



HAL
open science

Modèle de description didactique d'exercices de mathématiques

Sébastien Jolivet, Hamid Chaachoua, Cyrille Desmoulins

► **To cite this version:**

Sébastien Jolivet, Hamid Chaachoua, Cyrille Desmoulins. Modèle de description didactique d'exercices de mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2022, 42 (1), pp.53-102. hal-03864193

HAL Id: hal-03864193

<https://hal.science/hal-03864193>

Submitted on 2 Feb 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - ShareAlike 4.0 International License

MODÈLE DE DESCRIPTION DIDACTIQUE D'EXERCICES DE MATHÉMATIQUES

Sébastien Jolivet*, Hamid Chaachoua**, Cyrille Desmoulin**

A MODEL TO DESCRIBE MATHEMATICAL EXERCICES WITH EDUCATIONNAL ELEMENTS

Abstract – This article presents a model to describe mathematical exercises with educational elements. It enables to specify the adequacy between resource and curricula, to precisely describe the knowledge involved in an exercise and the way this knowledge is intended to be used. To build this model, we use a reference praxeological model represented using T4TEL. We define a *task model* as well as the *optimum type of tasks* notion. This model and its use are illustrated on examples related to school algebra. The advantages and limits of the model are discussed at the end of article, before to suggest perspectives on its evolution and its use for mathematics education research and teacher training.

Key words: resource, didactic description, reference praxeological model, T4TEL, task model, optimum type of tasks, M2DR

MODELO PARA LA DESCRIPCIÓN DIDÁCTICA DE EJERCICIOS MATEMÁTICOS

Resumen – En este artículo presentamos un modelo para la descripción didáctica de ejercicios matemáticos. Este modelo permite especificar la adecuación entre recurso y currículum, describir con precisión los conocimientos involucrados en un ejercicio y las modalidades de trabajo de estos conocimientos. En su construcción, utilizamos un modelo praxeológico de referencia construido a partir de T4TEL. Definimos una modelización de tareas, así como la noción de tipo óptimo de tareas. Este modelo y su uso se ilustran con ejemplos de álgebra escolar. Las

* Université de Paris, Univ Paris Est Creteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, UNIROUEN, LDAR, F-75013 Paris, France, sebastien.jolivet@unige.ch

** Univ. Grenoble Alpes, CNRS, Grenoble INP[‡], LIG, F-38000 Grenoble France, hamid.chaachoua@univ-grenoble-alpes.fr cyrille.desmoulin @univ-grenoble-alpes.fr

[‡]Institute of Engineering Univ. Grenoble Alpes

contribuciones del modelo y sus limitaciones se examinan al final del artículo, antes de proponer perspectivas sobre su evolución y explotación tanto en investigación como en formación de profesores.

Palabras-claves: recurso, descripción didáctica, modelo praxeológico de referencia, T4TEL, modelización de tareas, tipo óptimo de tarea, M2DR

RESUME

Dans cet article nous présentons un modèle de description didactique d'exercices de mathématiques. Ce modèle permet de spécifier l'adéquation entre ressource et curriculum, de décrire précisément les savoirs mis en jeu dans un exercice et les modalités de travail de ces savoirs. Nous exploitons, pour le construire, un modèle praxéologique de référence représenté à l'aide de T4TEL. Nous définissons une *modélisation de la tâche* ainsi que la notion de *type de tâches optimum*. Ce modèle et son utilisation sont illustrés par des exemples dans le domaine de l'algèbre scolaire. Les apports du modèle et ses limites sont discutés à la fin de l'article, avant de proposer des perspectives sur son évolution et son exploitation en recherche et en formation des enseignants.

Mots-Clés : ressource, description didactique, modèle praxéologique de référence, T4TEL, modélisation de la tâche, type de tâches optimum, M2DR

INTRODUCTION

La contribution présentée dans cet article se situe dans la problématique de la description des ressources d'apprentissage. La notion de *ressource d'apprentissage* recouvre des objets très divers, ainsi le standard LOM (Learning Object Metadata), cité dans (Wiley, 2002), propose la définition suivante : "Learning Objects are defined here as any entity, digital or non-digital, which can be used, re-used or referenced during technology-supported learning". Dans notre travail nous nous concentrons sur des ressources de type *exercice de mathématiques* sur support papier¹. Dans sa thèse Jolivet (2018a) propose un état des lieux des différents usages des termes exercices, problèmes, etc. Nous considérons dans cet article qu'un *exercice de mathématiques* est un énoncé dans lequel une ou plusieurs tâches mathématiques sont dévolues au résolveur de l'exercice. Les motivations à décrire de telles ressources sont diverses, notamment selon que l'on produise la ressource ou que l'on considère une ressource déjà produite. Par exemple, des éditeurs de ressources qui doivent les indexer ; des prescripteurs de ressources (humains, comme des enseignants ou des acteurs du pilotage du système éducatif, ou informatique comme un système de recommandation) qui les sélectionnent et les agencent ; ou encore des chercheurs pour décrire le potentiel d'une ressource, comprendre sa trajectoire documentaire ou encore analyser des manuels scolaires ou autre corpus de ressources.

La diversité de ces motivations explique la multiplicité des approches existantes pour décrire des ressources éducatives et l'importance de la subjectivité du descripteur. Dans cet article nous présentons un modèle de description de ressources d'apprentissage avec une double ambition : d'une part proposer une description fondée sur une caractérisation didactique de ce qu'est la ressource et d'autre part que cette description permette de caractériser les usages possibles de cette ressource. La description pouvant être exploitée par des utilisateurs divers et dans des objectifs différents, il est nécessaire de limiter au maximum l'effet de la subjectivité du descripteur sur la description produite.

Dans un premier temps nous présentons différentes approches qui existent relativement à la description de ressources. Les différences entre ces approches et les informations qu'elles portent

¹ Ils peuvent être numérisés en format PDF ou JPG, mais nous ne considérons pas d'exercices avec l'énoncé desquels il y a des interactions possibles (lien hypertexte, figure animée, etc.).

sur les ressources mettent en évidence l'impact de la destination de la description, et donc de la subjectivité du regard porté sur la ressource, sur les choix réalisés. Ce premier constat nous amène à interroger la manière dont, relativement à l'objectif de produire un modèle, un objet peut être regardé ; nous nous positionnons alors par rapport aux travaux de Le Moigne (2006). Dans un deuxième temps, au-delà des différences entre les approches existantes, nous identifions deux aspects transversaux : la modélisation du savoir et la relation ressource – curriculum. Nous les intégrons à notre travail et ils orientent le choix du cadre théorique de la théorie anthropologique du didactique pour construire notre modèle. Nous présentons les principaux éléments mobilisés de la TAD dans la deuxième partie de cet article. Dans une troisième partie nous présentons alors notre modèle de description didactique de ressources (M2DR) qui est illustré par divers exemples en algèbre. La quatrième partie de cet article contient l'analyse, la validation et une discussion sur le modèle produit. Ses apports et ses limites sont synthétisés dans la conclusion, avant de proposer des perspectives sur son évolution et son exploitation en recherche et en formation des enseignants.

ETAT DE L'ART

Cette section vise à présenter les différentes approches de description de ressources éducatives. Les informations décrivant ces ressources se décomposent en deux catégories : (1) des informations « bibliothécaires » donnant des informations générales sur la ressource (auteur, langue, version, licence, etc.) ; (2) des informations sur le contenu éducatif de la ressource (savoirs en jeu, lien avec des curricula, complexité, prérequis ; etc.). C'est cette seconde catégorie d'informations qui correspond à l'objectif de cet article. Ces descriptions du contenu éducatif peuvent utiliser des éléments libres, laissant la personne chargée de décrire la ressource utiliser les termes/mots clés de son choix ou des éléments d'un référentiel fixé par avance.

Le standard LOM (et ses adaptations françaises) est introduit en premier dans cette section car il est actuellement utilisé par quasi toutes les plateformes de ressources et permet à la fois une description libre et par un référentiel. Suit une présentation des descriptions utilisant des éléments libres, puis deux types de descriptions utilisant des éléments d'un référentiel fixé par avance, celles basées sur un curriculum et celles basées sur un référentiel d'éléments de nature didactique. La section se termine par la

présentation de l'approche documentaire qui ne vise pas la description de la ressource dans un état donné mais s'intéresse à son évolution.

Le standard de description de ressources éducatives LOM

Le standard² international IEEE LOM (Learning Object Metadata) occupe une place centrale comme analysé par exemple par Loiseau (2009, p. 94). Il possède des déclinaisons pour différents pays. Sa déclinaison française est la norme AFNOR NF Z76-041-1, nommée LOMFR. En plus d'une traduction des termes du standard LOM en français, elle lui ajoute trois éléments³ : un élément recommandé *Type Documentaire*, repris du DublinCore (dublincore.org/schemas, un standard bibliothécaire), et deux éléments facultatifs « Activité induite » et « Validité des acquis ».

Cette norme possède elle-même deux déclinaisons, ScoLOMFR pour l'enseignement scolaire et SupLOMFR pour l'enseignement supérieur. Elles définissent les valeurs possibles de certains champs de description, par exemple dans ScoLOMFR les niveaux éducatifs, les diplômes ou les objectifs, pris par exemple dans le *socle commun de connaissances, de compétences et de culture*. ScoLOMFR permet ainsi, selon le site de référence, de « produire des descriptions de ressources pédagogiques numériques au sein de l'enseignement scolaire du Ministère de l'Éducation nationale et d'en faciliter la mutualisation ».

Des descriptions du contenu éducatif utilisant des éléments libres

La majorité des plateformes de ressources pour l'enseignement scolaire en France se basent sur ScoLOMFR. Cependant elles exploitent peu sa richesse sémantique et reportent la description du contenu éducatif sur un système de mots-clés libres. Cette approche par mots clés libres est très utilisée pour sa facilité de mise en œuvre à grande échelle. Myriade (<https://myriade.education.fr/>), le portail public français de ressources numériques pour l'école est dans ce cas. Basé sur ScoLOMFR, il n'utilise pourtant pour le contenu éducatif que le

² « Un standard est un ensemble de recommandations développées et préconisées par un groupe représentatif d'utilisateurs réunis autour d'une instance particulière » (Pernin, 2006, p. 204)

³

<https://eduscol.education.fr/numerique/dossier/archives/metadata/ressources-educatives-numeriques/lomfr-learning-object-metadata>

champ 5.2 « Type pédagogique » (exercice, questionnaire, tutoriel, ...), ce qui est très pauvre. Un champ d'indexation par mots-clés libres est disponible même s'il est actuellement peu renseigné. La plupart des ressources sont payantes, issues d'éditeurs privés et n'utilisent que les champs bibliothécaires de ScoLOMFR.

Des descriptions du contenu éducatif par les éléments d'un curriculum

Ces descriptions visent à décrire qu'une ressource fait travailler tel ou tel élément d'un curriculum, pour permettre aux enseignants de rechercher des ressources par le curriculum, qui est un de leurs outils de base. Pour ces approches basées sur un référentiel, on peut à nouveau distinguer deux cas : celui où le référentiel est thématique et celui où le référentiel est composé de savoir-faire.

L'approche thématique décompose le curriculum en thèmes, sous-thèmes, etc., selon l'approche habituelle de présentation des programmes scolaires. Les sites IXL Maths (fr.ixl.com/math/) et Labomep (labomep.sesamath.net/) sont typiques de cette catégorie. Ils organisent les ressources en suivant exactement la structuration des programmes officiels français. Le site Khan Academy (fr.khanacademy.org/) pour sa part propose sa propre structuration par domaines (maths, sciences, informatique, ...), sous-domaines (algèbre, géométrie, ...), thèmes (angles, droites) et sous-thèmes (parallèles et perpendiculaires, angles et cercles).

De façon générale, ScoLOMFR permet cette approche car elle propose comme « vocabulaires » pour le champ *Objectif* de LOMFR les « Points de programme ». Cependant les plateformes actuellement ne l'utilisent pas et se contentent, comme le site de ressources mathématiques de l'académie de Grenoble (agrenoble.fr/maths/?q=fr/recherche#), d'une liste de thèmes et sous-thèmes spécifiques, en plus du niveau et de mots-clés libres.

Aux USA, le Common Core State Standards (CCSS, corestandards.org/) généralise cette approche en définissant un référentiel thématique national pour l'anglais et les mathématiques, afin que les institutions des 50 états des USA qui n'ont pas de programme national puissent partager des ressources. Il est utilisé par des plateformes de ressources comme Achievement Standard Network (achievementstandards.org/) et Academic Benchmarks (academicbenchmarks.com).

L'approche par savoir-faire décompose le curriculum en résultats d'apprentissages attendus et non pas en notions qui peuvent représenter toutes sortes de choses. Le système Tovek Topic Mapper (Van Assche, 2007), les projets de recherche

TELOS (Paquette, 2007) et InterGeo (Libbrecht & Desmoulin, 2009) relèvent de ce cas. Ce dernier est basé sur une ontologie des compétences, ce qui rejoint le vocabulaire « Compétences travaillées » de ScoLOMFR qui permet donc aussi cette approche. Ces « Compétences travaillées » sont disponibles sur le portail national français⁴ de ressources en Sciences et Techniques Industrielles d'Eduscol mais seules de rares ressources sont décrites par ce champ.

De ces trois approches du référencement de ressources nous retenons deux éléments. Tout d'abord le lien avec un curriculum et, d'une manière connexe, la question de la modélisation du savoir qui est retenue pour opérer ce lien avec un curriculum.

Des descriptions du contenu éducatif par des éléments de nature didactique

Ces descriptions s'appuient sur des travaux et résultats de la didactique. Elles visent à décrire si la ressource présente telle ou telle spécificité didactique. Ainsi, Bodin (2003) propose une série de critères de classement des exercices et problèmes de mathématiques, « (1) Les contenus mathématiques en jeu – (2) L'âge ou le niveau scolaire concerné – (3) Les objectifs contrôlés (savoir – savoir-faire) – (4) Le type d'énoncé⁵ – (5) La difficulté – (6) Les niveaux de mathématisation – (7) Les activités et les processus – (8) La complexité ». Si les trois premiers éléments de cette liste sont globalement pris en charge par les descriptions présentées dans les sections précédentes, ce n'est pas le cas des suivants. Pour permettre leur prise en charge, une première approche est de proposer un référentiel fondé sur l'activité cognitive du résolveur ; une seconde est d'examiner la difficulté / complexité de l'exercice.

La construction d'un référentiel décrivant l'activité cognitive de l'élève a été explorée par Gras⁶ (1979) qui a construit une

⁴ <https://eduscol.education.fr/sti/taxonomy/term/2214#ressources-savoirs>

⁵ Ce critère est précisé dans le même document avec deux aspects : D'une part permettre de répondre à la question « pourquoi proposer tel ou tel exercice ? » (*ibid.*, p. 3) et une série de valeurs possibles « Exercice d'exposition – Vrais problèmes – Exercices d'application (...) » (*ibid.*, p. 3). D'autre part la forme des questions, « Ouvertes, semi-ouvertes ou fermées » (*ibid.*, p. 3).

⁶ Ce travail n'étant pas disponible en ligne, une reproduction est disponible pages 61 et 342-345 de Jolivet (2018a).

taxonomie des objectifs cognitifs spécifiques à l'activité mathématique. Bodin (2004) a actualisé cette taxonomie en prenant « en compte les travaux d'Aline Robert et ceux du programme PISA de l'OCDE » ainsi que « la révision de la taxonomie de Bloom proposée en 2001 par L.W. Anderson et D.R. Krathwool » (*ibid.*, p. 2).

Concernant l'approche qui vise à caractériser la difficulté ou la complexité de l'exercice, il est important, comme le précise Bodin (2003), de ne pas confondre ces deux notions. La première est « relative aux personnes et aux groupes des personnes » (*ibid.*, p. 9) et peut être quantifiée notamment par une approche statistique de type *théorie des réponses aux items* (IRT). La seconde porte sur « la complexité structurelle qui peut concerner la structure de l'énoncé ou la structure des traitements possibles » et « la complexité cognitive qui concerne le niveau de l'activité mentale sollicitée (...) » (*ibid.*, p. 12).

Ces deux éléments de la complexité se retrouvent dans les travaux de Sayac et Grapin (2013) qui proposent une « hiérarchie entre les différentes compétences mathématiques en jeu » (*ibid.*, p. 3) qui articule le rapport de l'élève à la tâche et le niveau de « guidage » de l'énoncé. Cet impact de la tâche prescrite sur l'activité de l'élève est aussi au cœur de travaux menés successivement par Robert (1998) puis par Castela (2008). Notons que dans ces différents travaux le rapport de l'élève au savoir, qu'il soit formulé en termes de connaissances ou de praxéologies, est une donnée nécessaire pour analyser et décrire la ressource.

Le point de vue de l'approche documentaire du didactique

Enfin, l'approche documentaire du didactique (ADD), concentre son attention sur les ressources. Fondée sur l'approche instrumentale (Trouche, 2003) elle met l'accent sur le travail documentaire des enseignants et l'importance qu'y occupent les ressources, avec une acceptation très large de ce terme (Gueudet & Trouche, 2008). Un concept important de cette approche est la notion de document qui est le produit d'un sujet enseignant et qui regroupe à la fois les ressources et les schèmes d'utilisation de ces ressources. Nous ne développons pas plus avant cette approche mais nous notons, d'une part l'intrication entre la ressource et son utilisateur, et d'autre part la dynamique temporelle qui est nécessairement présente dans ce travail au travers des notions de genèse et de schème par exemple.

Problématique

Des éléments de l'état de l'art, nous retenons deux constantes. D'une part, il est nécessaire que la description permette de définir l'adéquation de la ressource à un ou plusieurs curricula. D'autre part, les différentes descriptions reposent toutes sur une modélisation du savoir, plus ou moins formalisée, mais nécessaire.

A contrario, nous identifions deux types d'approches significativement différents. Premièrement, les standards qui visent à l'indexation des ressources, et qui présentent une qualité didactique de la description faible ou non exploitée. Ceci est notamment souligné par Ullrich : "But today, to search, especially by a machine, for adequate learning objects is not really possible. Search requires metadata, and the most prominent learning object metadata standard, IEEE LOM fails to represent crucial information relevant from an instructional point of view" (Ullrich, 2005, p. 8). Par exemple, dans la version française du LOM, ScoLOMFR⁷ le champ *difficulté*, qui est l'un des quelques champs dont on pourrait considérer qu'il contient une information didactique, est uniquement caractérisé par une échelle de quatre valeurs sans qu'aucun élément ne vienne préciser comment situer la ressource relativement à cette échelle.

Deuxièmement les descriptions qui sont motivées par la compréhension d'éléments didactiques de la ressource (activité potentielle qu'elle porte, sa complexité ou sa dynamique). L'analyse et la description sont alors fortement corrélées à un contexte d'usage et/ou à la subjectivité du descripteur. Si ceci permet une description didactique pertinente relativement à son objet premier, cela rend difficile l'exploitation de cette description dans d'autres contextes et limite donc la portée du travail réalisé.

Ces différents constats, ainsi que la mobilisation systématique d'une modélisation du savoir dans les différentes approches présentées précédemment, nous amènent à la formulation de la problématique suivante :

- Peut-on proposer un modèle de description d'un exercice de mathématiques :
avec une qualité didactique importante,
permettant de caractériser l'adéquation exercice – curriculum pour

⁷ <http://eduscol.education.fr/cid57098/le-profil-application-scolomfr.html>
Il s'agit, selon le site de référence, d'un « profil d'application [qui] est un outil destiné à produire des descriptions de ressources pédagogiques numériques au sein de l'enseignement scolaire du Ministère de l'Education nationale et d'en faciliter la mutualisation ».

différents curricula,
dont le résultat ne soit pas lié à la subjectivité du descripteur,
qui soit exploitable dans divers contextes ?

- Quelle modélisation du savoir est adaptée pour produire ce modèle ?

Pour l'aborder nous explicitons deux questions de recherche :

- (QR1) Quelle modélisation du savoir utiliser pour définir le modèle souhaité ?
- (QR2) Peut-on produire un modèle de description d'exercices de mathématiques permettant de caractériser l'adéquation ressource – curriculum et possédant une qualité didactique importante ?

Nous détaillons QR2 en quatre sous questions. Le modèle :

(QR2.1) permet-il de caractériser l'adéquation ressource – curriculum ?

(QR2.2) permet-il de caractériser de manière précise les savoirs mis en jeu dans l'exercice, et les prérequis à la réalisation de l'exercice ?

(QR2.3) permet-il de caractériser la manière dont le travail sur ces savoirs est organisé dans l'exercice ?

(QR2.4) permet-il de caractériser la complexité de l'exercice ?

Pour aborder ces questions, conformément à l'objectif de produire un modèle, nous nous référerons aux travaux de Le Moigne (2006) qui éclairent la manière de considérer un objet dans l'objectif de le modéliser. Le positionnement par rapport à ces travaux constitue la première partie de la section suivante consacrée aux cadres et références théoriques mobilisés dans l'article. Nous motivons et présentons ensuite les autres cadres au regard des questions de recherche.

CADRES THEORIQUES

Trois pôles pour définir un objet

Dans ses travaux, Le Moigne (2006) explique que la connaissance d'un objet passe par la connaissance de trois pôles permettant de le décrire : un pôle ontologique, un pôle fonctionnel et un pôle génétique. Le pôle ontologique permet de décrire l'objet selon ce qu'il est, tandis que dans le pôle fonctionnel on considère l'objet selon ce qu'il fait. Avec le pôle génétique on prend en compte l'objet dans une perspective historique en considérant d'où il vient et ce qu'il devient. Notre objectif d'indexation nous amène à considérer la ressource dans un état figé à un temps donné ; nous ne pouvons donc pas intégrer à notre modèle son devenir et nous

n'avons pas nécessairement accès à son histoire. Ainsi nous ne prenons pas en compte son pôle génétique. Les éléments de l'état de l'art montrent que l'accent, en matière de description de ressources, est souvent mis sur l'aspect fonctionnel et que la description obtenue est fortement liée à la subjectivité du descripteur et au contexte d'usage associé à la ressource.

Pour notre part nous faisons le choix d'aborder la description d'une ressource par son pôle ontologique. Cette approche vise à « déconnecter » la ressource d'un contexte particulier et à limiter la subjectivité du descripteur dans le processus de description. C'est dans un deuxième temps (p. 33) que nous abordons la description du pôle fonctionnel de la ressource, à partir de la description du pôle ontologique.

Le travail d'état de l'art a mis en évidence la nécessité de disposer d'une modélisation du savoir. Pour limiter la part de subjectivité du descripteur de la ressource, pour pouvoir caractériser la conformité de la ressource à plusieurs curricula et son adéquation à divers projets, nous fixons comme contrainte de disposer d'une modélisation du savoir, externe à la fois au descripteur et à la ressource, et non assujettie à une institution spécifique. C'est une des motivations de l'exploitation de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), et en particulier de la notion de modèle praxéologique de référence (MPR), dont nous présentons maintenant les éléments exploités par la suite.

La théorie anthropologique du didactique et T4TEL

Lors de la formulation de la problématique nous avons pu noter la question de la prise en compte de la dimension institutionnelle au travers des curricula, la question de la modélisation du savoir et la question de l'indépendance au descripteur. Ces divers éléments motivent le choix de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1992) comme cadre pertinent pour mener le travail. En particulier, l'approche praxéologique (Chevallard, 1999) comme moyen de modéliser toute activité humaine et donc en particulier celle portée par un exercice de mathématiques, est un outil que nous exploitons. Concernant la question de l'indépendance au descripteur cela rejoint la préoccupation soulevée par Ruiz-Munzón, Bosch et Gascón qui souhaitent répondre à la question « qu'est-ce que l'algèbre élémentaire (ou la géométrie, ou les statistiques) ? » (Ruiz-Munzón et al., 2013, p. 2872) d'une façon qui ne soit pas uniquement liée aux « faits empiriques » observés par le chercheur et motivent ainsi l'utilisation d'un modèle épistémologique de référence (Bosch &

Gascon, 2005). Nous ne revenons pas plus avant sur ces éléments déjà largement diffusés et documentés dans la littérature. Nous présentons par contre plus précisément le développement de l'approche praxéologique qui est proposée par T4TEL.

Pour prendre en compte les exigences liées aux EIAH, et en particulier les services d'indexation et leurs exploitations, la modélisation des savoirs et savoir-faire par la praxéologie doit être calculable et accessible à une représentation informatique. C'est ce que propose le cadre T4TEL (Chaachoua et al., 2013) (Chaachoua, 2018) dont l'une des premières motivations est de proposer une formalisation du modèle praxéologique. Chaachoua (2019) précise bien que « T4TEL s'inscrit complètement dans la TAD et plus spécifiquement dans l'approche praxéologique » (p. 6) et que si ce cadre a été motivé par des besoins liés à des problématiques EIAH, il trouve aussi son intérêt et sa pertinence dans des recherches en didactique hors champ des EIAH. Ainsi, une des contributions majeures est la structuration des types de tâches par l'introduction du concept de *générateur de types de tâches* et la notion de *variable* dans la TAD (Chaachoua & Bessot, 2019). Ainsi, dans T4TEL, un type de tâches T est modélisé par le couple (Verbe d'action, Complément). Le verbe d'action caractérise le genre de tâches, comme « Calculer » ou « Résoudre ». Le complément, qui précise sur quoi porte l'action, peut être défini selon différents niveaux de granularité, du spécifique au générique. Pour prendre en compte ces relations entre le générique et le spécifique, Chaachoua et Bessot (2019) introduisent les notions de système de variables et de générateur de types de tâches (GT) :

Un générateur de type de tâches est défini par un type de tâches T et un système de variables. Nous parlons de système de variables pour désigner une liste de variables avec des valeurs qu'elles peuvent prendre. [...] Les variables d'un générateur de type de tâches prennent des valeurs dans un domaine d'une discipline. Ces valeurs engendrent des types de tâches plus spécifiques que le type de tâches T. (p. 238)

Le générateur de types de tâches permet en particulier de structurer les organisations praxéologiques ponctuelles dans la construction d'un modèle praxéologique de référence MPR (Chaachoua et al., 2020). Dans notre cas d'étude, celui de l'algèbre élémentaire, Jolivet (2018a) présente une description du MPR dans le cadre T4TEL en s'appuyant sur des travaux existants de Croset (2009), Ferraton (2011), Pilet (2012, 2015) et Chaachoua et al.

(2013) qui ont tous réalisé un MPR autour de l'algèbre élémentaire⁸ et intégrant les genres de tâches développer, réduire et factoriser. Autour de ces trois genres de tâches Jolivet (2018a) a considéré six générateurs de types de tâches, un pour le développement, un pour la réduction et quatre pour la factorisation⁹. Nous présentons plus en détail un générateur associé au genre de tâches « factoriser une expression algébrique ». La pertinence des générateurs produits est validée en vérifiant que, non seulement tous les types de tâches identifiés par Pilet (2012) et Croset (2009) sont bien générés, mais aussi que le choix des valeurs des variables permet d'en générer de nombreux autres (voir Jolivet, 2018, pp. 177-188). Ceci est conforme à l'objectif de disposer d'un MPR fondé épistémologiquement et qui permet une discrimination fine entre les différentes tâches présentes dans un exercice.

Exemple de générateur de type de tâches

Considérons le type de tâches T_F (Factoriser une expression littérale donnée dans le registre symbolique algébrique sous forme d'une somme de deux polynômes). Remarquons que le niveau de granularité du complément est défini par le chercheur. Par exemple, dans le complément, il a fixé le registre de représentation de l'expression à la valeur « registre symbolique algébrique ». Pour définir le générateur associé au type de tâches T_F , l'auteur considère quatre variables (cf. Figure 1, p. 14). La liste des valeurs prises par chacune de ces variables est présentée en annexe et divers documents sont accessibles en ligne¹⁰.

Le choix des variables et de leurs valeurs est un élément crucial de la construction du générateur de type de tâches. En effet, les variables et leurs valeurs sont déterminées selon trois points de vue : épistémologique, institutionnel et didactique. Ce que les auteurs Chaachoua et Bessot (2019, p. 239) précisent ainsi :

- Point de vue épistémologique

⁸ Ils sont fondés sur différents travaux relatifs à l'algèbre scolaire. Ils se réfèrent notamment à Sfard (1991) sur l'aspect procédural / structural, à Kieran (2007) sur l'activité algébrique, à Ruiz Munzón (2010) à propos du processus d'algébrisation. Une synthèse de nombreux travaux sur l'algèbre est proposée dans Coulange et al. (2012).

⁹ Il a été choisi de considérer des générateurs différents selon qu'il s'agit de factoriser une somme de deux, trois, quatre, plus de quatre produits. Les motivations de ce choix, non essentielles pour cet article, ne sont pas développées ici mais sont disponibles dans Jolivet (2018, p.178).

¹⁰ https://frama.link/These_Jolivet

Dans T4TEL, nous définissons des variables d'un type de tâches au niveau même du modèle praxéologique de référence (MPR) : le découpage des valeurs d'une variable est tel que le changement d'une valeur modifie l'éventail des techniques possibles (donc le rapport à un objet de savoir) d'un type de tâches. Nous parlerons de variable épistémologique.

- Point de vue institutionnel

En se plaçant dans une institution, les contraintes et les conditions définies par celle-ci vont restreindre non seulement le type de tâches, mais aussi des valeurs possibles d'une variable d'un type de tâches institutionnel. (...)

Une variable et ses valeurs institutionnelles modélisent des conditions et des contraintes explicites ou implicites (relevant des niveaux de l'échelle de codétermination) sous lesquelles une praxéologie existe ou peut exister institutionnellement. Le découpage institutionnel en valeurs d'une variable peut ne pas avoir de pertinence épistémologique.

- Point de vue didactique

Une variable didactique est une variable au sein d'une institution, potentiellement à la disposition du professeur. Une variable didactique dans une institution peut ne plus l'être dans une autre.

Verbe d'action	Complément fixé	Système de variables
Factoriser	Une expression littérale donnée dans le registre symbolique algébrique sous forme d'une somme de deux produits de polynômes	V1 ; V2 ; V3 ; V4
Nom des variables		
V1	Forme de la somme	
V2	Nature des coefficients de la somme	
V3	Nature des coefficients de la forme factorisée	
V4	Présence du signe multiplié entre les facteurs des produits dans l'expression de départ	

Figure 1. - description du générateur de types de tâches "factoriser une somme de deux produits", Jolivet (2018a, p. 179)

Par exemple, une des valeurs de la variable V1 est : *le facteur commun est visible et un cofacteur est égal à 1 non visible*. Ces choix relatifs à la prise en compte de la visibilité ou non du facteur commun, puis à la présence d'un cofacteur égal à 1, visible ou non, sont une conséquence des travaux de Croset et Chaachoua (2016, pp. 183-188) et matérialisent la volonté de générer des sous-types de tâches particuliers associés à la mise en œuvre de praxéologies personnelles. Ainsi, on peut générer un sous-type de tâches dont les tâches sont comme « factoriser $x(x + 2) + x$ » pour lesquelles certaines techniques personnelles donneront comme réponse $x(x + 2)$ car le cofacteur égal à 1 invisible est considéré comme 0.

D'autres valeurs des variables permettent de prendre en compte les conditions et contraintes institutionnelles, et donc de générer

des praxéologies institutionnelles. Par exemple, comme le justifie Jolivet (2018a), les deux variables V2 et V3 permettent de différencier la nature des coefficients de l'expression initiale à factoriser et de l'expression sous sa forme factorisée.

« En effet, dans le cadre de l'expression $3x^2-2$ les coefficients de l'expression à factoriser sont dans \mathbb{Z} alors que les coefficients de l'expression factorisée $(\sqrt{3x+\sqrt{2}})(\sqrt{3x-\sqrt{2}})$ sont dans \mathbb{R}/\mathbb{Q} . Calculer dans \mathbb{Z} ou calculer dans \mathbb{R}/\mathbb{Q} sont des types de tâches significativement différents, tant du point de vue épistémique que, souvent, du point de vue institutionnel. » (Jolivet, 2018, p. 185).

Donc, le choix du système de variables doit permettre de rendre compte des praxéologies institutionnelles, personnelles mais aussi d'autres praxéologies pouvant exister dans une institution donnée même si elles ne sont pas attendues.

Modélisation de la tâche et notion de type de tâches optimum

La notion de tâche occupe un rôle central dans la TAD, mais qui a été très peu questionnée en tant que telle ; elle est regardée comme un représentant d'un type de tâches. Castela (2008) a associé à une tâche prescrite à un élève un couple regroupant l'énoncé et le contexte de prescription. Cependant, Chaachoua (2010) propose de ne pas considérer le contexte de prescription et associe « à une tâche prescrite dans [une institution] *I* une tâche mathématique. Elle correspond au problème mathématique sans aucune indication sur la technique possible ou attendue et avec une formulation qui reste la plus neutre possible vis-à-vis de la technique. L'énoncé est une mise en texte de la tâche mathématique en ajoutant éventuellement des indications ou des questions qui prennent en charge partiellement ou complètement les étapes de la technique attendue » (Chaachoua, 2010, p. 14). Pour prendre en compte ces éléments et en se plaçant dans le cadre T4TEL, Jolivet (2018a, p.119) propose une modélisation de la tâche par trois éléments : {Action à réaliser ; compléments définitoires ; compléments facultatifs}. Chacun d'eux est matérialisé par des objets ostensifs et défini comme suit :

- Action à réaliser : elle est le plus souvent définie par un verbe d'action mais peut aussi être matérialisée par d'autres objets ostensifs, soit pour des raisons de langue (par exemple « donner un développement de » relève du même objet non ostensif que « développer ») soit parce que des effets de contrat didactique amènent à l'interprétation d'un objet ostensif (symbole du type « ? » par exemple) comme associé à une action à réaliser.
- Compléments définitoires : il s'agit du ou des objets sur lesquels l'action porte. En leur absence la tâche n'existe plus. Ils sont matérialisés par des objets ostensifs.

- Compléments facultatifs : il s'agit d'objets ostensifs complémentaires dont la présence n'est pas nécessaire à l'existence de la tâche. En leur absence, une tâche est toujours définie. Ils ont diverses fonctions possibles (orienter vers le choix d'une technique ; ingrédient d'une technique ; répondre à une attente institutionnelle...). (Jolivet, 2018a, p. 119)

Maintenant que la notion de tâche est définie, se pose alors une question fondamentale et méthodologique : étant donnée une tâche, à quels types de tâches d'un MPR donné peut-on la relier ? Comment assurer l'univocité de ce rattachement ?

Pour cela, Jolivet (2018a), exploitant la structuration du modèle praxéologique de référence induite par les générateurs et la notion de sous-type de tâches, a introduit la notion de *type de tâches optimum* d'une tâche t comme étant le type de tâches le plus précis du MPR contenant la tâche selon la définition suivante (Jolivet, 2018, p. 127) :

Soit t une tâche liée à un générateur de types de tâches GT_1 . Soit $\{T_j\}$ l'ensemble des types de tâches générés par GT_1 .

On appelle type de tâches optimum de t , et on note $T_{opt}(t)$, tout élément de $\{T_j\}$ tel que :

* $t \in T_{opt}(t)$

* pour tout $T \in \{T_j\}$ tel que $t \in T$ alors $T_{opt}(t)$ est un sous type de tâche de T .

Le modèle praxéologique et son extension T4TEL, avec laquelle nous construisons des MPR, auxquels nous avons ajouté une *modélisation de la tâche* (p. 15) et la notion de *type de tâches optimum* (p. 16), constituent la réponse à notre première question de recherche (QR1, p. 10). Nous présentons dans la section suivante le modèle de description didactique d'un exercice de mathématiques, fondé sur cette modélisation du savoir, et nous montrons qu'il répond bien aux objectifs définis dans la QR2.

MODÈLE DE DESCRIPTION DIDACTIQUE D'UNE RESSOURCE (M2DR) DE TYPE EXERCICE DE MATHÉMATIQUES

Un modèle en trois dimensions

Le modèle proposé est organisé en trois dimensions : la dimension *tâches et types de tâches optimum*, la dimension *objets ostensifs* et la dimension *structure et relations entre les tâches*. La première permet de caractériser les savoirs mis en jeu dans l'exercice ; les deux suivantes contiennent des éléments qui peuvent ensuite être interprétés pour définir la manière dont le

travail sur ces savoirs est organisé (au niveau local de chaque tâche comme composante de l'exercice, puis au niveau global de l'exercice en mettant en exergue les relations entre les tâches).

Nous illustrons chacune des dimensions sur un exemple (Figure 2 p. 17) qui sera détaillé au fur et à mesure de leur formalisation.

103 « Le coup du -1 »

1. On donne $M = (2x - 3)(3x + 7) - 2x + 3$.

a. Écrire sans parenthèses : $-1 \times (2x - 3)$.

b. Utiliser a. pour factoriser M.

2. Factoriser chaque expression.

a. $N = (5x - 4)^2 - 5x + 4$

b. $P = (2x + 7)^2 - 2x - 7 + (3x - 1)(2x + 7)$

c. $Q = \frac{3}{2} - x + \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - (5x - 2)\left(x - \frac{3}{2}\right)$

Figure 2. - exercice "Le coup du -1"¹¹

Dans l'exercice « Le coup du -1 » on commence par distinguer cinq tâches. Ceci permet de caractériser les différents savoirs en jeu, dans un premier temps à un niveau global du domaine de l'algèbre, en situant chacune des tâches dans un générateur de types de tâches. Dans notre exemple trois générateurs de types de tâches différents sont mobilisés si on se réfère au MPR proposé dans (Jolivet, 2018, pp. 166 - 190) : « Développer une expression littérale » ; « Factoriser une somme de deux produits » ; « Factoriser une somme de trois produits ». Dans un deuxième temps, au niveau du générateur à l'aide du type de tâches optimum.

On peut ensuite noter que la tâche 1.b possède un complément facultatif, « Utiliser a. », qui informe sur la manière de la réaliser.

Enfin il existe des relations entre les différentes tâches qui sont, d'une part le fait de la structuration de l'exercice, et d'autre part le résultat des relations entre les types de tâches optimum de chacune des tâches. Par exemple les tâches 1.b et 2.a ont le même type de tâches optimum et peuvent donc, de ce point de vue, être considérées comme identiques au regard de la granularité du MPR.

En résumé, la première dimension permet de caractériser les savoirs mis en jeu dans l'exercice. Elle comprend, dans cet objectif, les deux premières composantes (verbe d'action et complément définitoire) de chaque tâche et le type de tâches optimum de chacune des tâches. Les deux autres dimensions du modèle permettent de décrire selon quelles modalités ces savoirs sont

¹¹ Exercice n° 103, p. 64. Manuel Transmath 3^e, Nathan. Ed. 2008

organisés. Tout d'abord en prenant en compte les éléments au niveau interne de chaque tâche ensuite en décrivant la façon dont les tâches s'articulent. Nous détaillons maintenant ces dimensions.

La dimension *tâches et types de tâches optimum*

La description de la première dimension *tâches et types de tâches optimum* de l'exercice « Le coup du -1 » est proposée dans le Tableau 1, p. 18 et dans le Tableau 2, p. 19. Le Tableau 1 contient la description des tâches à l'aide de la modélisation proposée p. 15 en ne considérant que l'action à réaliser (colonne 2) et le complément définitoire (colonne 3) de chaque tâche.

Tâche	Action à réaliser	Complément définitoire	Générateur de types de tâches
t_1	Ecrire sans parenthèse	$-1 \times (2x - 3)$	Développer
t_2	Factoriser	$(2x - 3)(3x + 7) - 2x + 3$	Factoriser somme de deux produits
t_3	Factoriser	$(5x - 4)^2 - 5x + 4$	
t_4	Factoriser	$(2x + 7)^2 - 2x + 7 + \dots$	Factoriser somme de trois produits
t_5	Factoriser	$\frac{3}{2} - x + \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \dots$	

Tableau 1. - description des tâches de l'exercice "Le coup du -1"

Dans le Tableau 2 (p. 19), nous explicitons le type de tâches optimum associé à chaque tâche.

La dimension *objets ostensifs*

Cette deuxième dimension permet la prise en compte des éléments des composantes facultatives de chacune des tâches et des autres éléments de l'énoncé qui peuvent avoir un rôle vis-à-vis du résolveur de l'exercice.

Dans notre exemple « Le coup du -1 » cette dimension est composée de deux éléments. D'une part le complément facultatif de la tâche 1.b *Utiliser a.* ; et d'autre part le titre *Le coup du -1*.

Tâche	Type de tâches optimum	Code
t_1	Développer un produit de type $-1 \times (a \pm b)$, à coefficient dans \mathbb{Z} , de la forme monôme \times non-monôme, signes multipliés visibles entre les facteurs	T_{opt1}
t_2	Factoriser une expression de la forme $ka - kb$ avec au moins un non-monôme parmi les termes et $b = 1$ non visible ; l'expression initiale est à coefficients dans \mathbb{Z} ; l'expression factorisée est à coefficients dans \mathbb{Z} ; seuls les signes multipliés obligatoires sont visibles	T_{opt2}
t_3	Idem t_2	T_{opt2}
t_4	Factoriser une somme de trois produits avec un facteur commun visible dans un seul produit ; l'expression initiale est à coefficients dans \mathbb{Z} ; l'expression factorisée est à coefficients dans \mathbb{Z} ; seuls les signes multipliés obligatoires sont visibles	T_{opt3}
t_5	Idem t_4	T_{opt3}

Tableau 2. - types de tâches optimum pour l'exercice "Le coup du -1"

La dimension *structure et relations entre les tâches*

Cette troisième dimension vise à décrire les relations entre les tâches de l'exercice, et donc les modalités de mise en circulation des savoirs au sein de l'exercice. Cette dimension est tout d'abord définie par la structure¹² de l'exercice qui crée notamment une relation chronologique entre les tâches. Puis, nous situons les tâches les unes par rapport aux autres à l'aide de leurs types de tâches optimum et des techniques mobilisées. Pour cela, nous définissons six relations : *précède* ; *être de même type de tâches optimum* ; *être une spécialisation* (resp. *une généralisation*) de ; *être une variation de* ; *être un ingrédient d'une technique de* ; *être utile à*. Elles sont réparties en deux catégories. La première regroupe les relations qui peuvent être calculées à partir de la structuration du savoir issue du MPR-T4TEL. Ce sont les relations *même type de tâches optimum* ; *spécialisation* (resp. *généralisation*) et *variation* qui permettent de positionner les tâches les unes par rapport aux autres dans le MPR-T4TEL. Et de la relation *être un ingrédient de* qui permet d'identifier qu'une tâche est un élément qui peut être mis en œuvre dans la technique d'une autre tâche de l'exercice.

¹² La structure est indiquée par différents marqueurs : différents niveaux de numérotation ; des puces et des mots structurants tels que « d'abord », « puis », etc.

La deuxième catégorie regroupe les relations *précède* ; *être utile à* et *nécessite*. Elles nécessitent une analyse ponctuelle lors de la description de l'exercice. Elles permettent de caractériser des liens entre les tâches qui ne sont pas portés par le MPR.

Nous détaillons maintenant ces six relations.

Relation de structuration précède

On dit qu'une tâche t_1 *précède* une tâche t_2 si la tâche t_1 est à réaliser avant la tâche t_2 dans l'exercice. Cette relation rend compte de la chronologie d'exécution¹³ des tâches dans l'exercice.

Il s'agit d'une relation transitive qui définit un ordre total sur l'ensemble des tâches d'un exercice. Elle peut être établie à partir de la numérotation de l'exercice (comme par exemple dans l'exercice « Le coup du -1 ») ou à partir de mots structurants. Ainsi, dans l'exercice DAG (Figure 3, p. 22) la tâche « développer l'expression $2(5x + 2)$ » précède la tâche « développer l'expression $2(5x + 2)(3x + 1)$ » en raison du mot *d'abord* de l'énoncé, même si elle apparaît après dans l'ordre de lecture.

Relation « être de même type de tâches optimum »

Par cette relation, on caractérise les tâches non différenciables relativement au MPR utilisé. Deux tâches de même type de tâches optimum peuvent différer par leurs compléments facultatifs respectifs, comme c'est le cas pour les tâches t_2 et t_3 de l'exercice « Le coup du -1 » et/ou par leurs compléments définitoires mais sans que ces derniers soient différenciables à l'aide des valeurs des variables du MPR comme c'est le cas par exemple pour les tâches t_4 et t_5 . On peut noter ici qu'un choix différent au niveau des valeurs des variables dans le générateur de types de tâches aurait permis de distinguer par exemple les tâches t_2 et t_3 si on avait introduit deux valeurs pour différencier les cas où le facteur commun intervient ou non dans un carré (ici $(5x - 4)^2$).

Cette relation est définie et notée de la manière suivante :

Soient t_1 et t_2 deux tâches liées au même générateur de types de tâches. On dit t_1 est de même type de tâches optimum que t_2 si $T_{opt}(t_1) = T_{opt}(t_2)$.

Cette relation est notée $t_1 \sim_{T_{opt}} t_2$.

¹³ Il s'agit de la chronologie d'exécution prescrite par l'énoncé, elle n'est pas nécessairement celle de l'activité du résolveur de l'exercice.

Relation « être une spécialisation de » (resp. « être une généralisation de »)

Dans (Chaachoua & Bessot, 2019), les auteurs précisent qu'une des fonctions des variables peut être de délimiter la portée des techniques avec donc des types de tâches que l'on peut qualifier de plus ou moins généraux relativement aux techniques qui permettent de les résoudre. Dans cette optique nous introduisons le fait qu'une tâche puisse être plus spécifique (ou plus générique) qu'une autre dans la mesure où le type de tâches optimum de l'une est un sous-type de tâches du type de tâches optimum de l'autre. Dans notre cas la relation peut avoir une incidence sur la technique ou sur un ingrédient de la technique. Par exemple on va considérer que la tâche développer deux expressions « identiques », à la différence près que l'une est à coefficients dans \mathbb{Z} et l'autre à coefficients dans \mathbb{N} , peut être réalisée par la même technique. Cependant, dans les ingrédients de cette technique il y a « réaliser des calculs dans \mathbb{Z} » pour l'une des tâches et « réaliser des calculs dans \mathbb{N} » pour l'autre. A ce titre on considèrera que la première est une généralisation de la seconde.

Cette relation est définie et notée de la manière suivante :

Soient t_1 une tâche, de type de tâches optimum $T_{opt}(t_1)$, et t_2 une tâche de type de tâches optimum $T_{opt}(t_2)$. On dit que t_1 est une *spécialisation* de t_2 si $T_{opt}(t_1)$ est un sous type de tâches de $T_{opt}(t_2)$. On dit que t_2 est une *généralisation* de t_1 si t_1 est une spécialisation de t_2 .

Relation « être une variation de »

Soient t_1 une tâche, de type de tâches optimum $T_{opt}(t_1)$, et t_2 une tâche de type de tâches optimum $T_{opt}(t_2)$. On dit que t_1 est une variation de t_2 de pivot le type de tâches $T_{pivot}(t_1 ; t_2)$ si :

- t_1 n'est pas une spécialisation / généralisation de t_2 et
- t_1 et t_2 sont des spécialisations de $T_{pivot}(t_1 ; t_2)$.

Par exemple dans l'exercice DAG (Figure 3, p. 22) les tâches « t_1 : développer l'expression $2(5x + 2)$ » et « t_2 : développer l'expression $2(5x + 2)(3x + 1)$ » sont des variations du type de tâches pivot défini par « Développer un produit quelconque de polynômes à coefficients dans \mathbb{N} , l'ordre des polynômes est quelconque, le signe multiplié est non apparent ».

Relation « être un ingrédient d'une technique de »

Soient t_1 et t_2 deux tâches, liées ou non au même générateur de types de tâches, telles que t_1 précède t_2 .

On dit que t_1 est un ingrédient d'une technique de t_2 s'il existe une technique τ permettant de résoudre t_2 telle que $T_{opt}(t_1)$ est un ingrédient de τ .

Relation « être utile à »

Cette relation est une version « forte » de la relation précédente puisqu'il s'agit d'une relation qui prend en compte non seulement les éléments issus du MPR, à partir du type de tâches optimum de chacune des tâches, mais aussi les compléments définitoires des tâches concernées. Par exemple dans l'exercice « DAG » (Figure 3, p. 22) non seulement le type de tâches optimum de la tâche « développer l'expression $2(5x + 2)$ » est un ingrédient d'une technique permettant de réaliser le type de tâches optimum de la tâche « développer l'expression $2(5x + 2)(3x + 1)$ » mais le complément définitoire de la première tâche est une sous-expression du complément définitoire de la deuxième tâche.

40 Distributivité à gogo

a. On veut développer l'expression $A = 2(5x + 2)(3x + 1)$. Pour cela, développe d'abord l'expression $2(5x + 2)$ puis termine le développement de A .

b. Développe le produit $(x + 2)(3x + 2)$ et déduis-en le développement de :

$$B = (x + 2)(3x + 2)(x + 4).$$

c. En t'inspirant des questions précédentes, développe les expressions suivantes :

- $C = 4(5x - 1)(3x + 3)$;

- $D = (1 - x)(1 + x)(2x + 1)$.

Figure 3. - exercice "DAG"¹⁴

Soient t_1 et t_2 deux tâches liées ou non au même générateur de types de tâches, telles que t_1 précède t_2 .

On dit que t_1 est utile à t_2 s'il existe τ_2^i , technique instanciée de $T_{opt}(t_2)$, telle que $t_1 \in \tau_2^i$.

Cette relation est notée $t_1 \rightarrow t_2$.

Relation « nécessite »

Cette relation caractérise ce qui est communément appelé un « exercice à tiroirs », c'est-à-dire un exercice où le complément définitoire d'une tâche est le résultat d'une tâche précédente. C'est

¹⁴ Exercice 40, ch. A7. Manuel SésamATH, cycle 4. Magnard, éd. 2016.

par exemple le cas de la tâche c. de l'exercice « Calcul de longueurs » (Figure 4, p. 23) dont le complément définitoire « pour $x = 2$, la valeur de cette expression » n'a d'existence réelle que si la question b. a été traitée (de manière correcte ou non, peu importe, il suffit qu'une expression ait été produite).

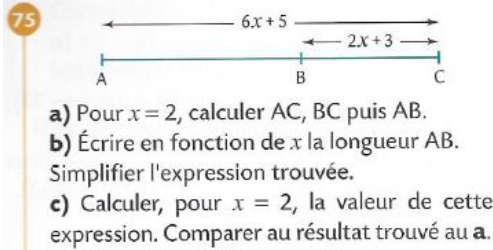


Figure 4. - exercice "Calcul de longueurs"¹⁵

Soient t_1 et t_2 deux tâches liées ou non au même générateur de types de tâches, telles que t_1 précède t_2 .

On dit que t_2 nécessite t_1 si le résultat de l'exécution de la tâche t_1 participe au complément définitoire de t_2 .

Synthèse de la description de l'exercice « Le coup du -1 »

La dimension *tâches et types de tâches optimum* a été présentée dans le Tableau 2 p. 19. La dimension objets ostensifs est limitée au complément facultatif de la tâche t_2 et au titre de l'exercice. Enfin la dimension structure et relations entre les tâches est définie par la structure de l'exercice indiquée par la numérotation à deux niveaux de profondeurs 1. et 2. en premier niveau, puis les lettres a. ; b. et c. pour définir un deuxième niveau. Enfin, nous récapitulons l'ensemble des relations existantes entre les tâches de l'exercice « Le coup du -1 » dans le Tableau 3 p. 23.

	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
t_1		$t_1 \rightarrow t_2$	$t_1 \rightarrow \tau(t_3)$	$t_1 \rightarrow \tau(t_4)$	$t_1 \rightarrow \tau(t_5)$
t_2			\sim_{Topt}	$t_2 \rightarrow \tau(t_4)$	$t_2 \rightarrow \tau(t_5)$
t_3		\sim_{Topt}		$t_3 \rightarrow \tau(t_4)$	$t_3 \rightarrow \tau(t_5)$
t_4					\sim_{Topt}
t_5				\sim_{Topt}	

Tableau 3. - relations entre les tâches dans l'exercice « Le coup du -1 »

Ainsi nous avons une tâche t_1 qui est utile à la tâche t_2 puis est un ingrédient des tâches t_3 , t_4 et t_5 . Les tâches t_2 et t_3 sont de même type de tâches optimum, tout comme les tâches t_4 et t_5 . On

¹⁵ Exercice 75, p. 40. Manuel Triangle 4^e, Hatier. Ed. 2011.

peut noter que la tâche t_3 , qui est de même type de tâches optimum que la tâche t_2 assure donc la liaison entre les deux blocs définis par la structuration de premier niveau.

ANALYSE ET VALIDATION DU MODELE M2DR

Nous avons défini deux questions de recherche (p. 10). La seconde porte sur la production d'un modèle de description permettant de caractériser l'adéquation ressource – curriculum et possédant une qualité didactique importante. Le modèle étant maintenant construit, nous explicitons comment il permet de spécifier l'adéquation à un curriculum puis nous identifions les différentes informations didactiques qu'il permet d'obtenir sur une ressource. Nous illustrons ensuite sa pertinence en l'utilisant pour analyser une ressource de manière isolée en caractérisant les savoirs en jeu et la présence ou non d'étayages. Enfin, nous l'exploitons pour positionner les ressources d'un corpus les unes par rapport aux autres.

Adéquation d'une ressource avec un curriculum

Dans cette section nous répondons à la question de recherche 2.1 sur la relation ressource curriculum. Compte tenu du coût lié à la description d'une ressource nous proposons un moyen d'assurer la prise en compte de divers curricula. Nous disposons d'une certaine portée par notre capacité à prendre en compte plusieurs curricula et d'une certaine pérennité en étant capable de prendre en compte des évolutions du curriculum. Pour aborder cette question nous exploitons les travaux de Van Asche (2007) qui compare quatre approches dont celle-ci : « On associe des métadonnées aux ressources relativement à un pivot ou un curriculum universel » (*ibid.*, p. 81). Ici, c'est le modèle praxéologique de référence que nous utilisons comme pivot entre la ressource et un ou plusieurs curricula. Pour cela nous taguons les différentes valeurs des variables de types de tâches avec des indications de curriculum sous forme d'un triplet [Information géographique ; année ; niveau], par exemple [France ; 2015 ; 4e]. Les instances de la valeur « niveau » sont ordonnées. Pour déterminer l'adéquation d'une tâche à un curriculum défini par le triplet $[G ; A ; n]$:

- nous considérons son type de tâches optimum qui est défini par un ensemble de valeurs de variables de types de tâches ;
- pour chaque valeur v_i de variable de type de tâches nous considérons le tag $[G ; A ; n_i]$;

- la tâche va être considérée comme conforme à tous les curricula [G ; A ; $n \geq \max (n_i)$].

Pour l'adéquation d'un exercice c'est le niveau le plus élevé, parmi l'ensemble des tâches de l'exercice, qui va déterminer l'adéquation globale de l'exercice.

Informations didactiques sur les ressources décrites à l'aide de M2DR

Le modèle M2DR permet trois niveaux de vision sur une ressource : tout d'abord une vision atomisée par la caractérisation de chacune des tâches, puis une vision globale de l'exercice où cette fois les tâches sont considérées en prenant en compte leurs interactions et leur agencement, ceci donnant une raison d'être de chacune d'elles. Enfin il permet d'avoir une vision de la ressource dans un corpus de ressources en permettant sa comparaison et son positionnement avec d'autres exercices. Pour chacun de ces niveaux nous explicitons maintenant les apports des différentes dimensions du modèle et l'exploitation didactique qui est permise.

Vision atomisée d'un exercice

Pour chaque tâche de l'exercice on est capable de la lier au MPR au moyen de son type de tâches optimum. Ceci permet dans un premier temps d'identifier le type de tâches le plus précis auquel appartient la tâche. La structuration du MPR nous permet d'affirmer que la tâche ne possède pas au moins une des caractéristiques des sous-types de tâches de son type de tâches optimum. Elle hérite par contre de toutes les informations liées aux types de tâches d'un niveau supérieur.

Par ailleurs le lien opéré avec le MPR permet d'associer à chaque tâche les différents éléments contenus dans le MPR, à savoir la ou les techniques permettant de la réaliser, ainsi que les technologies et théories permettant de justifier cette réalisation.

Cette information est contenue dans la première dimension du modèle M2DR. La première information didactique portée par cette vision est un panorama de l'ensemble des types de tâches qui sont présents dans l'exercice et, par conséquent, de l'ensemble des praxéologies potentiellement mobilisables pour sa réalisation. Il est possible de préciser ces informations selon la ou les institutions considérées. En effet, le MPR est construit en prenant en considération un certain nombre d'institutions (par exemple un éditeur qui souhaiterait diffuser et indexer ses ressources dans plusieurs pays devra, *a minima*, construire un MPR prenant en compte les curricula de ces différents pays). Par ailleurs, chaque

institution possède un modèle dominant (Gascón, 2014) qui va amener une restriction des praxéologies viables dans l'institution. Une fois la ressource positionnée dans une institution donnée, on pourra alors, à partir de la description dans M2DR, prendre en compte les travaux de Castela (2008) qui note l'importance, pour caractériser la tâche, de savoir si l'apprenant a, ou non, à sa disposition plusieurs techniques pour la réaliser la tâche. La deuxième dimension du modèle, qui contient les compléments facultatifs de chacune des tâches, permet de déterminer, toujours comme proposé par Castela, si le choix de la technique est laissé à la charge du résolveur ou est indiqué par l'énoncé. On dispose ainsi d'un élément de caractérisation de la complexité de l'exercice.

Vision globale d'un exercice

Dans la section précédente nous avons considéré chaque tâche indépendamment les unes des autres, cependant un exercice n'est pas une juxtaposition aléatoire de différentes tâches et chacune d'elles a une raison d'être au sein de l'exercice. C'est cet aspect de l'exercice que nous abordons en le regardant de manière globale.

Identification de l'objet principal d'étude de l'exercice

Dans un premier temps chaque tâche est associée à un générateur de type de tâches par le moyen de son type de tâches optimum. Une première information est donc de savoir si toutes les tâches relèvent ou non du même générateur. Dans la négative il est alors possible de déterminer d'éventuelles relations entre ces différents générateurs ; ainsi, par exemple, si une tâche est liée à un générateur relatif à la manipulation des expressions algébriques et une autre est liée à un générateur relatif à la résolution d'équations, il est possible que la première soit utile à la seconde.

Pour les tâches qui relèvent d'un même générateur de types de tâches elles sont positionnées les unes par rapport aux autres grâce à la structuration du MPR.

Ces informations sont données par les deuxième et troisième dimension du modèle, à partir des types de tâches optimum définis dans la 1^{ère} dimension. Elles permettent d'obtenir diverses informations sur l'exercice. Tout d'abord, si on considère un exercice comme un objet dont la finalité est de permettre l'étude d'une praxéologie donnée, on peut, au-delà de la diversité des tâches présentes dans un exercice, caractériser un objet principal d'étude associé à l'exercice. Autrement dit, au travers de l'analyse de la raison d'être des différentes tâches nous identifions une raison d'être globale de l'exercice. On peut ensuite caractériser les

modalités selon lesquelles cet objet principal est mis à l'étude, en particulier au travers de la présence d'étayages. Nous explicitons maintenant ces analyses.

Nous commençons par faire l'hypothèse, non contredite sur l'ensemble des exercices que nous avons étudiés¹⁶, que lorsque plusieurs générateurs de types de tâches sont présents dans un exercice, alors il existe des relations, éventuellement successives, d'utilité entre ces générateurs, jusqu'à un unique générateur auquel tous les autres sont, éventuellement par transitivité, utiles. Nous considérons alors uniquement le dernier générateur et les tâches qui lui sont rattachées.

Pour tous les exercices nous disposons d'un ensemble de tâches dont les types de tâches optimum appartiennent à un unique générateur, soit nativement soit après la réduction explicitée ci-dessus. Pour ces types de tâches optimum, diverses situations, ou combinaison de ces situations, sont possibles : répétition de tâches qui ont toutes le même type de tâches optimum ; tâches qui sont liées les unes aux autres par des relations de spécialisation – généralisation ; les tâches sont des variations les unes des autres relativement à un type de tâches pivot. On considère que le type de tâches optimum de plus haut niveau ainsi obtenu, éventuellement répété dans l'exercice, est l'*objet principal d'étude* de l'exercice. Ainsi dans l'exercice « Le coup du -1 » on identifie comme objet principal d'étude le type de tâches t_{trav} « Factoriser une somme de trois produits avec un facteur commun visible dans un seul produit ; l'expression initiale est à coefficients dans \mathbb{Z} ; l'expression factorisée est à coefficients dans \mathbb{Z} ; seuls les signes multipliés obligatoires sont visibles ». Ainsi, on « masque » les tâches t_1 à t_3 qui ont pour fonction de permettre l'étude de t_{trav} .

Les informations nécessaires à la détermination de l'objet principal d'étude de l'exercice sont contenues dans la 1^{ère} dimension du modèle M2DR sous forme de l'ensemble des types de tâches optimum et dans la 3^{ème} dimension de M2DR sous forme de l'ensemble des relations entre les tâches. Après avoir « réduit » l'exercice à son objet principal d'étude nous examinons la raison d'être de chaque tâche pour réaliser l'étude de cet objet principal.

¹⁶ Cette hypothèse serait sans doute contredite sur des problèmes longs, de type sujet de CAPES ou d'agrégation, mais serait alors vérifiée pour une partie ou sous-partie d'un tel énoncé.

Modalités de mise à l'étude de l'objet principal d'étude

Il existe deux situations différentes. La première est quand toutes les tâches sont du même type de tâches optimum et qu'il n'y a ni complément facultatif associé aux tâches ni d'objet ostensif, externe aux tâches, présents dans l'énoncé. L'objet principal d'étude est travaillé sans modalité particulière hormis la répétition.

Dans la seconde il y a présence de différents types de tâches optimum et/ou de compléments facultatifs pour une ou plusieurs tâches et/ou d'objets ostensifs externes aux tâches dans l'énoncé. Dans l'ensemble de ces cas nous considérons qu'il y a une modalité de travail de type *étayage*¹⁷ qui est mise en œuvre dans l'exercice. Plus particulièrement nous retenons trois types d'étayages¹⁸ parmi les six identifiés par Bruner (1983, pp. 277-279) : *la réduction des degrés de libertés*, *la signalisation de caractéristiques déterminantes* et *la présentation de modèles de solutions*.

La réduction des degrés de liberté correspond à l'objectif de diminuer la complexité de la tâche, par exemple en indiquant le choix d'une technique pouvant être utilisée ou en prenant en charge, ou en identifiant, certaines étapes de la technique. Ce type d'étayage est porté par le complément facultatif d'une tâche, par exemple « en utilisant le théorème de Pythagore », ou par une tâche qui est *un ingrédient de* ou *utile à* une autre tâche.

La signalisation de caractéristiques déterminantes permet au résolveur de la tâche de valider des sous-tâches correctement effectuées. Cette situation est illustrée dans l'exercice « erreur de signe » (Figure 5, p. 29). En effet, l'extrait de la production de l'élève appartient à la deuxième dimension de M2DR car associé à la définition d'aucune tâche. On peut considérer que la fonction de l'annotation de l'enseignant et les éléments barrés sont présents pour mettre en évidence un élément déterminant dans la réalisation de la tâche qui va être renforcé pour les tâches 2.B et 2.C par le complément facultatif « en faisant attention aux signes ».

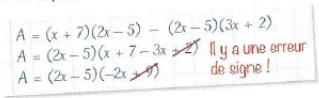
¹⁷ Sans le développer plus dans cet article nous considérons, dans la continuité de Bruner (1983), qu'un étayage est un moyen d'aider le résolveur dans la réalisation de la tâche, la tâche étant ici l'objet principal d'étude. Comme signalé dans (Astolfi, 2019) il faut noter l'aspect potentiel de la fonction d'étayage, la réalisation de celle-ci étant fortement sujette à la subjectivité du résolveur.

¹⁸ Les trois autres (*enrôlement*, *maintien de l'orientation* et *contrôle de la frustration*) ne nous semblent pas pouvoir être portés par un simple énoncé en l'absence d'interactions avec le résolveur.

Enfin la *présentation de modèles de solutions* est un moyen qui permet au résolveur de s'engager sur une démarche basée sur l'imitation. Ce type d'étayage peut être mis en évidence de manière explicite dans les compléments facultatifs de certaines tâches du type « en t'inspirant de » (Figure 3, p. 22) ou « de la même façon » (Figure 5, p. 29). Mais il est aussi présent de manière implicite par la structuration de certains exercices comme c'est le cas dans l'exercice « Le coup du -1 » (Figure 2, p. 17) où le bloc formé par les tâches 1.a et 1.b peut être considéré comme un modèle de solution, partiel, pour les tâches 2.a, 2.b et 2.c.

Ainsi, les informations permettant de déterminer les modalités de mise à l'étude de l'objet principal sont situées dans les trois dimensions du modèle M2DR. La première, qui contient les types de tâches optimum, va permettre de caractériser des exercices du type « répétition du même type de tâche ». La seconde, qui contient les compléments facultatifs associés aux différentes tâches et les éventuels objets ostensifs externes aux tâches, et la troisième, qui contient les relations entre les tâches et la structuration de l'exercice, vont contribuer à la mise en évidence de différents étayages.

37 Dylan doit factoriser l'expression littérale :
 $A = (x + 7)(2x - 5) - (2x - 5)(3x + 2)$.
 Voici sa copie :



1. Effectuer la factorisation correcte.
 2. De la même façon, en faisant attention aux signes, factoriser les expressions suivantes.
 $B = (4x - 3)(2x + 1) - 5x(4x - 3)$
 $C = (2x - 5)(x + 2) - (2x - 5)(3x - 7)$

Figure 5. - exercice "erreur de signe"¹⁹

Mise en perspective de ressources les unes par rapport aux autres et rapport au MPR

Après avoir montré de quelle manière le modèle M2DR permet tout d'abord d'avoir un regard sur chacune des tâches d'un exercice, puis un regard sur l'exercice de manière globale, en étudiant la raison d'être de chacune des tâches au regard des autres, nous proposons maintenant d'envisager le modèle M2DR comme moyen de situer des ressources les unes par rapport aux autres dans

¹⁹ Exercice n°37, p. 77. Maths Cycle 4, 3e. Mission indigo. Hachette éducation, ed. 2016.

un corpus de ressources, ou, de la même manière, de comparer différents états d'une même ressource initiale quand elle est amenée à évoluer.

On commence par identifier l'objet d'étude principal de chaque ressource, on obtient alors un ensemble de types de tâches. En utilisant les trois relations qui permettent de positionner les tâches les unes par rapport aux autres (même T_{opt} ; spécialisation ; variation) sur cet ensemble on peut alors positionner les ressources les unes par rapport aux autres dans le MPR.

Pour les ressources qui sont définies par un même objet principal d'étude on peut les différencier en étudiant les modalités de mise à l'étude tel que développé dans la section précédente.

Illustration sur un corpus d'exercices relatifs à la réduction

Dans son travail, Jolivet (2018, pp. 209-218) réalise la description de l'ensemble des exercices relatifs à la réduction issus d'un manuel scolaire de 4^e. Nous ne détaillons pas la description de chaque exercice mais nous retenons les éléments suivants comme illustratifs des apports du modèle M2DR.

Au niveau de l'analyse tâche par tâche si on considère l'exercice reproduit sur la Figure 6, p. 30 les six tâches à réaliser sont toutes décrites selon le triplet suivant [réduire ; expression ; si possible], avec expression qui prend les valeurs A à F. Lors de la détermination du type de tâches optimum nous obtenons par contre trois cas différents. Les tâches A ; B ; C et F ont pour type de tâches optimum le type de tâches « Réduire une expression pour laquelle il existe au moins deux monômes de même degré et dont les coefficients sont dans \mathbb{Z} ». La tâche D admet quant à elle le type de tâches optimum « Réduire une expression pour laquelle il existe au moins deux monômes de même degré et dont les coefficients sont dans \mathbb{N} ». Et la tâche E admet comme type de tâches optimum « Réduire une expression pour laquelle tous les monômes sont de degrés différents et dont les coefficients sont dans \mathbb{Z} ».

24 Réduire, si possible, les expressions suivantes.

$A = 8x - 3x$	$B = -8x - 3x$	$C = -8x + 3x$
$D = 8x + 3x$	$E = -8 + 3x$	$F = -x + 8x$

Figure 6. - reproduction de l'exercice 24²⁰

A contrario, dans chacun des exercices 38 et 40 (Figures 7 et 8, p. 31) toutes les tâches ont le même type de tâches optimum :

²⁰ Exercices 24 ; 38 ; 40 ; 43, pp. 35-37. Triangle 4^e, édition Hatier, 2011.

« Réduire une expression pour laquelle il existe au moins un monôme qui n'est pas sous forme canonique et dont les coefficients sont dans \mathbb{N} (resp. \mathbb{Z}) » pour l'exercice 38 (resp. 40).

38 Réduire, si possible, les expressions suivantes.

$A = 5x \times 4x$	$B = 7 \times 3x$	$C = 4 \times 2x^2$
$D = 4x \times 3$	$E = 5x^2 \times 2$	$F = 6x \times 3x$

Figure 7. - reproduction de l'exercice 38²⁰

40 Réduire, si possible, les expressions suivantes.

$A = -3 \times 5x^2$	$B = 4x \times (-3x)$
$C = 5 \times (-4x^2)$	$D = -5 \times (-2x^2)$
$E = -6x \times (-4x)$	$F = 4x^2 \times (-8)$

Figure 8. - reproduction de l'exercice 40²⁰

Ainsi la première dimension du modèle M2DR permet bien une caractérisation précise des savoirs travaillés dans l'exercice par le moyen du type de tâches optimum associé à chaque tâche. La précision de la caractérisation dépend de celle avec laquelle le MPR a été construit. Jolivet (2018a) note à ce propos qu'il n'est par exemple pas possible, avec le MPR sur lequel il s'appuie, de distinguer en termes de type de tâches optimum les tâches « réduire $7 \times 3x$ » et « réduire $4 \times 2x^2$ » de l'exercice 38. Il signale alors :

« Or on pourrait envisager comme pertinent de distinguer la présence de monômes de degré supérieur à un puisque cela peut nécessiter, dans la mise en œuvre des techniques, des éléments technologiques relatifs aux puissances. (...) le MPR, et plus particulièrement dans notre cas le système de variables et des valeurs des variables des générateurs de types de tâches, doivent être construits pour répondre aux enjeux de la recherche. Ainsi, si cette distinction apparaît comme un enjeu il faut réviser le générateur de types de tâches » (ibid., p. 217)

Au niveau global d'un exercice on peut donc tout d'abord apprécier la diversité ou l'homogénéité des tâches présentes. Dans le cas où il y a une diversité des tâches il est alors possible de les positionner les unes relativement aux autres par le moyen de la troisième dimension du modèle. Ainsi, si pour les exercices 38 et 40 il y a une homogénéité des tâches, dans l'exercice 43 (Figure 9, p. 32) on identifie quatre types de tâches optimum différents qui correspondent aux tâches A et D (T_{opt_A}) ; B et F (T_{opt_B}) ; C (T_{opt_C}) et enfin E (T_{opt_E}).

- 43 Réduire, si possible, les expressions suivantes.
- | | | |
|--------------------|---------------------|----------------|
| $A = 6x \times 3x$ | $B = 6x + 3x$ | $C = 6 + 3x$ |
| $D = 6 \times 3x$ | $E = -6x \times 8x$ | $F = -6x + 8x$ |

Figure 9. - reproduction de l'exercice 43²⁰

L'analyse des relations entre les tâches permet alors de mettre en évidence que A et D sont des spécialisations de E : les expressions sont du même type, à savoir des produits de monômes, mais les calculs de A et D sont dans \mathbb{N} alors que ceux de E sont dans \mathbb{Z} . Les tâches A et D sont des variations des tâches B et F autour du type de tâches T_{pivot} « réduire une expression dont l'expression ne contient pas de polynôme non monôme entre parenthèses ; à coefficients dans \mathbb{Z} ». Ce type de tâches est d'ailleurs un pivot entre toutes les tâches présentes dans l'exercice. Ceci permet d'avoir une vision synthétique de l'exercice comme permettant de faire travailler le type de tâches T_{pivot} de différentes manières (ici avec des calculs dans \mathbb{N} ou dans \mathbb{Z} et des monômes à réduire ou non). Cette approche permet d'obtenir une vision synthétique de l'exercice en le ramenant à un unique type de tâches, sorte de plus petit dénominateur commun entre les différentes tâches mobilisées, mais fait perdre la finesse de la description des savoirs en jeu. Ce processus peut amener à plusieurs types de tâches dans le cas où plusieurs générateurs sont mobilisés dans un même exercice comme c'est par exemple le cas pour l'exercice « le coup du -1 » présenté précédemment dans lequel il y a des tâches relevant de trois générateurs distincts : « développer une expression littérale » ; « factoriser une somme de deux polynômes » et « factoriser une somme de trois polynômes ».

Enfin la description des exercices par le moyen du modèle M2DR permet aussi de les comparer. Ainsi si on considère T_{pivot} , tel que défini ci-dessus, on obtient que les exercices 24 d'une part et 38 - 40 d'autre part permettent de faire travailler chacun une branche distincte de T_{pivot} , l'exercice 38 étant une spécialisation de l'exercice 40. On voit ainsi apparaître une cartographie des différents exercices du corpus. Ceci permet à la fois de déterminer avec précision les différents éléments travaillés à partir du corpus, mais aussi, si on reprend les différents types de tâches présents dans le MPR, de déterminer les éléments non travaillés par le moyen du corpus analysé.

Du pôle ontologique vers le pôle fonctionnel, une exploitation du modèle M2DR

Nous avons abordé la description de l'exercice par le moyen de son pôle ontologique afin de ne pas limiter l'examen de ses usages possibles à un cas particulier fixé *a priori*. Cependant, la description d'une ressource doit notamment permettre de la trouver. Nous avons déjà montré comment la description à l'aide du modèle M2DR permet de répondre à une recherche basée sur l'adéquation curriculaire (p. 24). Nous abordons maintenant le cas d'une recherche relative à un projet d'usage de la ressource, c'est-à-dire une intention didactique.

La question de l'intention didactique est particulièrement complexe comme le montrent par exemple les travaux de Portugais (1999, 1998). Il distingue notamment, dans une première classification, quatre couches d'intentions que la didactique va rencontrer : le niveau cognitif (infradidactique) ; le niveau microdidactique ; le niveau macrodidactique et le niveau noosphérique (Portugais, 1998, pp. 61-62). On peut aussi signaler les travaux de Sensevy dans le cadre de la théorie de l'action conjointe en didactique (TACD). Partant de la question de la compréhension de l'action de quelqu'un, il explique que « cela signifie en particulier comprendre son intention. Comprendre cette intention, ou ce système d'intentions, ce n'est pas certes comprendre forcément toute son action (en particulier ses conséquences), mais c'est en comprendre une partie essentielle » (Sensevy, 2010, p. 147) et il précise que pour lui « les intentions sont considérées comme toujours plus ou moins partagées et toujours plus ou moins externes à l'individu » (*ibid*, p. 147). Enfin Chevallard et Cirade évoquent la notion d'intention didactique dans ce passage : « Ce que la didactique a étudié d'abord, ce sont les conditions et contraintes créées par ce qu'on nomme la didactique, ensemble des « faits et gestes » personnels ou institutionnels inspirés par une intention didactique, soit une intention de faire qu'une personne ou une institution rencontre un certain contenu praxéologique » (Chevallard & Cirade, 2010, p. 42). On peut noter que tant Sensevy que Chevallard et Cirade situent l'intention didactique dans une temporalité amont par rapport à l'action. Ceci les différencie de Portugais qui a une approche en lien avec celle de Searle (1983) dont Pacherie (2007, p. 160) signale qu'il propose une distinction entre *intentions dans l'action* et *intentions antérieures*. Ces quelques éléments relatifs à la notion d'intention didactique en montrent bien la complexité.

Dans le but de mettre en relation un exercice et une intention didactique, nous en proposons une définition simplifiée : une intention didactique est la combinaison d'un savoir à travailler et des modalités de travail de ce savoir, définie antérieurement à l'action de l'apprenant.

Nous avons montré précédemment comment le modèle M2DR permet de caractériser les savoirs à travailler dans un exercice, aussi bien au niveau de la praxis que du logos. M2DR permet ainsi de retenir, ou éliminer, une ressource en fonction de la présence, ou de l'absence, d'un savoir donné. On peut noter que ce savoir à travailler définissant une intention didactique peut être aussi bien un type de tâches, une technique ou encore une technologie.

Les modalités de travail du savoir sont définies par deux éléments : le moment didactique (Chevallard, 2002) dans lequel se situe le travail et la présence ou non de tel ou tel type d'étayage (Bruner, 1983; Quintana et al., 2004) pour la réalisation du travail. L'identification d'étayages à partir d'informations des deuxième (objets ostensifs) et troisième dimensions (relations entre les tâches) de M2DR a été explicitée plus haut (*Modalités de mise à l'étude de l'objet principal d'étude*, p. 28). L'identification de la (des) technique(s) permettant de réaliser l'exercice et la présence de certaines relations entre les tâches, identifiées dans la troisième dimension de M2DR, permettent d'associer certaines ressources à certains moments didactiques. Ainsi, un exercice qui contient plusieurs tâches relevant toutes du même type de tâches optimum, correspond bien au moment du *travail de la technique* (voir par exemple les exercices 38 (Figure 7, p. 31) et 40 (Figure 8, p. 31)). Ou encore, la présence de la relation « être un ingrédient d'une technique de » et/ou de la relation « être utile à » est un élément qui permet d'associer l'exercice au moment de l'exploration du type de tâche et de l'émergence de la technique. Cette situation est illustrée par l'exercice DAG (Figure 3, p. 22) dans lequel il s'agit de construire une technique permettant de réaliser le type de tâches « développer un produit de trois facteurs ».

Discussion sur le modèle M2DR

Nous discutons dans cette section sur les apports et limites du modèle M2DR. Pour cela nous commençons par un retour sur la question de recherche 2 définie p. 10, puis nous abordons deux éléments que nous avons identifiés dans la problématique : la portée du modèle et sa fonctionnalité.

Retours sur la QR2

Nous avons répondu à la question QR2.1 précédemment (Adéquation d'une ressource décrite à l'aide de M2DR avec un curriculum, p. 24).

Concernant la question QR2.2, M2DR permet effectivement de caractériser précisément l'ensemble des savoirs en jeu dans un exercice par le moyen de la description des tâches puis de leurs types de tâches optimum. Ces derniers permettent de préciser non seulement les tâches à réaliser mais aussi les moyens existants (techniques) pour cette réalisation et les éléments de savoir les justifiant (technologie et théorie). Si, dans le modèle praxéologique de référence, les techniques sont décrites à l'aide d'un ensemble d'ingrédients constitués de types de tâches, il est alors possible d'identifier différents prérequis à la réalisation de l'exercice.

La question QR2.3 a été résolue par la définition des relations entre les tâches (troisième dimension de M2DR) et, notamment, leur interprétation pour mettre en évidence des étayages.

Pour la question QR2.4, la complexité d'une ressource est un élément multifactoriel. Deux critères de complexité au moins peuvent être identifiés dans un exercice décrit à l'aide de M2DR.

Le premier critère, au sens proposé par Castela (2008), est la distinction entre un énoncé où la technique est *e-convoquée* (pour énoncé convoquée) d'un énoncé où la technique est *r-convoquée* (pour résolveur convoquée, le résolveur est celui qui résout l'exercice). Ceci s'opère à deux niveaux à l'aide de M2DR. Dans un premier temps, il est possible de savoir si plusieurs techniques sont disponibles pour une tâche donnée à partir de son type de tâches optimum. Dans un deuxième temps, la deuxième dimension du modèle, qui contient le complément facultatif de chaque tâche, permet d'identifier la présence d'un élément de l'énoncé indiquant la technique à mobiliser. Par exemple, pour une tâche t_1 « calcule la longueur AB » où l'action à réaliser est *calcule* et le complément définitoire *la longueur AB*, la technique est r-convoquée dès lors que le « résolveur » dispose d'au moins deux techniques lui permettant de calculer une longueur (par exemple les théorèmes de Thalès et de Pythagore). Pour la tâche t'_1 « calcule la longueur AB à l'aide du théorème de Pythagore » où l'action à réaliser et le complément définitoire sont les mêmes que pour la tâche t_1 , la présence du complément facultatif « à l'aide du théorème de Pythagore » permet de caractériser une technique e-convoquée.

Le second critère de complexité d'une ressource définit si elle favorise la mise en œuvre de praxéologies personnelles. En effet, comme précisé lors de la présentation des générateurs de types de

tâches (p. 13), certaines valeurs de variables visent à identifier des praxéologies personnelles (par exemple la présence d'un cofacteur égal à 1 dans une expression à factoriser). La présence dans un exercice d'une tâche de type de tâches optimum utilisant une de ces valeurs est un facteur de complexité.

Portée du modèle M2DR

Lors de la formulation de la problématique nous avons posé la question de l'exploitation du modèle dans divers contextes. Nous l'abordons selon deux critères : les domaines mathématiques pour lesquels le modèle est pertinent et la prise en compte de diverses institutions. En particulier, la validité du modèle M2DR en dehors du domaine de l'algèbre scolaire qui a permis d'illustrer l'article.

Domaines mathématiques de mise en œuvre de M2DR

Le modèle M2DR dépend d'une part de l'existence d'un MPR représenté dans T4TEL, dans le domaine des exercices à décrire et, d'autre part, de la modélisation de la tâche proposée dans cet article. Le lien entre les deux est le type de tâches optimum.

En premier lieu, plusieurs travaux démontrent que l'on peut modéliser à l'aide de MPR bien plus que des éléments de l'algèbre scolaire. Ainsi, des MPR, basés directement sur T4TEL ou adaptés, ont été développés dans divers domaines, y compris certains mobilisant une activité plus heuristique que la manipulation d'expressions algébriques. L'ensemble des savoirs, en mathématiques et en français, pour le cycle 2 a été représenté informatiquement à partir de T4TEL dans le projet Cartographie des Savoirs (Chaachoua, 2018, p. 21 ; Mandin & Guin, 2014), dépassant largement le domaine de l'algèbre. De même Jolivet (2018a) présente un générateur de types de tâches sur le dénombrement d'une collection et dans Crisci (2020) propose une praxéologie de référence sur la division euclidienne à l'école et des éléments autour de praxéologies de l'algorithmique. Enfin, dans le projet MindMath²¹, deux MPR, basés sur une adaptation de T4TEL, sont construits. L'un sur l'algèbre du collège, qui intègre des activités de type modélisation, et l'autre sur la géométrie du collège, y compris dans sa dimension « raisonnement ». Le second MPR est un des résultats de la thèse de Lesnes-Cuisiniez (Lesnes-Cuisiniez, 2021 ; Lesnes-Cuisiniez & Grugeon-Allys, 2019).

En second lieu, la modélisation de la tâche proposée dans l'article est fonctionnelle sur la très grande majorité des tâches

²¹ <https://www.mindmath.education/>

rencontrées dans les manuels de mathématiques de l'école, du collège et, au moins, du début du lycée. Elle peut sans doute rencontrer des limites pour des tâches apparaissant dans des énoncés de type « problèmes ouverts ».

Il nous semble donc légitime d'affirmer que la portée du modèle va largement au-delà du domaine de l'algèbre scolaire. Il permet, *a minima*, de décrire une part importante des exercices proposés aux élèves du CP à la fin de la seconde. La production ou l'adaptation à partir de travaux existants, d'un MPR répondant aux besoins liés à la description des exercices, reste un préalable à l'utilisation du modèle M2DR.

Modèle M2DR et modifications de curriculum

Un deuxième aspect relatif à la portée du modèle M2DR est la prise en compte de différentes institutions, géographiques et/ou temporelles (évolutions de curriculum). Lors de la construction du MPR le choix est fait de prendre en compte un ensemble d'institutions, ainsi certains types de tâches, techniques, technologies et théories sont présents ou absents du MPR et donc de la description des ressources. Le MPR est construit pour répondre aux besoins de description des ressources. Pour répondre à une évolution de ces besoins, il est possible de modifier le MPR. Nous distinguons deux cas : 1) l'apparition de nouveaux types de tâches et des praxéologies associées, 2) l'ajout ou la suppression de techniques, technologies, théories pour des types de tâches déjà existants. Le premier va nécessairement se traduire par l'apparition de nouveaux exercices qui seront décrits sur la base du MPR enrichi par les nouvelles praxéologies ; les exercices déjà décrits ne sont pas impactés. Dans le second, les types de tâches, et donc les types de tâches optimum des exercices, ne sont pas modifiés. Les descriptions déjà réalisées ne sont pas modifiées, ce sont les informations qui en sont déduites (techniques disponibles, prérequis, etc.) qui sont actualisées. Le changement de niveau scolaire d'une praxéologie ne nécessite pas non plus de décrire à nouveau l'exercice ; c'est uniquement le calcul de son adéquation institutionnelle qui est à reprendre à partir des nouveaux niveaux déclarés pour les praxéologies concernées. Le modèle M2DR est donc robuste face aux modifications curriculaires et le coût de la mise à jour des descriptions des ressources est limité.

Nous avons vérifié que le modèle M2DR répond bien aux objectifs qui lui étaient assignés dans les questions de recherche, et nous avons montré que sa portée dépasse largement le cadre l'algèbre scolaire. Nous revenons sur son opérationnalité.

Opérationnalité du modèle M2DR

Indépendance de la description par rapport au descripteur

Pour que le partage de la description des ressources soit pertinent il est notamment nécessaire que cette description soit la même quel que soit le descripteur. L'utilisation d'un MPR, qui est une référence commune à tous les descripteurs, est un premier facteur d'indépendance. Un deuxième facteur est l'explicitation du processus de description d'un exercice à l'aide de M2DR, dont certaines étapes peuvent être de nature algorithmique et assistées à l'aide d'interfaces informatiques (navigation dans le MPR et calcul du type de tâches optimum par exemple). Nous ne développons pas plus cet aspect qui nous éloigne du cœur de cet article mais divers éléments à ce propos sont disponibles dans Jolivet (2018a).

Automatisation du processus de description

La description d'un volume important de ressources amène à interroger le coût (financier, humain, temporel, en compétences, etc.) du processus de description. Son automatisation serait un élément de réponse ; cependant elle ne nous semble pas réaliste d'une manière générale. Quelques cas particuliers pour des exercices d'algèbre avec une reconnaissance automatique de la forme d'expressions sont peut-être envisageables, mais nous restons prudents sur cette question en l'absence de travaux menés par nous dans cette direction. Une assistance au processus de description, à l'aide d'interfaces informatiques dédiées, nous paraît une piste nettement plus réaliste et d'une portée plus importante.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans cet article, nous avons présenté un modèle de description didactique de ressources de type exercices de mathématiques. Basé sur l'utilisation d'un MPR représenté dans T4TEL, il vise tout d'abord à décrire *ce qu'est* la ressource, i.e. son pôle ontologique. Pour cela nous avons proposé une modélisation de la tâche et sa compréhension, dans un exercice, à différents niveaux d'organisation. Tout d'abord une vision atomisée pour obtenir sa dimension épistémologique avec son type de tâches optimum issu d'une praxéologie, ce qui permet de la situer globalement dans un modèle praxéologique de référence. A un niveau intermédiaire, la tâche est examinée comme constituant d'un ensemble de tâches d'un exercice, et reliée aux autres tâches par le moyen des relations entre elles qui définissent la raison d'être de chacune de ces tâches.

Enfin, une vision globale de l'exercice permet de le caractériser à l'aide d'un objet principal d'étude, ce qui permet alors de comparer des exercices entre eux.

La généralité du modèle est de permettre de décrire des exercices dans différents domaines des mathématiques scolaires pour des niveaux allant au moins du cycle 2 au début du lycée. La question de la généralité peut aussi être abordée du point de vue des ressources pouvant être décrites. Nous n'avons considéré que des exercices « papier » ; la question de la portée du modèle reste ouverte pour d'autres types d'exercices, par exemple des exercices numériques interactifs. Nous pensons que, dans ce cas, la deuxième dimension du modèle, *objets ostensifs*, aura une part plus importante et que la dimension interactive de l'exercice amènera à caractériser des étayages potentiels supplémentaires.

L'approche ontologique détache la description de l'exercice de l'adéquation, ou non, à une fonction particulière. L'information sur les fonctions potentielles de l'exercice a été ajoutée à cette dimension ontologique dans M2DR avec la description des savoirs travaillés, des modalités de travail, de la complexité de l'exercice et de son adéquation au curriculum. Ainsi le modèle proposé permet d'améliorer l'existant puisqu'il prend en charge, de manière unifiée, des questions qui étaient abordées de manières dispersées et ponctuelles dans différents modèles ou grilles d'analyses. Par rapport aux différentes approches de description d'exercices, citées dans l'état de l'art, le modèle ne prend pas en charge les informations de type « bibliothécaire » (auteur, lieu de parution, langue de la ressource...), et est complémentaire aux informations décrites, par exemple, en utilisant la norme LOM. Il permet de répondre à la critique d'Ulrich sur l'inefficacité de cette norme pour chercher des ressources selon des critères didactiques.

Nous concluons maintenant cet article en évoquant trois perspectives d'exploitation du modèle parmi les nombreuses possibles. Nous ne présentons pas celles de développement informatique qui sortent du cadre de cet article. Ces perspectives sont développées et illustrées dans Jolivet (2018a), en particulier la description du processus qui amène à la représentation informatique d'un MPR-T4TEL et sa mise en œuvre sur plusieurs exemples en algèbre et en numération. On y trouve aussi la présentation d'une exploitation du modèle dans le cadre d'une collaboration avec des informaticiens. Ceci donne un sens supplémentaire à l'utilisation du cadre T4TEL.

La première perspective est de changer de paradigme en exploitant le modèle non plus pour décrire des ressources

existantes et interroger leur pertinence au regard d'un projet didactique, mais pour produire des ressources comme réponse à un projet didactique. La génération de ressources de type exercices pour répondre à des besoins d'enseignants est abordée dans divers travaux (par exemple Bouhineau et al., 2008 ; Guin & Lefevre, 2013). Pour de premiers éléments sur l'exploitation de M2DR à des fins de génération guidée par une intention didactique nous renvoyons à (Jolivet et al., 2019) et à (Jolivet, 2020).

Une deuxième piste est d'exploiter les différents niveaux de description des ressources pour la conception de parcours d'apprentissage. Pour cela on peut exploiter d'une part la description précise des savoirs mis en jeu dans chaque ressource et leurs modalités de mise en œuvre d'une part, et, d'autre part, le positionnement des ressources relativement l'une à l'autre. Nous retrouvons une des perspectives ouvertes par Chaachoua et Bessot (2019) quand ils évoquent, à partir de l'introduction de la notion de variable dans le cadre T4TEL, la possibilité de « concevoir et réaliser des parcours d'étude et de recherche fondés épistémologiquement sur un modèle épistémologique de référence » (ibid., p. 244). Ceci rejoint aussi le questionnement porté par Castela (2018b, 2018a) sur la possibilité d'aider les enseignants à sélectionner des tâches. Ainsi le modèle M2DR pourrait alimenter un service EIAH visant à aider l'enseignant dans le choix de ressources et/ou la conception de parcours d'apprentissage. Il n'est donc pas question de mettre le modèle directement entre les mains d'enseignants²² mais d'exploiter la qualité des descriptions obtenues pour les aider dans leur travail.

La troisième perspective est d'utiliser M2DR comme outil : pour l'analyse didactique de manuels scolaires, par exemple pour résoudre la difficulté de la mise en relation tâche – type de tâches par le moyen du type de tâches optimum ; ou, pour comparer différentes descriptions d'une ressource à différents moments de son évolution dans une approche dynamique comme celle portée par l'approche documentaire du didactique, et ainsi aborder le pôle génétique de l'objet proposé par Le Moigne. Ces exploitations de M2DR pourraient être envisagées dans le cadre de la formation des enseignants pour aider à comprendre et analyser les ressources.

²² Dans le chapitre XIV de Jolivet (2018a) il y a une analyse des résultats d'un focus group réalisé avec un public d'enseignants qui a porté, notamment, sur la réponse du modèle à leurs besoins de description. Nous ne développons pas cet aspect dans l'article. Voir aussi (Jolivet, 2018b)

BIBLIOGRAPHIE

- ASTOLFI, K. (2019). *Caractérisation des étayages dans des exercices de mathématiques Application à l'étude de manuels scolaires* [Mémoire de Master 2]. Université Grenoble Alpes (France).
- BODIN, A. (2003). Comment classer les questions de mathématiques ? *Communication au colloque international du Kangourou, Paris*. www.irem.univ-mrs.fr/IMG/doc/Classification_des_énonces_mathematiques.doc
- BODIN, A. (2004). *Proposition de nouvelle taxonomie pour les énoncés de mathématiques Classement par niveaux hiérarchisés de complexité cognitive*. https://www.apmep.fr/IMG/pdf/Taxonomie_A_Bodin.pdf
- BOSCH, M., & GASCON, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. Dans A. Mercier & C. Margolinas (Eds.). *Balises pour la didactique des mathématiques : cours de la 12e école d'été de didactique des mathématiques*, 107-122.
- BOUHINEAU, D., CHAACHOUA, H., & NICAUD, J.-F. (2008). Helping teachers generate exercises with random coefficients. *International Journal of Continuing Engineering Education and Life Long Learning*, 18(5-6), 520-533.
- BRUNER, J. S. (1983). *Le développement de l'enfant : Savoir-faire, savoir dire*. PUF.
- CASTELA, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherche en didactique des mathématiques*, 28(2), 135-182.
- CASTELA, C. (2018a). Herramientas para desentrañar lo que abarca la noción sibilina de 'habilidad de aplicar un teorema dado'. *Revista de Ciencia y Tecnología*, 34(2).
- CASTELA, C. (2018b). Outiller les enseignants pour la sélection de tâches mathématiques dans les manuels. *Actes du colloque EMF 2018*. EMF 2018, Gennevilliers. <https://emf2018.sciencesconf.org/resource/page/id/21>
- CHAACHOUA, H. (2010). *La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique des EIAH. Etudes de cas : La modélisation des connaissances des élèves*. [HDR]. Université Joseph Fourier, Grenoble 1.
- CHAACHOUA, H. (2018). T4TEL, un cadre de référence didactique pour la conception des EIAH. In J. Pilet & C. Vendeira (Éds.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques 2018* (p. 8-25). IREM de Paris - Université Paris Diderot; hal-02421410. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02421410/document>
- CHAACHOUA, H., & BESSOT, A. (2019). La notion de variable dans le modèle praxéologique. *Educação Matemática Pesquisa : Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 21. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i4p234-247>
- CHAACHOUA, H., FERRATON, G., & DESMOULINS, C. (2013). Utilisation du modèle praxéologique de référence dans un EIAH. In G. Cirade, M. Artaud, M. Bosch, J.-P. Bourgade, Y. Chevillard, C. Ladage, & T. A. Sierra (Éds.), *Evolutions contemporaines du rapport aux*

- mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société (p. 301-324). <https://citad4.sciencesconf.org/>
- CHEVALLARD, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherche en didactique des mathématiques*, 12(1), 83-121.
- CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-265.
- CHEVALLARD, Y. (2002). Organiser l'étude. 1. Structures & Fonctions. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Éds.), *Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques* (p. 3-22). La Pensée Sauvage, Grenoble.
- CHEVALLARD, Y., & CIRADE, G. (2010). Les ressources manquantes comme problème professionnel. In G. Gueudet & L. Trouche (Éds.), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (Juin 2010, p. 41-55). Presses Universitaires de Rennes et INRP.
- Coulangue, L., Drouhard, J.-P., Dorier, J.-L., & Robert, A. (Éds.). (2012). *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives*. La Pensée Sauvage.
- CRISCI, R. (2020). *Etude des conditions de viabilité d'une approche basée sur l'algorithmique et la programmation pour l'apprentissage de la division euclidienne à l'école primaire* [Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes]. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03116813>
- CROSET, M.-C. (2009). *Modélisation des connaissances des élèves au sein d'un logiciel éducatif d'algèbre. Etude des erreurs stables inter-élèves et intra-élève en termes de praxis-en-acte*. [Université Joseph Fourier - Grenoble 1]. <http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/44/45/57/PDF/these.pdf>
- CROSET, M.-C., & CHAACHOUA, H. (2016). Une réponse à la prise en compte de l'apprenant dans la TAD : la praxéologie personnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 36(2), 161-194.
- FERRATON, G. (2011). *Rapport institutionnel à l'objet calcul littéral au collège : Construction et utilisation d'un modèle praxéologique de référence pour les trois types de tâche réduire, développer et factoriser une expression littérale*. [Mémoire de Master 2 IC2A].
- GASCON, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática*, 99-123.
- GRAS, R. (1979). *Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques* [Thèse de doctorat]. Université de Rennes I.
- GUEUDET, G., & TROUCHE, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants : Genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Education & didactique*, 2(3), 7-33.
- GUIN, N., & LEFEVRE, M. (2013). From a Customizable ITS to an Adaptive ITS. In H. C. Lane, K. Yacef, J. Mostow, & P. Pavlik (Éds.), *Artificial Intelligence in Education* (p. 141-150). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-39112-5_15

- JOLIVET, S. (2018a). *Modèle de description didactique de ressources d'apprentissage en mathématiques, pour l'indexation et des services EIAH* [Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes]. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-02079412/document>
- JOLIVET, S. (2020). Modèle de description didactique d'exercices de mathématiques : De la description à la génération. *Actes de la XXe école d'été de didactique des mathématiques*. XXe école d'été de didactique des mathématiques, Autrans, France.
- JOLIVET, S. (2018b). Descripteurs didactiques d'exercices de mathématiques : Catégorisation ; utilité et utilisabilité d'un modèle. *Actes du colloque EMF 2018*, 737-745.
- JOLIVET, S., DESMOULINS, C., & CHAACHOUA, H. (2019). Génération d'exercices de mathématiques guidée par une intention didactique, exploitation d'un modèle de description didactique. *Atelier du groupe de travail sur l'adaptation et la génération d'activités dans les EIAH*. EIAH 2019, Paris. https://projets-lium.univ-lemans.fr/gt-adaptation/wp-content/uploads/sites/15/2019/05/Atelier-EIAH2019-Adaptation_Jolivetetal.pdf
- KIERAN, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 707-762). Information Age Publishing.
- LE MOIGNE, J.-L. (2006). *La théorie du système général. Théorie de la modélisation*. (5e édition). Presses Universitaires de France. <http://www.mcxapc.org/inserts/ouvrages/0609tsgtm.pdf>
- LESNES-CUISINIEZ, E. (2021). *Modélisation didactique de parcours d'apprentissage dans un EIAH pour l'entrée dans le raisonnement géométrique au cycle 4, en appui sur les problèmes de construction de figures planes* [Thèse de doctorat]. Université de Paris.
- LESNES-CUISINIEZ, E., & GRUGEON-ALLYS, B. (2019, juin). Modèle d'Exercices et Parcours d'Apprentissage Prenant en Compte le Raisonnement de l'Élève en Mathématiques au Collège. *Conférence sur les Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain*. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02863439>
- LIBBRECHT, P., & DESMOULINS, C. (2009). A Cross-curriculum Representation for Handling and Searching Dynamic Geometry Competencies. In D. Dicheva, R. Mizoguchi, & J. Greer (Éds.), *Semantic Web Technologies for e-Learning* (p. 136-155). IOS Presse.
- LOISEAU, M. (2009). *Élaboration d'un modèle pour une base de textes indexée pédagogiquement pour l'enseignement des langues* [Thèse de doctorat, Université Stendhal - Grenoble III]. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00440460>
- MANDIN, S., & GUIN, N. (2014). Basing Learner Modelling on an Ontology of Knowledge and Skills. *2014 IEEE 14th International Conference on Advanced Learning Technologies*, 321-323.
- PACHERIE, E. (2007). Is collective intentionality really primitive? In M. Beany, C. Penco, & M. Vignolo (Éds.), *Mental processes : Representing and inferring* (p. 153-175). Cambridge Scholars Press. https://jeannicod.ccsd.cnrs.fr/ijn_00353603

- PAQUETTE, G. (2007). An Ontology and a Software Framework for Competency Modeling and Management. *Educational Technology & Society*, 10(3), 1-21.
- PERNIN, J.-P. (2006). Normes et standards pour la conception, la production et l'exploitation des EIAH. In M. Grandbastien & J.-M. Labat (Éds.), *Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain* (p. 201-222). Hermès et Lavoisier.
- PILET, J. (2012). *Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : Modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation* [Université Paris Diderot (Paris 7)]. <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00784039>
- PILET, J. (2015). Réguler l'enseignement en algèbre élémentaire par des parcours d'enseignement différencié. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 35(3), 271-312.
- PORTUGAIS, J. (1999). L'intentionnalité et le cognitif. In G. Lemoyne & F. Conne (Éds.), *Le cognitif en didactique des mathématiques* (p. 71-102). Les presses de l'Université de Montréal.
- PORTUGAIS, J. (1998). Esquisse d'un modèle des intentions didactiques. In J. Brun, F. Conne, R. Floris, & M. L. Schubauer-Leoni (Éds.), *Actes des secondes journées didactiques de la Fouly* (p. 57-88).
- QUINTANA, C., REISER, B. J., DAVIS, E. A., KRAJCIK, J., FRETZ, E., DUNCAN, R. G., KYZA, E., EDELSON, D., & SOLOWAY, E. (2004). A Scaffolding Design Framework for Software to Support Science Inquiry. *Journal of the Learning Sciences*, 13(3), 337-386. https://doi.org/10.1207/s15327809jls1303_4
- ROBERT, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner. *Recherches en didactique des mathématiques*, 18(2), 139-190.
- RUIZ MUNZON, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional* [Thèse de doctorat]. Universitat Autònoma de Barcelona.
- RUIZ-MUNZON, N., BOSCH, M., & GASCON, J. (2013). Comparing approaches through a reference epistemological model: The case of school algebra. *Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2870-2879. http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG16/WG16_Bosch.pdf
- SAYAC, N., & GRAPIN, N. (2013). Facteurs de compétence et de complexité en mathématique : Un outil au service de la formation des enseignants. *Actes du 25ème colloque de l'ADMEE*, 8. http://www.admee2013.ch/ADMEE-2013/7_files/Sayac-ADMEE-2013.pdf
- SEARLE, J. R. (1983). *Intentionality : An essay in the philosophy of mind*. Cambridge university press.
- SENSEVY, G. (2010). *Formes de l'intention didactique, collectifs, et travail documentaire*. Presses Universitaires de Rennes et INRP.
- SFARD, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions : Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 1-36.

Trouche, L. (2003). *Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : Nécessité des orchestrations* [HDR, Paris 7]. <https://telearn.archives-ouvertes.fr/hal-00190091>

ÜLLRICH, C. (2005). The learning-resource-type is dead, long live the learning-resource-type. *Learning Objects and Learning Designs*, 1(1), 7-15.

VAN ASSCHE, F. (2007, septembre 18). *Linking Learning Resources to Curricula by using Competencies* [Paper]. First International Workshop on Learning Object Discovery & Exchange, Crête.

WILEY, D. A. (2002). Connecting learning objects to instructional design theory : A definition, a metaphor, and a taxonomy. In D. A. Wiley (Éd.), *The instructional use of learning objects* (p. 3-24). Agency for Instructional Technology and Association for Educational Communications & Technology.

<http://members.aect.org/publications/InstructionalUseofLearningObjects.pdf#page=7>

ANNEXES

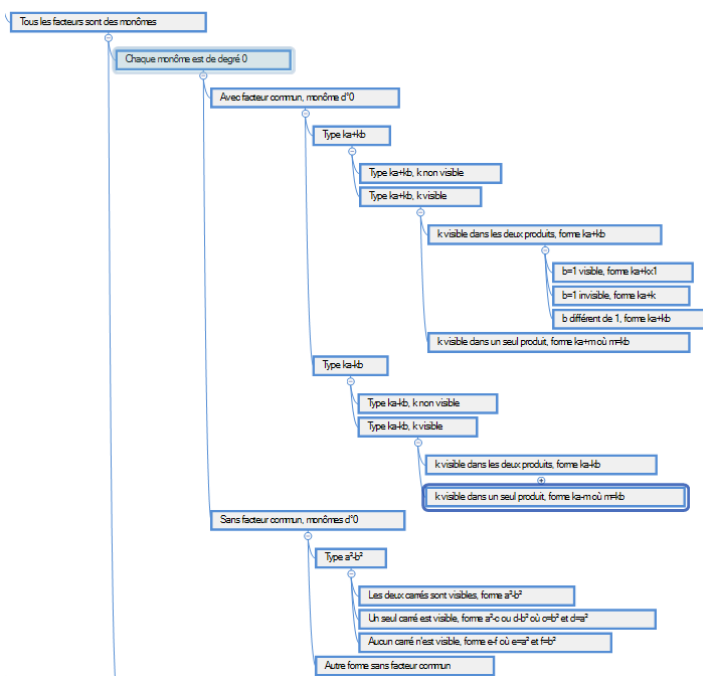


Figure 10. - Valeurs de la variable 1, forme de la somme, du générateur de type de tâches "factoriser une somme de deux produits" (1/3), d'après Jolivet (2018a)

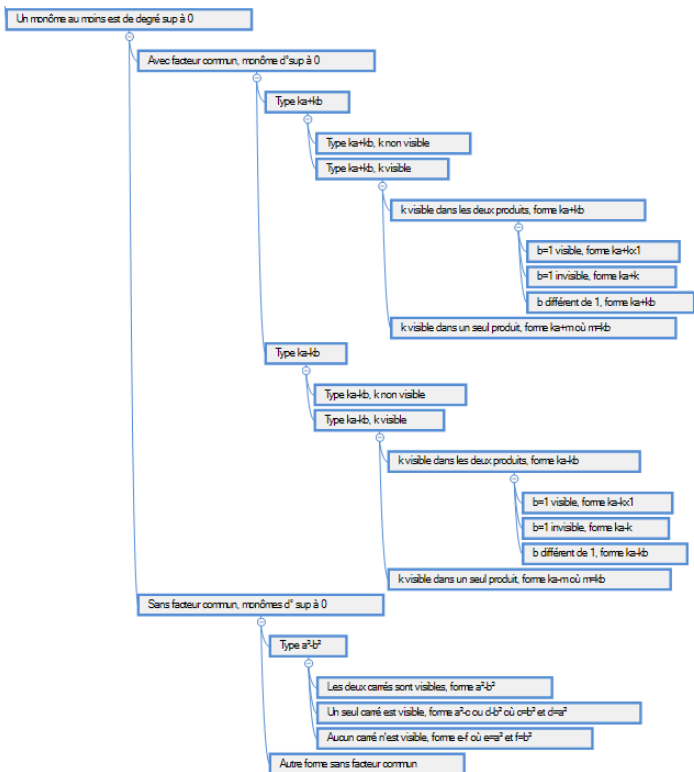


Figure 11. - Valeurs de la variable 1, forme de la somme, du générateur de type de tâches "factoriser une somme de deux produits" (2/3), d'après Jolivet (2018a)

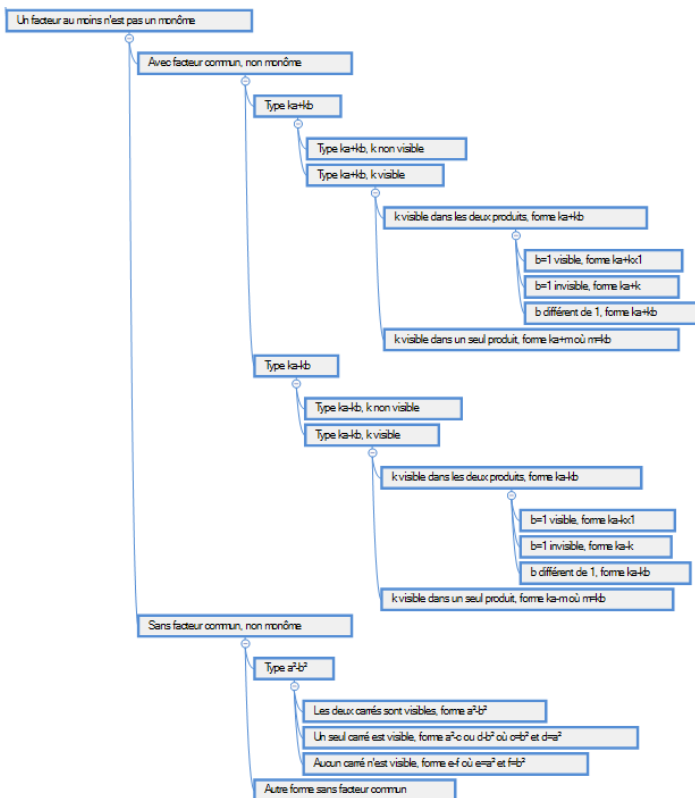


Figure 12. - Valeurs de la variable 1, forme de la somme, du générateur de type de tâches "factoriser une somme de deux produits" (3/3), d'après Jolivet (2018a)

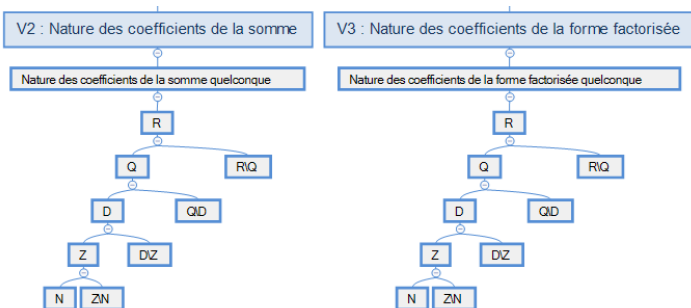


Figure 13. - Valeurs des variables V2 et V3 du générateur de type de tâches "factoriser une somme de deux produits", d'après Jolivet (2018a)

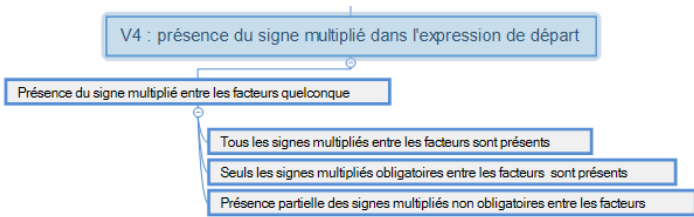


Figure 14. - Valeurs des variables V2 et V3 du générateur de type de tâches "factoriser une somme de deux produits", d'après Jolivet (2018a)