 1 & a_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & a_{n-1} & 1 \\ & & & & 1 & a_n \end{vmatrix}.$$

$K_n(a_1, \dots, a_n)$ est le continuant de a_1, \dots, a_n . On dispose de l'égalité suivante (voir [3]) : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$.

$$M_n(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} K_n(a_1, \dots, a_n) & -K_{n-1}(a_2, \dots, a_n) \\ K_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}) & -K_{n-2}(a_2, \dots, a_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir une expression du continuant sous la forme d'un polynôme, on peut utiliser un algorithme simple nommé algorithme d'Euler. Celui-ci fonctionne de la manière suivante (voir par exemple [3] section 2). $K_n(a_1, \dots, a_n)$ est la somme de tous les produits possibles de a_1, \dots, a_n , dans lesquels un nombre quelconque de paires disjointes de termes consécutifs est supprimé. Chacun de ces produits étant multiplié par $(-1)^{\text{puissance le nombre de paires supprimées}}$. On considère donc d'abord le produit $a_1 \times \dots \times a_n$. Puis, on soustrait tous les produits de la forme $a_1 \times \dots \times a_{i-1} \times a_{i+2} \times \dots \times a_n$. Après, on ajoute tous les produits possibles de a_1, \dots, a_n , dans lesquels deux paires disjointes de termes consécutifs ont été supprimées et on poursuit de la même façon.

Cela donne, par exemple, pour $n = 4$: $K_4(a_1, a_2, a_3, a_4) = a_1 a_2 a_3 a_4 - a_3 a_4 - a_1 a_4 - a_1 a_2 + 1$.

3.2. Résultats de classification. Comme on l'a évoqué dans les sections précédentes, on dispose déjà d'un certain nombre de théorèmes de classification sur des sous-ensembles R de \mathbb{C} . Dans les cas où R est un sous-anneau, on a les deux résultats ci-dessous :

Théorème 3.4 (Cuntz-Holm, [6] Théorème 6.2). *Les λ -quiddités irréductibles sur l'anneau \mathbb{Z} sont :*

$$\{(1, 1, 1), (-1, -1, -1), (0, m, 0, -m), (m, 0, -m, 0); m \in \mathbb{Z} - \{\pm 1\}\}.$$

Théorème 3.5 ([10], Théorème 2.7). *Soit α un nombre complexe transcendant. Les λ -quiddités irréductibles sur l'anneau $\mathbb{Z}[\alpha]$ sont :*

$$\{(1, 1, 1), (-1, -1, -1), (0, P(\alpha), 0, -P(\alpha)), (P(\alpha), 0, -P(\alpha), 0); P \in \mathbb{Z}[X] - \{\pm 1\}\}.$$

En plus du résultat sur $\mathbb{Z} = \langle 1 \rangle$, on possède plusieurs résultats concernant les cas des sous-groupes monogènes. Le premier d'entre-eux est une conséquence simple du théorème 3.3.

Proposition 3.6 ([14], proposition 3.10). *Soit w un nombre complexe vérifiant $|w| \geq 2$. L'ensemble des λ -quiddités irréductibles sur $\langle w \rangle$ est :*

$$\{(0, kw, 0, -kw), (kw, 0, -kw, 0); k \in \mathbb{Z}\}.$$

Notons que cette proposition combiné au théorème 3.4 permet d'effectuer la classification des λ -quiddités irréductibles sur les sous-groupes engendrés par un entier (voir [14] corollaire 3.11).

En ce qui concerne les cas des sous-groupes monogènes engendrés par un nombre complexe transcendant, on dispose d'une classification complète.

Proposition 3.7 ([14], proposition 3.12). *Soit α un nombre complexe transcendant. L'ensemble des λ -quiddités irréductibles sur $\langle \alpha \rangle$ est :*

$$\{(0, k\alpha, 0, -k\alpha), (k\alpha, 0, -k\alpha, 0); k \in \mathbb{Z}\}.$$

Dans le cas des nombres algébriques, on a le résultat suivant :

Théorème 3.8 ([14], Théorème 2.5). *Soit $k \in \mathbb{N}$.*

i) Si $k = 0$. $(0, 0, 0, 0)$ est la seule λ -quiddité irréductible sur $\langle \sqrt{k} \rangle$.

ii) Si $k = 1$. Les λ -quiddités irréductibles sur $\langle \sqrt{1} \rangle$ sont :

$$\{(1, 1, 1), (-1, -1, -1), (0, a, 0, -a), (a, 0, -a, 0); a \in \mathbb{Z} - \{\pm 1\}\}.$$

iii) Si $k = 2$. Les λ -quiddités irréductibles sur $\langle \sqrt{2} \rangle$ sont :

$$\{(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (0, a\sqrt{2}, 0, -a\sqrt{2}), (a\sqrt{2}, 0, -a\sqrt{2}, 0); a \in \mathbb{Z}\}.$$

iv) Si $k = 3$. Les λ -quiddités irréductibles sur $\langle \sqrt{3} \rangle$ sont :

$$\{(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}), (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3}), (0, a\sqrt{3}, 0, -a\sqrt{3}), (a\sqrt{3}, 0, -a\sqrt{3}, 0); a \in \mathbb{Z}\}.$$

v) Si $k \geq 4$. Les λ -quiddités irréductibles sur $\langle \sqrt{k} \rangle$ sont :

$$\{(0, a\sqrt{k}, 0, -a\sqrt{k}), (a\sqrt{k}, 0, -a\sqrt{k}, 0); a \in \mathbb{Z}\}.$$

Pour d'autres résultats de classification, on peut consulter [5, 14].

3.3. Solutions de taille paire. L'objectif de cette section est de fournir un certain nombre d'éléments permettant de montrer que toutes les λ -quiddités sur un sous-groupe G sont de taille paire. On commence par le résultat suivant :

Proposition 3.9. *Soit G un sous-groupe de \mathbb{C} . Si toutes les λ -quiddités de taille paire sur G ont une de leurs composantes égale à 0 alors toutes les λ -quiddités sur G sont de taille paire et l'ensemble des λ -quiddités irréductibles sur G est*

$$\{(0, g, 0, -g), (g, 0, -g, 0); g \in G\}.$$

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}$, n impair et $(a_1, \dots, a_n) \in G^n$ une λ -quiddité.

$$M_{2n}(a_1, \dots, a_n, a_1, \dots, a_n) = M_n(a_1, \dots, a_n)^2 = Id.$$

Ainsi, $(a_1, \dots, a_n, a_1, \dots, a_n)$ est une solution de (E). Par hypothèse, elle contient 0 et donc (a_1, \dots, a_n) contient 0. On en déduit que toutes les λ -quiddités sur G contiennent 0.

Par la proposition 3.2, toutes les solutions de (E) sur G de taille supérieure à 5 sont réductibles. De plus, $1 \notin G$, sinon $(1, 1, 1)$ serait une solution sur G ne contenant pas 0. Comme G est un sous-groupe de \mathbb{C} , $-1 \notin G$. Donc, les λ -quiddités sur G de taille 4 sont irréductibles (proposition 3.2) et il n'en existe pas de taille 3 (proposition 3.1). Enfin, puisque toutes les solutions contiennent 0, il n'existe pas de solution de la forme (a, b, a, b) avec $ab = 2$.

Ainsi, les λ -quiddités irréductibles sur G sont celles données dans l'énoncé, ce qui implique nécessairement que toutes les solutions sur G sont de taille paire. □

Remarques. i) La réciproque est fautive. Par exemple, toutes les solutions de (E) sur $\langle \sqrt{2} \rangle$ sont de taille paire mais elles ne contiennent pas toutes 0 (voir Théorème 3.8).

ii) Il existe bien sûr des cas où des λ -quiddités de taille impaire existent, comme pour $G = \mathbb{Z}$. On peut également montrer que de telles solutions existent pour $G = \langle \varphi \rangle$ avec $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or. En effet, on montre, par un simple calcul, que $(\varphi, \varphi, \varphi, \varphi, \varphi)$ et $(-\varphi, -\varphi, -\varphi, -\varphi, -\varphi)$ sont des λ -quiddités sur $\langle \varphi \rangle$. Malheureusement, on ne possède pas de classification des solutions de (E) irréductibles sur ce sous-groupe. Toutefois, on peut émettre la conjecture suivante :

Conjecture. *L'ensemble des λ -quiddités irréductibles sur $\langle \varphi \rangle$ est :*

$$\{(\varphi, \varphi, \varphi, \varphi, \varphi), (-\varphi, -\varphi, -\varphi, -\varphi, -\varphi), (0, k\varphi, 0, -k\varphi), (k\varphi, 0, -k\varphi, 0); k \in \mathbb{Z}\}.$$

On peut également montrer que les solutions sont toutes de taille paire en s'intéressant directement à la forme des matrices $M_n(a_1, \dots, a_n)$. On propose ici deux exemples.

Proposition 3.10. i) *Les λ -quiddités sur $\langle e^{\frac{i\pi}{4}} \rangle$ sont de taille paire.*

ii) *Les λ -quiddités sur $\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$ sont de taille paire.*

Démonstration. i) Soit n un entier naturel impair. Supposons par l'absurde qu'il existe une λ -quiddité (a_1, \dots, a_n) sur $\langle e^{\frac{i\pi}{4}} \rangle$ avec pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ $a_i = k_i e^{\frac{i\pi}{4}}$ ($k_i \in \mathbb{Z}$). Il existe $\epsilon \in \{-1, 1\}$ tel que

$$\epsilon Id = M_n(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} K_n(a_1, \dots, a_n) & -K_{n-1}(a_2, \dots, a_n) \\ K_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}) & -K_{n-2}(a_2, \dots, a_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

En particulier, on a $K_n(a_1, \dots, a_n) = \epsilon$. Or, par l'algorithme d'Euler, $K_n(a_1, \dots, a_n)$ est une somme dont chacun des termes est un produit d'un nombre impair de a_i (et éventuellement de -1). On factorise cette somme par $e^{\frac{i\pi}{4}}$ et on regroupe dans chaque terme les $e^{\frac{i\pi}{4}}$ restants (qui sont en nombre pair). Chaque terme se réduit donc à un entier multiplié par ± 1 ou par $\pm i$. Ainsi, $K_n(a_1, \dots, a_n)$ est de la forme $e^{\frac{i\pi}{4}}(u + iv)$ avec $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$.

De plus, $e^{\frac{i\pi}{4}}(u + iv) = K_n(a_1, \dots, a_n) = \epsilon$, donc $u \neq 0$ et $v \neq 0$. Ainsi,

$$1 = |\epsilon| = \left| e^{\frac{i\pi}{4}}(u + iv) \right| = |u + iv| = \sqrt{u^2 + v^2} \geq \sqrt{2}.$$

Ceci est absurde. Donc, les λ -quiddités sur $\langle e^{\frac{i\pi}{4}} \rangle$ sont de taille paire.

ii) Soit n un entier naturel impair. Supposons par l'absurde qu'il existe une λ -quiddité (a_1, \dots, a_n) sur $\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$ avec pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ $a_i = \frac{k_i}{\sqrt{2}}$ ($k_i \in \mathbb{Z}$). Il existe $\epsilon \in \{-1, 1\}$ tel que

$$\epsilon Id = M_n(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} K_n(a_1, \dots, a_n) & -K_{n-1}(a_2, \dots, a_n) \\ K_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}) & -K_{n-2}(a_2, \dots, a_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

En particulier, on a $K_n(a_1, \dots, a_n) = \epsilon$. Or, par l'algorithme d'Euler, $K_n(a_1, \dots, a_n)$ est une somme dont chacun des termes est un produit d'un nombre impair de a_i (et éventuellement de -1). On factorise cette somme par $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et on regroupe dans chaque terme les $\frac{1}{\sqrt{2}}$ restants (qui sont en nombre pair). Chaque terme se réduit donc à un entier multiplié par une puissance de $\frac{1}{2}$. Ainsi, il existe un rationnel x tel que $K_n(a_1, \dots, a_n) = \frac{1}{\sqrt{2}}x$.

Donc, $K_n(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Or, $K_n(a_1, \dots, a_n) = \epsilon \in \mathbb{Q}$. Ceci est absurde. Ainsi, les λ -quiddités sur $\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \rangle$ sont de taille paire. □

Nous allons maintenant tenter d'obtenir dans les sections suivantes de nouveaux résultats de classification des λ -quiddités irréductibles sur des sous-groupes monogènes engendrés par des nombres algébriques.

4. UTILISATION DES ÉLÉMENTS CONJUGUÉS D'UN NOMBRE ALGÈBRE

L'objectif de cette section est d'utiliser le caractère algébrique de certains nombres pour démontrer des résultats de classification des λ -quiddités irréductibles, en particulier ceux donnés dans les théorèmes 2.5 et 2.6.

4.1. Démonstration des théorèmes 2.5 et 2.6. On commence cette sous-partie en rappelant quelques éléments qui nous seront utiles pour la suite (voir [8] chapitre III, section 1.3).

Si α est un nombre complexe algébrique alors :

- Il existe un unique polynôme unitaire $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que si $R \in \mathbb{Q}[X]$ vérifie $R(\alpha) = 0$ alors R est un multiple de P dans $\mathbb{Q}[X]$.
- Ce polynôme P est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$ et on l'appelle le polynôme minimal de α sur \mathbb{Q} .
- Les racines sur \mathbb{C} du polynôme minimal de α sont les éléments conjugués de α .

Notons par ailleurs que l'ensemble des nombres complexes algébriques est infini et dénombrable (voir par exemple [2] et [8] corollaire III.57).

On peut maintenant démontrer le résultat ci-dessous :

Proposition 4.1. *Soient α un nombre complexe algébrique et β un de ses éléments conjugués. On note $\Omega(\alpha)$ (resp. $\Omega(\beta)$) l'ensemble des λ -quiddités sur $\langle \alpha \rangle$ (resp. sur $\langle \beta \rangle$). Si $\Omega(\alpha) \neq \emptyset$ alors $\Omega(\beta) \neq \emptyset$ et l'application :*

$$\theta : \begin{array}{ccc} \Omega(\alpha) & \longrightarrow & \Omega(\beta) \\ (k_1\alpha, \dots, k_n\alpha) & \longmapsto & (k_1\beta, \dots, k_n\beta) \end{array}$$

est une bijection.

De plus, θ établit également une bijection entre l'ensemble des λ -quiddités irréductibles sur $\langle \alpha \rangle$ et l'ensemble des λ -quiddités irréductibles sur $\langle \beta \rangle$.

Démonstration. Si $\alpha \in \mathbb{Q}$ alors $\alpha = \beta$ et le résultat est vrai. On suppose donc que $\alpha \notin \mathbb{Q}$, en particulier $\alpha, \beta \neq 0$.

Soient P le polynôme minimal de α sur \mathbb{Q} et $(k_1\alpha, \dots, k_n\alpha) \in \Omega(\alpha)$. Il existe $\epsilon \in \{\pm 1\}$ tel que

$$\epsilon Id = M_n(k_1\alpha, \dots, k_n\alpha) = \begin{pmatrix} K_n(k_1\alpha, \dots, k_n\alpha) & -K_{n-1}(k_2\alpha, \dots, k_n\alpha) \\ K_{n-1}(k_1\alpha, \dots, k_{n-1}\alpha) & -K_{n-2}(k_2\alpha, \dots, k_{n-1}\alpha) \end{pmatrix}.$$

Posons $R(X) = K_n(k_1X, \dots, k_nX) - \epsilon$. Par l'algorithme d'Euler, $R(X)$ est un polynôme en X . De plus, $R(\alpha) = 0$. Donc, R est un multiple de P dans $\mathbb{Q}[X]$, c'est-à-dire qu'il existe $U \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $R = UP$. En particulier, $R(\beta) = U(\beta)P(\beta) = 0$. Ainsi,

$$K_n(k_1\beta, \dots, k_n\beta) = \epsilon.$$

On montre de la même façon que :

- $K_{n-1}(k_1\beta, \dots, k_{n-1}\beta) = K_{n-1}(k_2\beta, \dots, k_n\beta) = 0$;
- $K_{n-2}(k_2\beta, \dots, k_{n-1}\beta) = -\epsilon$.

Donc, $(k_1\beta, \dots, k_n\beta)$ est une solution de (E) sur $\langle \beta \rangle$. Ainsi, $\Omega(\beta) \neq \emptyset$ et θ est bien définie.

Si $(k_1\beta, \dots, k_n\beta) \in \Omega(\beta)$ alors, comme α est un élément conjugué de β , on a, par ce qui précède, $(k_1\alpha, \dots, k_n\alpha) \in \Omega(\alpha)$ et $\theta(k_1\alpha, \dots, k_n\alpha) = (k_1\beta, \dots, k_n\beta)$. Ainsi, θ est surjective.

Soient $((k_1\alpha, \dots, k_n\alpha), (k'_1\alpha, \dots, k'_n\alpha)) \in \Omega(\alpha)^2$ tels que $\theta(k_1\alpha, \dots, k_n\alpha) = \theta(k'_1\alpha, \dots, k'_n\alpha)$. Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $k_i\beta = k'_i\beta$. Comme $\beta \neq 0$, $k_i = k'_i$ et $(k_1\alpha, \dots, k_n\alpha) = (k'_1\alpha, \dots, k'_n\alpha)$, c'est-à-dire θ est injective. Ainsi, θ est bijective.

On va maintenant montrer que θ établit une bijection entre l'ensemble des λ -quiddités irréductibles sur $\langle \alpha \rangle$ et l'ensemble des λ -quiddités irréductibles sur $\langle \beta \rangle$.

Soit $(k_1\alpha, \dots, k_n\alpha) \in \Omega(\alpha)$ tel que $\theta(k_1\alpha, \dots, k_n\alpha)$ est réductible. Il existe $l, l' \geq 3$, $(a_1\beta, \dots, a_l\beta) \in \Omega(\beta)$ et $(b_1\beta, \dots, b_{l'}\beta) \in \Omega(\beta)$ tels que :

$$(k_1\beta, \dots, k_n\beta) \sim (a_1\beta, \dots, a_l\beta) \oplus (b_1\beta, \dots, b_{l'}\beta) = ((a_1 + b_{l'})\beta, a_2\beta, \dots, a_{l-1}\beta, (a_l + b_1)\beta, b_2\beta, \dots, b_{l'-1}\beta).$$

On a :

$$(k_1\alpha, \dots, k_n\alpha) \sim ((a_1 + b_{l'})\alpha, a_2\alpha, \dots, a_{l-1}\alpha, (a_l + b_1)\alpha, b_2\alpha, \dots, b_{l'-1}\alpha) = (a_1\alpha, \dots, a_l\alpha) \oplus (b_1\alpha, \dots, b_{l'}\alpha).$$

Comme $(b_1\beta, \dots, b_{l'}\beta) \in \Omega(\beta)$, $(b_1\alpha, \dots, b_{l'}\alpha) \in \Omega(\alpha)$ et donc $(k_1\alpha, \dots, k_n\alpha)$ est réductible. Ainsi, l'image d'une solution irréductible par θ est irréductible.

Soit $(k_1\alpha, \dots, k_n\alpha) \in \Omega(\alpha)$ réductible. Il existe $l, l' \geq 3$, $(a_1\alpha, \dots, a_l\alpha) \in \Omega(\alpha)$ et $(b_1\alpha, \dots, b_{l'}\alpha) \in \Omega(\alpha)$ tels que :

$$(k_1\alpha, \dots, k_n\alpha) \sim (a_1\alpha, \dots, a_l\alpha) \oplus (b_1\alpha, \dots, b_{l'}\alpha) = ((a_1 + b_{l'})\alpha, a_2\alpha, \dots, a_{l-1}\alpha, (a_l + b_1)\alpha, b_2\alpha, \dots, b_{l'-1}\alpha).$$

On a :

$$\theta(k_1\alpha, \dots, k_n\alpha) = (k_1\beta, \dots, k_n\beta) \sim ((a_1 + b_{l'})\beta, a_2\beta, \dots, a_{l-1}\beta, (a_l + b_1)\beta, b_2\beta, \dots, b_{l'-1}\beta).$$

Donc, $\theta(k_1\alpha, \dots, k_n\alpha) = (a_1\beta, \dots, a_l\beta) \oplus (b_1\beta, \dots, b_{l'}\beta)$.

Comme $(b_1\alpha, \dots, b_{l'}\alpha) \in \Omega(\alpha)$, $(b_1\beta, \dots, b_{l'}\beta) \in \Omega(\beta)$ et donc $\theta(k_1\alpha, \dots, k_n\alpha)$ est réductible. Ainsi, θ établit une surjection entre les éléments irréductibles de $\Omega(\alpha)$ et ceux de $\Omega(\beta)$.

Donc, θ établit une bijection entre l'ensemble des λ -quiddités irréductibles sur $\langle \alpha \rangle$ et l'ensemble des λ -quiddités irréductibles sur $\langle \beta \rangle$. □

Muni de cette proposition, on peut maintenant prouver les théorèmes 2.5 et 2.6.

Démonstration du théorème 2.5. Soit α un nombre algébrique. On suppose que α a un élément conjugué β de module supérieur à 2. Comme $|\beta| \geq 2$, on a, par la proposition 3.6, que l'ensemble des solutions irréductibles de (E) sur $\langle \beta \rangle$ est $\{(0, k\beta, 0, -k\beta), (k\beta, 0, -k\beta, 0), k \in \mathbb{Z}\}$. Par la proposition 4.1, θ établit une bijection entre les λ -quiddités irréductibles sur $\langle \alpha \rangle$ et celles sur $\langle \beta \rangle$. Donc, l'ensemble des solutions irréductibles de (E) sur $\langle \alpha \rangle$ est $\{(0, k\alpha, 0, -k\alpha), (k\alpha, 0, -k\alpha, 0), k \in \mathbb{Z}\}$. □

Le théorème 2.6 se déduit du théorème 2.5.

Démonstration du théorème 2.6. Soit $(a, b, k) \in \mathbb{Z}^3$ avec $a, b \neq 0$ et $k \geq 2$. On pose $w = a + b\sqrt{k}$ et on suppose que $w \neq \pm 1$. Si $w \in \mathbb{Z}^*$ alors $|w| \geq 2$ et, par la proposition 3.6, l'ensemble des λ -quiddités irréductibles sur $\langle w \rangle$ est celui donné dans l'énoncé. Si $w = 0$, le résultat est déjà connu (Théorème 3.8 i)). On suppose donc maintenant $w \notin \mathbb{Z}$, c'est-à-dire $b\sqrt{k} \notin \mathbb{Q}$. Quitte à remplacer w par $-w$, on peut supposer que $a \geq 1$. On distingue deux cas :

- Si $b \geq 1$ alors $w \geq 2$. Par la proposition 3.6, l'ensemble des λ -quiddités irréductibles sur $\langle w \rangle$ est celui donné dans l'énoncé.
- Si $b \leq -1$. Posons $P(X) = X^2 - 2aX + a^2 - b^2k = (X - (a + b\sqrt{k}))(X - (a - b\sqrt{k})) \in \mathbb{Z}[X]$. Comme $a + b\sqrt{k}, a - b\sqrt{k} \notin \mathbb{Q}$ et P est de degré 2, P est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$. Donc, P est le polynôme minimal de w sur \mathbb{Q} et $a - b\sqrt{k}$ est un élément conjugué de w . Or, $a - b\sqrt{k} \geq 2$. Donc, par le théorème 2.5, l'ensemble des λ -quiddités irréductibles sur $\langle w \rangle$ est celui donné dans l'énoncé. □

Exemple. $\{(0, k(1 - \sqrt{2}), 0, -k(1 - \sqrt{2})), (k(1 - \sqrt{2}), 0, -k(1 - \sqrt{2}), 0), k \in \mathbb{Z}\}$ est l'ensemble des λ -quiddités irréductibles sur $\langle 1 - \sqrt{2} \rangle$.

Remarque. On dispose en fait de la classification complète des λ -quiddités irréductibles sur $\langle a + b\sqrt{k} \rangle$ quelles que soient les valeurs de a, b, k . En effet, si $b = 0$ ou si $k \in \{0, 1\}$ alors la classification est donnée par le corollaire 3.11 de [14] et si $a = 0$ alors la classification est donnée par le théorème 3.8 et la proposition 3.6.

4.2. Applications. L'objectif de cette sous-partie est d'utiliser le théorème 2.5 pour d'obtenir d'autres résultats de classification. On commence par la proposition suivante qui n'est qu'un exemple, parmi bien d'autres, des applications directes possibles du théorème 2.5 :

Proposition 4.2. Soit $w = \frac{1 - \sqrt{11}}{2}$. L'ensemble des λ -quiddités irréductibles sur $\langle w \rangle$ est

$$\{(0, kw, 0, -kw), (kw, 0, -kw, 0), k \in \mathbb{Z}\}.$$

Démonstration. Posons $P(X) = X^2 - X - \frac{5}{2} = (X - \frac{1-\sqrt{11}}{2})(X - \frac{1+\sqrt{11}}{2}) \in \mathbb{Q}[X]$. Comme $\frac{1-\sqrt{11}}{2}, \frac{1+\sqrt{11}}{2} \notin \mathbb{Q}$ et P est de degré 2, P est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$. Donc, P est le polynôme minimal de w sur \mathbb{Q} et $\frac{1+\sqrt{11}}{2}$ est un élément conjugué de w . Or, $\frac{1+\sqrt{11}}{2} \geq 2$. Donc, par le théorème 2.5, l'ensemble des λ -quiddités irréductibles sur $\langle w \rangle$ est celui donné dans l'énoncé. □

On peut également utiliser le théorème 2.5 pour obtenir des résultats de classification sur certains sous-groupes monogènes sans connaître précisément les éléments conjugués. Pour cela, on utilisera le résultat classique rappelé ci-dessous :

Théorème 4.3 (Rouché, [17] et [19] corollaire 8.6.3). *Soient U un ouvert de \mathbb{C} , $a \in U$ et $r > 0$ tels que $\overline{D(a, r)} := \{z \in \mathbb{C}, |z - a| \leq r\} \subset U$. Soient f et g deux fonctions holomorphes sur U vérifiant $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ pour tout z appartenant au cercle de centre a et de rayon r . Alors f et g ont le même nombre de zéros (comptés avec leur multiplicité) dans $D(a, r) := \{z \in \mathbb{C}, |z - a| < r\}$.*

On aura également besoin de critères d'irréductibilité. Pour les exemples qui seront considérés, on fera usage des deux qui sont rappelés ci-dessous.

Théorème 4.4 (Critère d'Eisenstein, [8] Théorème I.52). *Soit $P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ avec $n \geq 1$ et $a_n \neq 0$. On suppose qu'il existe un nombre premier p tel que :*

- pour tout i dans $\llbracket 1; n-1 \rrbracket$ p divise a_i ;
- p ne divise pas a_n ;
- p^2 ne divise pas a_0 .

Alors P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Théorème 4.5 (Critère d'irréductibilité d'Osada, [21] Théorème 1.8.6). *Soient p un nombre premier et $P(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X \pm p \in \mathbb{Z}[X]$ avec $n \geq 1$ et $a_n \neq 0$. Si $p > |a_1| + \dots + |a_n|$ alors P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.*

Bien entendu, il existe une myriade d'autres résultats d'irréductibilité que l'on pourrait utiliser comme le critère de Perron (voir [21] Théorème 1.8.1), le critère de Dumas (voir [7]) ou bien d'autres encore.

On détaille maintenant, comme annoncé, deux cas utilisant les éléments précédents :

- Soit w une racine de $A(X) = X^5 + 10X^4 + 5X^3 + 5$. Par le critère d'Eisenstein, A est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$. Donc, A est le polynôme minimal de w sur \mathbb{Q} . Posons $B(X) = 10X^4$. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 2$. On a :

$$|A(z) - B(z)| = |z^5 + 5z^3 + 5| \leq |z|^5 + 5|z|^3 + 5 = 77 < 160 = |B(z)|.$$

Par le théorème de Rouché, A a quatre racines dans $D(0, 2)$. Ainsi, A a une racine de module supérieur ou égal à 2. Donc, on peut classifier les λ -quiddités irréductibles sur $\langle w \rangle$ avec le théorème 2.5.

- Soit w une racine de $C(X) = X^7 + 5X^6 + 2X^3 - X^2 + X + 11$. Par le critère d'Osada, C est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$. Donc, C est le polynôme minimal de w sur \mathbb{Q} . Posons $D(X) = 5X^6$. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 2$. On a :

$$|C(z) - D(z)| \leq |z|^7 + 2|z|^3 + |z|^2 + |z| + 11 = 161 < 320 = |D(z)|.$$

Par le théorème de Rouché, D a six racines dans $D(0, 2)$. Ainsi, D a une racine de module supérieur ou égal à 2. Donc, on peut classifier les λ -quiddités irréductibles sur $\langle w \rangle$ avec le théorème 2.5.

Remarques. i) Dans les deux exemples précédents, on a utilisé le théorème de Rouché. Cela dit, on peut évidemment essayer de se servir d'autres résultats de localisation des racines de polynômes, comme par exemple le théorème de Sturm (voir [18]).

ii) Les différents exemples présentés dans cette section montrent que le théorème 2.5 permet de procéder à la classification des λ -quiddités irréductibles dans une kyrielle de cas différents qui auraient sans doute été difficiles à considérer avec des méthodes plus directes.

5. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.7

On va maintenant démontrer le dernier théorème présenté dans la section 2 en utilisant une méthode proche de celle utilisée dans [14] pour démontrer le théorème de classification sur $\langle \sqrt{k} \rangle$.

Preuve du théorème 2.7. Soit $w = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $|ab| \geq 1$. Notre objectif est de montrer que toutes les solutions de (E) sur $\langle w \rangle$ de taille paire contiennent un zéro.

Soient $m = 2n \geq 4$ un entier naturel pair et (a_1, \dots, a_m) une λ -quiddité sur $\langle w \rangle$. Pour tout $i \in \llbracket 1; m \rrbracket$, $a_i = k_i w$ avec $k_i \in \mathbb{Z}$. Supposons par l'absurde qu'aucune composante de (a_1, \dots, a_m) soit nulle.

Puisque (a_1, \dots, a_m) est une λ -quiddité, il existe $\epsilon \in \{\pm 1\}$ tel que

$$\epsilon Id = M_m(a_1, \dots, a_m) = \begin{pmatrix} K_m(a_1, \dots, a_m) & -K_{m-1}(a_2, \dots, a_m) \\ K_{m-1}(a_1, \dots, a_{m-1}) & -K_{m-2}(a_2, \dots, a_{m-1}) \end{pmatrix}.$$

Grâce à l'algorithme d'Euler, on sait que $K_{2n}(k_1 w, k_2 w, \dots, k_{2n-1} w, k_{2n} w)$ est une somme de produits des $k_j w$ (et potentiellement de -1). Dans chaque terme d'une de ces sommes, pour chaque j impair k_j est suivi d'un k_l avec l pair. On effectue alors la manipulation suivante :

$$k_j w k_l w = k_j (k_l w^2).$$

Cela conduit à l'égalité suivante :

$$K_{2n}(k_1 w, k_2 w, \dots, k_{2n-1} w, k_{2n} w) = K_{2n}(k_1, k_2 w^2, \dots, k_{2n-1}, k_{2n} w^2).$$

En procédant de la même manière, on a : $K_{2n-2}(k_2 w, \dots, k_{2n-1} w) = K_{2n-2}(k_2 w^2, k_3, \dots, k_{2n-2} w^2, k_{2n-1})$ (car pour pour chaque j impair, k_j est précédé d'un k_l avec l pair).

On procède de façon analogue pour les autres termes de $M_m(a_1, \dots, a_m)$. Par l'algorithme d'Euler, $K_{2n-1}(k_1 w, k_2 w, \dots, k_{2n-1} w)$ est une somme de produits des $k_j w$ (et potentiellement de -1). Pour chacun des termes de cette somme, deux possibilités existent :

- le terme est de la forme $k_j w$ avec j impair ;
- le terme est un produit de $2v + 1$ éléments du type $k_j w$ avec $v + 1$ indices j impair. Pour chaque m pair k_m est précédé d'un k_l avec l impair. On effectue alors la manipulation suivante :

$$k_l w k_m w = k_l (k_m w^2).$$

On obtient ainsi $0 = K_{2n-1}(k_1 w, k_2 w, \dots, k_{2n-1} w) = w K_{2n-1}(k_1, k_2 w^2, \dots, k_{2n-1})$. Ceci implique que $0 = K_{2n-1}(k_1, k_2 w^2, \dots, k_{2n-1})$. De la même manière, on obtient $0 = K_{2n-1}(k_2 w^2, k_3, \dots, k_{2n} w^2)$.

Ainsi, $(k_1, k_2 w^2, \dots, k_{2n-1}, k_{2n} w^2)$ est une solution de (E) sur \mathbb{C} .

Par le théorème 3.3, cette solution contient un élément de module strictement plus petit que 2. Or, $|w^2| = |w|^2 = a^2 + b^2 \geq 2|ab| \geq 2$ et tous les k_j sont non nuls. Ainsi, les seules composantes de module strictement plus petit que 2 ne peuvent être que des k_j (avec j impair). Donc, il existe j impair tel que

$k_j = \pm 1$. En utilisant les deux identités $M_3(a, 1, b) = M_2(a - 1, b - 1)$ et $M_3(a, -1, b) = -M_2(a + 1, b + 1)$, on peut "réduire" tous les ± 1 contenus dans $(k_1, k_2w^2, \dots, k_{2n-1}, k_{2n}w^2)$. On obtient ainsi une nouvelle solution de (E) sur \mathbb{C} dont les composantes sont nécessairement de la forme :

- k_j avec j impair et $|k_j| \geq 2$;
- k_jw^2 avec j pair ;
- $k_jw^2 \pm 1$ avec j pair ;
- $k_jw^2 \pm 2$ avec j pair.

Par le théorème 3.3, cette nouvelle λ -quiddité contient un élément de module strictement plus petit que 2. Celui-ci appartient nécessairement aux deux dernières catégories. Calculons le module pour ces deux possibilités. On a :

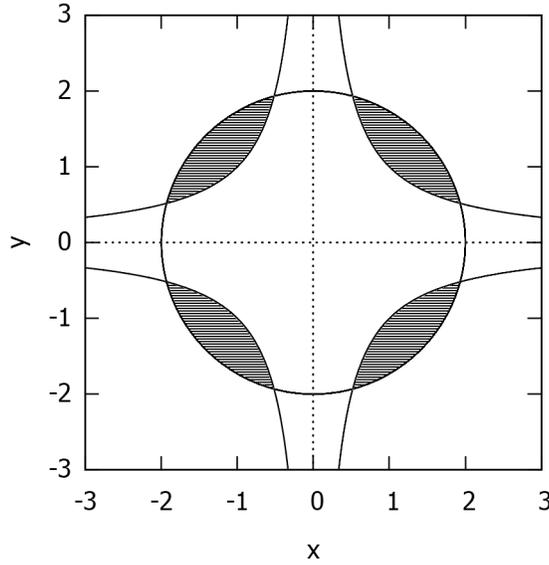
- $|k_jw^2 \pm 1| = |(k_j(a^2 - b^2) \pm 1) + 2ik_jab| = \sqrt{(k_j(a^2 - b^2) \pm 1)^2 + 4a^2b^2k_j^2} \geq 2|k_j||ab| \geq 2,$
- $|k_jw^2 \pm 2| = |(k_j(a^2 - b^2) \pm 2) + 2ik_jab| = \sqrt{(k_j(a^2 - b^2) \pm 2)^2 + 4k_j^2a^2b^2} \geq 2|k_j||ab| \geq 2.$

Ainsi, toutes les composantes de la solution obtenue en supprimant les ± 1 dans $(k_1, k_2w^2, \dots, k_{2n-1}, k_{2n}w^2)$ sont de module supérieur ou égal à 2. Ceci est absurde. Donc, toutes les solutions de (E) sur $\langle w \rangle$ de taille paire contiennent un zéro.

Par la proposition 3.9, le résultat est démontré. □

Exemples. On peut appliquer le théorème que nous venons de démontrer aux sous-groupes suivants : $\langle 1 + i \rangle$, $\langle \frac{3}{2} - \frac{7}{8}i \rangle$, $\langle \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{3}i \rangle$.

Dans le graphique ci-dessous (construit avec le logiciel Maxima), on a représenté le cercle de centre 0 et de rayon 2 et les courbes d'équation $y = \frac{1}{x}$ et $y = -\frac{1}{x}$. Si $w \in \mathbb{C}$ est à l'extérieur du cercle alors les λ -quiddités irréductibles sur $\langle w \rangle$ peuvent être classées avec la proposition 3.6. Si w appartient aux zones hachurées alors on ne peut pas utiliser la proposition 3.6. En revanche, on peut classifier les λ -quiddités irréductibles sur $\langle w \rangle$ avec le théorème 2.7.



RÉFÉRENCES

- [1] F. Bergeron, C. Reutenauer, *SL_k-tilings of the plane*, Illinois J. Math., Vol. 54 no. 1, (2010), pp 263-300.
- [2] G. Cantor, *Sur une propriété du système de tous les nombres algébriques réels*, Acta Mathematica, Vol. 2, (1883), pp 305-310.
- [3] C. Conley, V. Ovsienko, *Rotundus : triangulations, Chebyshev polynomials, and Pfaffians*, Math. Intelligencer, Vol. 40 no. 3, (2018), pp 45-50.
- [4] H. S. M. Coxeter, *Frieze patterns*, Acta Arithmetica, Vol. 18, (1971), pp 297-310.
- [5] M. Cuntz, *A combinatorial model for tame frieze patterns*, Munster J. Math., Vol. 12 no. 1, (2019), pp 49-56.
- [6] M. Cuntz, T. Holm, *Frieze patterns over integers and other subsets of the complex numbers*, J. Comb. Algebra., Vol. 3 no. 2, (2019), pp 153-188.
- [7] G. Dumas, *Sur quelques cas d'irréductibilité des polynômes à coefficients rationnels*, Journal de mathématiques pures et appliquées 6^e série, tome 2, (1906), pp 191-258.
- [8] I. Gozard, *Théorie de Galois - niveau L3-M1 - 2e édition*, Ellipses, 2009.
- [9] F. Mabilat, *Combinatoire des sous-groupes de congruence du groupe modulaire*, Annales Mathématiques Blaise Pascal, Vol. 28 no. 1, (2021), pp. 7-43. doi : 10.5802/ambp.398. <https://ambp.centre-mersenne.org/articles/10.5802/ambp.398/>.
- [10] F. Mabilat, *λ -quiddité sur $\mathbb{Z}[\alpha]$ avec α transcendant*, Mathematica Scandinavica, Vol. 128 no. 1, (2022), pp 5-13, <https://doi.org/10.7146/math.scand.a-128972>.
- [11] F. Mabilat, *Combinatoire des sous-groupes de congruence du groupe modulaire II*. Annales Mathématiques Blaise Pascal, Vol. 28 no. 2, (2021), pp. 199-229. doi : 10.5802/ambp.404. <https://ambp.centre-mersenne.org/articles/10.5802/ambp.404/>.
- [12] F. Mabilat, *Entiers monomialement irréductibles*, hal-03487145, arXiv :2112.10410.
- [13] F. Mabilat, *Solutions monomiales minimales irréductibles dans $SL_2(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$* , hal-03573421, arxiv :2202.07279.
- [14] F. Mabilat, *λ -quiddité sur certains sous-groupes monogènes de \mathbb{C}* , hal-03706941, arXiv :2206.13949.
- [15] S. Morier-Genoud, *Coxeter's frieze patterns at the crossroad of algebra, geometry and combinatorics*, Bull. Lond. Math. Soc., Vol. 47 no. 6, (2015), pp 895-938.
- [16] V. Ovsienko, *Partitions of unity in $SL(2, \mathbb{Z})$, negative continued fractions, and dissections of polygons*, Res. Math. Sci., Vol. 5 no. 2, (2018), Article 21, 25 pp.
- [17] E. Rouché, *Mémoire sur la série de Lagrange*, J. de l'École Impériale polytechnique 39, tome XXII, (1862), pp 193-224.
- [18] C. Sturm, *Mémoire sur la résolution des équations numériques*, Mémoires présentés par divers Savants étrangers à l'Acad. royale des sc., section sc. math, phys., tome VI, (1835), pp 273-318.
- [19] P. Tauvel, *Analyse complexe pour la Licence 3*, Dunod, 2020.
- [20] M. Weber, M. Zhao, *Factorization of frieze patterns*, Revista de la Union Matematica Argentina, Vol. 60 no. 2, (2019), pp 407-415.
- [21] K. Zhao, *Ring And Field Theory*, World Scientific Publishing Co, 2022.

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES DE REIMS, UMR9008 CNRS ET UNIVERSITÉ DE REIMS CHAMPAGNE-ARDENNE,
 U.F.R. SCIENCES EXACTES ET NATURELLES MOULIN DE LA HOUSSE - BP 1039 51687 REIMS CEDEX 2, FRANCE
 Email address: flavien.mabilat@univ-reims.fr