HAL
open science

Peut-on penser sans concept en mathématique? (ou: Quand la mathématique peine avec ses concepts.)

Yves Andre

To cite this version:

Yves Andre. Peut-on penser sans concept en mathématique? (ou: Quand la mathématique peine avec ses concepts.). Revue de synthèse, 2023, 10.1163/19552343-14234021 . hal-03866676

HAL Id: hal-03866676

https://hal.science/hal-03866676v1

Submitted on 22 Nov 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Peut-on penser sans concept en mathématique?

(ou: Quand la mathématique peine avec ses concepts.)

Yves André

Séminaire "philosophie de la pratique mathématique"
du Collège de France, 22/11/2021

Prologue.

Le titre est un peu provocateur, mais après un moment de perplexité, la question qu'il pose paraîtra sans doute plus broussailleuse que provocatrice. Débroussaillons, pour commencer.

La formulation du titre suppose que l'on *pense* en mathématique (avec ou sans concept): je le suppose en effet, et tiens même que la mathématique est une *pensée* avant d'être une technique ou un jeu.

Point de départ que je n'argumenterai pas ici: cela me déporterait loin de mon propos, et je l'ai fait ailleurs. Mais il faut toujours commencer par dire d'où l'on parle (c'est dire plus que: d'où l'on part): cet excellent précepte déictique est la leçon pratique que j'ai retenue de la tradition philosophique analytique. La voilà ici brièvement remplie.

Si donc la mathématique est une pensée, peut-on penser en mathématique sans concept?

Ce n'est bien sûr pas une réponse par oui ou par non que la question appelle. On devine que ce sont à l'inverse des réponses diversifiées et affinées qui porteront la question, et lui donneront peut-être une longue portée.

Ne nous attardons donc pas trop aux réponses immédiates et aux contre-questions superficielles. Comme celle-ci par exemple: pense-t-on avec des concepts (ou même pense-t-on tout court) quand on effectue des calculs?

Evidemment pas toujours: une bonne partie des calculs se fait dans le cadre d'un formalisme et d'une notation qui ont explicitement pour but une *économie de pensée*. Là où cette économie atteint son but, il s'agit de calculs de routine, indispensables pour le praticien tant dans sa quête de résultats que pour l'affinement de ses techniques. Mais il est d'autres calculs qui dépassent la routine, impliquant ou suscitant de nouveaux concepts. Il ne s'agit donc pas d'opposer les calculs aux concepts en reprenant le slogan romantique "remplacer les calculs par des idées".

Par ailleurs, il faut reconnaître que le mot même de concept n'est pas d'un usage fréquent dans la pratique mathématique. Cette réserve, cette précaution, met les mathématiciens à l'abri du dévoiement *ad nauseam* du mot concept que nous subissons dans la vie quotidienne.

Dans "La vie parisienne" d'Offenbach, les personnages de la gantière et du bottier n'étaient que d'aimables solliciteurs; aujourd'hui, devenus riches, nos maroquiniers sont devenus des "créateurs", et posent volontiers en "créateurs de concepts"! Passons...

Si les mathématiciens usent parcimonieusement, à bon escient, du mot *concept* et lui préfèrent celui de *notion*, le terme concept n'en est pas moins commode pour désigner des entités plus générales que les notions mathématiques usuelles, celles circonscrites par une définition.

Par exemple, les concepts d'espace, d'action, de dualité, de singularité, etc. sont des universaux en mathématique, mais pas des notions circonscrites par une définition: ces concepts ne s'incarnent en effet en notions que selon leurs divers usages dans différents domaines mathématiques. Même aux temps où la tentation dogmatique était forte, la mathématique a toujours sagement résisté à transformer ces universaux en notions: elle a renoncé à en délimiter a priori les frontières pour en préserver la fécondité, la souplesse, l'universalité, et les métamorphoses.

C'est en ce sens général que je parlerai de concept mathématique.

D'un autre côté, il ne s'agira pas d'ignorer toute une tradition de philosophie mathématique qui place *le concept* au centre de sa réflexion.

C'est pourquoi je commencerai par dire quelques mots de la *philosophie du concept de Jean Cavaillès*, philosophie qui a été méditée et commentée en profondeur par deux professeurs du Collège: J. Vuillemin et G.-G. Granger.

Dans son grand texte posthume "Sur la logique et la théorie de la science", Cavaillès défend une *philosophie du concept contre une philosophie de la conscience*, en vue d'élaborer une doctrine de la science. Il se déclare spinoziste, donc attaché à l'enchaînement objectif des causes et des raisons, et contre le cogito de Descartes; mais aussi contre la phénoménologie de Husserl et "sa superposition de descriptions d'actions de conscience d'un sujet transcendental"; enfin contre les visions historicistes: "que tout ne soit pas d'un seul coup", dit Cavaillès, "n'a rien à voir avec l'histoire mais est la caractéristique de l'intelligible".

Les deux piliers de son analyse épistémologique sont le *paradigme* et la *thématisation* (ce sont ses propres termes): le premier évoque l'élévation conceptuelle par abstraction et généralisation des objets, la

seconde, plus subtile, évoque une démarche réflexive face aux processus et trajectoires conceptuels.

Ceci dit, mon propos se démarquera nettement de cette tradition philosophique, même si celle-ci l'éclaire et que mon propos invite à la revisiter. Cela pour trois raisons:

- premièrement parce que même si Cavaillès ambitionnait de saisir la pensée mathématique en mouvement, il se séparait vite de sa pratique (ses glossateurs davantage encore), en posant que "la nécessité génératrice" en mathématique "n'est pas celle d'une *activité*, mais d'une *dialectique*". Son disciple A. Lautman, avec ses "idéalités dialectiques", se souciait davantage, lui, de rendre compte de la *pratique mathématique* de son époque, et l'embrassait largement; de fait, un mathématicien peut aujourd'hui entrer de plain-pied dans la lecture de Lautman.

- Deuxièmement parce que je me propose justement d'examiner des situations mathématiques inédites où le statut du concept ne cadre guère, comme on verra, avec la dialectique paradigme/thématisation de Cavaillès.

- Troisièmement et surtout parce que le développement foisonnant des mathématiques ne permet plus de croire qu'il repose sur le seul mouvement d'élévation conceptuelle et sa thématisation réflexive. Au contraire, *la quête de l'intelligible mathématique s'appuie sur une dynamique de va-et-vient entre avancées conceptuelles et retombées applicatives. Retombées qui ne sont nullement des chutes d'Icare du ciel des Idées, mais ces mouvements essentiels par lequels les idées essaiment, se concrétisent, et fécondent d'autres territoires mathématiques.*

Une philosophie de la pratique mathématique ne peut faire l'économie de ce mouvement de va-et-vient, guère perceptible chez Cavaillès, moins encore chez ses commentateurs.

Après ce long débroussaillage, venons-en à notre propos.

Je vais présenter trois scènes où la mathématique se trouve diversement aux prises avec ses concepts. Chacune est historiquement significative. Je les illustrerai d'épisodes narratifs pour me faire pardonner ce prologue, sans doute bien trop court pour être goûté des philosophes, bien trop long pour l'être des mathématiciens. Voici ces trois scènes:

1) *Patience du concept et impatience de comprendre*: les ruses de la raison dans la maîtrise de l'infini.

2) *Quand deux concepts clairs se combinent en un concept obscur*: qu'est-ce que coagir?

3) *Luxuriance ou frugalité conceptuelle*: gloire et déboire de la transcendance.

* * *

1) *Patience du concept et impatience de comprendre: les ruses de la raison dans la maîtrise de l'infini.*

Patience du concept et ruse de la raison sont des expressions qui se rapportent bien sûr à Hegel (qui fera lui-même bientôt une apparition cameo dans cet exposé); "impatience de comprendre" est une expression de H. Broch. La tension entre les deux a déjà été thématisée, mais c'est dans le cadre d'une aventure mathématique que je voudrais l'examiner à nouveaux frais. On verra que la patience du concept n'est pas forcément toujours du côté du philosophe, ni l'impatience de comprendre toujours du côté du mathématicien.

Il s'agira de la conquête mathématique de l'infini, qui dura plusieurs siècles. Cette histoire est bien documentée, je la parcourrai à bride abattue en ne marquant le pas qu'en ses parages moins connus.

On sait que l'antiquité grecque se méfiait de l'infini (l'apeiron) comme gouffre de la raison.

On sait aussi que la géométrie euclidienne n'était pas science de l'espace (c'est là une conception moderne), mais science des configurations finies, pouvant toutefois être étendues ad libitum selon la nécessité des constructions.

On sait encore qu'Aristote a introduit la distinction fondamentale entre potentiel (en capacité) et actuel (en effet) au livre Theta de sa Métaphysique, et l'a appliquée à l'infini au livre III de sa Physique. Et que cette distinction a marqué, peut-être bloqué en partie mais sans aucun doute orienté, pendant plus de deux millénaires, la réflexion sur l'infini.

La scolastique médiévale s'est emparée de cette distinction en la radicalisant, identifiant *infini (en acte) et absolu*: voilà *l'infini métaphysique*. Il me faut d'abord le camper brièvement.

Le principe scolastique *infinitum actu non datur* n'allait pas sans discussion. Les "maîtres des arts" parisiens sous l'égide de Siger de Brabant (influencés par Averroes et la théorie néo-platonicienne de l'émanation), eurent l'outrecuidance de poser certaines questions du genre: si l'infini actuel divin émane dans le monde, le monde est-il éternel dans le passé comme dans le futur?

Thomas d'Aquin fut invité à Paris pour les réfuter et les confondre, ce qu'il fit avec beaucoup de douceur et d'ambiguité. Qui aime lire les compte-rendus de rencontres philosophiques au plus haut niveau trouvera le compte-rendu de celle-ci au chant X du Paradis dans la Divine Comédie de Dante.

Hélas, les foudres de la Sorbonne ne se firent pas attendre et frappèrent par deux fois toute la communauté intellectuelle (1270, 1277). L'évèque de Paris, Etienne Tempier, condamna une liste de 232 thèses: pour la plupart, des thèses averroïstes des amis de Siger, mais aussi une bonne quinzaine de thèses de Thomas d'Aquin, contre lequel un procès en hérésie fut ourdi (il s'en est tiré en mourant en chemin pour défendre son cas auprès du Pape, semble-t-il; cas unique d'un saint, qui plus est docteur de l'Eglise, mort en odeur d'hérésie et non de sainteté).

Quel était donc le motif central de ces anathèmes? Eh bien, le dogme que l'infini actuel n'a pas d'existence terrestre, excepté en un tout petit nombre d'exceptions explicites: l'incarnation du Christ et l'annonciation à la Vierge, moments où dans la théologie chrétienne l'infini divin rencontre le fini humain. Hors de là, hérésie et bûcher. Ces condamnations ont frappé bien longtemps après. Mais elles ont aussi inspiré aux peintres, notamment les peintres siennois du XIVe siècle, comment transmettre en image aux fidèles à la fois ladite "bonne nouvelle" et l'anathème qui l'accompagnait. C'est ainsi qu'on a vu naître à Sienne, des décennies avant la perspective florentine, une perspective où les lignes de fuite convergeaient toujours vers le Christ "colonne de l'Eglise" ou vers la Madone "pleine de grâce".

Bien plus tard, un certain Desargues a cru ses yeux, il a voulu croire que les droites parallèles se rencontraient bel et bien, à l'infini; on aura vite oublié son *brouillon projet* écrit dans la langue de bois des compagnons charpentiers.

Mais à la même époque, la question de l'infini redevenait brûlante pour une tout autre raison: le problème galiléen de la géométrisation du mouvement. Le problème était inévitable et forçait les savants de l'époque, bien malgré eux pour la plupart, à repenser l'infini dans le cadre d'une intelligibilité géométrique. Descartes a exprimé l'état d'esprit de l'époque: "il ne faut point tâcher de comprendre l'infini, mais seulement de penser que tout ce en quoi nous ne trouvons aucunes bornes est indéfini."

La démarche fut donc lente et prudente. Il s'est d'abord agi de *bien distinguer l'infini de l'absolu*, abandonnant l'absolu à la métaphysique et à la théologie, et tâchant d'apprivoiser l'infini du côté de la rationalité géométrique.

On s'aperçut aussi que la tâche, et ses risques, s'allégeaient lorsqu'on traitait de l'infiniment petit, l'absolu théologique n'ayant pas grand

chose à dire là-dessus: voilà sans doute la première ruse de la raison mathématique pour s'affranchir de l'infini métaphysique.

La seconde ruse pour conquérir l'infini (et d'abord l'infiniment petit) fut, au XVIIe siècle, d'éviter les apories en renonçant autant que possible à créer un *concept* de l'infini, au profit d'un *calcul* de l'infini:

le calcul infinitésimal.

Cela signait l'abandon provisoire du concept paradoxal des indivisibles au profit d'un calcul et d'une notation idoine.

Au XVIIIe siècle, la patience du concept vis-à-vis de l'infini ne s'est pas démentie, en dépit de l'immense développement que Euler, Lagrange et d'autres contemporains donnèrent à l'analyse, sans revenir aux vieilles apories.

Du côté de Euler: sa mise, définitive, de la notion de fonction au centre des mathématiques. Et ses incroyables bonds en avant, en avance sur leur temps, tels que l'anticipation des développements asymptotiques dans son article "De seriebus divergentibus" (1760).

Du côté de Lagrange: sa volonté d'éviter tout *concept* d'infini et de balayer ce qui pouvait y faire penser, comme le clame le titre de son livre fameux:

"Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissants, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies" (1797).

Le bilan philosophique de cette aventure intellectuelle, *à ce moment précis*, a été tiré par Hegel, contemporain et lecteur assidu de Lagrange, dans un passage célèbre de sa Science de la Logique. Il y oppose l'infini métaphysique, qu'il appelle le *mauvais infini*, à la vision d'un *bon infini* que les mathématiciens ont dégagée. Toutefois, Hegel n'accorde pas à la mathématique le privilège du concept de ce bon infini véritable, mais réserve à la philosophie la tâche de cette conception à partir de ce que les mathématiciens ont dégagé en se privant consciemment d'en formuler le concept.

Hegel donne donc ici une réponse provisoire à la question-titre de l'exposé: oui, on peut penser l'infini en mathématique sans concept de l'infini. On peut même s'en vanter comme Lagrange, qui concluait après son ouvrage qu'il "reste peu de moyens de faire de grands progrès avec l'analyse".

Mais c'était trop beau (ou trop triste): heureusement Bolzano, Cauchy et bien d'autres trouvèrent successivement des failles, les

réparèrent, et les réparèrent si bien qu'il ne restait plus sur ces questions millénaires, à la fin du XIXe siècle, qu'à forger un authentique concept du continu.

C'est, comme on sait, à ce moment-là que le loup de l'infini actuel s'engouffra, définitivement, dans la bergerie mathématique. Les multiplicités infinies en acte ne nous ont plus quittés, depuis Dedekind et Cantor.

Mais *la lente et rigoureuse mise en place d'un calcul, cette ruse de la raison victorieuse s'appuyant sur une invraisemblable patience du concept face à l'impatience de comprendre*, avaient par avance domestiqué le loup. Il ne fit donc pas de ravage, bien au contraire.

Et nous parlons depuis lors en liberté (sans toujours la goûter à son juste prix) de multiplicités infinies en acte.

* * *

2) *Quand deux concepts clairs se combinent en un concept obscur: qu'est-ce que coagir?*

Changeons de scène, et commençons par deux concepts clairs et universels que j'ai déjà mentionnés: ceux d'*action* et de *dualité*.

Ces concepts étaient déjà discutés par Aristote et Platon. Leur apparition en mathématique ne date pourtant, curieusement, que du XIXe siècle. Dualité dans les travaux de Poncelet en géométrie projective vers 1820 (lointain écho de Desargues); action à partir des travaux de Galois.

Devenus des universaux en mathématique, ils sont restés très proches de leur signification heuristique originelle, d'où leur fortune. Je m'y arrêterai donc à peine.

Concernant l'action, il ne s'agit pas de celle d'un géomètre traçant une figure, mais de celle d'un objet mathématique agissant sur un autre. Souvent, depuis Galois, l'agent est un groupe G qui agit sur un espace X, transformation notée $G \times X \to X : (g, x) \mapsto gx$; ou dans le contexte voisin des algèbres et des modules: $A \otimes V \to V : a \otimes v \mapsto av$.

Le XIXe puis le XXe siècles ont découvert les ressources inépuisables qu'offrait cette stratégie: *étudier G en le faisant agir sur diverses cibles bien choisies; par exemple en envoyant G en représentation (linéaire).*

Ce n'est là que le b-a-ba d'un théâtre galoisien régi par le principe de correspondance entre symétries et invariants. Théâtre où se jouent aussi bien le programme d'Erlangen de Klein pour classifier les géométries, que les théorèmes d'Emmy Noether sur l'équivalence entre

lois de conservation et invariance par symétrie des lois physiques. Bref, on a un concept clair mais très profond...

Quant à la dualité, elle quitta tôt le berceau de la géométrie projective pour essaimer dans toute la mathématique, sans jamais non plus perdre son sens heuristique originel, même si l'on a dû distinguer peu à peu dualité entre objets et dualité entre notions. Dans sa nudité catégorique, la dualité est le renversement des relations, tous objets préservés.

Quand on en vient à combiner les notions d'action et de dualité, on obtient la notion de coaction:

au lieu d'une algèbre A, on a une cogèbre C, et au lieu d'une action $A \otimes V \to V$ (l'action d'un élément a de A sur un élément v de V), on a une coaction: $V \to C \otimes V$.

Mais d'abord, pourquoi combiner ces deux notions? Eh bien, parce que la topologie algébrique et la théorie des groupes nous y invitent naturellement et fortement: l'homologie fournit des cogèbres (via la diagonale), de même que les fonctions sur un groupe (via la convolution).

Face à cette combinaison de concepts, on peut se demander sans artifice: qu'est-ce donc que co-agir? Certes, ni agir ni pâtir, puisqu'il n'y a plus ni agent ni patient identifiable; pas non plus réagir, qui est encore de l'ordre de l'agir, alors?

On est ici face à un concept bien défini et directement dérivé de deux concepts clairs, mais sans contenu intuitif, situation fort embarrassante qu'exprimait ainsi J.-P. Serre: "tout calcul relatif aux cogèbres est trivial et incompréhensible".

Nous nous trouvons là dans la *situation inverse de celle précédemment évoquée, où l'on n'aboutissait à un concept qu'après une longue mise au point d'un calcul et la consolidation de l'intuition: ici, on part d'un concept bien défini, mais les calculs se font à l'aveugle et l'on peine à mettre au point la notation idoine pour les effectuer.*

Certes, c'est la pratique qui forge une intuition. G.-C. Rota a habitué, je crois, les combinatoriciens aux cogèbres. Mais la pratique suffit-elle? On voit bien, dans l'exemple de l'homologie et en lisant Serre, que non...

Allant plus loin dans cette quête de sens, c'est l'informatique théorique qui a ouvert des aperçus nouveaux, en élargissant les notions d'algèbre et de cogèbre.

Un endofoncteur F d'une catégorie étant donné, une algèbre généralisée est un morphisme $FA \to A$, le cas classique est celui où F est le carré tensoriel. Cette notion d'algèbre et d'action généralisées,

fort pertinente en informatique théorique, rend compte de la notion de *processus*. Dualement, une cogèbre généralisée est un morphisme $C \to FC$. Cette notion de cogèbre et de coaction généralisées rend compte de la notion d'*état d'un système*, ou plutôt de ses fluctuations.

Cette généralisation d'allure formelle est bien plus profonde qu'il n'y paraît: elle permet d'interpréter en termes d'algèbres (généralisées) l'axiome de *fondation* de la théorie des ensembles, qui interdit tout cercle vicieux.

Soit. Mais qu'en est-il alors du point de vue dual des cogèbres? Eh bien, il permet d'interpréter l'axiome d'*antifondation* de M. Forti et F. Honsell, à la base d'une théorie hétérodoxe des ensembles qui permet tous les cercles vertueux non vicieux, ces cercles si utiles en informatique théorique.

Bien qu'en contradiction l'un avec l'autre, l'axiome de fondation et l'axiome d'antifondation sont en dualité, et la situation rappelle enfin celle bien familière des géométries euclidienne et non-euclidienne qui s'excluent en présence l'une de l'autre, mais peuvent se mirer l'une dans l'autre.

Que voit-on là, pour conclure: que la chimie des concepts mathématiques est décidément difficile: en combinant deux des plus clairs, on peut obtenir un troisième difficilement appréhendable, que seules des métamorphoses ultérieures permettent d'éclairer au terme d'imprévisibles vagabondages aux frontières de la mathématique. Remarquons qu'il ne s'agit là d'aucune élévation conceptuelle, mais d'une migration aussi imprévisible qu'étonnante.

* * *

3) *Luxuriance ou frugalité conceptuelle: gloire et déboire de la transcendance.*

L'arrière-plan de cette troisième et dernière scène est celui des grandes inégalités qui règnent entre les divers domaines mathématiques en ce qui concerne les concepts.

Certains en sont dotés à profusion. Prenons un cas extrême: celui de la géométrie algébrique. L'état présent du domaine a été façonné il y a une soixantaine d'années par Grothendieck, grand créateur de concepts mathématiques s'il en fut. On a pu reprocher à ses Eléments de Géométrie Algébrique leur air d'interminable lexique, sans aucun exemple ou presque.

Voilà donc un domaine mathématique où la question de mon titre admet clairement une réponse négative: il n'est plus possible de penser

sans concept en géométrie algébrique, et un pur géomètre algébriste trouvera la question saugrenue.

Mais je vais m'intéresser à la situation opposée: y a-t-il des domaines qui ne possèdent pas de concept propre?

Il semble bien que oui: telle est à mon avis la théorie des nombres transcendants, qui n'a d'autre concept propre que celui de transcendance qui lui donne son nom.

Voilà un avis culotté, dira-t-on, de la part de quelqu'un qui a pratiqué cette discipline, discipline qui l'a en retour beaucoup inspiré dans d'autres domaines! Cet avis a écorché les oreilles de quelques non-spécialistes, mais pas du tout celles des théoriciens des nombres transcendants auxquels je m'en suis ouvert, qui semblaient plutôt acquiescer. C'est sous cet angle que je vais examiner ce domaine et le questionner:

- y pense-t-on sans concept?
- pourquoi pas de concept propre; un domaine mathématique peut-il vivre sans concept propre?

La réponse à la première question est bien sûr négative: la théorie des nombres transcendants utilise bien des concepts venus d'ailleurs dans ses techniques propres. C'est la seconde question qui est intéressante.

Pour l'aborder, il faut revenir aux origines.

Le concept mathématique de transcendance a été introduit par Leibniz. Il faut se rappeler qu'on parlait à l'époque de *grandeurs*, la notion de *fonction* n'étant pas encore dégagée - il fallut attendre presque un siècle, aprs Euler et D'Alembert -, d'où mainte ambiguité découlant de la confusion, dirions-nous aujourd'hui, entre nombres et fonctions.

On peut nonobstant avancer que Leibniz a énoncé le premier résultat de transcendance. Lequel? Sous forme très anachronique, que les fonctions trigonométriques (pas encore identifiées comme telles) sont transcendantes, c'est-à-dire ne vérifient aucune équation polynomiale.

Gommons l'anachronisme en nous plongeant dans l'histoire du sujet quelques années plus tard, avec un lemme de transcendance beaucoup plus impressionnant dû à Newton. Le voici, non pas dans le latin d'origine, mais dans les termes de sa traductrice idéale, la marquise du Châtelet: il s'agit du lemme XXVIII des Principia:

"Les parties quelconques de toute figure ovale, déterminées par les coordonnées ou par d'autres droites tirées à volonté, ne peuvent jamais être trouvées par aucune équation d'un nombre fini de termes et de dimension."

Avec nos mots d'aujourd'hui, la dernière expression se traduit par: n'est solution d'aucune équation polynomiale, donc est transcendante selon Leibniz. La première expression se traduit par: la portion d'aire de l'ovale délimitée par une droite variable. Mises bout à bout, on obtient ceci: la portion d'aire de l'ovale découpée par une droite variable est une fonction transcendante des paramètres définissant la droite.

Ce lemme fit couler beaucoup d'encre trois siècles durant, pour deux raisons:

- sa place dans le dispositif des Principia: via la seconde loi de Kepler, il implique que la position d'une planète sur une orbite elliptique n'est pas, même localement, fonction algébrique du temps. Ce corollaire sert de prétexte à Newton pour introduire ses méthodes approchées, dont la fameuse méthode enseignée aujourd'hui encore dans toutes les universités du monde. Trois pages éclatantes des Principia qui ont orienté toute la mathématique future et qu'il faut absolument lire!

- et puis son statut: voilà un lemme si général et étonnant qu'il ne pouvait échapper à la critique serrée des deux premiers lecteurs des Principia: Huygens et Leibniz. Ceux-ci ont engagé une formidable correspondance autour de ce lemme. Huygens mit sur la table des contre-exemples: le triangle, ou deux arcs de paraboles raccordés. Leibniz objectait que Newton n'aurait pas admis ces figures-là comme des ovales. Au-delà, il cherchait à préciser, outre la notion d'ovale, l'autre point obscur de l'énoncé: le "jamais" du "ne peuvent jamais être trouvées...". S'ensuivit une réflexion de fond sur la transcendance des longueurs et des aires, dans laquelle Leibniz semble avoir deviné, entre autre, celle du disque unité, et être allé beaucoup plus loin. Tel est le début de la transcendance.

Mais, à propos, qui avait raison de Newton ou de ses contradicteurs Huygens et Leibniz, concernant ce fameux lemme XXVIII?

On en a débattu trois cents ans, et c'est V. Arnold qui a finalement tranché en faveur de Newton, récrivant soigneusement sa démonstration en termes modernes, et précisant qu'un ovale doit être entendu comme "courbe convexe lisse".

Tel fut donc le début de la transcendance. La distinction ultérieure entre transcendance de fonctions et transcendance de nombres a clarifié bien des malentendus, mais a peut-être brisé l'union profonde entre ces deux cas. La transcendance fonctionnelle est un sujet foisonnant et toujours de grande actualité. La transcendance numérique, elle, a toujours paru plus difficile, et souvent inaccessible.

Son plus haut fait, on le sait, est la démonstration par Lindemann de la transcendance de π comme Leibniz l'avait pressenti, tranchant l'énigme de la quadrature du cercle. La théorie s'est beaucoup enrichie depuis en techniques et en résultats, *mais pas en concepts propres.*

Pourquoi pas? Je ne sais; et je doute qu'une approche sociologique évoquant les pratiques de la communauté (dans laquelle on n'était adoubé naguère que si l'on avait trouvé un nouveau nombre transcendant) ne donne jamais la réponse.

Mais un constat s'impose: le XXIe siècle ne semble pas avoir produit de nouveau nombre transcendant. La théorie semble en sommeil. Qui réveillera la belle au bois dormant?

Ce sommeil serait-il dû à une carence de concepts propres? Je ne crois pas. Comparons en effet la situation de la géométrie diophantienne: ce domaine voisin est tout à fait florissant aujourd'hui, bien qu'il ne dispose lui aussi que d'un seul concept propre, celui de hauteur (dû à son fondateur A. Weil). Il est vrai que la géométrie diophantienne emprunte tant et plus de concepts à tant de théories diverses, bien davantage que n'a jamais fait la théorie des nombres transcendants.

Autre chose frappe dans l'histoire de la transcendance: les nombres dont elle s'occupe sont très particuliers: en gros, et déjà dans les méditations de Leibniz, ce sont des longueurs, des aires etc. de domaines algébriques définis par des inégalités algébriques à coefficients entiers - ce que la géométrie arithmétique contemporaine appelle des "périodes" (en compliquant parfois l'affaire avec une exponentielle, pour inclure à peu près toutes les constantes qu'on trouve dans les livres classiques).

Les règles élémentaires du calcul intégral produisent directement des relations entre de tels nombres. M. Kontsevich a proposé en 1998 une conjecture qu'aurait presque pu formuler Leibniz en son temps, et qui consonne merveilleusement avec son principe de raison suffisante. La voici: *toute relation entre périodes provient des règles élémentaires du calcul intégral.*

Nous voilà donc face à un domaine mathématique qui bénéficie, comme aucun autre, d'une boussole simple et on ne peut plus conceptuelle, mais qui ne parvient pas à tirer le moindre bénéfice de cette boussole.

La *patience de comprendre* dans cette scène-là, tout à l'envers de notre première scène, aura-t-elle enfin raison de l'*impatience du concept*?

* * *

Voici venu le moment de conclure. Mais comment résumer ou récapituler un tel sujet: penser sans concept (en mathématique)?

Voyons... et pourquoi pas comme dans un opéra-bouffe: en réunissant sur scène, en final, tous les protagonistes, morts ou vifs?

Cela pourrait donner ceci:

Les voilà tous. La gantière et le bottier saluent, et puis s'embrassent.

Cavaillès, qui s'est brouillé avec Leibniz, ne salue personne mais on l'entend dire à son ami Lautman que "la Monadologie lui fait penser au calvinisme des marchands de cochons américains"; quel culot!

Aussitôt son mentor Spinoza le rabroue: "ne pas rire, ni pleurer, ni détester, mais comprendre".

À ces mots, la gantière sourit. Desargues qui passait par là faillit la croiser à l'infini. Mais c'est l'évèque Tempier qui l'y attendait. Il fulmine et condamne encore, le triste sire, on l'entend tonner contre les hétérodoxes Forti et Honsell.

Indifférents, Euler et Lagrange se promènent en rêvant aux développements asymptotiques de leur chère équation, après la leçon d'Emmy Noether.

(Kontsevich est excusé, il joue ce soir au Théâtre de l'Action dans la pièce $g \circ f$. f d'abord, g après; mais... combien de temps après? demandent des spectateurs inquiets pour leur souper.)

Voilà enfin Hegel, pensif. Il s'apprête à concéder à sa chouette que le concept du bon infini appartient à la mathématique.

* * *

Bibliographie provisoire (bien trop sommaire)

Y. André: Dix regards sur la mathématique contemporaine, Spartacus 2021. En ligne, https://spartacus-idh.com/

V. Arnold: Huygens and Barrow, Newton and Hooke, Birkhäuser 1990.

J. Cavaillès: Sur la logique et la théorie de la science, 1947 + lettre à Lautman (à propos de Leibniz et des marchands de cochons).

G. Longo, S. Longo: Infini de Dieu et espace des hommes en peinture, conditions de possibilité pour la révolution scientifique, "Les mathématiques dans l'oeuvre d'art", Iste-Wiley 2020.

I. Newton (E. du Châtelet, traductrice et commentatrice, 1726): Principia, Lemme XXVIII et seq.

(l'OuLiPo pour finir).