

Transformations affines discrètes sous contraintes topologiques et géométriques

Approche d'optimisation sur les complexes cellulaires

Phuc Ngo¹, Nicolas Passat², Yukiko Kenmochi³ et Hugues Talbot⁴

¹Université de Lorraine, LORIA, Nancy, France

²Université de Reims Champagne Ardenne, CReSTIC, Reims, France

³Université de Normandie, UNICAEN, ENSICAEN, CNRS, GREYC, Caen, France

⁴Centrale Supélec, Université Paris-Saclay, Inira, Gif-sur-Yvette, France



Motivation

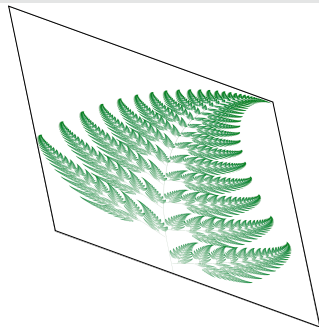
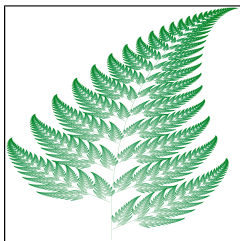
Transformation affine sur \mathbb{R}^2

Définition

Transformation affine $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie, pour tout $p \in \mathbb{R}^2$, par

$$\mathcal{A}(p) = \mathcal{A} \cdot p + t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

avec $t = {}^t(t_x, t_y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A} = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq 2}$, $\det(\mathcal{A}) \neq 0$, et $a_{i,j} \in \mathbb{R}$.



Transformation affine sur \mathbb{R}^2

Définition

Transformation affine $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie, pour tout $p \in \mathbb{R}^2$, par

$$\mathcal{A}(p) = \mathcal{A} \cdot p + t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

avec $t = {}^t(t_x, t_y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A} = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq 2}$, $\det(\mathcal{A}) \neq 0$, et $a_{i,j} \in \mathbb{R}$.

Les transformations affines comprennent notamment :

► translations ($\mathcal{A} = I_2$) ; et

► lorsque $t = 0$:

↪ rotations ($a_{11} = a_{22} = \cos \theta$, $-a_{12} = a_{21} = \sin \theta$ pour $\theta \in \mathbb{R}$) ;

↪ symétries ($a_{11} = \pm 1$, $a_{22} = \pm 1$, $a_{12} = a_{21} = 0$) ;

↪ changements d'échelle ($a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$ et $a_{12} = a_{21} = 0$) ;

et leurs compositions (e.g. transformation rigide : rotation + translation)

Transformation affine sur \mathbb{Z}^2

Définition

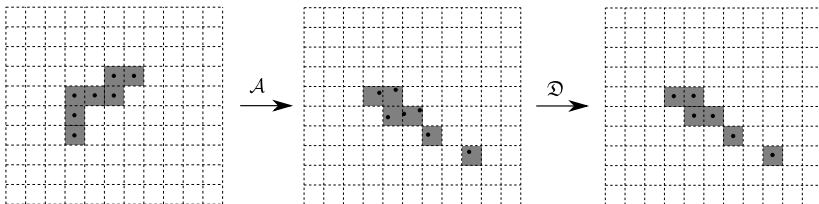
Transformation affine discrétisée $A : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ définie par

$$A = \mathcal{D} \circ \mathcal{A}|_{\mathbb{Z}^2}$$

où \mathcal{D} est l'opérateur de discrétisation défini avec l'opération d'arrondi :

$$\mathcal{D} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2$$

$$p = (p_x, p_y) \longmapsto q = (q_x, q_y) = ([p_x], [p_y])$$



Transformations discrétisées peuvent altérer la topologie de l'objet transformé.

Transformation affine sur \mathbb{Z}^2

Définition

Transformation affine discrétisée $A : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ définie par

$$A = \mathfrak{D} \circ \mathcal{A}|_{\mathbb{Z}^2}$$

où \mathfrak{D} est l'opérateur de discrétisation défini avec l'opération d'arrondi :

$$\mathfrak{D} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}^2$$

$$p = (p_x, p_y) \longmapsto q = (q_x, q_y) = ([p_x], [p_y])$$

Objectif

Soit X un objet binaire et \mathcal{A} une transformation affine. Construire un objet binaire transformé $X_{\mathcal{A}}$ **en préservant le type d'homotopie**.

Méthode

Le problème est formulé comme une **optimisation dans l'espace des complexes cellulaires** avec la notion de collapse sur les complexes.

Transformation affine sur \mathbb{Z}^2

Définition

Transformation affine discrétisée $A : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$ définie par

$$A = \mathfrak{D} \circ \mathcal{A}|_{\mathbb{Z}^2}$$

où \mathfrak{D} est l'opérateur de discrétisation défini avec l'opération d'arrondi :

$$\begin{aligned} \mathfrak{D} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{Z}^2 \\ p = (p_x, p_y) &\longmapsto q = (q_x, q_y) = ([p_x], [p_y]) \end{aligned}$$

Objectif

Soit X un objet binaire et \mathcal{A} une transformation affine. Construire un objet binaire transformé $X_{\mathcal{A}}$ **en préservant le type d'homotopie**.

Méthode

Le problème est formulé comme une **optimisation dans l'espace des complexes cellulaires** avec la notion de collapse sur les complexes.

Plan de la présentation

- 1. Formulation du problème**
- 2. Approche proposée**
- 3. Résultats expérimentaux**
- 4. Conclusion**

Formulation du problème



Énoncé du problème

Construire $X_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{Z}^2$ le plus similaire à $\mathcal{A}(X)$ peut être formalisé comme :

$$X_{\mathcal{A}} = \arg_{Y \in 2^{\mathbb{Z}^2}} \min \mathcal{D}_{\mathcal{A}, X}(Y)$$

où $\mathcal{D}_{\mathcal{A}, X}(Y)$ est une mesure de dissimilarité entre $\mathcal{A}(X)$ et Y .

Exemple de la mesure de dissimilarité

Basée sur la discrétisation de Gauss :

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}, X}^{\square}(Y) = |\square(\mathcal{A}(\square(X))) \setminus Y| + |Y \setminus \square(\mathcal{A}(\square(X)))|$$

Énoncé du problème

Construire $X_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{Z}^2$ le plus similaire à $\mathcal{A}(X)$ peut être formalisé comme :

$$X_{\mathcal{A}} = \arg_{Y \in 2\mathbb{Z}^2} \min \mathcal{D}_{\mathcal{A}, X}(Y)$$

où $\mathcal{D}_{\mathcal{A}, X}(Y)$ est une mesure de dissimilarité entre $\mathcal{A}(X)$ et Y .

Exemple de la mesure de dissimilarité

Basée sur la discrétisation de Gauss :

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}, X}^{\square}(Y) = |\square(\mathcal{A}(\square(X))) \setminus Y| + |Y \setminus \square(\mathcal{A}(\square(X)))|$$

► **L'analogique continu** $X \subset \mathbb{R}^2$ de $X \subset \mathbb{Z}^2$ est : $\square(X) = X \oplus \square = X$

↔ \oplus est l'opérateur de dilatation et

↔ \square est l'élément structurant $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2 \subset \mathbb{R}^2$.

► **La discrétisation de Gauss** de $X \subset \mathbb{R}^2$ est : $\square(X) = X \cap \mathbb{Z}^2$.

Énoncé du problème

Construire $X_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{Z}^2$ le plus similaire à $\mathcal{A}(X)$ peut être formalisé comme :

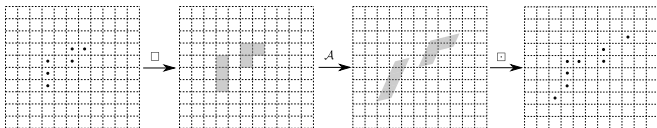
$$X_{\mathcal{A}} = \arg_{Y \in \mathbb{Z}^2} \min \mathcal{D}_{\mathcal{A}, X}(Y)$$

où $\mathcal{D}_{\mathcal{A}, X}(Y)$ est une mesure de dissimilarité entre $\mathcal{A}(X)$ et Y .

Exemple de la mesure de dissimilarité

Basée sur la discrétisation de Gauss :

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}, X}^{\square}(Y) = |\square(\mathcal{A}(\square(X))) \setminus Y| + |Y \setminus \square(\mathcal{A}(\square(X)))|$$



Énoncé du problème

Construire $X_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{Z}^2$ le plus similaire à $\mathcal{A}(X)$ peut être formalisé comme :

$$X_{\mathcal{A}} = \arg_{Y \in 2\mathbb{Z}^2} \min \mathcal{D}_{\mathcal{A}, X}(Y)$$

où $\mathcal{D}_{\mathcal{A}, X}(Y)$ est une mesure de dissimilarité entre $\mathcal{A}(X)$ et Y .

Exemple de la mesure de dissimilarité

Basée sur la discrétisation de Gauss :

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}, X}^{\square}(Y) = |\square(\mathcal{A}(\square(X))) \setminus Y| + |Y \setminus \square(\mathcal{A}(\square(X)))|$$



Énoncé du problème

Construire $X_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{Z}^2$ le plus similaire à $\mathcal{A}(X)$ peut être formalisé comme :

$$X_{\mathcal{A}} = \arg_{Y \in 2\mathbb{Z}^2} \min \mathcal{D}_{\mathcal{A}, X}(Y)$$

où $\mathcal{D}_{\mathcal{A}, X}(Y)$ est une mesure de dissimilarité entre $\mathcal{A}(X)$ et Y .

Exemple de la mesure de dissimilarité

Basée sur la discrétisation de Gauss :

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}, X}^{\square}(Y) = |\square(\mathcal{A}(\square(X))) \setminus Y| + |Y \setminus \square(\mathcal{A}(\square(X)))|$$



Solution

Préservation topologique via l'**optimisation dans l'espace des complexes cellulaires** avec la notion de collapse sur les complexes.

Approche proposée

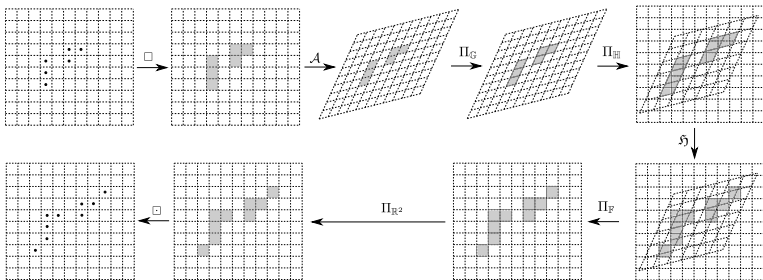


Transformation affine sur \mathbb{Z}^2 sous contrainte topologique

Méthode proposée

Les étapes principales pour transformer $X \subset \mathbb{Z}^2$ par \mathcal{A} :

1. Générer l'**espace cellulaire affiné** \mathbb{H} à partir de \mathbb{F} et \mathbb{G}
2. Calculer le complexe H dans \mathbb{H} à partir de G
3. Optimiser par une **transformation homotopique** \mathfrak{H} de H à \hat{H}
4. Plonger le **complexe de discrétisation** \hat{H} dans \mathbb{F}

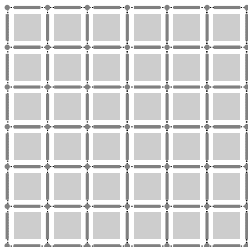


Espace cellulaire \mathbb{F} induit par \mathbb{Z}^2

Définition

Soit $\Delta = \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$. L'espace complexe cellulaire \mathbb{F} est composé de

- ▶ l'ensemble de 0-faces $\mathbb{F}_0 = \{\{d\} \mid d \in \Delta^2\}$
 - ▶ l'ensemble de 1-faces $\mathbb{F}_1 = \bigcup_{i=1,2} \{]d, d + e_i[\mid d \in \Delta^2\}$
 - ▶ l'ensemble de 2-faces $\mathbb{F}_2 = \{]d, d + e_1[\times]d, d + e_2[\mid d \in \Delta^2\}$
- où $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$.



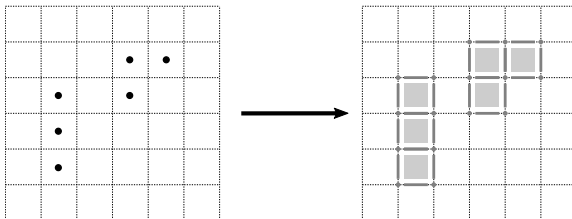
Espace cellulaire \mathbb{F} induit par \mathbb{Z}^2

Définition

Soit $X \subset \mathbb{Z}^2$ un objet discret, L'espace cellulaire associé à X dans \mathbb{F} , noté $F = \Pi_{\mathbb{F}}(\square(X))$, est défini par :

$$F = \bigcup_{x \in X} C(\blacksquare(x))$$

où $\blacksquare(p) = p \oplus] - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}[^2$ pour $p \in \mathbb{Z}^2$.

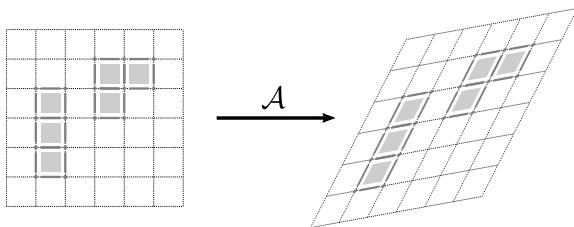


Espace cellulaire transformé \mathbb{G} induit par $\mathcal{A}(\mathbb{Z}^2)$

Définition

L'**espace cellulaire** \mathbb{G} induit par une transformation affine \mathcal{A} sur \mathbb{Z}^2 est composé des ensembles de d -faces ($0 \leq d \leq 2$) :

$$\mathbb{G}_d = \mathcal{A}(\mathbb{F}_d) = \{\mathcal{A}(f) \mid f \in \mathbb{F}_d\}$$

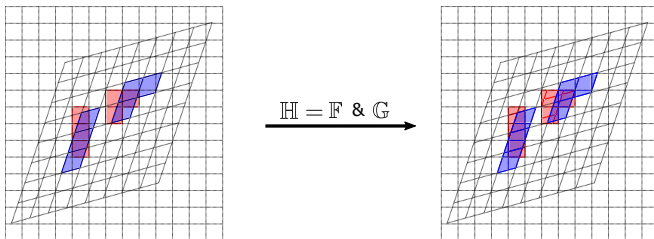


L'objet continu $X_{\mathcal{A}}$ est modélisé par le complexe cellulaire $G = \Pi_{\mathbb{G}}(X_{\mathcal{A}})$ et défini par

$$G = \mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(\Pi_{\mathbb{F}}(X)) = \{\mathcal{A}(f) \mid f \in \Pi_{\mathbb{F}}(X)\}$$

Espace cellulaire affiné \mathbb{H} de \mathbb{F} et \mathbb{G}

Un nouvel espace cellulaire \mathbb{H} est construit à partir de \mathbb{F} et \mathbb{G} .



Pour chaque 2-face h_2 de \mathbb{H} , il existe exactement une 2-face f_2 de \mathbb{F} et une 2-face g_2 de \mathbb{G} telle que $h_2 = f_2 \cap g_2$. Nous définissons

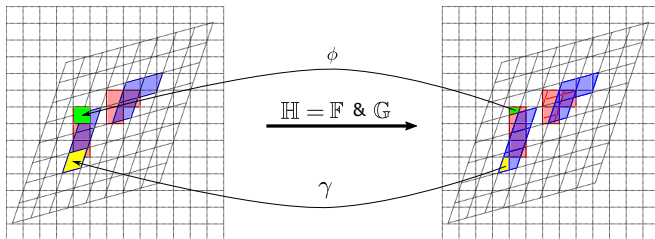
- ▶ $\phi : \mathbb{H}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2$ telle que $\phi(h_2) = f_2$
- ▶ $\gamma : \mathbb{H}_2 \rightarrow \mathbb{G}_2$ telle que $\gamma(h_2) = g_2$.

et inversement,

- ▶ $\Phi : \mathbb{F}_2 \rightarrow 2^{\mathbb{H}_2}$ telle que $\Phi(f_2) = \{h_2 \in \mathbb{H}_2 \mid \phi(h_2) = f_2\}$
- ▶ $\Gamma : \mathbb{G}_2 \rightarrow 2^{\mathbb{H}_2}$ telle que $\Gamma(g_2) = \{h_2 \in \mathbb{H}_2 \mid \gamma(h_2) = g_2\}$.

Espace cellulaire affiné \mathbb{H} de \mathbb{F} et \mathbb{G}

Un nouvel espace cellulaire \mathbb{H} est construit à partir de \mathbb{F} et \mathbb{G} .



Pour chaque 2-face h_2 de \mathbb{H} , il existe exactement une 2-face f_2 de \mathbb{F} et une 2-face g_2 de \mathbb{G} telle que $h_2 = f_2 \cap g_2$. Nous définissons

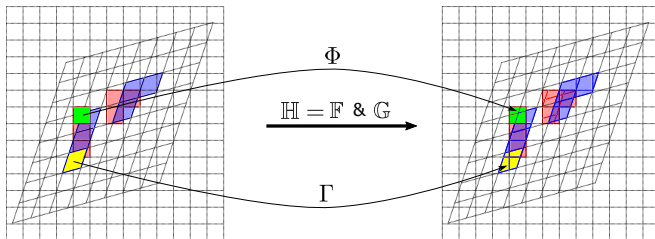
- ▶ $\phi : \mathbb{H}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2$ telle que $\phi(h_2) = f_2$
- ▶ $\gamma : \mathbb{H}_2 \rightarrow \mathbb{G}_2$ telle que $\gamma(h_2) = g_2$.

et inversement,

- ▶ $\Phi : \mathbb{F}_2 \rightarrow 2^{\mathbb{H}_2}$ telle que $\Phi(f_2) = \{h_2 \in \mathbb{H}_2 \mid \phi(h_2) = f_2\}$
- ▶ $\Gamma : \mathbb{G}_2 \rightarrow 2^{\mathbb{H}_2}$ telle que $\Gamma(g_2) = \{h_2 \in \mathbb{H}_2 \mid \gamma(h_2) = g_2\}$.

Espace cellulaire affiné \mathbb{H} de \mathbb{F} et \mathbb{G}

Un nouvel espace cellulaire \mathbb{H} est construit à partir de \mathbb{F} et \mathbb{G} .



Pour chaque 2-face h_2 de \mathbb{H} , il existe exactement une 2-face f_2 de \mathbb{F} et une 2-face g_2 de \mathbb{G} telle que $h_2 = f_2 \cap g_2$. Nous définissons

- ▶ $\phi : \mathbb{H}_2 \rightarrow \mathbb{F}_2$ telle que $\phi(h_2) = f_2$
- ▶ $\gamma : \mathbb{H}_2 \rightarrow \mathbb{G}_2$ telle que $\gamma(h_2) = g_2$.

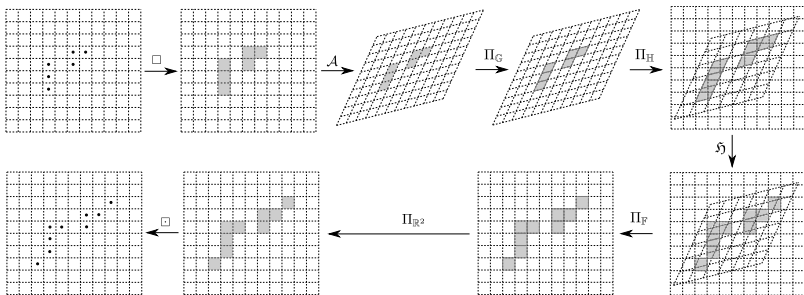
et inversement,

- ▶ $\Phi : \mathbb{F}_2 \rightarrow 2^{\mathbb{H}_2}$ telle que $\Phi(f_2) = \{h_2 \in \mathbb{H}_2 \mid \phi(h_2) = f_2\}$
- ▶ $\Gamma : \mathbb{G}_2 \rightarrow 2^{\mathbb{H}_2}$ telle que $\Gamma(g_2) = \{h_2 \in \mathbb{H}_2 \mid \gamma(h_2) = g_2\}$.

Transformation affine sur \mathbb{Z}^2 sous contrainte topologique

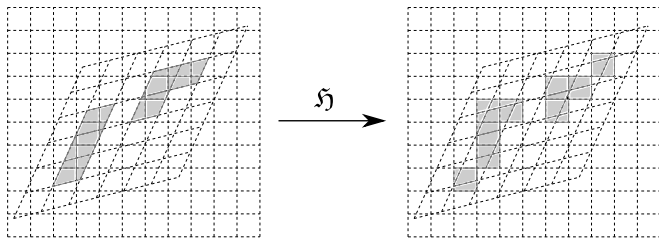
Méthode proposée

1. Générer l'espace cellulaire affiné \mathbb{H} à partir de \mathbb{F} et \mathbb{G}
2. Calculer le complexe H dans \mathbb{H} à partir de $G = \Pi_{\mathbb{G}}(\mathcal{A}(\square(X)))$
3. **Optimiser par une transformation homotopique \mathfrak{h} de H à \hat{H}**
4. Plonger le complexe résultant \hat{H} dans \mathbb{F} , i.e. $\hat{F} = \Pi_{\mathbb{F}}(\hat{H})$



Transformation homotopique \mathfrak{H} sur \mathbb{H}

Transformation homotopique \mathfrak{H} sur \mathbb{H}



Un processus d'optimisation discret sous des contraintes

- ▶ **Topologique** : \mathfrak{H} est une transformation homotopique de H à \hat{H}
 \hookrightarrow une suite d'ajouts/suppressions des 2-faces simples
- ▶ **Discrétisable** : \hat{H} est plongeable dans \mathbb{F} , i.e. $\hat{F} = \Pi_{\mathbb{F}}(\hat{H})$ existent
- ▶ **Géométrique** : l'objet résultant $X_{\mathcal{A}} = \square(\Pi_{\mathbb{R}^2}(\hat{H})) \subset \mathbb{Z}^2$ de \hat{H} est aussi proche que possible de la solution du problème d'optimisation

$$X_{\mathcal{A}} = \arg_{Y \in \mathbb{Z}^2} \min \mathcal{D}_{\mathcal{A}, X}(Y)$$

Optimisation sous contraintes

Fonction de coût :

$$C = \underbrace{\mathcal{E}_{\text{topo}}}_{\mathcal{E}_{\text{topo}}(H, \tilde{H})=0} + \underbrace{\mathcal{E}_{\text{digi}}}_{\mathcal{E}_{\text{digi}}(\tilde{H}) \geq 0} + \underbrace{\mathcal{E}_{\text{geom}}}_{\mathcal{E}_{\text{geom}}(H, \tilde{H}) \geq 0}$$

Avec

- ▶ **Énergie topologique** : $\mathcal{E}_{\text{topo}} : C_{\mathbb{H}} \times C_{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $\hookrightarrow \mathcal{E}_{\text{topo}}(H, \tilde{H}) = 0$, i.e. H et \tilde{H} ont la même topologie
- ▶ **Énergie de discrétisation** : $\mathcal{E}_{\text{digi}} : C_{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $\hookrightarrow \mathcal{E}_{\text{digi}}(\tilde{H}) = 0$ ssi il existe \tilde{F} dans $C_{\mathbb{F}}$ tel que $\tilde{F} \equiv \Pi_{\mathbb{F}}(\tilde{H})$
- ▶ **Énergie géométrique** : $\mathcal{E}_{\text{geom}} : C_{\mathbb{H}} \times C_{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $\hookrightarrow \mathcal{E}_{\text{geom}}(H, \tilde{H})$ mesure la dissimilarité géométrique entre H et \tilde{H}
 $\hookrightarrow \mathcal{E}_{\text{geom}}(H, \tilde{H}) = 0$, i.e. H et \tilde{H} sont les mêmes

Optimisation sous contraintes

Fonction de coût :

$$C = \underbrace{\mathcal{E}_{\text{topo}}}_{\mathcal{E}_{\text{topo}}(H, \tilde{H})=0} + \underbrace{\mathcal{E}_{\text{digi}}}_{\mathcal{E}_{\text{digi}}(\tilde{H}) \geq 0} + \underbrace{\mathcal{E}_{\text{geom}}}_{\mathcal{E}_{\text{geom}}(H, \tilde{H}) \geq 0}$$

Conditions et objectifs du processus d'optimisation :

- ▶ $\mathcal{E}_{\text{topo}}(H, \tilde{H}) = 0$ tout au long du processus d'optimisation
- ▶ $\mathcal{E}_{\text{digi}}(\tilde{H}) = 0$ à la fin du processus pour avoir \tilde{H} plongeable dans \tilde{F}
- ▶ $\mathcal{E}_{\text{geom}}(H, \tilde{H})$ est plus petit possible à la fin du processus

Optimisation sous contraintes

Fonction de coût :

$$C = \underbrace{\mathcal{E}_{\text{topo}}}_{\mathcal{E}_{\text{topo}}(H, \tilde{H})=0} + \underbrace{\mathcal{E}_{\text{digi}}}_{\mathcal{E}_{\text{digi}}(\tilde{H}) \geq 0} + \underbrace{\mathcal{E}_{\text{geom}}}_{\mathcal{E}_{\text{geom}}(H, \tilde{H}) \geq 0}$$

Soit \tilde{H} la solution actuelle du processus d'optimisation. À chaque étape :

- ▶ nous cherchons à ajouter/supprimer une 2-face simple $h_2 \in \mathbb{H}$ (i.e. $\mathcal{E}_{\text{topo}}(H, \tilde{H}) = 0$) qui minimise $\mathcal{E}_{\text{digi}}(\tilde{H})$ et $\mathcal{E}_{\text{geom}}(H, \tilde{H})$
- ▶ nous nous intéressons aux 2-faces h_2 appartenant *au bord* de \tilde{H} . Cet ensemble est défini par

$$\mathbb{B}_{0,1}(\tilde{H}) = \{h_{0,1} \in \mathbb{H}_0(\tilde{H}) \cup \mathbb{H}_1(\tilde{H}) \mid S(h_{0,1}) \subsetneq \tilde{H}\}$$

$$\mathbb{B}_2(\tilde{H}) = \{h_2 \in \mathbb{H}_2 \mid C(h_2) \cap \mathbb{B}_{0,1}(\tilde{H}) \neq \emptyset\}$$

(Ce sont les 2-faces h_2 dont les 0- et 1-faces *appartiennent* au fond)

Mesures de dissimilarité

On cherche à construire $X_{\mathcal{A}} \subset \mathbb{Z}^2$ résultant de $X \subset \mathbb{Z}^2$ par la transformation affine \mathcal{A} aussi proche que possible de la solution du problème d'optimisation :

$$X_{\mathcal{A}} = \arg_{Y \in \mathbb{Z}^2} \min \mathcal{D}_{\mathcal{A}, X}(Y)$$

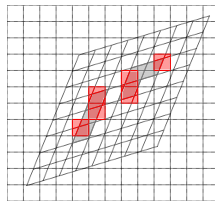
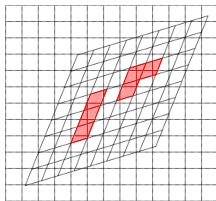
Exemples de $\mathcal{E}_{\text{geom}}$

- ▶ fondée sur le vote majoritaire :

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}, X}^{\square}(Y) = |\mathcal{A}(\square(X)) \setminus \square(Y)| + |\square(Y) \setminus \mathcal{A}(\square(X))|$$

- ▶ fondée sur la discrétisation de Gauss :

$$\mathcal{D}_{\mathcal{A}, X}^{\square}(Y) = |\square(\mathcal{A}(\square(X))) \setminus Y| + |Y \setminus \square(\mathcal{A}(\square(X)))|$$



Algorithme pour transformation affine homotopique sur \mathbb{Z}^2

Algorithme 1 : Calcul de \widehat{H} .

Entrées : $H \in C_{\mathbb{H}}$

Entrées : $\mathcal{E}_{\text{geom}} : C_{\mathbb{H}} \times C_{\mathbb{H}} \rightarrow \mathbb{R}_+$

Sortie : $\widehat{H} \in C_{\mathbb{H}}^H \cap C_{\mathbb{H}}^F$

1 $\widetilde{H} \leftarrow H$

2 Construire $\mathbb{B}_2(\widetilde{H})$

3 **Tant que** $\mathcal{E}_{\text{digi}}(\widetilde{H}) > 0$ **faire**

4 Choisir $h_2 \in \mathbb{B}_2(\widetilde{H})$ tq $\underbrace{\widetilde{H} \odot C(h_2)}_{h_2 \text{ est une 2-face simple}} \frown_h \widetilde{H}$ qui minimise $\mathcal{E}_{\text{digi}}$ et $\mathcal{E}_{\text{geom}}(H, \cdot)$

5 $\widetilde{H} \leftarrow \widetilde{H} \odot C(h_2) = \begin{cases} \widetilde{H} \odot C(h_2) & \text{si } h_2 \in \widetilde{H} \\ \widetilde{H} \cup C(h_2) & \text{si } h_2 \notin \widetilde{H} \end{cases}$

6 Mettre à jour $\mathbb{B}_2(\widetilde{H})$

7 **Fin**

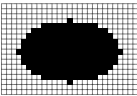
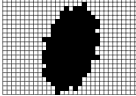
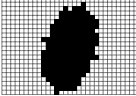
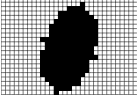
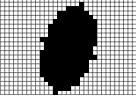
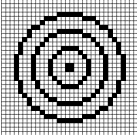
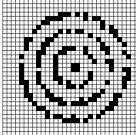
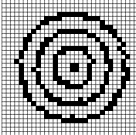
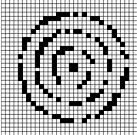
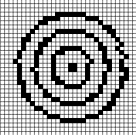
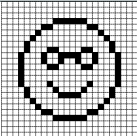
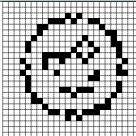
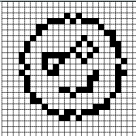
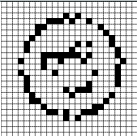
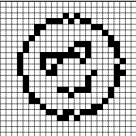
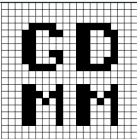
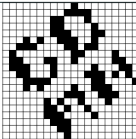
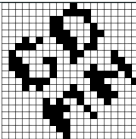
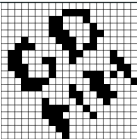
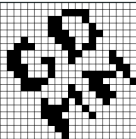
8 $\widehat{H} \leftarrow \widetilde{H}$

Détails de l'algorithme : **Homotopic affine transformations in the 2D Cartesian grid.**

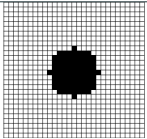
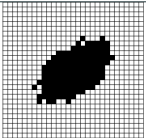
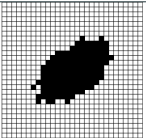
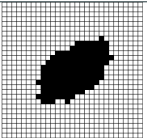
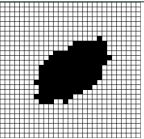
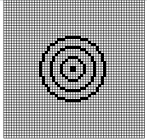
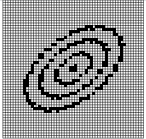
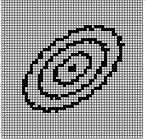
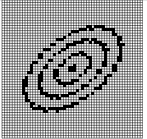
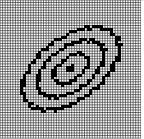
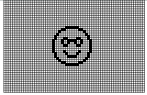




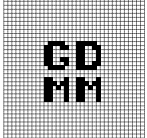

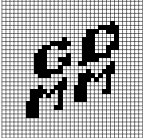


N. Passat, P. Ngo, Y. Kenmochi, H. Talbot. JMIV 2022, 64 (7), pp.786-806.

Résultats expérimentaux

Résultats de rotation sur \mathbb{Z}^2 avec/sans contrainte topologique

Image d'entrée	Discretisation de Gauss		Vote majoritaire	
	sans cont. topo	avec cont. topo	sans cont. topo	avec cont. topo
				
				
				
				

Résultats de transformation affine sur \mathbb{Z}^2

Image d'entrée	Discrétisation de Gauss		Vote majoritaire	
	sans cont. topo.	avec cont. topo.	sans cont. topo.	avec cont. topo.
				
				
				
				

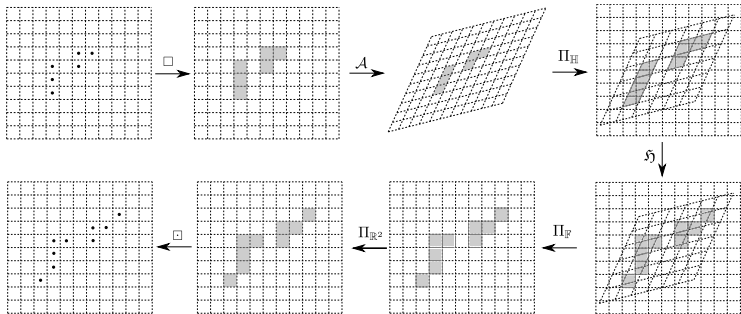
Problèmes de non-convergence

Conclusion

Conclusion et perspectives

Conclusion

- ▶ Méthode de transformation affine sur \mathbb{Z}^2 préservant la topologie
- ▶ Basée sur une stratégie d'optimisation sous contraintes topologiques et géométriques dans l'espace cellulaire
- ▶ Problèmes de non-convergence dans les cas à la limite de la résolution



Conclusion et perspectives

Perspectives

- ▶ Pour gérer l'inexistence de solutions, nous pouvons considérer
 - ↪ les stratégies multigrilles
 - ↪ les stratégies statistiques : processus stochastique, marche aléatoire, ...
- ▶ D'autres mesures de dissimilarité peuvent être considérées
- ▶ L'adaptation de l'approche proposée à d'autres modèles topologiques et aux images non binaires sera étudiée
- ▶ Les transformations en dimensions supérieures et d'autres familles de transformations seront considérées

Merci de votre attention !

Questions ?

Source code:

`https://github.com/ngophuc/HomotopicAffineTransform`



Algorithme de transformation affine homotopique sur \mathbb{Z}^2

Algorithme 2 : Construction de \hat{H} à partir de H avec \mathfrak{s}

Entrées : $H \subset \mathbb{H}$, $\mathcal{D}_{\mathcal{A},X} : 2^{\mathbb{Z}^2} \rightarrow \mathbb{R}_+$

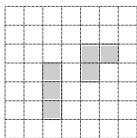
Sortie : $\hat{H} \subset \mathbb{H}$

```
1  $\hat{H} \leftarrow H$ 
2  $\mathbb{B}_2 \leftarrow \{f_2 \in \mathbb{F}_2 \mid \Phi(f_2) \not\subseteq \mathbb{H}_2(H) \wedge \Phi(f_2) \cap \mathbb{H}_2(H) \neq \emptyset\}$ 
3 Tant que  $\mathbb{B}_2 \neq \emptyset$  faire
4   choisir  $f_2 \in \mathbb{B}_2$  par rapport à  $D_{\mathcal{A},X}$ 
5    $\mathbb{B}_2 \leftarrow \mathbb{B}_2 \setminus \{f_2\}$ 
6    $(\mathbb{I}_2, \mathbb{O}_2) \leftarrow (\Phi(f_2) \cap \mathbb{H}_2(\hat{H}), \Phi(f_2) \setminus \mathbb{H}_2(\hat{H}))$ 
7   Tant que  $\exists h_2 \in \mathbb{I}_2$  t.q.  $C(h_2)$  est simple pour  $\hat{H}$  faire
8      $\hat{H} \leftarrow \hat{H} \otimes C(h_2)$ 
9      $(\mathbb{I}_2, \mathbb{O}_2) \leftarrow (\mathbb{I}_2 \setminus \{h_2\}, \mathbb{O}_2 \cup \{h_2\})$ 
10  Fin
11  si  $\mathbb{I}_2 \neq \emptyset$  alors
12    Tant que  $\exists h_2 \in \mathbb{O}_2$  t. q.  $C(h_2)$  est simple pour  $\hat{H}$  faire
13       $\hat{H} \leftarrow \hat{H} \cup C(h_2)$ 
14       $(\mathbb{I}_2, \mathbb{O}_2) \leftarrow (\mathbb{I}_2 \cup \{h_2\}, \mathbb{O}_2 \setminus \{h_2\})$ 
15    Fin
16    si  $\mathbb{O}_2 \neq \emptyset$  alors Pas de solution
17  fin
18 Fin
```

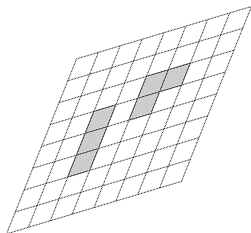
Implémentation

Une première implémentation des transformations affines homotopiques procède en trois étapes :

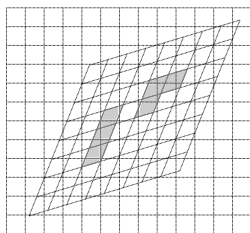
- ▶ calculer le complexe cellulaire H de \mathbb{H} à partir de $G = \Pi_G(\mathcal{A}(\square(X)))$
- ▶ calculer les cellules de bord de H et vérifier leur simplicité
- ▶ mettre à jour \hat{H} itérativement tandis que la fonction de coût C est réduite et que la solution est homotope à H .



F



G

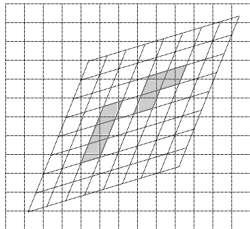


H

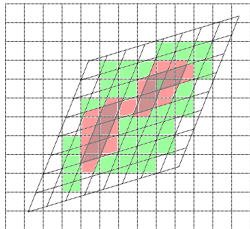
Implémentation

Une première implémentation des transformations affines homotopiques procède en trois étapes :

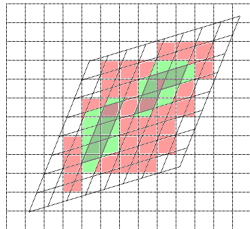
- ▶ calculer le complexe cellulaire H de \mathbb{H} à partir de $G = \Pi_G(\mathcal{A}(\square(X)))$
- ▶ calculer les cellules de bord de H et vérifier leur simplicité
- ▶ mettre à jour \hat{H} itérativement tandis que la fonction de coût C est réduite et que la solution est homotope à H .



H



Cellules de bord

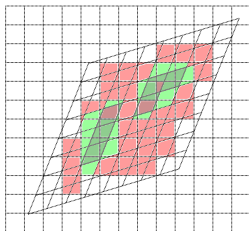


Cellules simples

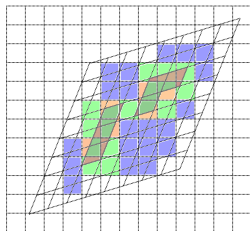
Implémentation

Une première implémentation des transformations affines homotopiques procède en trois étapes :

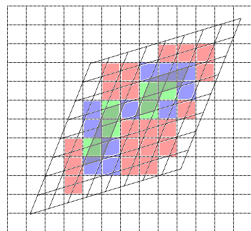
- ▶ calculer le complexe cellulaire H de \mathbb{H} à partir de $G = \Pi_G(\mathcal{A}(\square(X)))$
- ▶ calculer les cellules de bord de H et vérifier leur simplicité
- ▶ mettre à jour \hat{H} itérativement tandis que la fonction de coût C est réduite et que la solution est homotope à H .



$\mathcal{E}_{\text{topo}}$



$\mathcal{E}_{\text{geom}}$

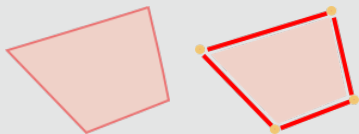


$\mathcal{E}_{\text{digi}}$

Définition de l'espace cellulaire

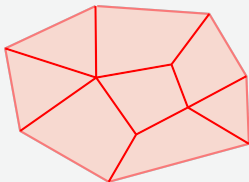
Définition

Soit P un polygone convexe fermé. La partition $\mathcal{F}(P)$ de P contient :



- ▶ 2-face (intérieure de P , $\overset{\circ}{P}$),
- ▶ 1-faces (arête de P), et
- ▶ 0-faces (sommet de P).

Définition

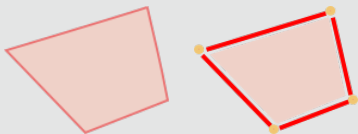


Soit $\Omega = \bigcup \mathcal{K}$ une union de polygones convexes fermés \mathcal{K} tels que pour n'importe quelle paire $P_1, P_2 \in \mathcal{K}$, $\overset{\circ}{P}_1 \cap \overset{\circ}{P}_2 = \emptyset$. La partition de Ω est l'ensemble $\mathbb{K}(\Omega) = \bigcup_{P \in \mathcal{K}} \mathcal{F}(P)$.

Définition de l'espace cellulaire

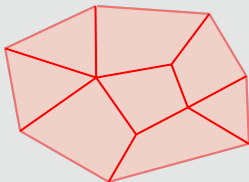
Définition

Soit P un polygone convexe fermé. La partition $\mathcal{F}(P)$ de P contient :



- ▶ 2-face (intérieure de P , \mathring{P}),
- ▶ 1-faces (arête de P), et
- ▶ 0-faces (sommet de P).

Définition



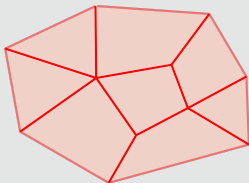
Soit $\Omega = \bigcup \mathcal{K}$ une union de polygones convexes fermés \mathcal{K} tels que pour n'importe quelle paire $P_1, P_2 \in \mathcal{K}$, $\mathring{P}_1 \cap \mathring{P}_2 = \emptyset$. La partition de Ω est l'ensemble $\mathbb{K}(\Omega) = \bigcup_{P \in \mathcal{K}} \mathcal{F}(P)$.

Définition de complexes cellulaires

Soit \mathbb{K} un espace cellulaire et $f \in \mathbb{K}$ une face.

Définition

La cellule $C(f)$ induite par f est l'ensemble des faces de \mathbb{K} telles que $\bigcup C(f)$ est le plus petit ensemble fermé qui comprend f .



▶ $f_0 = \{\bullet\} \rightarrow C(f_0)$

▶ $f_1 = \{-\} \rightarrow C(f_1)$

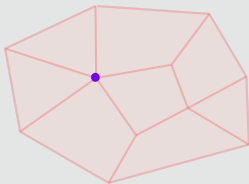
▶ $f_2 = \{\square\} \rightarrow C(f_2)$

Définition de complexes cellulaires

Soit \mathbb{K} un espace cellulaire et $f \in \mathbb{K}$ une face.

Définition

La cellule $C(f)$ induite par f est l'ensemble des faces de \mathbb{K} telles que $\bigcup C(f)$ est le plus petit ensemble fermé qui comprend f .



► $f_0 = \{\bullet\} \rightarrow C(f_0)$

► $f_1 = \{-\} \rightarrow C(f_1)$

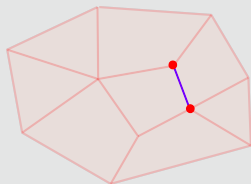
► $f_2 = \{\square\} \rightarrow C(f_2)$

Définition de complexes cellulaires

Soit \mathbb{K} un espace cellulaire et $f \in \mathbb{K}$ une face.

Définition

La cellule $C(f)$ induite par f est l'ensemble des faces de \mathbb{K} telles que $\bigcup C(f)$ est le plus petit ensemble fermé qui comprend f .



► $f_0 = \{\bullet\} \rightarrow C(f_0)$

► $f_1 = \{-\} \rightarrow C(f_1)$

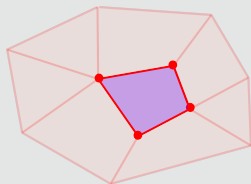
► $f_2 = \{\square\} \rightarrow C(f_2)$

Définition de complexes cellulaires

Soit \mathbb{K} un espace cellulaire et $f \in \mathbb{K}$ une face.

Définition

La cellule $C(f)$ induite par f est l'ensemble des faces de \mathbb{K} telles que $\bigcup C(f)$ est le plus petit ensemble fermé qui comprend f .



► $f_0 = \{\bullet\} \rightarrow C(f_0)$

► $f_1 = \{-\} \rightarrow C(f_1)$

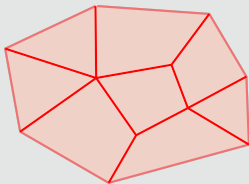
► $f_2 = \{\square\} \rightarrow C(f_2)$

Définition de complexes cellulaires

Soit \mathbb{K} un espace cellulaire et $f \in \mathbb{K}$ une face.

Définition

L'étoile $S(f)$ de f est l'ensemble des faces f' telles que $f \in C(f')$.



▶ $f_0 = \{\bullet\} \rightarrow S(f_0)$

▶ $f_1 = \{-\} \rightarrow S(f_1)$

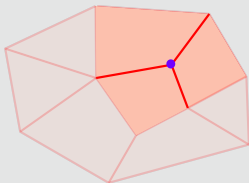
▶ $f_2 = \{\square\} \rightarrow S(f_2)$

Définition de complexes cellulaires

Soit \mathbb{K} un espace cellulaire et $f \in \mathbb{K}$ une face.

Définition

L'étoile $S(f)$ de f est l'ensemble des faces f' telles que $f \in C(f')$.



► $f_0 = \{\bullet\} \rightarrow S(f_0)$

► $f_1 = \{-\} \rightarrow S(f_1)$

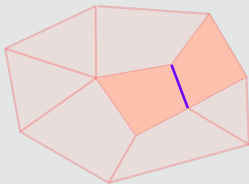
► $f_2 = \{\square\} \rightarrow S(f_2)$

Définition de complexes cellulaires

Soit \mathbb{K} un espace cellulaire et $f \in \mathbb{K}$ une face.

Définition

L'étoile $S(f)$ de f est l'ensemble des faces f' telles que $f \in C(f')$.



► $f_0 = \{\bullet\} \rightarrow S(f_0)$

► $f_1 = \{-\} \rightarrow S(f_1)$

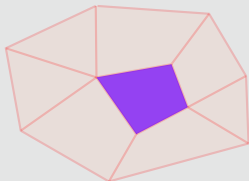
► $f_2 = \{\square\} \rightarrow S(f_2)$

Définition de complexes cellulaires

Soit \mathbb{K} un espace cellulaire et $f \in \mathbb{K}$ une face.

Définition

L'étoile $S(f)$ de f est l'ensemble des faces f' telles que $f \in C(f')$.



► $f_0 = \{\bullet\} \rightarrow S(f_0)$

► $f_1 = \{-\} \rightarrow S(f_1)$

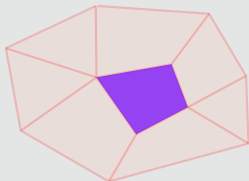
► $f_2 = \{\square\} \rightarrow S(f_2)$

Définition de complexes cellulaires

Soit \mathbb{K} un espace cellulaire et $f \in \mathbb{K}$ une face.

Définition

L'**étoile** $S(f)$ de f est l'ensemble des faces f' telles que $f \in C(f')$.



► $f_0 = \{\bullet\} \rightarrow S(f_0)$

► $f_1 = \{-\} \rightarrow S(f_1)$

► $f_2 = \{\square\} \rightarrow S(f_2)$

Une **cellule cellulaire** K de \mathbb{K} est une union de cellules de \mathbb{K} .

Le **plongement** de K dans \mathbb{R}^2 est défini par $\Pi_{\mathbb{R}^2}(K) = \bigcup K$.

Si $X = \Pi_{\mathbb{R}^2}(K)$ alors K est le **plongement** de X dans \mathbb{K} , $K = \Pi_{\mathbb{K}}(X)$.

Collapse sur des complexes

Soit K un complexe défini dans un espace cellulaire \mathbb{K} .

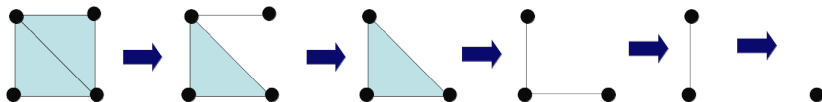
Définition

Supposons que τ et σ soient deux faces de K telles que

- ▶ $\tau \subset \sigma$ avec $\dim(\tau) = \dim(\sigma) - 1$ et
- ▶ σ est une face maximale de K et aucune autre face maximale de K ne contient τ ,

alors τ est appelé un **face libre** et la suppression des faces, $K \setminus \{\tau, \sigma\}$, est appelée un **collapse élémentaire**.

S'il existe une séquence de collapses élémentaires de K vers un complexe K' , on dit que K **collapse** vers K' .



Cellules simples

Soit K un complexe cellulaire défini dans un espace cellulaire \mathbb{K} sur \mathbb{R}^2 .
Soit f_2 une 2-face de K . Soit $D_d(f_2)$, $d = 0, 1$, le sous-ensemble de $C(f_2)$ composé des d -faces f telles que $S(f) \cap K = S(f) \cap C(f_2)$.

Définition

Si $|D_1(f_2)| = |D_0(f_2)| + 1$ alors $C(f_2)$ est appelée une **2-face simple** pour K .

- ▶ **Détachement** d'une 2-face simple $C(f_2)$ à partir de K : opération de réduction de K à $K \otimes C(f_2) = K \setminus (\{f_2\} \cup D_1(f_2) \cup D_0(f_2))$
- ▶ **Attachement** d'une 2-face simple $C(f_2)$ pour $K \cup C(f_2)$ où $f \in \mathbb{K} \setminus K$: l'opération de réduction à partir de K dans $K \cup C(f_2)$

