



**HAL**  
open science

# Une solution explicite monodimensionnelle d'un modèle simplifié de couplage stationnaire thermohydraulique–neutronique

Stéphane Dellacherie, Olivier Lafitte

## ► To cite this version:

Stéphane Dellacherie, Olivier Lafitte. Une solution explicite monodimensionnelle d'un modèle simplifié de couplage stationnaire thermohydraulique–neutronique. *Annales mathématiques du Québec*, 2017, 41 (2), pp.221-264. 10.1007/s40316-016-0073-7. hal-03857559

**HAL Id: hal-03857559**

**<https://hal.science/hal-03857559>**

Submitted on 17 Nov 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Une solution explicite monodimensionnelle d'un modèle simplifié de couplage stationnaire thermohydraulique–neutronique

Stéphane Dellacherie<sup>1,2,3</sup> · Olivier Lafitte<sup>1,4</sup>

Received: 29 January 2016/Accepted: 3 October 2016  
© Fondation Carl-Herz and Springer International Publishing Switzerland 2016

**Abstract** We study a monodimensional stationary system coupling a simplified thermohydraulic model to a simplified neutronic model based on the diffusion approximation with one energy group. We observe that this non-linear coupled model can be studied under two points of view and we show that solving this model is equivalent to the resolution of a non-linear scalar autonomous ordinary differential equation of order 1. As a consequence, it is possible to obtain an explicit solution without using an iterative coupling algorithm solving successively the thermohydraulics and the neutronics. Moreover, we obtain an analytic solution in a simple case. The explicit results obtained with our analytical solutions confirm the numerical results obtained with the iterative classical thermohydraulics–neutronics algorithm.

**Keywords** Ordinary differential equation · Operator spectrum · Thermohydraulics · Neutronics · Models coupling

**Résumé** Nous étudions un système stationnaire monodimensionnel couplant un modèle simplifié de thermohydraulique à un modèle simplifié de neutronique dans l'approximation par la diffusion à un groupe en énergie. Nous montrons que ce modèle de couplage non-linéaire peut être abordé sous deux angles différents et qu'il peut être ramené à la résolution d'une équation différentielle ordinaire non-linéaire scalaire autonome d'ordre 1. Il est ainsi possible d'obtenir une solution explicite sans passer par un algorithme itératif résolvant successivement la thermohydraulique et la neutronique. De plus, nous obtenons une solution analytique dans un cas simple. Les résultats explicites obtenus avec nos solutions analytiques

---

✉ Stéphane Dellacherie  
stephane.dellacherie@cea.fr

<sup>1</sup> Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives, CEA, DEN, DM2S, STMF, 91191 Gif-sur-Yvette, France

<sup>2</sup> LRC-Manon, Laboratoire J.-L. Lions, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), 4 place Jussieu, 75005 Paris, France

<sup>3</sup> École Polytechnique de Montréal, C.P. 6079, succ. Centre-ville, Montreal, QC H3C 3A7, Canada

<sup>4</sup> Sorbonne Paris Cité, LAGA, CNRS (UMR 7539), Université Paris 13, 99 Avenue J.-B. Clément, 93430 Villetaneuse Cedex, France

confirment les résultats numériques obtenus avec l'algorithme itératif classique de couplage thermohydraulique–neutronique.

**Mots clés** Équation différentielle ordinaire · Spectre d'opérateur · Thermohydraulique · Neutronique · Couplage de modèles

**Mathematics Subject Classification** 34B24 · 34B30 · 76B99 · 82D75

## 1 Introduction

Le couplage entre les équations décrivant le chauffage d'un fluide caloporteur dû aux réactions de fission dans un cœur de réacteur nucléaire et les équations décrivant le transport des neutrons au sein du cœur est un enjeu important pour le design de cœurs innovants ainsi que pour les études de sûreté nucléaire. Ce couplage dit *couplage thermohydraulique–neutronique* est complexe du point de vue technologique car il consiste à coupler des modèles très différents résolus par deux codes de calcul complexes – un code de thermohydraulique et un code de neutronique –, souvent développés par des équipes aux compétences très différentes (incluant le génie logiciel), constituées de nombreuses personnes [1–3] puisque les équations de la thermohydraulique – équations non-linéaires de type Euler ou Navier–Stokes – et de la neutronique – équation linéaire de type Boltzmann – sont issues de théories très différentes. Ce couplage (qui est non-linéaire) est aussi complexe du point de vue mathématique. En effet, la nature des problèmes mathématiques résolus respectivement par les thermohydrauliciens et par les neutroniciens est totalement différente: le thermohydraulicien résoudra des équations de transport non-linéaires avec conditions initiales et aux limites (déduites des équations d'Euler ou de Navier–Stokes), alors que le neutronicien recherchera plutôt la plus petite valeur propre d'un opérateur linéaire (déduit de l'équation de Boltzmann du transport des neutrons). On pourra par exemple consulter [4–6] pour une description de ce couplage à l'aide d'outils industriels ainsi que des équations résolues dans chaque cas. Notons que dans [7], les auteurs proposent un couplage basé sur des outils libres avec un modèle de neutronique simplifié. On pourra aussi consulter [8] pour une description du couplage entre un modèle de thermique de type équation de la chaleur et un modèle de neutronique basé sur une approximation multigroupe de l'équation de Boltzmann, les calculs étant réalisés à l'aide de codes de calcul industriels.

Ce contexte rend difficile une compréhension fine des difficultés mathématiques de fond induites par ce couplage, qu'elles soient intrinsèques à la nature mathématique du couplage, ou à l'algorithme de couplage dont le rôle est de faire communiquer les informations entre les codes de calcul pour converger vers une solution du système couplé global (lorsqu'elle existe). Ainsi, très souvent, des résultats numériques de couplage thermohydraulique–neutronique sont présentés sans aucune description des équations résolues par chacun des codes (voir par exemple [1, 2, 9]).

Aussi, afin de mieux analyser ces difficultés, on se propose d'étudier du point de vue théorique un modèle simplifié (mais non-linéaire) de couplage stationnaire thermohydraulique–neutronique. Pour cela, on réduit la thermohydraulique à une équation de transport à débit constant de l'enthalpie interne du fluide caloporteur<sup>1</sup> couplée *via* un

<sup>1</sup> En régime stationnaire, ce modèle simplifié de thermohydraulique est néanmoins parfaitement justifié dans le cadre de l'approximation bas Mach [10–12].

terme source à la neutronique qui est modélisée par une équation de réaction–diffusion sur le flux neutronique<sup>2</sup> (ce qui correspond à l’approximation du transport des neutrons par la diffusion à un groupe en énergie). Soulignons que dans [14] où est réalisée une étude purement numérique, le modèle de neutronique est identique à celui que l’on utilise ici, le modèle de thermohydraulique étant cependant plus complexe. Dans [15], le modèle de neutronique est également identique mais avec une extension à deux groupes en énergie. Aucune solution analytique n’est par contre proposée pour ce modèle à deux groupes.

Ce modèle de couplage simplifié est intéressant car il permet d’une part de rappeler les concepts importants de la neutronique dans un cadre beaucoup plus simple (mais non-trivial, le couplage demeurant non-linéaire) que celui des équations d’Euler ou de Navier–Stokes couplées à l’équation de Boltzmann. Ainsi, on souligne que le couplage peut être abordé sous deux angles *a priori* différents selon que la puissance du cœur est ou n’est pas connue: dans le premier cas, l’on recherche le coefficient multiplicateur  $k_{eff}$  alors que dans le second cas, l’on recherche l’enthalpie de sortie  $h_s$ . D’autre part, malgré sa simplicité apparente, ce modèle permet l’établissement de résultats d’existence et d’unicité non triviaux – voir les Théorèmes 3.2 et 3.4 – et de diverses propriétés dont certaines classiques en neutronique – voir par exemple le Lemme 3.1. De plus, sous des hypothèses de modélisation supplémentaires, il est possible d’obtenir des solutions analytiques – voir les Corollaires 4.1 et 4.2 – restituant des phénomènes classiques dus au couplage de la thermohydraulique avec la neutronique tel que le déplacement du maximum du flux neutronique vers l’entrée du cœur du fait de l’effet Doppler (voir la Fig. 1). Notons que ces solutions analytiques pourraient ensuite être utilisées dans le couplage de codes industriels pour accélérer le processus de convergence.

Ce travail est organisé comme suit. On présente dans la Sect. 2 le modèle simplifié de couplage thermohydraulique-neutronique ainsi que le couplage vu sous deux angles différents (*Recherche de l’enthalpie de sortie  $h_s$*  puis *Recherche du coefficient multiplicateur  $k_{eff}$* ). On s’attache également à expliciter les liens entre ces deux approches. Lorsque le coefficient de diffusion et la section efficace de fission sont constants (la section efficace d’absorption demeurant dépendante de l’enthalpie), on détermine dans la Sect. 3 une solution de ce modèle de couplage pour chacune des deux approches en se ramenant à une équation différentielle ordinaire non-linéaire scalaire autonome d’ordre 1 sur l’enthalpie interne du fluide caloporteur. Puis on calcule dans la Sect. 4 cette solution à l’aide de fonctions spéciales lorsque la section efficace d’absorption dépend de façon affine de l’enthalpie interne. Enfin, des résultats numériques sont présentés dans la Sect. 5 pour le cas affine, résultats obtenus aussi bien avec les formules établies dans la Sect. 4 qu’avec un algorithme inspiré des algorithmes de couplage thermohydraulique–neutronique classiques de recherche du  $k_{eff}$  et que nous présentons brièvement en Annexe 1.

## 2 Modèle simplifié de couplage thermohydraulique–neutronique

On expose dans cette section le modèle simplifié de couplage thermohydraulique–neutronique dans le cas tridimensionnel (3D) instationnaire (on pourra consulter [6] pour

<sup>2</sup> On peut noter que l’équation de la neutronique pour notre modèle simplifié est linéaire lorsque le couplage est supprimé, à l’instar de l’équation de Boltzmann de transport des neutrons [13]. De même, notre modèle simplifié de thermohydraulique est linéaire lorsque le couplage est supprimé. Seul le couplage rend donc ici le problème non-linéaire. Notons cependant que les modèles de thermohydraulique basés sur des équations de type Euler ou Navier–Stokes sont non-linéaires, qu’il y ait ou non couplage avec la neutronique.

un modèle complet de couplage thermohydraulique–neutronique). Puis, on en déduit un système monodimensionnel (1D) stationnaire lorsque le cœur nucléaire défini par  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  est tel que  $\Omega = \mathcal{S} \times [0, L]$  où  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$  et  $L > 0$  sont respectivement la section transversale et la hauteur du cœur. On souligne en particulier que le problème de couplage stationnaire peut être abordé sous deux angles différents selon que la puissance du cœur est ou n’est pas imposée.

### 2.1 Le modèle 3D instationnaire

Soit le système de l’hydrodynamique

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, & \text{(a)} \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla [p(\rho, h)] = \rho \mathbf{g}, & \text{(b)} \\ \partial_t(\rho \mathcal{E}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathcal{E}) = \mathbb{E} \Sigma_f(h) \phi(t, \mathbf{x}) + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} & \text{(c)} \end{cases} \quad (1)$$

couplé au modèle de neutronique simplifié

$$\begin{cases} \frac{1}{V} \partial_t \phi - \nabla \cdot [D(h) \nabla \phi] + [\Sigma_a(h) - v \Sigma_f(h)(1 - \beta)] \phi - \lambda c = 0, \\ \partial_t c + \lambda c - v \Sigma_f(h) \beta \phi = 0. \end{cases} \quad (2)$$

qui correspond à l’approximation par la diffusion à un groupe en énergie [13] et qui est utilisé dans [7].

Dans (1) et (2), les variables  $t \geq 0$  et  $\mathbf{x} \in \Omega$  sont respectivement les variables de temps et d’espace ( $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  définit le cœur nucléaire). Dans (1),  $\rho(t, \mathbf{x})$ ,  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ ,  $h(t, \mathbf{x})$ ,  $p(t, \mathbf{x}) := \mathbb{P}[\rho(t, \mathbf{x}), h(t, \mathbf{x})]$  et  $\mathcal{E}(t, \mathbf{x}) := \frac{|\mathbf{u}(t, \mathbf{x})|^2}{2} + h(t, \mathbf{x}) - \frac{p(t, \mathbf{x})}{\rho(t, \mathbf{x})}$  sont respectivement la densité, la vitesse, l’enthalpie interne, la pression –  $\mathbb{P}(\rho, h)$  étant l’équation d’état – et l’énergie totale du fluide caloporteur. Le vecteur  $\rho \mathbf{g}$  est une force volumique agissant sur le fluide caloporteur (supposée externe ici pour simplifier: e.g. la gravité). La constante  $\mathbb{E}$  est l’énergie déposée par fission ( $\mathbb{E} > 0$  s’exprime en J),  $\Sigma_f(h)$  est la section efficace de fission ( $\Sigma_f(h) > 0$  s’exprime en  $m^{-1}$ ) et  $\phi(t, \mathbf{x})$  – solution de (2) – est le flux de neutrons soit le nombre de neutrons générés par les neutrons prompts et retardés par unité de surface et de temps ( $\phi(t, \mathbf{x}) \geq 0$  s’exprime en  $m^{-2} \cdot s^{-1}$ ). Le terme source

$$s_{h,\phi}(t, \mathbf{x}) := \mathbb{E} \Sigma_f(h) \phi(t, \mathbf{x})$$

dans (1)(c) est donc la densité de puissance déposée dans le fluide caloporteur et produite par les réactions de fission ( $s_{h,\phi} \geq 0$  s’exprime en  $W \cdot m^{-3}$ ). Dans (2),  $D(h)$  est le coefficient de diffusion ( $D(h) > 0$  s’exprime en m), et  $V$ ,  $v$ ,  $\beta$  et  $1/\lambda$  sont des constantes strictement positives qui sont respectivement la norme de la vitesse d’émission des neutrons du groupe d’énergie considéré (ici, on a  $V = \sqrt{\frac{2\mathbb{E}}{m_n}}$  où  $m_n$  est la masse atomique du neutron), le nombre moyen de neutrons émis par fission, la proportion de neutrons retardés par fission et le temps caractéristique d’émission des neutrons retardés. La fonction strictement positive  $\Sigma_a(h)$  est la section efficace d’absorption ( $\Sigma_a(h) > 0$  s’exprime en  $m^{-1}$ ). L’inconnue  $c(t, \mathbf{x})$  caractérise le flux de neutrons retardés ( $c \geq 0$  s’exprime en  $m^{-3}$  et  $Vc$  est le flux de neutrons retardés).

La puissance instantanée  $\mathcal{P}(t)$  du cœur (exprimée en W) est donnée par

$$\mathcal{P}(t) = \int_{\Omega} s_{h,\phi}(t, \mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

(on suppose ici que  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ) soit donc par

$$\mathcal{P}(t) = \int_{\Omega} \mathbb{E}\Sigma_f(h)\phi(t, \mathbf{x})d\mathbf{x}. \tag{3}$$

Le terme source  $s_{h,\phi}$  se réécrit alors

$$s_{h,\phi}(t, \mathbf{x}) = \mathcal{P}(t) \times \frac{\mathbb{E}\Sigma_f(h)\phi(t, \mathbf{x})}{\int_{\Omega} \mathbb{E}\Sigma_f(h)\phi(t, \mathbf{x})d\mathbf{x}}$$

ce qui permet de réécrire (1)(c) sous la forme équivalente

$$\partial_t(\rho\mathcal{E}) + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}\mathcal{E}) = \mathcal{P}(t) \times \frac{\mathbb{E}\Sigma_f(h)\phi(t, \mathbf{x})}{\int_{\Omega} \mathbb{E}\Sigma_f(h)\phi(t, \mathbf{x})d\mathbf{x}} + \rho\mathbf{g} \cdot \mathbf{u}. \tag{4}$$

Cette formulation est sans intérêt lorsque la puissance  $\mathcal{P}(t)$  est inconnue. Par contre, lorsque la puissance  $\mathcal{P}(t)$  est une donnée du problème, la formulation (4) peut être utilisée à la place de (1)(c): dans la suite de cette section, ce point est détaillé dans le cas stationnaire.

Le couplage entre (1) et (2) est donc réalisé par l’intermédiaire de la densité de puissance  $s_{h,\phi}$  et des sections efficaces d’absorption  $\Sigma_a(h)$  et de fission  $\Sigma_f(h)$ . Il conviendra bien sûr d’ajouter des conditions aux limites et initiales au système couplé (1)(2).

### 2.2 Le modèle 1D stationnaire

En remplaçant l’équation (1)(c) par l’équation

$$\rho(\partial_t h + \mathbf{u} \cdot \nabla h) = \partial_t p + \mathbf{u} \cdot \nabla p + \mathbb{E}\Sigma_f(h)\phi(t, \mathbf{x})$$

qui lui est équivalente dans le cas régulier, en remplaçant dans (1)(b) la pression thermodynamique  $p$  par une pression (dite *dynamique*)  $\pi$  découplée de l’équation d’état  $\mathbb{P}(\rho, h)$  et en supposant que  $p$  est une constante en espace<sup>3</sup> – ces deux simplifications correspondant à l’approximation bas Mach [10–12] –, en supposant que  $\Omega = \mathcal{S} \times [0, L]$  ( $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$  et  $L > 0$  sont respectivement la section transversale et la hauteur du cœur), le système couplé en régime bas Mach, 1D et stationnaire issu de (1)(2) correspond à

$$\begin{cases} \frac{d}{dz}(\rho u) = 0, \\ \frac{d}{dz}(\rho u^2 + \pi) = \rho g, \\ \rho u \frac{d}{dz}h = \mathbb{E}\Sigma_f(h)\phi(t, z) \end{cases} \tag{5}$$

( $z \in [0, L]$  est la coordonnée axiale dans le cœur et  $u$  est la composante axiale de la vitesse du fluide caloporteur) et

$$\begin{cases} -\frac{d}{dz} \left[ D(h) \frac{d}{dz} \phi(z) \right] + [\Sigma_a(h) - \nu \Sigma_f(h)(1 - \beta)]\phi(z) - \lambda c = 0, \\ \lambda c - \nu \Sigma_f(h)\beta\phi = 0, \end{cases} \tag{6}$$

<sup>3</sup> Du fait de cette hypothèse, au lieu de l’équation d’état  $\mathbb{P}(\rho, h)$ , on utilise dans la suite l’équation d’état  $\varrho(h, P_0)$  donnant la densité, et que l’on note  $\varrho(h)$ ,  $P_0$  étant la pression thermodynamique pour laquelle on a par hypothèse  $p = P_0$ .

le système (6) pouvant se limiter à l'équation

$$-\frac{d}{dz} \left[ D(h) \frac{d}{dz} \phi(z) \right] + [\Sigma_a(h) - \nu \Sigma_f(h)] \phi(z) = 0 \quad (7)$$

puisque la connaissance du flux de neutrons retardés n'est pas nécessaire dans le cas stationnaire. Nous n'explicitons donc pas les conditions initiales et nous écrivons les conditions aux limites restreintes au cas 1D. En notant  $S := |S|$  la surface de la section transversale, la puissance  $\mathcal{P}$  du cœur déduite de (3) est donc ici

$$\mathcal{P} = S \times \int_0^L \mathbb{E} \Sigma_f(h) \phi(z) dz. \quad (8)$$

Pour l'hydrodynamique 1D, les conditions aux limites en entrée du cœur (*i.e.* en  $z = 0$ ) sont données par

$$\begin{cases} (\rho u)|_{z=0} = D_e > 0, \\ h|_{z=0} = h_e \end{cases} \quad (9)$$

où  $D_e$  est le flux de masse entrant dans le cœur et  $h_e$  l'enthalpie interne en entrée. Ces deux quantités sont connues. Pour la neutronique 1D, on considère les conditions aux limites en entrée (*i.e.* en  $z = 0$ ) et en sortie du cœur (*i.e.* en  $z = L$ )

$$\begin{cases} \phi|_{z=0} = 0, \\ \phi|_{z=L} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

et on cherche une solution vérifiant

$$\forall z \in ]0, L[ : \phi(z) > 0. \quad (11)$$

Le système couplé (5)(6) muni des conditions aux limites (9)(10) n'est pas fermé. Il manque en effet une condition aux limites sur la pression  $\pi(z)$ . Néanmoins, la condition aux limites sur le flux de masse en entrée – qui caractérise un régime de convection forcée – implique que la pression  $\pi(z)$  n'intervient pas dans le calcul de  $h(z)$  et de  $\phi(z)$ . Plus précisément, l'équation de quantité de mouvement n'est pas utile ici pour connaître  $h(z)$  (et donc  $\rho(z) := \rho[h(z)]$ ),  $u(z)$  et  $\phi(z)$ . Et puisque  $\rho u(z) = D_e$  pour tout  $z \in [0, L]$  (ce qui est une conséquence de l'équation de conservation de la masse et de la condition aux limites en entrée), le système (5)(6) se limite à<sup>4</sup>

$$\begin{cases} D_e \frac{d}{dz} h(z) = \mathbb{E} \Sigma_f(h) \phi(z), & (a) \\ -\frac{d}{dz} \left[ D(h) \frac{d}{dz} \phi(z) \right] + [\Sigma_a(h) - \nu \Sigma_f(h)] \phi(z) = 0 & (b) \end{cases} \quad (12)$$

<sup>4</sup> Lorsque l'approximation bas Mach n'est pas valable, l'équation (12)(a) est remplacée par  $D_e \frac{d}{dz} h(z) = \frac{D_e}{\rho(z)} \cdot \frac{d}{dz} \mathbb{P}[\rho(z), h(z)] + \mathbb{E} \Sigma_f(h) \phi(z)$  où  $\mathbb{P}(\rho, h)$  est l'équation d'état du fluide caloporteur. Le modèle de couplage est dès lors plus compliqué puisqu'il faut dans ce cas tenir compte de l'équation de quantité de mouvement du fluide caloporteur. Soulignons néanmoins que l'approximation bas Mach [10–12] est la plupart du temps valable dans le contexte de la modélisation d'un cœur de réacteur nucléaire.

que l'on munit des conditions aux limites

$$\begin{cases} h|_{z=0} = h_e, \\ \phi|_{z=0} = 0, \\ \phi|_{z=L} = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Dans le cas de la convection forcée en régime bas Mach, le calcul de  $\rho(z)$ ,  $u(z)$  et  $\pi(z)$  pourra donc être considéré comme un post-traitement du calcul de la solution du système couplé (12)(13), ce qui nous permet d'oublier les inconnues  $\rho(z)$ ,  $u(z)$  et  $\pi(z)$  dans la suite.

### 2.3 Le couplage stationnaire 1D vu sous deux angles différents

Il est important de remarquer que (12)(b) à  $h(z)$  imposé n'a en général que la solution  $\phi(z) = 0$ . Il est alors traditionnel de remplacer dans les codes de neutronique l'équation (12)(b) par

$$-\frac{d}{dz} \left[ D(h) \frac{d}{dz} \phi(z) \right] + \left[ \Sigma_a(h) - \frac{\nu \Sigma_f(h)}{k_{eff}} \right] \phi(z) = 0 \tag{14}$$

dans lequel  $k_{eff} > 0$  est le coefficient multiplicateur qui est la plus grande valeur de  $k$  telle que

$$-\frac{d}{dz} \left[ D(h) \frac{d}{dz} \right] + \left[ \Sigma_a(h) - \frac{\nu \Sigma_f(h)}{k} \right]$$

ait un noyau non trivial. Le système couplé (12)(13) est alors remplacé par

$$\begin{cases} D_e \frac{d}{dz} h(z) = \mathbb{E} \Sigma_f(h) \phi(z), & \text{(a)} \\ -\frac{d}{dz} \left[ D(h) \frac{d}{dz} \phi(z) \right] + \left[ \Sigma_a(h) - \frac{\nu \Sigma_f(h)}{k_{eff}} \right] \phi(z) = 0 & \text{(b)} \end{cases} \tag{15}$$

muni des conditions aux limites

$$\begin{cases} h|_{z=0} = h_e, \\ h|_{z=L} = h_s, \\ \phi|_{z=0} = 0, \\ \phi|_{z=L} = 0. \end{cases} \tag{16}$$

On cherche également une solution vérifiant la contrainte de positivité (11) dont une condition nécessaire d'après (15)(a) est la contrainte

$$h_s > h_e. \tag{17}$$

Soulignons qu'à  $h(z)$  imposé, l'étude de (14) se justifie par le fait que le comportement en temps long de la solution  $\phi(t, z)$  de (2) est entièrement caractérisée par la valeur de  $k_{eff}$ . Plus précisément, trouver une solution de (14) à  $k_{eff} = 1$  revient à trouver une solution critique c'est-à-dire un régime permanent de (2), et trouver une solution de (14) à  $k_{eff} > 1$  (respectivement  $0 < k_{eff} < 1$ ) revient à trouver une solution sur-critique (respectivement



sous-critique) c'est-à-dire un régime pour lequel la solution de (2) tend vers l'infini (respectivement vers zéro) en temps long. Dans ce travail, on appellera indifféremment "Le modèle de neutronique (stationnaire)" les équations (12)(b) ou (15)(b).

Selon que l'on résout (12)(b) ou (15)(b), le couplage thermohydraulique-neutronique doit être perçu sous deux angles différents puisque les inconnues et contraintes du problème ne sont pas les mêmes. Nous résumons ci-dessous ces deux approches:

1. Recherche de l'enthalpie de sortie  $h_s$ :

C'est le point de vue des utilisateurs de codes de thermohydraulique pour lesquels l'enthalpie interne de sortie (et donc la température de sortie) est une inconnue du problème. Dans ce cas, on évalue la solution  $(h, \phi)(z)$  de (12)(13) et l'enthalpie de sortie est donnée par

$$h_s = h(z = L).$$

D'après (8), la puissance du cœur  $\mathcal{P}$  – qui est ici une inconnue du problème – est obtenue avec la relation

$$\mathcal{P} = S \times \int_0^L \mathbb{E}\Sigma_f(h)\phi(z)dz \tag{18}$$

soit donc

$$\mathcal{P} = S \times D_e \times (h_s - h_e) \tag{19}$$

en intégrant (12)(a). Notons qu'en tenant compte de (18), l'on peut réécrire (12) avec

$$\begin{cases} SD_e \frac{d}{dz} h(z) = \mathcal{P} \times \frac{\mathbb{E}\Sigma_f(h)\phi(z)}{\int_0^L \mathbb{E}\Sigma_f(h)\phi(z)dz}, & \text{(a)} \\ -\frac{d}{dz} \left[ D(h) \frac{d}{dz} \phi(z) \right] + [\Sigma_a(h) - \nu\Sigma_f(h)]\phi(z) = 0 & \text{(b)} \end{cases} \tag{20}$$

où le flux neutronique  $\mathcal{P}$  est une constante positive inconnue vérifiant la condition de compatibilité (19). La formulation (20) trouve son intérêt lorsque  $\mathcal{P}$  est connue. On a en effet:

**Lemme 2.1** (a) Soit  $(h, \phi)$  une solution de (12)(13) et soit  $\mathcal{P} = S \times \int_0^L \mathbb{E}\Sigma_f(h)\phi(t, z)dz$ . Alors  $(h, \mu\phi)$  est solution de (16)(20) pour toute constante  $\mu > 0$ .  
 (b) Soit  $(h, \phi)$  une solution quelconque de (16)(20) et soit  $\mu = \frac{D_e(h_s - h_e)}{\int_0^L \mathbb{E}\Sigma_f(h)\phi(z)dz}$ . Alors  $(h, \mu\phi)$  est solution de (12)(13).

2. Recherche du coefficient multiplicateur  $k_{eff}$ :

C'est le point de vue des utilisateurs de codes de neutronique pour lesquels la puissance du cœur  $\mathcal{P}$  est connue (et bien sûr strictement positive). Par voie de conséquence, l'enthalpie interne de sortie  $h_s$  (et donc la température de sortie) est également connue d'après la relation (19). Dans cette approche, on résout (15)(16) et le niveau de flux neutronique est fixé puisque

$$\mathcal{P} = S \times \int_0^L \mathbb{E}\Sigma_f(h)\phi(z)dz = S \times D_e \times (h_s - h_e). \tag{21}$$

Le flux neutronique est donc un élément particulier du noyau de l'opérateur de diffusion neutronique avec  $k_{eff}$ . La puissance  $\mathcal{P}$  étant une donnée, il est maintenant possible de modifier (15) pour obtenir le modèle équivalent

$$\begin{cases} SD_e \frac{d}{dz} h(z) = \mathcal{P} \times \frac{\mathbb{E}\Sigma_f(h)\phi(z)}{\int_0^L \mathbb{E}\Sigma_f(h)\phi(z)dz}, & (a) \\ -\frac{d}{dz} \left[ D(h) \frac{d}{dz} \phi(z) \right] + \left[ \Sigma_a(h) - \frac{\nu\Sigma_f(h)}{k_{eff}} \right] \phi(z) = 0 & (b) \end{cases} \quad (22)$$

où  $\mathcal{P}$  est une constante strictement positive connue, et ainsi revenir à un cadre classique en neutronique où le niveau de flux neutronique est arbitraire [13]. On a en effet:

**Lemme 2.2** (a) *Soit  $(h, \phi)$  une solution de (15)(16). Alors  $(h, \mu\phi)$  est solution de (16)(22) pour toute constante  $\mu > 0$ .*

(b) *Soit  $(h, \phi)$  une solution quelconque de (16)(22) et soit  $\mu = \frac{D_e(h_s - h_e)}{\int_0^L \mathbb{E}\Sigma_f(h)\phi(z)dz}$ . Alors  $(h, \mu\phi)$  est solution de (15)(16).*

Dans la suite de ce travail, nous privilégions les formulations (12)(13) (pour le point de vue des utilisateurs de codes de thermohydraulique) et (16)(22) (pour le point de vue des utilisateurs de codes de neutronique).

### 2.4 Lien entre les deux approches

Les méthodes numériques pour traiter les deux approches que sont (12)(13) (approche “thermohydraulique”) et (16)(22) (approche “neutronique”) sont *a priori* différentes puisque, d’une part, la nature de la quantité pour laquelle le problème a une solution est différente (cf.  $h_s$  versus  $k_{eff}$ ) et que, d’autre part, (12)(13) admet *a priori* une unique solution alors que (16)(22) admet nécessairement une infinité de solution (lorsqu’au moins une solution existe).

On peut cependant établir un lien entre (12)(13) et (16)(22) *via* une réécriture du Lemme 2.1:

**Lemme 2.3** 1. *Soit  $(h, \phi)$  une solution de (12)(13) et soit  $\mathcal{P} = S \times \int_0^L \mathbb{E}\Sigma_f(h)\phi(t, z)dz$ .*

*Alors  $(h, \mu\phi)$  est solution de (16)(22) avec  $k = 1$  pour toute constante  $\mu > 0$ .*

2. *Soit  $(h, \phi)$  une solution quelconque de (16)(22) et soit  $\mu = \frac{D_e(h_s - h_e)}{\int_0^L \mathbb{E}\Sigma_f(h)\phi(z)dz}$ . Alors*

*$(h, \mu\phi)$  est solution de (12)(13) lorsque  $\Sigma_a(h)$  dans (12) est remplacé par*

$$\tilde{\Sigma}_a(h) := \Sigma_a(h) + \left( 1 - \frac{1}{k_{eff}} \right) \nu\Sigma_f(h).$$

Le second point souligne que trouver la valeur de  $k_{eff}$  dans (16)(22) conduit à résoudre (12)(13) en augmentant (respectivement diminuant) la section efficace d’absorption quand  $k_{eff} > 1$  (respectivement  $k_{eff} < 1$ ). Autrement dit,  $k_{eff} > 1$  (respectivement  $k_{eff} < 1$ ) sous-entend que pour trouver une solution stationnaire non nulle du couplage thermohydraulique–neutronique (1)(2), il est nécessaire d’augmenter (respectivement diminuer) l’absorption des neutrons. Dans les situations réelles, cela se fera *via* des moyens technologiques appropriés telles que l’introduction de barres de contrôle ou l’injection de bore dans le cœur.

### 3 Construction d’une solution stationnaire

Dans cette section, nous considérons le cas où  $D$  et  $\Sigma_f$  sont deux constantes strictement positives<sup>5</sup>. Le cas où  $D$  et  $\Sigma_f$  dépendent de  $h$  est abordé dans [16]. Par contre,  $\Sigma_a(h)$  n’est pas supposée constante ce qui permet le couplage non-linéaire du problème sur  $(h, \phi)$ . Et on suppose que

$$\Sigma_a \in C^0([h_{\min}, h_{\max}]) \tag{23}$$

où  $[h_{\min}, h_{\max}]$  est suffisamment grand pour couvrir les configurations étudiées (en particulier  $(h_e, h_s) \in [h_{\min}, h_{\max}]^2$ )<sup>6</sup>.

Sous ces hypothèses, on construit dans un premier temps une solution explicite du problème monodimensionnel (12)(13) – qui correspond au problème de *recherche de l’enthalpie de sortie*  $h_s$  – c’est-à-dire de

$$\begin{cases} D_e \frac{d}{dz} h(z) = \mathbb{E} \Sigma_f \phi(z), & \text{(a)} \\ -D \frac{d^2}{dz^2} \phi(z) + [\Sigma_a(h) - \nu \Sigma_f] \phi(z) = 0 & \text{(b)} \end{cases} \tag{24}$$

muni des conditions aux limites

$$\begin{cases} h|_{z=0} = h_e, \\ \phi|_{z=0} = 0, \\ \phi|_{z=L} = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Cette solution est construite *a priori* (voir le Théorème 3.1). Puis on prouve un résultat d’existence et d’unicité (voir le Théorème 3.2). Rappelons que dans (24)(25), la puissance du cœur

$$\mathcal{P} = S \times \int_0^L \mathbb{E} \Sigma_f \phi(z) dz \tag{26}$$

et l’enthalpie interne de sortie  $h_s$  sont inconnues et reliées par la relation

$$\mathcal{P} = S \times D_e \Delta h \quad \text{ou} \quad \Delta h := h_s - h_e, \tag{27}$$

$S$  étant la surface de la section de passage du cœur dans lequel circule le fluide caloporteur (voir (18) et (19)). Remarquons que (24) est un système d’équations différentielles ordinaires non-linéaires d’ordre 3 muni des 3 conditions aux limites (25) (soit deux en  $z = 0$  et une en  $z = L$ ).

Dans un second temps, on construit une solution de (16)(22) – qui correspond au problème de *recherche du coefficient multiplicateur*  $k_{eff}$  – c’est-à-dire de

$$\begin{cases} SD_e \frac{d}{dz} h(z) = \mathcal{P} \times \frac{\mathbb{E} \Sigma_f \phi(z)}{\int_0^L \mathbb{E} \Sigma_f \phi(z) dz} = \mathcal{P} \times \frac{\phi(z)}{\int_0^L \phi(z) dz}, & \text{(a)} \\ -D \frac{d^2}{dz^2} \phi(z) + \left[ \Sigma_a(h) - \frac{\nu \Sigma_f}{k_{eff}} \right] \phi(z) = 0 & \text{(b)} \end{cases} \tag{28}$$

<sup>5</sup> Rappelons que les coefficients  $\mathbb{E}$  et  $\nu$  sont forcément des constantes, également strictement positives.

<sup>6</sup> On pourrait plus simplement supposer que  $\Sigma_a \in C^0(\mathbb{R})$ . On préfère ici supposer la régularité de  $\Sigma_a$  sur  $[h_{\min}, h_{\max}]$  car, en pratique, les sections efficaces sont tabulées sur un intervalle borné.

muni des conditions aux limites

$$\begin{cases} h|_{z=0} = h_e, \\ h|_{z=L} = h_s, \\ \phi|_{z=0} = 0, \\ \phi|_{z=L} = 0. \end{cases} \tag{29}$$

Dans (28)(29),  $h_s$  et  $\mathcal{P}$  sont des données reliées par (27). Soulignons que  $k_{eff}$  est une inconnue et que (28)(29) admet *a priori* une infinité de solutions  $\phi$ . Cette solution est construite *a priori* (voir le Théorème 3.3). Puis on prouve un résultat d’existence pour  $(h, \phi, k_{eff})$  et d’unicité pour  $(h, k_{eff})$  (voir le Théorème 3.4).

On peut remarquer que dans le problème (28)(29), nous avons toujours un système d’équations différentielles ordinaires non-linéaires d’ordre 3. Ce système est cependant maintenant muni de 4 conditions aux limites – soit 1 condition aux limites de plus que pour le système (24)(25) –, la condition aux limites supplémentaire sur l’enthalpie de sortie étant compensée par la présence du paramètre  $k_{eff}$  dans (28)(b). Rappelons d’autre part que le Lemme 2.3 établit le lien entre les modèles de couplage thermohydraulique-neutronique (24)(25) et (28)(29).

Enfin, dans les deux cas, on cherche une solution vérifiant l’hypothèse de positivité (11). Dans le cas du couplage (24)(25), ceci implique en particulier que la valeur de  $h_s$  calculée est telle que  $h_s > h_e$ ; alors que dans le cas du couplage (28)(29), ceci se traduit par la contrainte  $h_s > h_e$  sur la donnée  $h_s$  ( $h_e$  étant une donnée dans les deux cas). Par souci de lisibilité, nous ne rappellerons pas systématiquement cette contrainte de positivité par la suite.

### 3.1 Recherche de l’enthalpie de sortie $h_s$

On s’intéresse ici au système couplé (24)(25). On donne une formulation générale de la solution lorsqu’elle existe (voir le Théorème 3.1 dont la preuve est en Annexe. Puis, on établit un résultat d’existence et d’unicité (voir le Théorème 3.2 qui utilise le *point 1* du Lemme 9.1 placé en Annexe 3). Pour cela, l’on définit la fonction  $V(h)$  avec

$$V(h) = \frac{E(h)}{h - h_e} \tag{30}$$

où la fonction  $E(h)$  définie sur  $[h_{min}, h_{max}]$  est solution de

$$\begin{cases} E''(h) = \frac{v\Sigma_f - \Sigma_a(h)}{D}, & \text{(a)} \\ E'(h_e) = E(h_e) = 0. & \text{(b)} \end{cases} \tag{31}$$

Remarquons qu’en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à  $E(h)$  et en tenant compte de (31), on obtient

$$E(h) = (h - h_e)^2 \int_0^1 (1 - t) \frac{v\Sigma_f - \Sigma_a[h_e + t(h - h_e)]}{D} dt.$$

En divisant par  $h - h_e$ , on obtient donc

$$V(h) = (h - h_e) \int_0^1 (1 - t) \frac{v\Sigma_f - \Sigma_a[h_e + t(h - h_e)]}{D} dt. \tag{32}$$

On a d'autre part  $V'(h) = \frac{E'(h)}{h-h_e} - \frac{E(h)}{(h-h_e)^2}$ . Donc, en utilisant le fait que  $E'(h) = (h - h_e) \int_0^1 \frac{v\Sigma_f - \Sigma_a[h_e + t(h-h_e)]}{D} dt$ , on trouve

$$V'(h) = \int_0^1 t \frac{v\Sigma_f - \Sigma_a[h_e + t(h - h_e)]}{D} dt. \tag{33}$$

Les formules (32) et (33) montrent que  $V$  est dans  $C^1([h_{\min}, h_{\max}])$  puisque  $\Sigma_a$  est par hypothèse dans  $C^0([h_{\min}, h_{\max}])$ . Et on obtient en particulier que

$$\begin{cases} V(h_e) = 0, & \text{(a)} \\ V'(h_e) = \frac{v\Sigma_f - \Sigma_a(h_e)}{2D}. & \text{(b)} \end{cases} \tag{34}$$

Nous pouvons déduire de ces expressions que

$$V \in C^1([h_{\min}, h_{\max}]) \cap C^2([h_e, h_{\max}]). \tag{35}$$

Via l'expression (33), on constate cependant que la dérivabilité de  $V'$  en  $h_e$  n'est pas claire quand  $\Sigma_a$  est une fonction non-dérivable au voisinage de  $h_e$ .

Par exemple, si  $\Sigma_a$  est affine, on a  $V \in C^2([h_e, h_{\max}])$  (et même  $V \in C^\infty(\mathbb{R})$ ). En effet, lorsque

$$\Sigma_a(h) = \Sigma_{a,e} + \sigma_a(h - h_e) \tag{36}$$

avec  $\Sigma_{a,e} = \Sigma_a(h_e) > 0$ , on trouve

$$\begin{cases} V(h) = \frac{v\Sigma_f - \Sigma_{a,e}}{2D}(h - h_e) - \frac{\sigma_a}{6D}(h - h_e)^2, & \text{(a)} \\ E(h) = \frac{v\Sigma_f - \Sigma_{a,e}}{2D}(h - h_e)^2 - \frac{\sigma_a}{6D}(h - h_e)^3. & \text{(b)} \end{cases} \tag{37}$$

Le résultat suivant – dont la preuve est placée en Annexe 1 – établit la forme de la solution lorsqu'elle existe:

**Théorème 3.1** *On suppose qu'une solution  $(h, \phi)$  de (24)(25) existe. Alors:*

i)  $h_s > h_e$  et est solution de

$$\int_{h_e}^{h_s} \frac{dh}{\sqrt{2[V(h_s) - V(h)](h - h_e)}} = L \tag{38}$$

qui s'écrit aussi

$$\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{df}{\sqrt{\int_0^1 V'[h_e + (h_s - h_e)(1 - t \cos^2 f)] dt}} = L. \tag{39}$$

Cette relation permet de trouver  $h_s$  quand cela est possible.

ii)  $h \in C^1([0, L])$  et est solution de

$$\int_{h_e}^{h(z)} \frac{dh}{\sqrt{2[V(h_s) - V(h)](h - h_e)}} = z \tag{40}$$

où  $h_s$  est solution de (38), relation qui est équivalente à

$$h(z) = h_e + (h_s - h_e) \sin^2 f(z) \tag{41}$$

où  $f(z)$  est la fonction réciproque de

$$z(f) := \sqrt{2} \int_0^f \frac{df'}{\sqrt{\int_0^1 V'[h_e + (h_s - h_e)(1 - t \cos^2 f')] dt}}. \tag{42}$$

iii)  $\phi \in C^2([0, L])$  et est déduite de  $h$  par la relation

$$\phi(z) = \frac{D_e}{\mathbb{E}\Sigma_f} \sqrt{2[V(h_s) - V(h(z))][h(z) - h_e]}, \tag{43}$$

relation qui est équivalente à

$$\phi(z) = \frac{D_e}{\mathbb{E}\Sigma_f} (h_s - h_e) \sin[2f(z)]f'(z). \tag{44}$$

Notons que l’enthalpie de sortie  $h_s$  solution de (38) ne dépend ni du flux neutronique  $\phi(z)$ , ni de la constante de couplage  $\mathbb{E}$ , ni du débit d’entrée  $D_e$ . En conséquence,  $h(z)$  solution de (40) ne dépend ni du flux neutronique  $\phi(z)$ , ni de la constante de couplage  $\mathbb{E}$ , ni du débit d’entrée  $D_e$ , ce qui peut sembler paradoxal. Cette propriété remarquable est vérifiée parce que le terme source dans (24)(a) est proportionnel au flux neutronique  $\phi(z)$  via la constante de couplage  $\mathbb{E}\Sigma_f$ . La fonction  $h(z)$  et la valeur  $h_s$  dépendent cependant des sections efficaces  $\Sigma_f$  et  $\Sigma_a(h)$  ainsi que du coefficient de diffusion  $D$  via la fonction  $V(h)$ . Par contre, le niveau de flux neutronique dépend de  $h_s$ ,  $\mathbb{E}$  et  $D_e$  puisque

$$\int_0^L \phi(z) dz = \frac{D_e}{\mathbb{E}\Sigma_f} (h_s - h_e).$$

Cette remarque serait encore vraie en remplaçant la constante  $\Sigma_f$  par une fonction  $\Sigma_f(h)$ .

Afin d’obtenir un résultat d’existence et d’unicité, on peut par exemple supposer que  $V(h)$  vérifie l’hypothèse suivante:

**Hypothèse 3.1** Il existe  $h_* \in ]h_e, h_{\max}]$  tel que  $V'$  soit décroissante sur  $[h_e, h_*]$  et  $V'(h_*) = 0$ .

Remarquons que lorsque  $h_* \in ]h_e, h_{\max}[$ , l’Hypothèse 3.1 est équivalente à l’hypothèse :  $V$  admet un maximum  $h_* \in ]h_e, h_{\max}[$ . De plus,  $V$  est strictement concave sur  $[h_e, h_*]$ . En outre, l’Hypothèse 3.1 implique en particulier que

$$\forall h \in [h_e, h_*[: V'(h) > 0 \quad \text{et} \quad V'(h_*) = 0. \tag{45}$$

Elle permet donc aussi d’affirmer que

$$\forall h \in ]h_e, h_*] : V(h) > 0 \quad \text{et} \quad V(h_e) = 0 \tag{46}$$

(puisque  $V(h_e) = 0$  d’après (34)(a) et  $V(h)$  croissante sur  $[h_e, h_*]$ ). De (32), (33), (45) et (46), on obtient donc que sous l’Hypothèse 3.1, la section efficace d’absorption  $\Sigma_a(h)$  vérifie

$$\forall h \in [h_e, h_*[: 0 < \int_0^1 t \{v\Sigma_f - \Sigma_a[h_e + t(h - h_e)]\} dt < \int_0^1 \{v\Sigma_f - \Sigma_a[h_e + t(h - h_e)]\} dt.$$

Soulignons que cette inégalité n’est pas triviale car nous n’avons pas *a priori*  $v\Sigma_f - \Sigma_a(h) > 0$  pour tout  $h \in [h_e, h_*]$ . Nous pouvons par contre affirmer qu’il y a existence d’un voisinage de  $h_e$  pour lequel  $v\Sigma_f - \Sigma_a(h) > 0$  puisque (45) couplée à (34)(b) impose

$$v\Sigma_f - \Sigma_a(h_e) > 0.$$

La fonction  $E(h)$  – solution de (31) – est donc strictement convexe dans un voisinage de  $h_e$  sous l’Hypothèse 3.1.

Par exemple, lorsque  $\Sigma_a(h)$  est affine c’est-à-dire donnée avec (36),  $V(h)$  et  $E(h)$  sont données avec (37), et l’Hypothèse 3.1 est vérifiée sous les conditions nécessaires et suffisantes  $\sigma_a > 0$  et  $\nu\Sigma_f > \Sigma_{a,e}$ . En effet, la fonction  $V$  est concave sous la condition nécessaire et suffisante  $\sigma_a > 0$ . De plus,  $V'(h_*) = 0$  si et seulement si

$$h_* = h_e + \frac{3}{2\sigma_a}(\nu\Sigma_f - \Sigma_{a,e}) \tag{47}$$

qui est un maximum sous la condition nécessaire et suffisante  $\nu\Sigma_f - \Sigma_{a,e} > 0$  (puisque l’on sait que  $\sigma_a > 0$ ). On vérifie par ailleurs que la fonction  $E$  est bien convexe dans un voisinage de  $h_e$  sous la condition nécessaire et suffisante  $\nu\Sigma_f > \Sigma_{a,e}$ . Rappelons que nous ne considérons pas ici le cas d’une section efficace d’absorption  $\Sigma_a(h)$  constante (ce qui correspondrait au cas  $\sigma_a = 0$ ) puisque dans ce cas, le couplage entre (24)(a) et (24)(b) disparaît.

Sous l’Hypothèse 3.1, le résultat suivant donne l’existence et l’unicité de la solution:

**Théorème 3.2** *Sous l’Hypothèse 3.1, l’équation (38) admet une unique solution  $h_s \in [h_e, h_*[$  si et seulement si  $L \in [L_{\min}, +\infty[$  où*

$$L_{\min} := \frac{\pi}{\sqrt{2V'(h_e)}}. \tag{48}$$

Les fonctions  $h(z)$  et  $\phi(z)$  solutions de (24)(25) existent donc, sont uniques et respectivement données par (41) et (44). De plus, on a

$$L_{\min} = \pi \sqrt{\frac{D}{\nu\Sigma_f - \Sigma_a(h_e)}}. \tag{49}$$

La preuve de ce théorème (placée un peu plus loin dans cette section) utilise le point 1 du Lemme 9.1 placé en Annexe 3. Soulignons que l’Hypothèse 3.1 est une condition suffisante d’existence et d’unicité (celle-ci est utilisée pour obtenir l’inégalité (51) et le développement de Taylor (121)). Au §3.3, nous établirons un résultat d’existence plus général sans utiliser l’Hypothèse 3.1 (voir le Théorème 3.5). Le prix à payer sera la perte *a priori* de l’unicité.

Remarquons que  $L_{\min}$  donné avec (48) est bien défini puisque, sous l’Hypothèse 3.1, on a  $V'(h_e) > 0$  (voir (45)).

Via la fonction  $V$ , les données des sections efficaces  $\nu\Sigma_f$  et  $\Sigma_a(h)$  ainsi que du coefficient de diffusion  $D$  induisent donc la limite supérieure

$$\mathcal{P}_{\max} := SD_e(h_* - h_e)$$

à la puissance du cœur et la limite inférieure  $L_{\min}$  à la hauteur du cœur. Dans le cas d’une section efficace  $\Sigma_a(h)$  affine et donnée avec (36),  $h_*$  est donné avec (47), ce qui permet d’obtenir

$$\mathcal{P}_{\max} = \frac{3SD_e}{2\sigma_a}(\nu\Sigma_f - \Sigma_{a,e}).$$

Soulignons que l’existence d’une hauteur minimale  $L_{\min}$  du cœur à partir de laquelle existe un état stationnaire solution de (24)(25), suggère que pour un cœur trop petit (au sens  $L \in ]0, L_{\min}[$ ), il est nécessaire d’augmenter  $\Sigma_f$  ou de diminuer  $\Sigma_a(h_e)$  pour obtenir un état stationnaire. Remarquons que la relation (49) s’écrit également

$$\frac{\pi^2 D}{L_{\min}^2} + \Sigma_a(h_e) - \nu\Sigma_f = 0 \tag{50}$$

qui est une formulation classique en neutronique [13].

Enfin, le corollaire qui suit établit un lien entre la solution du système couplé (24)(25) et le mode fondamental de (24)(b) :

**Corollaire 3.1** Lorsque  $L$  tend vers  $L_{\min}$  par valeurs supérieures, le couple  $(h, \phi)$  converge uniformément vers  $(h_e, 0)$  alors que le flux normalisé  $\frac{\phi}{\int_0^L \phi(z) dz}$  converge uniformément vers  $z \mapsto \frac{\pi}{2L_{\min}} \sin\left(\frac{\pi z}{L_{\min}}\right)$  qui est le mode fondamental normalisé pour l'équation de diffusion (24)(b) à coefficients constants obtenue pour  $h = h_e$ .

Notons que lorsque  $L$  tend vers  $+\infty$ , on montre que  $h_s$  tend vers  $h_*$  (voir le début de la preuve du Corollaire 3.1). Cependant, il ne semble pas aisé d'établir un résultat similaire à celui du Corollaire 3.1 pour cette limite.

**Preuve du Théorème 3.2:** Sous l'Hypothèse 3.1, on a

$$\forall h_s \in [h_e, h_*[ : 0 < \sqrt{\int_0^1 V[h_e + (h_s - h_e)(1 - t \cos^2 f)] dt} \leq \sqrt{V'(h_e)}. \tag{51}$$

En utilisant (38) et (39), on obtient alors

$$\forall h_s \in [h_e, h_*[ : J(h_s) \geq \frac{\pi}{\sqrt{2V'(h_e)}}$$

avec

$$J(h_s) := \int_{h_e}^{h_s} \frac{dh}{\sqrt{2[V(h_s) - V(h)](h - h_e)}} \tag{52}$$

soit encore

$$L \geq \frac{\pi}{\sqrt{2V'(h_e)}} =: L_{\min}$$

pour toute valeur de  $h_s \in [h_e, h_*[$ . D'autre part, la limite de  $J(h)$  lorsque  $h$  tend vers  $h_e$  est  $L_{\min} := \frac{\pi}{\sqrt{2V'(h_e)}}$ . Le minorant  $L_{\min}$  est donc bien la borne inférieure pour  $L$ . En outre, le point 1 du Lemme 9.1 placé en Annexe 3 prouve que  $J(h)$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $h$  tend vers  $h_*$ . De plus,  $J(h)$  est une fonction strictement croissante sur  $[h_e, h_*[$ . En effet, la fonction  $V'$  étant strictement décroissante sur  $[h_e, h_*[$  (puisque  $V$  est strictement concave sur  $[h_e, h_*[$ ), pour tout  $h_{s,1} > h_{s,2}$  (éléments de  $[h_e, h_*[$ ), on a  $V'[h_e + (h_{s,1} - h_e)(1 - t \cos^2 f)] < V'[h_e + (h_{s,2} - h_e)(1 - t \cos^2 f)]$  (puisque  $1 - t \cos^2 f \geq 0$  pour tout  $t \in [0, 1]$ ), ce qui permet d'obtenir  $J(h_{s,1}) > J(h_{s,2})$  après double intégration. L'existence et l'unicité de  $h_s$  dans  $[h_e, h_*[$  s'obtient alors en notant que  $J(h)$  définit une bijection strictement croissante de  $[h_e, h_*[$  dans  $[L_{\min}, +\infty[$ . Enfin, il suffit d'utiliser (34)(b) et (48) pour obtenir (49).  $\square$

**Preuve du corollaire 3.1:** La fonction  $L \mapsto h_s(L)$ , fonction réciproque de

$$h_s \mapsto J(h_s)$$

où  $J(h_s)$  est défini avec (116)(117), définit une bijection croissante de  $[L_{\min}, +\infty[$  dans  $[h_e, h_*[$ , et vérifie en particulier  $\lim_{L \rightarrow L_{\min}^+} h_s(L) = h_e$  soit encore  $\lim_{L \rightarrow L_{\min}^+} \Delta h = 0$  où  $\Delta h := h_s - h_e$ . Lorsque  $L$  tend vers  $L_{\min}$  par valeurs supérieures, la fonction  $f$  solution de (115), définie sur  $[0, L]$  pour tout  $L \in [L_{\min}, +\infty[$ , converge donc uniformément vers  $f_0$  définie sur  $[0, L_{\min}]$  avec  $f_0(z) := \frac{\pi z}{2L_{\min}}$  (qui vérifie bien  $f_0(0) = 0$  et  $f_0(L_{\min}) = \frac{\pi}{2}$  à l'instar de  $f(z)$ ). En utilisant la relation (112) entre  $h(z)$  et  $f(z)$ , on trouve donc que la fonction  $h$  converge uniformément vers la fonction constante  $h_e$  lorsque  $L$  tend vers  $L_{\min}$ . Par ailleurs, on déduit de (48) et (115) que  $f'$  converge uniformément vers la fonction constante



$\frac{\pi}{2L_{\min}}$  (qui est en outre la dérivée de  $f_0(z)$ ). Donc, en utilisant (113)(b), on obtient que  $h'$  converge uniformément vers la fonction nulle lorsque  $L$  tend vers  $L_{\min}$ . Et, en utilisant (24)(a), on obtient que  $\phi$  converge uniformément vers la fonction nulle lorsque  $L$  tend vers  $L_{\min}$ . D'autre part, en utilisant (43) et (113)(a), on trouve

$$\phi(z) = \frac{D_e}{E\Sigma_f} \sqrt{2 \frac{V(h_s) - V(h(z))}{h_s - h(z)}} \Delta h \sin f(z) \cos f(z).$$

Le flux normalisé est donc

$$\frac{\phi(z)}{\int_0^L \phi(z) dz} = \frac{\sqrt{\frac{V(h_s) - V(h(z))}{h_s - h(z)}} \sin f(z) \cos f(z)}{\int_0^L \sqrt{\frac{V(h_s) - V(h(z))}{h_s - h(z)}} \sin f(z) \cos f(z) dz} \tag{53}$$

définie sur  $[0, L]$ . Comme  $h$  converge uniformément vers la fonction constante  $h_e$  lorsque  $L$  tend vers  $L_{\min}$ , la fonction  $\sqrt{\frac{V(h_s) - V(h(z))}{h_s - h(z)}}$  converge uniformément vers la fonction constante  $\sqrt{\frac{V(h_s) - V(h_e)}{h_s - h_e}}$  lorsque  $L$  tend vers  $L_{\min}$ . Ainsi, la fonction  $\frac{\phi}{\int_0^L \phi(z) dz}$  converge uniformément vers la fonction  $\frac{\sin f_0 \cos f_0}{\int_0^{L_{\min}} \sin f_0(z) \cos f_0(z) dz}$  définie sur  $[0, L_{\min}]$  lorsque  $L$  tend vers  $L_{\min}$ , soit donc vers le flux normalisé  $z \mapsto \frac{\pi}{2L_{\min}} \sin\left(\frac{\pi z}{L_{\min}}\right)$ . Soulignons que le point clé utilisé pour obtenir cette dernière limite uniforme est le fait qu'en normalisant le flux, on fait disparaître dans (53) le coefficient  $\Delta h$  qui tend vers zéro lorsque  $L$  tend vers  $L_{\min}$ .  $\square$

### 3.2 Recherche du coefficient multiplicateur $k_{eff}$

On cherche maintenant à construire une solution du système couplé (28)(29) pour lequel l'enthalpie de sortie  $h_s$  et la puissance du cœur  $\mathcal{P}$  sont des données reliées par (27). On donne une formulation générale de cette solution lorsqu'elle existe (voir le Théorème 3.3 dont la preuve est en Annexe 2). Puis, on établit un résultat d'existence et d'unicité (voir le Théorème 3.4 qui utilise le point 2 du Lemme 9.1 placé en Annexe 3).

Rappelons que l'enthalpie de sortie du cœur  $h_s$  étant fixée contrairement à celle du système (24)(25), on doit introduire une nouvelle inconnue. Celle-ci correspond au coefficient multiplicateur  $k_{eff} > 0$  dans (28). Pour construire cette solution, on introduit la fonction  $W(h)$  définie avec

$$W(h) = \frac{G(h)}{(h - h_e)(h_s - h)} \tag{54}$$

où la fonction  $G(h)$  définie sur  $[h_{\min}, h_{\max}]$  est solution de

$$\begin{cases} G''(h) = -\frac{\Sigma_a(h)}{D}, & \text{(a)} \\ G(h_e) = G(h_s) = 0. & \text{(b)} \end{cases} \tag{55}$$

Les fonctions  $W$  et  $G$  ainsi définies sont pour le système (28)(29) le pendant des fonctions  $V$  et  $E$  définies avec (30) et (31) pour le système (24)(25). Remarquons que la fonction  $W$  vérifie

$$W(h) = \frac{1}{D} \int_0^1 \int_0^1 \Sigma_a [h_e + t(h_s - h_e) + tu(h - h_s)] t du dt. \tag{56}$$

En effet, on a  $G(h) = (h - h_e) \int_0^1 G'[h_e + t(h - h_e)]dt$  et  $\int_0^1 G'[h_e + t(h_s - h_e)]dt = 0$ .

Or, on a aussi  $G'[h_e + t(h - h_e)] - G'[h_e + t(h_s - h_e)] = \int_{h_e+t(h_s-h_e)}^{h_e+t(h-h_e)} G''(x)dx = -\frac{1}{D} \int_{h_e+t(h_s-h_e)}^{h_e+t(h-h_e)} \Sigma_a(x)dx$ . Soit maintenant le changement de variable  $x \mapsto u$  paramétré par  $t$  et défini avec  $x = h_e + t(h_s - h_e) + u\{[h_e + t(h - h_e)] - [h_e + t(h_s - h_e)]\}$  soit plus simplement  $x = h_e + t(h_s - h_e) + tu(h - h_s)$ . On a donc aussi

$$G'[h_e + t(h - h_e)] - G'[h_e + t(h_s - h_e)] = -\frac{1}{D} \int_0^1 \Sigma_a[h_e + t(h_s - h_e) + tu(h - h_s)]t(h - h_s)du.$$

En intégrant par rapport à  $t$  sur  $[0, 1]$  cette dernière égalité, on trouve alors

$$\int_0^1 G'[h_e + t(h - h_e)]dt = \frac{h_s - h}{D} \int_0^1 \int_0^1 \Sigma_a[h_e + t(h_s - h_e) + tu(h - h_s)]tdu dt \tag{57}$$

soit encore  $G(h) = \frac{(h - h_e)(h_s - h)}{D} \int_0^1 \int_0^1 \Sigma_a[h_e + t(h_s - h_e) + tu(h - h_s)]tdu dt$ . D'où (56) en utilisant (54). L'égalité (56) permet d'affirmer que

$$\forall h \in [h_e, h_s] : \frac{1}{2D} \min_{h \in [h_e, h_s]} \Sigma_a(h) \leq W(h) \leq \frac{1}{2D} \max_{h \in [h_e, h_s]} \Sigma_a(h). \tag{58}$$

Par ailleurs, comme  $\Sigma_a$  est par hypothèse dans  $C^0([h_{\min}, h_{\max}])$ ,  $G$  est dans  $C^2([h_{\min}, h_{\max}])$ . Et on déduit de (54) et (55)(b) que

$$\begin{cases} W(h_e) = \frac{G'(h_e)}{h_s - h_e}, & \text{(a)} \\ W(h_s) = \frac{G'(h_s)}{h_e - h_s} & \text{(b)} \end{cases} \tag{59}$$

(on rappelle que  $h_s > h_e$ : voir (17)). On peut donc affirmer que  $W \in C^0([h_{\min}, h_{\max}]) \cap C^2([h_e, h_s])$ . On peut en fait améliorer ce résultat de régularité pour  $W$  en remarquant que  $G(h) = (h - h_e) \int_0^1 G'[h_e + t(h - h_e)]dt$ , soit donc  $\frac{G(h)}{h-h_e} = \int_0^1 G'[h_e + t(h - h_e)]dt$ . Cette égalité permet d'obtenir

$$\frac{d}{dh} \left( \frac{G(h)}{h - h_e} \right) = \int_0^1 G''[h_e + t(h - h_e)]t dt = -\frac{1}{D} \int_0^1 \Sigma_a[h_e + t(h - h_e)]t dt.$$

La fonction  $\frac{G(h)}{h-h_e}$  est donc de classe  $C^1$  dans  $[h_e, h_s]$ . La fonction  $1/(h_s - h)$  étant de classe  $C^1$  sur  $[h_e, h_s]$ , on obtient alors que la fonction  $\frac{G(h)}{(h-h_e)(h_s-h)} := W(h)$  est de classe  $C^1$  sur  $[h_e, h_s]$ . Par un raisonnement identique, on obtient que  $W(h)$  est de classe  $C^1$  sur  $]h_e, h_s[$ . D'où  $W \in C^1([h_e, h_s])$ , soit encore  $W \in C^1([h_{\min}, h_{\max}])$  (puisque  $G \in C^2([h_{\min}, h_{\max}])$ ). Finalement, on a donc

$$W \in C^1([h_{\min}, h_{\max}]) \cap C^2([h_e, h_s]). \tag{60}$$

Ainsi, la fonction  $W$  utilisée pour résoudre le problème de recherche de  $k_{eff}$  a une régularité similaire à celle de la fonction  $V$  utilisée pour résoudre le problème de recherche de  $h_s$  (voir (35)). Notons que l'on déduit des relations précédentes que

$$W'(h_e) = \frac{1}{h_s - h_e} \left[ W(h_e) - \frac{\Sigma_a(h_e)}{2D} \right].$$

Et en utilisant (58), on en déduit

$$\frac{1}{2D(h_s - h_e)} \left[ \min_{h \in [h_e, h_s]} \Sigma_a(h) - \Sigma_a(h_e) \right] \leq W'(h_e) \leq \frac{1}{2D(h_s - h_e)} \left[ \max_{h \in [h_e, h_s]} \Sigma_a(h) - \Sigma_a(h_e) \right].$$

De même, on trouve

$$W'(h_s) = \frac{1}{h_e - h_s} \left[ W(h_s) - \frac{\Sigma_a(h_s)}{2D} \right]$$

et

$$\frac{1}{2D(h_e - h_s)} \left[ \max_{h \in [h_e, h_s]} \Sigma_a(h) - \Sigma_a(h_s) \right] \leq W'(h_s) \leq \frac{1}{2D(h_e - h_s)} \left[ \min_{h \in [h_e, h_s]} \Sigma_a(h) - \Sigma_a(h_s) \right]$$

(on rappelle que  $h_s > h_e$ ). Lorsque  $\Sigma_a$  est croissante (resp. décroissante), on a donc  $W'(h_e) \geq 0$  et  $W'(h_s) \geq 0$  (resp.  $W'(h_e) \leq 0$  et  $W'(h_s) \leq 0$ ).

On peut également noter que

$$\forall h \in [h_e, h_s] : W(h) > 0 \tag{61}$$

et

$$\forall h \in ]h_e, h_s[ : G(h) > 0. \tag{62}$$

En effet, la fonction  $G$  est strictement concave sur  $[h_e, h_s]$  et nulle en  $h_e$  et en  $h_s$  (car  $\Sigma_a(h) > 0$  sur  $]h_e, h_s[$  et  $D > 0$ ). D'où la stricte positivité de  $G$  sur  $]h_e, h_s[$ . La fonction  $W$  est donc également strictement positive sur  $]h_e, h_s[$ . Par ailleurs, du fait de la stricte concavité de  $G$  sur  $[h_e, h_s]$ , on a en particulier  $G'(h_e) > 0$  et  $G'(h_s) < 0$ . D'où  $W(h_e) > 0$  et  $W(h_s) > 0$  en utilisant (59).

Par exemple, lorsque  $\Sigma_a(h)$  est affine c'est-à-dire définie avec (36), on trouve

$$\begin{cases} W(h) = \frac{\Sigma_{a,e}}{2D} + \frac{\sigma_a}{6D} (h - 2h_e + h_s), & \text{(a)} \\ G(h) = (h - h_e)(h_s - h) \left[ \frac{\Sigma_{a,e}}{2D} + \frac{\sigma_a}{6D} (h - 2h_e + h_s) \right]. & \text{(a)} \end{cases} \tag{63}$$

À l'instar du Théorème 3.1, le résultat suivant – dont la preuve est placée en Annexe 2 – établit la forme de la solution lorsqu'elle existe:

**Théorème 3.3** *On suppose qu'une solution  $(h, \phi_0, k_{eff})$  de (28)(29) existe. Alors:*

i)  $k_{eff} \in ]0, k_\infty]$  où

$$k_\infty = \frac{v \Sigma_f}{2D \max_{h \in [h_e, h_s]} W(h)}. \tag{64}$$

De plus,  $k_{eff}$  est solution de

$$\int_{h_e}^{h_s} \frac{dh}{\sqrt{\left[ \frac{v \Sigma_f}{D k_{eff}} - 2W(h) \right] (h - h_e)(h_s - h)}} = L \tag{65}$$

qui s'écrit aussi

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{df}{\sqrt{\frac{v \Sigma_f}{D k_{eff}} - 2W[h_e + (h_s - h_e) \sin^2 f]}} = L. \tag{66}$$

ii)  $(h, \phi_0) \in C^1([0, L]) \times C^2([0, L])$  et est donnée par

$$\begin{cases} h(z) = h_e + (h_s - h_e) \sin^2 f(z), & (a) \\ \phi_0(z) = (h_s - h_e) \sin[2f(z)] \sqrt{\frac{v\Sigma_f}{Dk_{eff}} - 2W[h_e + (h_s - h_e) \sin^2 f(z)]} & (b) \end{cases} \quad (67)$$

où  $f(z)$  est la fonction réciproque de

$$z(f) := 2 \int_0^f \frac{df'}{\sqrt{\frac{v\Sigma_f}{Dk_{eff}} - 2W[h_e + (h_s - h_e) \sin^2 f']}}. \quad (68)$$

La relation (65) peut s'interpréter de la façon suivante: L'enthalpie  $h(z)$  est solution d'une équation différentielle ordinaire d'ordre 3 à laquelle on impose 4 conditions aux limites (à savoir  $h(0) = h_e, h(L) = h_s, h'(0) = h'(L) = 0$ ). Elle est donc surdéterminée. La contrainte (65) compense alors la surdétermination. Remarquons que l'encadrement (58) permet d'affirmer que

$$\frac{v\Sigma_f}{\max_{h \in [h_e, h_s]} \Sigma_a(h)} \leq k_\infty \leq \frac{v\Sigma_f}{\min_{h \in [h_e, h_s]} \Sigma_a(h)}. \quad (69)$$

À l'instar du Théorème 3.2, le résultat suivant donne alors l'existence et l'unicité de la solution:

**Théorème 3.4** Soit

$$k_\infty = \frac{v\Sigma_f}{2D \max_{h \in [h_e, h_s]} W(h)}. \quad (70)$$

Alors, il existe un unique  $k_{eff} \in ]0, k_\infty[$  tel que le système (28)(29) ait une solution  $(h, \phi)$  vérifiant  $\phi(z) > 0$  pour tout  $z \in ]0, L[$ . Ce  $k_{eff}$  solution de (66) étant unique, l'enthalpie  $h(z)$  est également unique et est définie avec (67)(a). Le flux neutronique  $\phi(z)$  est par contre défini à une constante multiplicative près et donné par  $\mu\phi_0(z)$  où  $\mu$  est une constante strictement positive quelconque et où  $\phi_0(z)$  est défini avec (67)(b).

La preuve de ce théorème (placée un peu plus loin dans cette section) utilise le point 2 du Lemme 9.1 placé en Annexe 3.

Soulignons que le  $k_{eff}$  obtenu au Théorème 3.4 peut être relié à un problème de recherche de plus petite valeur propre. On a en effet :

**Lemme 3.1** La constante  $\frac{v\Sigma_f}{k_{eff}}$  est la plus petite valeur propre de l'opérateur  $\mathcal{L}(h)$  défini sur  $H_0^1([0, L])$  avec

$$\mathcal{L}(h)\phi := -D \frac{d^2}{dz^2} \phi + \Sigma_a(h)\phi.$$

De plus, on a

$$\begin{cases} k_{eff} < \frac{v\Sigma_f}{\frac{\pi^2 D}{L^2} + \min_{h \in [h_e, h_s]} \Sigma_a(h)} & \text{lorsque } \Sigma_a(h) \text{ n'est pas constante sur } [h_e, h_s], \quad (a) \\ k_{eff} = \frac{v\Sigma_f}{\frac{\pi^2 D}{L^2} + \Sigma_a} & \text{lorsque } \Sigma_a(h) \text{ est une constante } \Sigma_a \text{ sur } [h_e, h_s]. \quad (b) \end{cases} \quad (71)$$

Le flux neutronique  $\phi(z)$  obtenu au Théorème 3.4 correspond donc au mode fondamental de  $\mathcal{L}(h)$ . Il est important de noter ici que l'opérateur  $\mathcal{L}(h)$  étant un opérateur de Sturm-Liouville avec  $z \mapsto \Sigma_a[h(z)]$  continue sur  $[0, L]$  (puisque  $h \mapsto \Sigma_a(h)$  est continue sur  $[h_e, h_s]$  par hypothèse et que  $z \mapsto h(z)$  définie avec (67)(a) est continue sur  $[0, L]$ ), selon la théorie de ces opérateurs [17, 18],  $\mathcal{L}(h)$  admet un spectre discret et dénombrable dont seuls les vecteurs propres associés au mode fondamental sont de signe constant sur  $]0, L[$  (voir par exemple le Théorème 2.1 du Chapitre 8 dans [17]). Ce point justifie le fait que la contrainte de positivité (11) soit respectée par le vecteur propre  $\phi$  associé à la plus petite valeur propre  $\frac{\nu}{k_{eff}}$  de  $\mathcal{L}(h)$ .

Notons que d'après (69), il existe  $\tilde{L} > 0$  telle que

$$k_\infty = \frac{\nu \Sigma_f}{\frac{\pi^2 D}{\tilde{L}^2} + \min_{h \in [h_e, h_s]} \Sigma_a(h)}.$$

Le Théorème 3.4 et l'inégalité (71)(a) impliquent donc que lorsque  $\Sigma_a(h)$  n'est pas constante sur  $[h_e, h_s]$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour } L \in [0, \tilde{L}[ : k_{eff} < \frac{\nu \Sigma_f}{\frac{\pi^2 D}{L^2} + \min_{h \in [h_e, h_s]} \Sigma_a(h)} < k_\infty, \\ \text{Pour } L > \tilde{L} : k_{eff} < k_\infty < \frac{\nu \Sigma_f}{\frac{\pi^2 D}{L^2} + \min_{h \in [h_e, h_s]} \Sigma_a(h)}. \end{array} \right.$$

Soulignons que  $k_{eff}$  dépend de  $L$  mais que  $k_\infty$  ne dépend pas de  $L$ .

Enfin, on a le lemme suivant:

**Lemme 3.2** 1. *Le coefficient multiplicateur  $k_\infty$  défini avec (70) est égal au coefficient  $k_{eff}$  obtenu en milieu infini.*

2. *Le coefficient multiplicateur sans couplage obtenu pour une enthalpie égale à  $h_* \in [h_e, h_s]$  est donné par*

$$k_{eff,0}(h_*) = \frac{\nu \Sigma_f}{\frac{\pi^2 D}{L^2} + \Sigma_a(h_*)}. \tag{72}$$

*On a donc en particulier  $\lim_{L \rightarrow +\infty} k_{eff,0}(h_*) = \frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_a(h_*)}$ .*

3. *Le coefficient multiplicateur  $k_{eff,0}(h_*)$  vérifie*

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma_a(h) \text{ croissante} \implies 0 < k_{eff} < k_{eff,0}(h_e), \text{ (a)} \\ \Sigma_a(h) \text{ décroissante} \implies 0 < k_{eff} < k_{eff,0}(h_s). \text{ (b)} \end{array} \right. \tag{73}$$

Le second point du Lemme 3.2 est une application directe de (71)(b) dont la preuve utilise l'inégalité de Poincaré écrite avec une constante optimale (voir (75) dans la preuve du Lemme 3.1). Néanmoins, nous proposons deux autres preuves utilisant certains résultats établis précédemment, ce qui permet de vérifier la cohérence de ces résultats entre eux.

Soulignons qu'il est impossible d'affirmer *a priori* que  $0 < k_{eff,0}(h_e) < k_\infty$  ou que  $0 < k_\infty < k_{eff,0}(h_e)$  lorsque  $\Sigma_a(h)$  est croissante, ou que  $0 < k_{eff,0}(h_s) < k_\infty$  ou que  $0 < k_\infty < k_{eff,0}(h_s)$  lorsque  $\Sigma_a(h)$  est décroissante. La validité d'une de ces inégalités dépend en effet explicitement des données  $D, L, h_e$  et  $h_s$  du problème ainsi que du type de

fonction  $h \mapsto \Sigma_a(h)$  (voir par exemple la formule (99) qui donne  $k_\infty$  dans le cas affine : la comparaison de (99) avec (72) confirme qu’il est en effet impossible de statuer *a priori*).

**Preuve du Théorème 3.4:** Pour tout  $f \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , on a  $\frac{\Sigma}{D} - 2W[h_e + (h_s - h_e) \sin^2 f] \geq \frac{\Sigma - \Sigma_\infty}{D}$  où

$$\Sigma_\infty := 2D \max_{h \in [h_e, h_s]} W(h).$$

D’où

$$\forall \Sigma > \Sigma_\infty : 0 \leq I(\Sigma) \leq \pi \sqrt{\frac{D}{\Sigma - \Sigma_\infty}}$$

avec

$$I(\Sigma) := \int_{h_e}^{h_s} \frac{dh}{\sqrt{[\frac{\Sigma}{D} - 2W(h)](h - h_e)(h_s - h)}} \tag{74}$$

et en utilisant (65) et (66). On en déduit que  $\lim_{\Sigma \rightarrow +\infty} I(\Sigma) = 0$ . Le point 2 du Lemme 9.1 placé en Annexe 3 s’écrit  $\lim_{\Sigma \rightarrow \Sigma_\infty^+} I(\Sigma) = +\infty$ . On vérifie par ailleurs que  $I(\Sigma)$  est une fonction strictement décroissante sur  $[\Sigma_\infty, +\infty[$ . Ainsi,  $I(\Sigma)$  définit une bijection strictement décroissante de  $[\Sigma_\infty, +\infty[$  dans  $[0, +\infty[$ , ce qui permet d’établir l’existence d’un unique  $\Sigma > \Sigma_\infty$  tel que  $I(\Sigma) = L$  avec  $L > 0$ . On conclut en notant que  $k_{eff} = \frac{v\Sigma_f}{\Sigma}$ .  $\square$

**Preuve du Lemme 3.1:** Le coefficient  $\frac{v\Sigma_f}{k_{eff}}$  est par construction une valeur propre de  $\mathcal{L}(h)$  puisque  $\phi(z)$  obtenu au Théorème 3.4 est non nul. C’est de plus la plus petite valeur propre de  $\mathcal{L}(h)$  puisque  $\phi(z)$  est strictement positive sur  $]0, L[$ . En effet, les vecteurs propres de  $\mathcal{L}(h)$  associés aux autres valeurs propres changent de signe sur  $]0, L[$  d’après la théorie des opérateurs de Sturm–Liouville [17, 18]. Par ailleurs, on a

$$\langle \mathcal{L}(h)\phi, \phi \rangle > D\|\phi'\|_{L^2}^2 + \min_{h \in [h_e, h_s]} \Sigma_a(h) \cdot \|\phi\|_{L^2}^2$$

lorsque  $\Sigma_a(h)$  n’est pas constante sur  $[h_e, h_s]$  (rappelons que  $\Sigma_a(h)$  est strictement positive sur  $[h_e, h_s]$ ). Or, d’après l’inégalité de Poincaré, on a

$$\|\phi'\|_{L^2} \geq \frac{\pi}{L} \|\phi\|_{L^2} \tag{75}$$

et cette inégalité est optimale. D’où  $\langle \mathcal{L}(h)\phi, \phi \rangle \geq \left[ \frac{\pi^2 D}{L^2} + \min_{h \in [h_e, h_s]} \Sigma_a(h) \right] \|\phi\|_{L^2}^2$  soit encore

$$\frac{v\Sigma_f}{k_{eff}} > \frac{\pi^2 D}{L^2} + \min_{h \in [h_e, h_s]} \Sigma_a(h).$$

D’où l’inégalité (71)(a). On obtient l’égalité (71)(b) en notant que l’inégalité de Poincaré est une égalité pour la fonction  $\phi(z) = \sin(\frac{\pi z}{L})$ .  $\square$

**Preuve du Lemme 3.2:**

**Preuve du premier alinéa:** Le point 2 du Lemme 9.1 placé en Annexe 3 s’écrit aussi  $\lim_{k_{eff} \rightarrow k_\infty^-} I\left(\frac{v\Sigma_f}{k_{eff}}\right) = +\infty$ , qui est équivalent à  $\lim_{L \rightarrow +\infty} k_{eff} = k_\infty$  en utilisant (74) et le fait que  $I(\Sigma)$  est une bijection (voir la preuve du Théorème 3.4).

**Preuve du deuxième alinéa:** La relation (72) peut être vue comme une application directe de (71)(b). Nous pouvons cependant obtenir (72) de deux autres façons. En effet, on obtient de suite (72) en utilisant le Corollaire 3.1 et en remplaçant  $L_{\min}$  et  $v\Sigma_f$  dans (50) par respectivement  $L$  et  $\frac{v\Sigma_f}{k_{eff,0}}$ . On peut aussi obtenir (72) en utilisant (66) lorsque  $h_s$  tend vers  $h_e$  puisque (66) s'écrit alors

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{df}{\sqrt{\frac{v\Sigma_f}{Dk_{eff,0}} - 2 \lim_{h_s \rightarrow h_e^+} W(h_e)}} = L$$

soit encore

$$k_{eff,0} = \frac{v\Sigma_f}{\frac{\pi^2 D}{L^2} + 2D \lim_{h_s \rightarrow h_e^+} W(h_e)}$$

(la fonction  $W(h)$  dépend des paramètres  $h_e$  et  $h_s$ : voir (54)). D'autre part, en choisissant  $h = h_e$  dans (57), on obtient

$$\frac{G'(h_e)}{h_s - h_e} = \frac{1}{D} \int_0^1 \int_0^1 \Sigma_a[h_e + t(1-u)(h_s - h_e)]t \, du \, dt.$$

D'où  $\lim_{h_s \rightarrow h_e^+} \frac{G'(h_e)}{h_s - h_e} = \frac{\Sigma_a(h_e)}{2D}$ . On conclut en utilisant le fait que  $W(h_e) = \frac{G'(h_e)}{h_s - h_e}$  (voir (59)).

**Preuve du troisième alinéa:** Ce point est une application de l'inégalité (71)(a). □

### 3.3 Lien entre les deux approches

Nous avons vu au §2.4 l'existence d'un lien formel entre les problèmes de recherche de  $h_s$  et de  $k_{eff}$ . Nous explorons ici plus en profondeur cet aspect à la lumière des résultats obtenus précédemment. Cela nous permettra également d'expliquer pourquoi le résultat d'existence et d'unicité pour le *problème de recherche de  $h_s$*  (cf. Théorème 3.2) est obtenu sous une hypothèse *ad hoc* (cf. Hypothèse 3.1) alors que le résultat d'existence et d'unicité pour le *problème de recherche de  $k_{eff}$*  (cf. Théorème 3.4) ne nécessite aucune hypothèse (autre que l'hypothèse de régularité sur  $\Sigma_a(h)$ ). L'étude de ce lien permettra également de souligner que la fonction  $V$  est plus adaptée que la fonction  $W$  pour la résolution du *problème de recherche de  $h_s$*  bien qu'il soit possible de formaliser ce problème avec  $W$  à l'instar du *problème de recherche de  $k_{eff}$* . Enfin, on rappelle que dans tout ce qui suit,  $h_e$  est fixé.

Nous remarquons tout d'abord que les fonctions  $V$  et  $W$  respectivement définies avec (30) et (54) sont reliées par

$$V(h_s) - V(h) = -(h_s - h) \left[ W(h) - \frac{v\Sigma_f}{2D} \right].$$

Il est important de noter que la fonction  $W$  est paramétrée par  $h_s$  alors que  $V$  ne l'est pas. Aussi, dans la suite, on pose  $\mathcal{W}(h_*, h) := W(h)$  et on réécrit la relation précédente avec

$$V(h_*) - V(h) = -(h_* - h) \left[ \mathcal{W}(h_*, h) - \frac{v\Sigma_f}{2D} \right]. \tag{76}$$

Cette relation est valable pour tout  $h_* > h_e$  dès lors que  $W$  est définie sur  $[h_e, h_*]$ , ce qui est le cas pour tout  $h_* \in ]h_e, h_{\max}]$ . Notons par ailleurs que  $h \mapsto \mathcal{W}(h_*, h)$  est

dans  $C^1([h_e, h_*]) \cap C^2(]h_e, h_*[)$  d'après (60) (en particulier,  $\mathcal{W}(h_*, h_*)$  est défini lorsque  $h_e < h_* \leq h_{\max}$  et est égal à  $\frac{G'(h_*)}{h_e - h_*}$  d'après (59)(b)). On a alors

$$V'(h_*) = \frac{v\Sigma_f}{2D} - \mathcal{W}(h_*, h_*).$$

L'introduction de  $h_*$  permettra de réintroduire la valeur  $h_s$  solution de (38) et qui est maintenant *a priori* différente de  $h_*$ . On pose par ailleurs

$$\mathbb{W}(h_*) = \max_{h \in [h_e, h_*]} \mathcal{W}(h_*, h).$$

Cette quantité existe puisque  $\mathcal{W}(h_*, \cdot) \in C^0([h_e, h_*])$  d'après (60), et on a  $\mathbb{W} \in C^0([h_e, h_{\max}])$ . Enfin, la fonction  $J$  définie en (52) et analysée au point 1 du Lemme 9.1 est maintenant donnée par

$$J(h_s) := \int_{h_e}^{h_s} \frac{dh}{\sqrt{\left[\frac{v\Sigma_f}{D} - 2\mathcal{W}(h_s, h)\right](h - h_e)(h_s - h)}}. \tag{77}$$

D'où

$$J(h_s) = I(v\Sigma_f) \tag{78}$$

où la fonction  $I$  est définie avec (74) et analysée au point 2 du Lemme 9.1. L'égalité (78) explicite clairement le lien entre le *problème de recherche de  $h_s$*  et le *problème de recherche du  $k_{eff}$* . Néanmoins, la formulation (77) basée sur la fonction de deux variables  $\mathcal{W}(h_s, h)$  est plus complexe que (52). Cela vient bien sûr du fait que l'enthalpie  $h$  est imposée en sortie pour le *problème de recherche du  $k_{eff}$*  alors qu'elle ne l'est pas pour le *problème de recherche de  $h_s$* . Autrement dit, la fonction  $V$  est plus adaptée que la fonction  $W$  pour la résolution du *problème de recherche de  $h_s$* .

Dans la suite, nous serons amenés à considérer les deux cas

$$\forall h_* \in [h_e, h_{\max}] : \mathbb{W}(h_*) < v\Sigma_f \tag{79}$$

et

$$\exists h_* \in [h_e, h_{\max}] \text{ tel que } \mathbb{W}(h_*) = v\Sigma_f. \tag{80}$$

Comme  $\mathbb{W}(h_e) = 0$ , sous (80), il existe alors  $h_{**} \in ]h_e, h_*]$  tel que

$$\mathbb{W}(h_{**}) = v\Sigma_f \text{ et } \forall h \in [h_e, h_{**}] : \mathbb{W}(h) < v\Sigma_f.$$

Sans hypothèse particulière sur la fonction  $V$  (ou de façon équivalente sur la fonction  $\mathcal{W}(h_*, h)$ ), on obtient le résultat d'existence suivant:

- Théorème 3.5** i) *Sous la condition (79), il existe  $[l_{\min}, l_{\max}] \subset ]0, +\infty[$  tel que le problème de recherche de  $h_s$  ait au moins une solution pour tout  $L \in [l_{\min}, l_{\max}]$ . Dans ce cas,  $h_s \in ]h_e, h_{\max}]$  et il n'y a pas forcément unicité de  $h_s$ .*  
 ii) *Sous la condition (80), il existe  $l_{\min} > 0$  tel que le problème de recherche de  $h_s$  ait au moins une solution pour tout  $L \in [l_{\min}, +\infty[$ . Dans ce cas,  $h_s \in ]h_e, h_{**}[$ , la limite de  $h_s$  quand  $L$  tend vers  $+\infty$  est  $h_{**}$  et il n'y a pas forcément unicité de  $h_s$ .*

Notons que  $l_{\min}$  n'est pas nécessairement donné par la relation (48). L'existence potentielle de plusieurs solutions pour certaines sections efficaces d'absorption  $\Sigma_a(h)$  peut être un élément déterminant pour anticiper la non-convergence de l'algorithme de couplage



thermohydraulique-neutronique classiquement utilisé pour le problème de recherche du  $k_{eff}$ <sup>7</sup> mais appliqué au problème de recherche de  $h_s$ .

Enfin, on a le corollaire suivant qui permet de retrouver un résultat d'existence et d'unicité similaire à celui du Théorème 3.2:

**Corollaire 3.2** *S'il existe  $h_* \in ]h_e, h_{max}]$  tel que  $\mathcal{W}(h_*, h)$  soit strictement croissante et concave en  $h$  sur  $]h_e, h_*]$ , et que  $\mathcal{W}(h_*, h_*) = \frac{v\Sigma_f}{2D}$ , alors il y a existence et unicité de  $h_s \in [h_e, h_*[$  pour tout  $L \geq l_{min}$ . De plus,  $l_{min} = L_{min}$  où  $L_{min}$  est défini avec (48).*

La preuve de ce corollaire utilise le fait que l'hypothèse sur  $\mathcal{W}(h_*, h)$  implique l'Hypothèse 3.1. Néanmoins, ces deux hypothèses ne sont pas équivalentes, l'hypothèse sur  $\mathcal{W}(h_*, h)$  étant plus forte que l'Hypothèse 3.1. Le Corollaire 3.2 est donc plus faible que le Théorème 3.2. Cette remarque souligne à nouveau que la fonction  $V$  est plus adaptée que la fonction  $W$  pour la résolution du problème de recherche de  $h_s$ .

**Preuve du Corollaire 3.2:** Pour établir ce corollaire, il suffit de remarquer que l'Hypothèse 3.1 est vérifiée. En effet, l'on a d'après (76)

$$V'(h) = (h_* - h) \frac{\partial}{\partial h} \mathcal{W}(h_*, h) + \left[ \frac{v\Sigma_f}{2D} - \mathcal{W}(h_*, h) \right]$$

et

$$V''(h) = -2 \frac{\partial}{\partial h} \mathcal{W}(h_*, h) + (h_* - h) \frac{\partial^2}{\partial h^2} \mathcal{W}(h_*, h)$$

(on rappelle que  $V \in C^2([h_e, h_*])$  pour tout  $h_* \in ]h_e, h_{max}]$ : voir (35)). D'où  $V''(h) < 0$  sur  $]h_e, h_*[$  et  $V'(h_*) = 0$  d'après l'hypothèse sur  $\mathcal{W}(h_*, h)$ . On conclut alors en appliquant le Théorème 3.2. □

La preuve du Théorème 3.5 utilise des arguments similaires à ceux utilisés pour établir l'existence au Théorème 3.4 couplés au lemme suivant qui est un prolongement du point 2 du Lemme 9.1:

- Lemme 3.3** i) *Sous la condition (79), il existe  $[L_{min}, L_{max}] \subset ]0, +\infty[$  tel que  $J([h_e, h_{max}]) = [L_{min}, L_{max}]$ .*  
 ii) *Sous la condition (80), il existe  $L_{min} > 0$  et  $h_{**} \in ]h_e, h_*]$  tel que  $J([h_e, h_{**}]) = [L_{min}, +\infty[$ .*

**Preuve du Lemme 3.3:** La preuve du point i est immédiate puisque dans ce cas, l'intégrale  $J(h_s)$  est définie sur  $[h_e, h_{max}]$ . En effet, la relation (77) s'écrit aussi

$$J(h_s) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sqrt{D}d\phi}{\sqrt{v\Sigma_f - 2 \int_0^1 \int_0^1 \Sigma_a[h_e + t(h_s - h_e) + tu(h_e + (h_s - h_e) \sin^2 \phi - h_s)]tdtdu}}, \tag{81}$$

intégrale qui est définie pour tout  $h_s \in [h_e, h_{max}]$  dès lors que  $\mathbb{W}(h_s) > \frac{v\Sigma_f}{2D}$ . La preuve du point ii utilise le fait que  $J(h_s)$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $h$  tend vers  $h_{**}$  par valeurs inférieures, cette limite étant obtenue en utilisant les mêmes arguments que ceux utilisés pour établir le point 2 du Lemme 9.1. □

<sup>7</sup> Celui-ci est brièvement présenté en Annexe 4 et utilisé au §5.2.

### 4 Explicitation de la solution dans le cas affine

On particularise les résultats de la Sect. 3 en supposant que

$$\Sigma_a(h) = \Sigma_{a,e} + \sigma_a(h - h_e) \tag{82}$$

où  $\Sigma_{a,e}$  et  $\sigma_a$  sont des constantes strictement positives connues.

#### 4.1 Recherche de l'enthalpie de sortie $h_s$

La proposition qui suit est une application des Théorèmes 3.1 et 3.2 lorsque  $\Sigma_a(h)$  est donnée par la relation (82):

**Proposition 4.1** *L'enthalpie de sortie  $h_s$  est nécessairement solution de*

$$\frac{2F_m(h_s-h_e) \left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{q(h_s-h_e)}} = L \tag{83}$$

où  $F_m(f)$  est l'intégrale elliptique de Jacobi définie avec

$$F_m(f) = \int_0^f \frac{df'}{\sqrt{1-m^2 \sin^2 f'}} \tag{84}$$

et où

$$\begin{cases} q(s) = \frac{v\Sigma_f - \Sigma_{a,e}}{D} - \frac{\sigma_a}{3D}s, & (a) \\ q(s)m^2(s) = \frac{\sigma_a}{3D}s. & (b) \end{cases} \tag{85}$$

Lorsque  $L > L_{\min}$  où

$$L_{\min} := \pi \sqrt{\frac{D}{v\Sigma_f - \Sigma_{a,e}}}, \tag{86}$$

l'équation (83) admet une unique solution. De plus, celle-ci est telle que

$$h_e < h_s < h_*$$

où

$$h_* = h_e + \frac{3}{2\sigma_a}(v\Sigma_f - \Sigma_{a,e}). \tag{87}$$

Notons que l'intégrale elliptique de Jacobi  $F_m(f)$  est étudiée dans [19] (cf. expression 17.3.1) et peut être évaluée avec MAPLE (voir plus loin le §4.3).

On a de plus le corollaire:

**Corollaire 4.1** *L'inconnue  $m$  est solution de*

$$G_m \left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{L}{L_{\min}} \tag{88}$$

avec

$$G_m(f) := F_m(f) \sqrt{1+m^2}. \tag{89}$$

L'enthalpie  $h_s$  est alors donnée par

$$h_s(m) = h_e + \frac{3m^2}{\sigma_a(1+m^2)}(v\Sigma_f - \Sigma_{a,e}) \tag{90}$$

et vérifie donc

$$\lim_{m \rightarrow 1} h_s(m) = h_* \tag{91}$$

D'autre part, les fonctions  $h(z)$  et  $\phi(z)$  sont données avec

$$\begin{cases} h(z) = h_e + [h_s(m) - h_e] \sin^2[f(z)], & \text{(a)} \\ \phi(z) = \frac{D_e}{\mathbb{E}\Sigma_f} [h_s(m) - h_e] \sin[2f(z)]f'(z) & \text{(b)} \end{cases} \tag{92}$$

où  $f(z)$  est la fonction réciproque de

$$z(f) = \frac{2L_{\min}}{\pi} G_m(f). \tag{93}$$

Soulignons que  $m \mapsto G_m\left(\frac{\pi}{2}\right)$  définit une fonction strictement croissante de  $[0, 1[$  dans  $[\frac{\pi}{2}, +\infty[$  (puisque  $m \mapsto F_m\left(\frac{\pi}{2}\right)$  est strictement croissante de  $[0, 1[$  dans  $[\frac{\pi}{2}, +\infty[$ ). Pour tout  $L > L_{\min}$ , il existe un unique  $m \in ]0, 1[$  vérifiant (88), ce qui est cohérent avec le résultat d'existence et d'unicité énoncé dans la Proposition 4.1 et vu comme un cas particulier du Théorème 3.2. Remarquons par ailleurs que le cas particulier  $L = L_{\min}$  conduit à  $m = 0$ , donc à  $h(z) = h_e$ .

**Preuve de la Proposition 4.1:** Lorsque  $\Sigma_a(h)$  est donnée avec (82), la fonction  $V(h)$  est donnée avec (37). Donc

$$V'(h) = a - b(h - h_e)$$

avec  $a := \frac{v\Sigma_f - \Sigma_{a,e}}{2D}$  et  $b := \frac{\sigma_a}{3D}$ . En utilisant (116) et (117), on obtient alors que

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{df}{\sqrt{2 \int_0^1 [a - b(h - h_e)(1 - t \cos^2 f)] dt}} = L.$$

Donc, en utilisant le fait que

$$\int_0^1 [a - bx(1 - t \cos^2 f)] dt = a - bx + \frac{bx}{2} \cos^2 f = a - \frac{bx}{2} (1 + \sin^2 f),$$

on obtient

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{df}{\sqrt{2a - b(h - h_e)(1 + \sin^2 f)}} = L$$

soit encore

$$\frac{2}{\sqrt{2a - b(h - h_e)}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{df}{\sqrt{1 - \frac{b(h - h_e)}{2a - b(h - h_e)} \sin^2 f}} = L$$

ce qui correspond à (83) en tenant compte de (84), (85) et de la définition de  $a$  et  $b$ . L'existence et l'unicité de  $h \in ]h_e, h_*[$  lorsque  $L > L_{\min}$  est une conséquence directe du Théorème 3.2 en notant que  $L_{\min}$  et  $h_*$  sont définis avec (49) et (47).  $\square$

**Preuve du Corollaire 4.1:** On déduit de (85) que

$$q = \frac{v\Sigma_f - \Sigma_{a,e}}{D(1 + m^2)}. \tag{94}$$

D'où

$$2F_m\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sqrt{\frac{D(1+m^2)}{v\Sigma_f - \Sigma_{a,e}}} = L$$

en utilisant (83), soit encore

$$F_m\left(\frac{\pi}{2}\right) \sqrt{1+m^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{L}{L_{\min}}$$

en utilisant  $L_{\min} := \pi \sqrt{\frac{D}{v\Sigma_f - \Sigma_{a,e}}}$ , ce qui correspond à l'équation (88). La relation (90) s'obtient en injectant (94) dans (85)(a). Les formules (92)(a) et (92)(b) sont respectivement déduites de (41) et (44) en notant que la fonction  $z(f)$  définie avec (42) est dans le cas affine donnée par (93). □

### 4.2 Recherche du coefficient multiplicateur $k_{eff}$

La solution du problème de recherche du coefficient multiplicateur  $k_{eff}$  se déduit de la Proposition 4.1 et du Corollaire 4.1 en notant que (83) et (85)(b) s'écrivent respectivement  $F_m\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{L}{2} \sqrt{q}$  et  $qm^2 = \frac{\sigma_a}{3D}(h_s - h_e)$ , en remplaçant  $v\Sigma_f$  par  $\frac{v\Sigma_f}{k_{eff}}$  dans (86) et (90), puis en considérant que  $h_s(m)$  est une donnée  $h_s$  dans (90) et (92). On obtient alors:

**Corollaire 4.2** Soit  $m \in ]0, 1[$  l'unique solution de

$$mF_m\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{\sigma_a}{3D}(h_s - h_e)}. \tag{95}$$

Le coefficient multiplicateur  $k_{eff}$  est alors donné par

$$k_{eff} = \frac{v\Sigma_f}{\frac{\sigma_a(1+m^2)}{3m^2}(h_s - h_e) + \Sigma_{a,e}}. \tag{96}$$

D'autre part, les fonctions  $h(z)$  et  $\phi(z)$  sont données avec

$$\begin{cases} h(z) = h_e + (h_s - h_e) \sin^2[f(z)], & (a) \\ \phi(z) = \frac{D_e}{\mathbb{E}\Sigma_f} (h_s - h_e) \sin[2f(z)]f'(z) & (b) \end{cases} \tag{97}$$

où  $f(z)$  est la fonction réciproque de

$$z(f) = 2 \sqrt{\frac{D}{\frac{v\Sigma_f}{k_{eff}} - \Sigma_{a,e}}} G_m(f). \tag{98}$$

Remarquons que de (96), on obtient que le coefficient de réactivité  $\gamma := \frac{d}{d\Delta h} \left(\frac{k_{eff}-1}{k_{eff}}\right)$  (où  $\Delta h := h_s - h_e$ ) est donné par<sup>8</sup>

$$\gamma = -\frac{\sigma_a(1+m^2)}{3v\Sigma_fm^2},$$

<sup>8</sup> Dans notre modèle simplifié de couplage thermohydraulique-neutronique, le combustible fissile est également le fluide caloporteur. Le coefficient de réactivité  $\gamma$  est donc ici à la fois le coefficient de température du combustible (qui caractérise l'effet de la température du combustible fissile sur la réactivité par *effet Doppler*) et le coefficient modérateur (qui caractérise l'effet de la température du fluide caloporteur sur la réactivité).

$\frac{k_{eff}-1}{k_{eff}}$  étant par définition la réactivité du cœur<sup>9</sup>. Le coefficient de réactivité  $\gamma$  est donc strictement négatif lorsque  $\sigma_a > 0$ , ce qui contribue à assurer la stabilité du cœur par un processus de *contre-réaction* entre la thermohydraulique et la neutronique, et qui correspond dans le contexte étudié ici à l'*effet Doppler* (voir aussi la Fig. 1). En effet, lorsque les réactions de fission sont plus présentes, l'enthalpie du cœur augmente. L'enthalpie de sortie  $h_s$  augmente alors, ce qui entraîne une diminution du  $k_{eff}$  puisque  $\gamma < 0$ , et donc une diminution (resp. augmentation) de la réactivité du cœur lorsque  $k_{eff} > 1$  (resp.  $k_{eff} \in ]0, 1[$ ).

On a par ailleurs:

**Lemme 4.1** *Le coefficient multiplicateur  $k_\infty$  en milieu infini, obtenu avec (70), est donné par*

$$k_\infty = \frac{\nu \Sigma_f}{\frac{2\sigma_a}{3}(h_s - h_e) + \Sigma_{a,e}} \quad (99)$$

et vérifie

$$\lim_{m \rightarrow 1} k_{eff} = k_\infty. \quad (100)$$

Et on montre que:

**Lemme 4.2** *Le coefficient multiplicateur  $k_{eff}$  vérifie*

$$0 < k_{eff} < k_\infty \quad (101)$$

et

$$0 < k_{eff} < k_{eff,0}(h_e) \quad (102)$$

où  $k_{eff,0}(h_*)$  défini avec (72) est le coefficient multiplicateur sans couplage obtenu pour une enthalpie égale à  $h_* \in [h_e, h_s]$ . On a de plus

$$\lim_{m \rightarrow 0} k_{eff} = k_{eff,0}(h_e). \quad (103)$$

Ce lemme est une application directe au cas affine du Théorème 3.4 et du Lemme 3.2. Dans la preuve de ce lemme, nous nous proposons cependant de retrouver ces inégalités à partir des formules explicites obtenues précédemment afin de souligner la cohérence de ces formules avec les résultats obtenus dans le cas général. Ajoutons que la limite (103) est cohérente avec le fait que  $m = 0$  dans (95) correspond à  $h_s = h_e$  (puisque  $F_0(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ ,  $L > 0$ ,  $\sigma_a > 0$  et  $D > 0$ ).

Soulignons que les formules (72) et (99) qui donnent respectivement  $k_{eff,0}(h_e)$  et  $k_\infty$  montrent qu'il est impossible d'établir *a priori* que  $0 < k_{eff,0}(h_e) < k_\infty$  ou que  $0 < k_\infty < k_{eff,0}(h_e)$ . La validité d'une de ces inégalités dépend en effet explicitement des données  $D$ ,  $L$ ,  $h_e$ ,  $h_s$  et  $\sigma_a$ . On peut par contre affirmer que dans le cas affine, on a

<sup>9</sup> Dans des situations réelles, la réactivité du cœur  $\frac{k_{eff}-1}{k_{eff}}$  doit être inférieure pour des raisons de sûreté à la proportion  $\beta$  de neutrons retardés par fission pour que le cœur puisse être stabilisé avec des moyens technologiques dont l'échelle caractéristique d'évolution en temps est celle des neutrons retardés et pas celle des neutrons prompts. Soulignons que dans notre modèle simplifié,  $\beta$  intervient dans l'équation instationnaire (2).

$$k_\infty < \lim_{L \rightarrow +\infty} k_{eff,0}(h_e) \tag{104}$$

puisque  $\lim_{L \rightarrow +\infty} k_{eff,0}(h_e) = \frac{\nu \Sigma_f}{\Sigma_{a,e}}$  (on rappelle que l'on a  $h_s > h_e$  et  $\sigma_a > 0$ ).

Enfin, notons que l'on déduit aisément des relations précédentes que

$$\lim_{\mathcal{P} \rightarrow 0} k_{eff} = k_{eff,0}(h_e) \quad \text{et} \quad \lim_{\mathcal{P} \rightarrow +\infty} k_{eff} = 0 \tag{105}$$

où la puissance  $\mathcal{P}$  du cœur est définie avec (27).

**Preuve du Lemme 4.1:** En utilisant (63)(a), on obtient que  $\max_{h \in [h_e, h_s]} W(h) = \frac{\Sigma_{a,e}}{2D} + \frac{2\sigma_a}{6D} (h_s - h_e)$  ce qui permet de conclure en utilisant (70). On peut aussi déduire ce résultat de (96) en faisant tendre  $m$  vers 1 puisque la solution de (95) est  $m = 1$  lorsque  $L$  tend vers  $+\infty$ .  $\square$

**Preuve du Lemme 4.2:** L'inégalité (101) se déduit immédiatement de (96) et (99) puisque  $m \in ]0, 1[$ . Pour obtenir (102), on doit montrer que  $\frac{\sigma_a(1+m^2)}{3m^2} (h_s - h_e) > \frac{\pi^2 D}{L^2}$  pour tout  $m \in ]0, 1[$ . Or, en utilisant (95), on obtient que

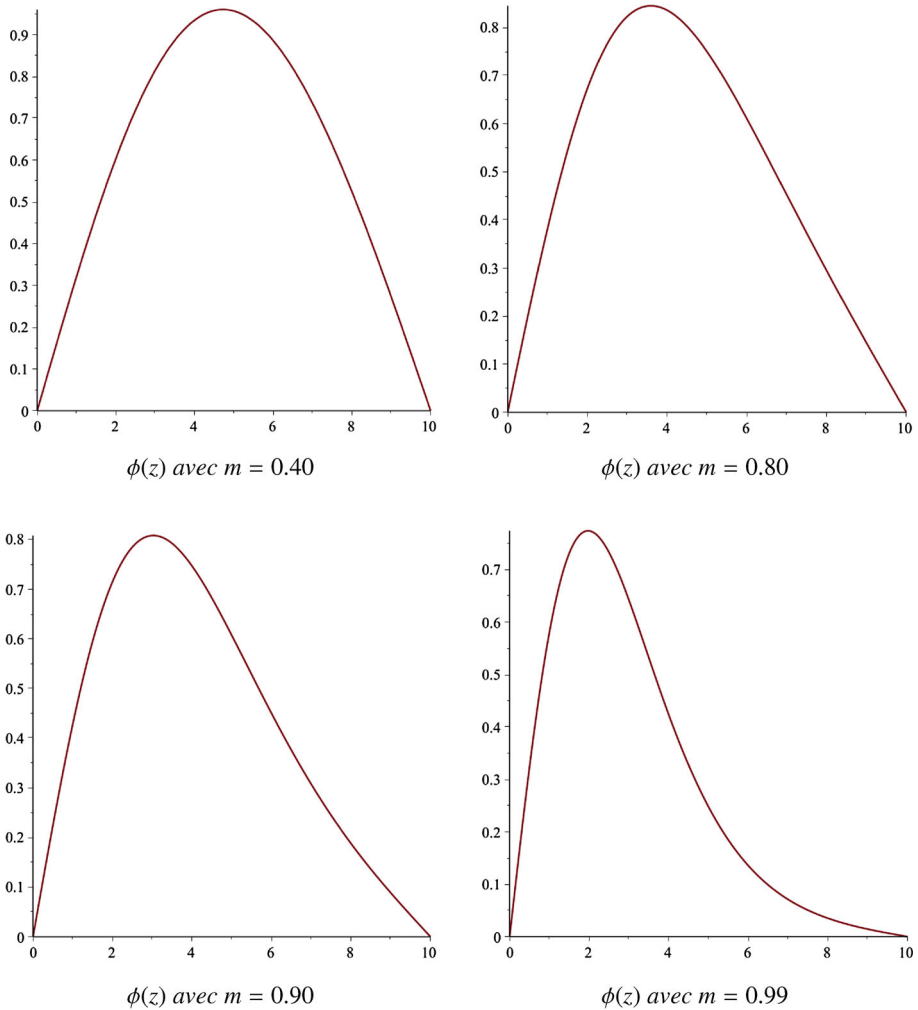
$$\frac{\sigma_a(1+m^2)}{3m^2} (h_s - h_e) = \frac{4D}{L^2} G_m^2 \left( \frac{\pi}{2} \right)$$

où  $G_m \left( \frac{\pi}{2} \right)$  est défini avec (89). Donc, établir l'inégalité précédente est équivalent à montrer que  $G_m \left( \frac{\pi}{2} \right) > \frac{\pi}{2}$  pour tout  $m \in ]0, 1[$ , ce qui est le cas puisque  $m \mapsto G_m \left( \frac{\pi}{2} \right)$  définit une fonction strictement croissante de  $]0, 1[$  dans  $]\frac{\pi}{2}, +\infty[$ . La limite (103) s'obtient en notant que  $\lim_{m \rightarrow 0} G_m \left( \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2}$ .  $\square$

### 4.3 Quelques profils du flux neutronique $\phi(z)$ obtenus via MAPLE

On se propose ici de visualiser le flux neutronique  $\phi(z)$  obtenu avec (92)(b) en utilisant la fonction `InverseJacobiAM` de MAPLE pour évaluer l'inverse de l'intégrale de Jacobi  $F_m(f)$  définie avec (84) et donc pour évaluer  $z(f)$  défini avec (42). On représente  $\phi(z)$  pour 4 valeurs de  $m$  différentes. Soulignons que le couplage est d'autant plus faible que le paramètre  $m$  est proche de 0 (voir (90) dans le cas de la recherche de  $h_s$  et (103) dans le cas de la recherche de  $k_{eff}$ ). Inversement, plus  $m$  est proche de 1, plus le couplage est important (voir (91) dans le cas de la recherche de  $h_s$  et (100) dans le cas de la recherche de  $k_{eff}$ ).

Les différents profils de  $\phi(z)$  représentés sur la Fig. 1 confirment que le couplage est d'autant plus faible que  $m$  est proche de 0 – le profil de  $\phi(z)$  se rapprochant du mode fondamental de l'équation de diffusion à coefficient constant (voir le Corollaire 3.1) –, et qu'il est d'autant plus fort que  $m$  est proche de 1 avec en particulier un maximum du flux se rapprochant de l'entrée du cœur, profil caractéristique des profils rencontrés dans les cas réels. Le déplacement vers l'entrée du cœur du maximum du flux neutronique dû au couplage est lié à la section efficace d'absorption qui est ici d'autant plus importante que l'enthalpie interne (et donc la température) du fluide caloporteur est importante puisque  $\sigma_a$  est strictement positif dans (82). Ce phénomène correspond à l'effet Doppler qui est une contre-réaction stabilisant le cœur et qui trouve son origine dans l'augmentation des captures stériles de neutrons dans le cœur lorsque la température augmente, captures stériles modélisées ici par l'intermédiaire de la section efficace d'absorption  $\Sigma_a(h)$ .



**Fig. 1** Flux neutronique  $\phi(z)$  obtenu avec (92)(b) pour différentes valeurs de  $m$ . Plus  $m$  est proche de 0, plus le couplage est faible et plus  $\phi(z)$  est proche du mode fondamental qui est ici un sinus. À l'opposée, plus  $m$  est proche de 1, plus le couplage est important, plus  $\phi(z)$  est différent du mode fondamental et plus le maximum de  $\phi(z)$  se rapproche de l'entrée du cœur du fait de l'effet Doppler

## 5 Application numérique dans le cas affine

On considère les données suivantes<sup>10</sup>:

$$\left\{ \begin{array}{l} SD_e = 14660 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}, \\ L = 400 \text{ cm}, \\ D = 1 \text{ cm}, \\ \Sigma_{a,e} = 0.45 \text{ cm}^{-1}, \\ \nu \Sigma_f = 0.5 \text{ cm}^{-1}, \\ \sigma_a(1480 \times 10^3 - h_e) = 0.0004 \text{ cm}^{-1}, \\ h_e = 1283 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}. \end{array} \right.$$

Le coefficient  $\sigma_a$  caractérise dans le cas affine la dépendance de la section efficace d'absorption avec l'enthalpie  $h$  du fluide caloporteur. Autrement dit, plus  $\sigma_a$  est important, plus le couplage entre la thermohydraulique et la neutronique est important. Ici,  $\sigma_a$  est de l'ordre de  $2.03 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1} \cdot \text{J}^{-1} \cdot \text{kg}$ .

Pour ces données et pour différentes puissances du cœur, on compare les résultats obtenus *via* les solutions analytiques de la Sect. 4 avec ceux obtenus *via* l'algorithme itératif traditionnellement utilisé pour coupler les codes industriels de thermohydraulique et de neutronique. Soulignons dès maintenant que cet algorithme résout à chaque itération un problème linéaire de recherche de plus petite valeur propre, et trouve sa justification dans le Lemme 3.1. L'adaptation de cet algorithme au modèle de couplage étudié dans cet article est brièvement présenté en Annexe 4. Dans [20], on étudie la convergence de celui-ci.

### 5.1 Recherche de l'enthalpie de sortie $h_s$

On utilise le Corollaire 4.1 pour évaluer  $h_s$ . En utilisant (86), on trouve

$$L_{\min} = 14.05 \text{ cm}.$$

En notant que  $L/L_{\min} \simeq 28.5$ , on peut supposer qu'en première approximation, le paramètre  $m$  solution de (88) est égal à 1. D'où

$$h_s = 38220.50 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \tag{106}$$

en utilisant (90), ce qui, en utilisant (27), correspond à une puissance du cœur donnée par

$$\mathcal{P} = 541.50 \text{ GW}.$$

Cette puissance est bien évidemment irréaliste<sup>11</sup>. Cela vient de ce que l'enthalpie de sortie  $h_s$  donnée par (106) est très importante et que celle-ci correspond aussi à la solution du problème de recherche du coefficient multiplicateur  $k_{eff}$  pour lequel  $k_{eff} = 1$ .

<sup>10</sup> Ces données réalistes nous ont été fournies par J. Ragusa qui nous a également fourni le code MATLAB de couplage thermohydraulique-neutronique basé sur l'algorithme itératif de calcul du  $k_{eff}$  brièvement présenté en Annexe 4.

<sup>11</sup> La puissance  $\mathcal{P}$  d'un cœur de réacteur à eau pressurisée classique est de l'ordre de quelques GW.



## 5.2 Recherche du coefficient multiplicateur $k_{eff}$

Lorsque l'enthalpie de sortie  $h_s$  est imposée de telle sorte que la puissance  $\mathcal{P}$  du cœur déduite de (27) soit réaliste,  $k_{eff}$  est différent de 1. En utilisant le Corollaire 4.2 et en approchant à nouveau  $m$  avec 1, on obtient pour les puissances successives 2.75 GW, 3.75 GW et 5.5 GW<sup>12</sup>:

$$\begin{cases} \mathcal{P} = 2.75 \text{ GW} \Rightarrow \Delta h = 187.58 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \Rightarrow h_s = 1470.58 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \Rightarrow k_{eff} = 1.11048, \\ \mathcal{P} = 3.75 \text{ GW} \Rightarrow \Delta h = 255.80 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \Rightarrow h_s = 1538.8 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \Rightarrow k_{eff} = 1.11025, \\ \mathcal{P} = 5.5 \text{ GW} \Rightarrow \Delta h = 375.17 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \Rightarrow h_s = 1658 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \Rightarrow k_{eff} = 1.10986. \end{cases} \quad (107)$$

Soulignons que compte tenu de (100), ces  $k_{eff}$  sont approchés ici par  $k_\infty$  défini avec (99) puisque l'on fait les calculs avec  $m = 1$  (on a en toute rigueur  $0 < k_{eff} < k_\infty$ : voir (101)).

Ces  $k_{eff}$  sont strictement supérieurs à 1. Cela sous-entend que pour trouver une solution stationnaire non nulle du couplage thermohydraulique–neutronique (1)(2) avec ces données, il est nécessaire d'augmenter l'absorption des neutrons *via* des moyens technologiques appropriés<sup>13</sup> (voir le point 2 du Lemme 2.3).

En outre, la réactivité  $\frac{k_{eff}-1}{k_{eff}}$  est de l'ordre de 9900 pcm<sup>14</sup> pour ces 3 cas, ce qui est une réactivité très importante par rapport aux réactivités usuelles qui sont entre 50 pcm et 100 pcm. Il faudrait en effet ici une proportion  $\beta$  de neutrons retardés par fission strictement supérieure à de l'ordre de  $10^4$  pcm, ce qui est bien supérieur au  $\beta$  usuel qui est de l'ordre de 660 pcm (pour un réacteur à eau pressurisée classique)<sup>15</sup>. Les 3 réacteurs étudiés ici sont donc difficilement contrôlables.

Enfin,  $k_{eff,0}(h_e)$  défini avec (72) prend la valeur

$$k_{eff,0}(h_e) = 1.11096$$

qui est bien supérieure aux valeurs de  $k_{eff}$  obtenues plus haut (voir l'inégalité (102)). Notons qu'ici, on a  $\lim_{L \rightarrow +\infty} k_{eff,0}(h_e) = \frac{v \Sigma_f}{\Sigma_{a,e}} = 1.11111$ : l'inégalité (104) est donc satisfaite (on rappelle que les  $k_{eff}$  évalués ci-dessus sont obtenus en utilisant  $k_\infty$ ). On constate de plus que cette valeur de  $k_{eff,0}(h_e)$  couplée aux valeurs de  $k_{eff}$  en fonction de la puissance  $\mathcal{P}$  du cœur obtenues ci-dessus sont compatibles avec (105).

Ces résultats suggèrent que bien que  $m$  soit proche de 1, l'influence de la thermohydraulique sur la neutronique n'est pas très importante pour les données choisies puisque l'ensemble des  $k_{eff}$  obtenus sont proches de  $k_{eff,0}(h_e)$ . Pour augmenter l'influence de la thermohydraulique sur la neutronique, il faudrait augmenter le coefficient  $\sigma_a$  (qui est ici de l'ordre de  $2.03 \times 10^{-9} \text{ cm}^{-1} \cdot \text{J}^{-1} \cdot \text{kg}$ ).

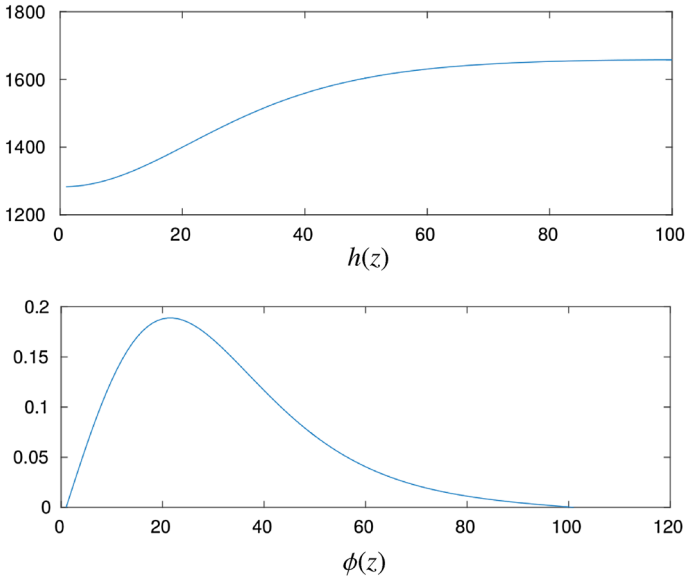
Les résultats obtenus ci-dessus avec nos résultats analytiques permettent de vérifier les résultats numériques obtenus avec l'algorithme itératif classique de couplage

<sup>12</sup> Le fait d'approcher  $m$  solution de (95) avec 1 se justifie par le fait que la valeur de  $\frac{L}{2} \sqrt{\frac{\sigma_a}{3D}}(h_s - h_e)$  est pour ces 3 cas supérieure à 2 et par la forme de la courbe  $m \mapsto F_m(\frac{\pi}{2})$  lorsque  $m$  tend vers 1.

<sup>13</sup> Ces moyens technologiques pourront être l'introduction de barres de contrôle ou l'injection de bore dans le cœur.

<sup>14</sup> pcm est l'acronyme de *pour cent mille*. Cette unité est fréquemment utilisée en neutronique.

<sup>15</sup> On rappelle que pour des raisons de sûreté, la réactivité du cœur  $\frac{k_{eff}-1}{k_{eff}}$  doit être inférieure à la proportion  $\beta$  de neutrons retardés par fission intervenant dans l'équation instationnaire (2): voir la note de bas de page 9.



**Fig. 2** Enthalpie interne  $h(z)$  (en  $\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ ) et flux neutronique  $\phi(z)$  (normalisé) lorsque  $\mathcal{P} = 5.5 \text{ GW}$ . L'abscisse indique l'indice de la maille en espace. Le nombre de mailles est égal à 100 et le pas en espace est constant

thermohydraulique–neutronique pour le calcul du  $k_{eff}$ , algorithme brièvement présenté en Annexe 4<sup>16</sup>. On trouve en effet *via* cet algorithme

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} = 2.75 \text{ GW} \implies k_{eff} = 1.11043, \\ \mathcal{P} = 3.75 \text{ GW} \implies k_{eff} = 1.11022, \\ \mathcal{P} = 5.5 \text{ GW} \implies k_{eff} = 1.10984. \end{array} \right. \quad (108)$$

La différence sur le  $k_{eff}$  entre (107) et (108) vient de ce que les résultats sont obtenus dans (107) en utilisant l'approximation  $m = 1$  dans (96) (alors qu'il faudrait en toute rigueur résoudre (95)). On peut aussi voir dans cette différence le fait que les résultats obtenus dans (108) le sont en discrétisant l'espace avec un nombre limité de mailles (100 mailles ici). Néanmoins, les résultats obtenus en augmentant le nombre de mailles en espace ne montrent pas de changement par rapport aux résultats obtenus dans (108). De plus, les résultats obtenus avec un nombre de mailles beaucoup plus faible ne changent quasiment pas<sup>17</sup>. Nous représentons par ailleurs sur la Fig. 2  $h(z)$  et  $\phi(z)$  obtenus avec l'algorithme de couplage lorsque  $\mathcal{P} = 5.5 \text{ GW}$ . On constate que la forme de  $\phi(z)$  est identique à celle de la Fig. 1 avec  $m = 0.99$ .

Enfin, soulignons que le calcul de  $k_{eff}$  *via* l'utilisation de la formule (96) est beaucoup plus rapide que *via* l'algorithme itératif classique de couplage thermohydraulique–neutronique.

<sup>16</sup> Nous remercions J. Ragusa qui nous a fourni le code MATLAB correspondant.

<sup>17</sup> Par exemple, avec 10 mailles, nous obtenons  $k_{eff} = 1.11044$ ,  $k_{eff} = 1.11023$  et  $k_{eff} = 1.10986$  pour les 3 puissances de (108). L'impact sur le  $k_{eff}$  de ce nombre limité de mailles est donc faible. Par contre, le profil de  $\phi(z)$  et, dans une moindre mesure, le profil de  $h(z)$  sont clairement impactés par ce nombre limité de mailles (tout en conservant des profils similaires à ceux de la Fig. 2).

C'est d'autant plus vrai que lorsque l'approximation  $m = 1$  est valable, la formule (96) ne nécessite que quelques opérations élémentaires.

## 6 Conclusion

Nous avons étudié dans ce travail le couplage monodimensionnel stationnaire dans un domaine borné  $[0, L]$  correspondant à un cœur nucléaire ( $L$  étant la hauteur du cœur) de deux systèmes modélisant de façon simplifiée respectivement les équations de la thermohydraulique dans un fluide caloporteur et l'équation de la neutronique dans l'approximation par la diffusion à un groupe en énergie, le couplage intervenant en considérant d'une part que le terme source (qui est le dépôt d'énergie dû aux fissions) de l'équation de transport de l'enthalpie interne est proportionnel à la densité de flux de neutrons, et en considérant d'autre part que certains des coefficients de l'équation de diffusion pour les neutrons dépendent de l'enthalpie interne du fluide.

Ce faisant, nous avons identifié deux problèmes d'intérêt. Le premier problème est un problème de recherche de l'enthalpie interne en  $x = L$  (enthalpie de sortie du cœur) connaissant l'enthalpie interne en  $x = 0$  (enthalpie en entrée du cœur). La puissance du cœur est alors une inconnue du problème, et sa recherche est équivalente à la recherche de l'enthalpie de sortie. Ce premier problème serait plutôt l'objectif de personnes surtout habituées aux équations de la thermohydraulique. Le deuxième problème est un problème de recherche d'un coefficient noté  $k_{eff}$  et appelé coefficient multiplicateur, coefficient par lequel on doit diviser la section efficace de fission pour obtenir une solution du problème couplé à enthalpie de sortie imposée. La puissance du cœur est alors une donnée du problème. Ce second problème serait plutôt l'objectif de personnes surtout habituées aux équations de la neutronique.

Lorsque le coefficient de diffusion et la section efficace de fission sont constants (la section efficace d'absorption demeurant dépendante de l'enthalpie), ces deux problèmes se ramènent à une équation différentielle ordinaire non-linéaire scalaire autonome d'ordre 1 avec un paramètre qui est l'enthalpie de sortie dans le premier cas et le coefficient multiplicateur  $k_{eff}$  dans le deuxième cas. Nous montrons alors plusieurs résultats théoriques (e.g. existence et unicité d'une solution pour le premier problème lorsque la hauteur du cœur  $L$  est supérieure à une hauteur minimale  $L_*$ ; existence et unicité d'une solution pour le second problème pour toute hauteur du cœur  $L$ ,  $k_{eff}$  appartenant à un intervalle  $]0, k_\infty[$  où  $k_\infty$  est le coefficient multiplicateur en milieu infini).

Des calculs explicites (utilisant les intégrales de Jacobi) sont possibles pour les deux problèmes lorsque la section efficace d'absorption dépend de l'enthalpie interne de façon affine. Ces calculs explicites permettent de vérifier les résultats théoriques obtenus dans le cas général. De plus, dans le cas de la recherche de  $k_{eff}$  (qui correspond au second problème), ces calculs explicites corroborent des résultats numériques obtenus avec un algorithme de couplage thermohydraulique–neutronique classique, algorithme basé sur une recherche à chaque itération de la plus petite valeur propre d'un opérateur linéaire déduit du couplage non-linéaire.

La suite de ce travail consistera à étudier numériquement ce modèle de couplage en instationnaire et en 2D/3D, à complexifier le modèle de thermohydraulique en utilisant un modèle bas Mach de thermohydraulique cœur [10–12] et à enrichir également le modèle de diffusion utilisé pour la neutronique en ajoutant plusieurs groupes en énergie. Enfin, l'analyse de la convergence de l'algorithme de couplage pour le calcul du  $k_{eff}$  utilisé dans cet article fera l'objet d'un futur article [20].

**Remerciements:** Ce travail a été financé en 2014 et en 2015 par le défi NEEDS du CNRS que nous remercions. Nous remercions également Jean Ragusa qui nous a fourni un code MATLAB permettant de résoudre le problème de recherche de  $k_{eff}$  pour notre problème de couplage simplifié thermo-hydraulique-neutronique ainsi qu’Emmanuel Audusse qui nous a aidé à réaliser certains calculs à l’aide de ce code.

### Annexe 1 Preuve du Théorème 3.1

En tenant compte de (24)(a), l’équation (24)(b) s’écrit

$$h'''(z) + E''(h)h'(z) = 0.$$

En intégrant cette équation, on obtient

$$h''(z) + E'(h) = C_1 \tag{109}$$

où  $C_1$  est une constante d’intégration. En multipliant (109) par  $h'$  puis en intégrant à nouveau, on obtient alors<sup>18</sup>

$$\frac{1}{2}(h')^2(z) + E(h) = C_1h + C_2$$

où  $C_2$  est une seconde constante d’intégration. On a par ailleurs  $h'(0) = h'(L) = 0, h(0) = h_e$  et  $h(L) = h_s$ . Donc  $E(h_e) = C_1h_e + C_2$  et  $E(h_s) = C_1h_s + C_2$ . D’où  $C_1 = \frac{E(h_s) - E(h_e)}{h_s - h_e}$  et  $C_2 = \frac{E(h_e)h_s - E(h_s)h_e}{h_s - h_e}$ . Ce qui permet d’obtenir

$$\frac{1}{2}(h')^2(z) + E(h) = \frac{E(h_s)}{h_s - h_e} \cdot (h - h_e) \tag{110}$$

puisque  $E(h_e) = 0$  soit encore

$$(h')^2(z) = 2[V(h_s) - V(h)] \cdot (h - h_e). \tag{111}$$

D’où  $dz = \frac{dh}{\sqrt{2[V(h_s) - V(h)](h - h_e)}}$  ce qui donne (38) et (40) en intégrant cette équation sur respectivement  $[0, L]$  et  $[0, z]$ . La fonction  $h$ , si elle existe, est donc dans  $C^1([0, L])$ . La relation (43) s’obtient en dérivant (40) par rapport à  $z$  puis en utilisant (24)(a).

Soit maintenant le changement d’inconnue difféomorphe de  $[0, L]$  sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$h(z) = h_e + \Delta h \sin^2 f(z) \tag{112}$$

où  $\Delta h := h_s - h_e$  et pour lequel  $f(0) = 0$  et  $f(L) = \frac{\pi}{2}$ . On a donc

$$\begin{cases} [h(z) - h_e] \times [h_s - h(z)] = (\Delta h)^2 \sin^2 f(z) \cos^2 f(z), & \text{(a)} \\ h'(z) = 2\Delta h \sin f(z) \cos f(z) f'(z). & \text{(b)} \end{cases} \tag{113}$$

On a d’autre part

$$V(h_s) - V(h) = (h_s - h) \int_0^1 V'[h_s + t(h - h_s)]dt. \tag{114}$$

Ces relations injectées dans (111) impliquent

$$\begin{aligned} 4(\Delta h)^2 \sin^2 f(z) \cos^2 f(z) (f'(z))^2 &= 2(h(z) - h_e)(h_s - h) \int_0^1 V'[h_s + t(h - h_s)]dt \\ &= 2(\Delta h)^2 \sin^2 f(z) \cos^2 f(z) \int_0^1 V'[h_s + t(h - h_s)]dt \end{aligned}$$

<sup>18</sup> Les fonctions  $h$  sont ici toutes les solutions possibles au sens des distributions.

soit donc

$$\forall z \in ]0, L[ : 2(f'(z))^2 = \int_0^1 V'[h_s + t(h - h_s)]dt$$

qui s'écrit également

$$\forall z \in ]0, L[ : 2(f'(z))^2 = \int_0^1 V'[h_e + \Delta h(1 - t \cos^2 f(z))]dt.$$

D'où l'égalité

$$\forall z \in ]0, L[ : 2f'(z) = \sqrt{2 \int_0^1 V'[h_e + \Delta h(1 - t \cos^2 f(z))]dt}. \tag{115}$$

En utilisant  $L = \int_0^L dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{df}{f'(z(f))}$  et en posant

$$J(h) := \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{df}{\sqrt{\int_0^1 V'[h_e + (h - h_e)(1 - t \cos^2 f)]dt}}, \tag{116}$$

on obtient donc

$$L = J(h_s), \tag{117}$$

ce qui correspond à (39). Enfin, connaissant  $h_s$ , l'on peut calculer  $z \mapsto f(z)$  à partir de la fonction réciproque de  $f \mapsto z(f)$  où  $z(f)$  est obtenu en utilisant (115) c'est-à-dire

$$z(f) = \sqrt{2} \int_0^f \frac{df'}{\sqrt{\int_0^1 V'[h_e + (h_s - h_e)(1 - t \cos^2 f')]dt}}. \tag{118}$$

D'où (41) en utilisant (112). La relation (44) s'obtient en utilisant (24)(a) et (113)(b). Enfin,  $h \in C^1([0, L])$  et (24)(a) impliquent que  $\phi \in C^0([0, L])$ . D'où  $\phi$ , si elle existe, est dans  $C^2([0, L])$  en utilisant (24)(b) (puisque  $\Sigma_a \in C^0([0, L])$  implique  $(\Sigma_a - \nu \Sigma_f)\phi \in C^0([0, L])$ ).

### Annexe 2 Preuve du Théorème 3.3

Les calculs ci-dessous sont faits de manière formelle. En utilisant la même approche que pour obtenir (110), on trouve<sup>19</sup>

$$(h')^2 = \left[ \frac{\Sigma}{D} - 2W(h) \right] (h - h_e)(h_s - h)$$

avec  $\Sigma = \frac{\nu \Sigma_f}{k_{eff}}$ . D'où  $dz = \frac{dh}{\sqrt{\left[ \frac{\Sigma}{D} - 2W(h) \right] (h - h_e)(h_s - h)}}$  ce qui donne (65) en intégrant cette

équation sur  $[0, L]$ . Par ailleurs, en posant  $\Delta h := (h_s - h_e)$  et en utilisant le changement de variable (112) c'est-à-dire

$$h(z) = h_e + \Delta h \sin^2 f(z) \tag{119}$$

<sup>19</sup> Les fonctions  $h$  sont ici toutes les solutions possibles au sens des distributions.

pour lequel  $f(0) = 0$  et  $f(L) = \frac{\pi}{2}$  (et qui existe uniquement si  $h(z) \in [h_e, h_s]$ ) ainsi que les relations (113) (qui demeurent valables), on obtient

$$\forall z \in ]0, L[: \quad 4(f'(z))^2 = \frac{\Sigma}{D} - 2W[h_e + \Delta h \sin^2 f(z)].$$

Une condition nécessaire d'existence est donc que  $\frac{\Sigma}{D} - 2W(h_e + \Delta h \sin^2 f) \geq 0$  pour tout  $f \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , ce qui s'écrit aussi  $\Sigma \geq 2D \max_{h \in [h_e, h_s]} W(h)$  soit encore  $k_{eff} \leq k_\infty$  où  $k_\infty$  est défini avec (64). Et on en déduit que

$$\forall z \in ]0, L[: \quad \frac{2f'(z)}{\sqrt{\frac{\Sigma}{D} - 2W[h_e + \Delta h \sin^2 f(z)]}} = 1 \tag{120}$$

ou encore

$$\frac{2df}{\sqrt{\frac{\Sigma}{D} - 2W[h_e + \Delta h \sin^2 f]}} = dz$$

ce qui donne (66) en intégrant cette équation sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . La fonction  $W(h)$  étant positive sur  $[h_e, h_s]$  (cf. (61)), on a aussi  $k_{eff} \geq 0$ . En outre, comme  $L \neq 0$ , on a de plus  $k_{eff} \neq 0$ . On a donc finalement  $k_{eff} \in ]0, k_\infty]$ .

Soit maintenant  $z(f)$  définie avec (68). La fonction  $z(f)$  est définie sur  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , et vérifie  $z(0) = 0$  et  $z(\frac{\pi}{2}) = L$ . Sachant que  $h(z)$  est donnée avec (119), on obtient

$$\phi_0(z) = \Delta h \sin[2f(z)]f'(z) = \Delta h \sin[2f(z)]\sqrt{\frac{\Sigma}{D} - 2W[h_e + \Delta h \sin^2 f(z)]}$$

en utilisant (28)(a) et (120). D'où (67). La fonction  $h$ , si elle existe, est donc dans  $C^1([0, L])$ . Puis, en utilisant le fait que  $k_{eff} \neq 0$ ,  $h \in C^1([0, L])$  et (28), on obtient que la fonction  $\phi_0$ , si elle existe, est dans  $C^2([0, L])$  en appliquant le raisonnement utilisé à la fin du Théorème 3.1 pour montrer que  $\phi \in C^2([0, L])$  (cf. Annexe 1).

### Annexe 3 Résultat clé utilisé dans les preuves des Théorèmes 3.2 et 3.4

Les Théorèmes 3.2 et 3.4 utilisent le résultat clé suivant:

**Lemme 9.1** 1. *On suppose que  $V(h)$  satisfait l'Hypothèse 3.1. Alors, l'intégrale*

$$J(h_s) := \int_{h_e}^{h_s} \frac{dh}{\sqrt{2[V(h_s) - V(h)](h - h_e)}}$$

*tend vers  $+\infty$  lorsque  $h_s$  tend vers  $h_*$  par valeurs inférieures,  $h_*$  étant le maximum local défini dans l'Hypothèse 3.1.*

2. *L'intégrale*

$$I(\Sigma) := \int_{h_e}^{h_s} \frac{dh}{\sqrt{[\frac{\Sigma}{D} - 2W(h)](h - h_e)(h_s - h)}}$$

*tend vers  $+\infty$  lorsque  $\Sigma$  tend vers  $\Sigma_\infty := 2D \max_{h \in [h_e, h_s]} W(h)$  par valeurs supérieures.*

**Preuve du Lemme 9.1:**

**Preuve du premier alinéa:** Comme  $V \in C^2(]h_e, h_{\max}[)$  (voir (35)) et que  $h_* \in ]h_e, h_{\max}[$  où  $h_*$  est l'enthalpie définie dans l'Hypothèse 3.1, on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 dans un voisinage  $[h_* - \alpha, h_*] \subset ]h_e, h_{\max}[$  ( $\alpha > 0$ ) à savoir

$$V(h) = V(h_*) + \frac{(h - h_*)^2}{2} V^{(2)}[\tilde{h}(h, h_*)] \tag{121}$$

où  $\tilde{h}(h, h_*) \in [h_* - \alpha, h_*]$  et  $V^{(2)}[\tilde{h}(h, h_*)] \neq 0$ . D'où

$$\forall h \in [h_* - \alpha, h_*] : V(h_s) - V(h) = V(h_s) - V(h_*) - \frac{(h - h_*)^2}{2} V^{(2)}[\tilde{h}(h, h_*)]$$

pour tout  $h_s \in ]h_e, h_{\max}[$ . En outre,  $V(h)$  atteint son maximum en  $h_*$ . Donc, on peut aussi écrire que  $\frac{(h-h_*)^2}{2} V^{(2)}[\tilde{h}(h, h_*)] < 0$  sur  $[h_* - \alpha, h_*]$ , ce qui permet d'écrire

$$\forall h \in [h_* - \alpha, h_*] : V(h_s) - V(h) = V(h_s) - V(h_*) + \frac{|h - h_*|^2}{2} |V^{(2)}[\tilde{h}(h, h_*)]|. \tag{122}$$

Par ailleurs, la fonction  $V^{(2)}$  étant par hypothèse continue dans  $]h_e, h_*]$ , il existe  $m > 0$  et  $M > 0$  tel que

$$\forall \tilde{h} \in [h_* - \alpha, h_*] : m \leq \frac{1}{2} |V^{(2)}(\tilde{h})| \leq M. \tag{123}$$

D'où en particulier

$$\forall h \in [h_* - \alpha, h_*] : V(h_s) - V(h) \leq V(h_s) - V(h_*) + M|h - h_*|^2. \tag{124}$$

On a par ailleurs

$$\frac{1}{\sqrt{2\Delta h}} \int_{h_s - \alpha/2}^{h_s} \frac{dh}{\sqrt{V(h_s) - V(h)}} \leq \int_{h_s - \alpha/2}^{h_s} \frac{dh}{\sqrt{2[V(h_s) - V(h)](h - h_e)}} \leq J(h_s)$$

où  $\Delta h := h_s - h_e$ . D'où en utilisant (124)

$$\forall h_s \in [h_* - \alpha/2, h_*] : \frac{1}{\sqrt{2\Delta h}} \int_{h_s - \alpha/2}^{h_s} \frac{dh}{\sqrt{V(h_s) - V(h_*) + M|h - h_*|^2}} \leq J(h_s).$$

En effectuant le changement d'inconnue  $h = h_* - \sqrt{\frac{V(h_*) - V(h_s)}{M}} t$ , on obtient donc

$$\forall h_s \in [h_* - \alpha/2, h_*] : \frac{1}{\sqrt{2\Delta h}} \sqrt{\frac{1}{M}} \int_a^b \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} \leq J(h_s)$$

avec  $a = \sqrt{\frac{M}{V(h_*) - V(h_s)}} (h_* - h_s)$  et  $b = \sqrt{\frac{M}{V(h_*) - V(h_s)}} (h_* - h_s + \alpha/2)$ . On a par ailleurs

$$a = \sqrt{\frac{2M}{|V^{(2)}[\tilde{h}(h_s, h_*)]|}} \leq \gamma$$

avec  $1 \leq \gamma := \sqrt{\frac{M}{m}}$  en utilisant (123). Et en utilisant (124), on obtient par ailleurs

$$V(h_*) - V(h_s) \leq M|h_s - h_*|^2$$

ce qui implique  $b \geq 1 + \frac{\alpha/2}{h_* - h_s}$ . On peut donc écrire que

$$\forall h_s \in [h_* - \alpha/2, h_*] : \frac{1}{\sqrt{2\Delta h}} \sqrt{\frac{1}{M}} \int_{\gamma}^{1 + \frac{\alpha/2}{h_* - h_s}} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} \leq J(h_s).$$

On obtient alors le résultat en notant que l'intégrale  $\int_{\gamma}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}}$  diverge.

**Preuve du deuxième alinéa:** On a démontré que  $W \in C^1([h_e, h_s]) \cap C^2(]h_e, h_s[)$  (cf. (60)).  $W$  admet donc un maximum sur  $[h_e, h_s]$ . Deux cas se présentent:

- ce maximum est atteint en  $h_* \in ]h_e, h_s[$ , et éventuellement en  $h_s$  et/ou en  $h_e$  ;
- ce maximum est atteint en  $h_* \in \{h_e, h_s\}$  uniquement.

Définissons  $\Sigma_{\infty}$  tel que  $W(h_*) = \frac{\Sigma_{\infty}}{2D}$ . Dans le premier cas, il existe  $\alpha > 0$  tel que  $W(h_*)$  soit le maximum local sur  $[h_* - \alpha, h_* + \alpha] \subset ]h_e, h_s[$  et on a  $W'(h_*) = 0$ . Comme  $W \in C^2([h_* - \alpha, h_* + \alpha])$ , on peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 ce qui donne

$$\forall h \in [h_* - \alpha, h_* + \alpha] : W(h) = W(h_*) + \frac{1}{2}(h - h_*)^2 W''[\tilde{h}(h, h_*)]$$

où  $\tilde{h}(h, h_*) \in [h_* - \alpha, h_* + \alpha]$ . En outre,  $W(h_*)$  étant un maximum de  $W$ , on a  $\frac{1}{2}(h - h_*)^2 W''[\tilde{h}(h, h_*)] \leq 0$  soit donc

$$\forall h \in [h_* - \alpha, h_* + \alpha] : W(h) = W(h_*) - \frac{1}{2}(h - h_*)^2 |W''[\tilde{h}(h, h_*)]|.$$

Et comme  $W''$  est continue sur  $[h_* - \alpha, h_* + \alpha]$ , on peut affirmer qu'il existe  $M > 0$  tel que  $|W''[\tilde{h}(h, h_*)]| \leq M$  ce qui implique

$$\forall h \in [h_* - \alpha, h_* + \alpha] : W(h) \geq W(h_*) - \frac{1}{2}M(h - h_*)^2.$$

Donc, quand  $\frac{\Sigma}{2D} - W(h_*) > 0$  c'est-à-dire pour tout  $\Sigma \geq \Sigma_{\infty}$ , on a

$$\forall h \in [h_* - \alpha, h_* + \alpha] : 0 \leq \frac{\Sigma}{D} - 2W(h) \leq \frac{\Sigma - \Sigma_{\infty}}{D} + M(h - h_*)^2$$

On trouve ainsi

$$I(\Sigma) \geq \frac{1}{(h_s - h_e)^2} \int_{h_* - \alpha}^{h_* + \alpha} \frac{dh}{\sqrt{\frac{\Sigma - \Sigma_{\infty}}{D} + M(h - h_*)^2}}.$$

D'où en appliquant le changement de variable  $h - h_* = \sqrt{\frac{\Sigma - \Sigma_{\infty}}{DM}} t$

$$I(\Sigma) \geq \frac{2}{\sqrt{M}(h_s - h_e)^2} \int_0^{\beta(\Sigma)} \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}}$$

avec  $\beta(\Sigma) = \alpha \sqrt{\frac{DM}{\Sigma - \Sigma_{\infty}}}$ . Dans le deuxième cas, en supposant par exemple que  $h_* = h_s$ , on applique la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 sur  $[h_s - \alpha, h_s] \subset ]h_e, h_s]$  (ce qui est possible puisque l'on sait que  $W \in C^1([h_s - \alpha, h_s])$  d'après (60)), soit donc

$$\forall h \in [h_s - \alpha, h_s] : W(h) = W(h_s) + (h - h_s)W'[\tilde{h}(h, h_s)]$$



où  $\bar{h}(h, h_s) \in [h_s - \alpha, h_s]$ . En procédant comme dans le premier cas, on obtient l'existence de  $M > 0$  tel que pour tout  $\Sigma \geq \Sigma_\infty$

$$\begin{aligned} \forall h \in [h_s - \alpha, h_s] : \quad & 0 \leq \left[ \frac{\Sigma}{D} - 2W(h) \right] (h - h_e)(h_s - h) \\ & \leq \left[ \frac{\Sigma - \Sigma_\infty}{D} + M(h_s - h) \right] (h_s - h_e)(h_s - h). \end{aligned}$$

Ainsi

$$I(\Sigma) \geq \frac{1}{\sqrt{h_s - h_e}} \int_{h_s - \alpha}^{h_s} \frac{dh}{\sqrt{\left[ \frac{\Sigma - \Sigma_\infty}{D} + 2M(h_s - h) \right] (h_s - h)}}.$$

Le changement de variable  $h_s - h = \frac{\Sigma - \Sigma_\infty}{2DM} t$  donne alors

$$I(\Sigma) \geq \frac{1}{\sqrt{2M(h_s - h_e)}} \int_0^{\gamma(\Sigma)} \frac{dt}{\sqrt{t + t^2}}$$

avec  $\gamma(\Sigma) = \frac{2DM}{\Sigma - \Sigma_\infty} \alpha$ . Une inégalité identique est obtenue lorsque  $h_* = h_e$ . En conclusion, pour les deux cas, utilisant le fait que  $\beta(\Sigma)$  et  $\gamma(\Sigma)$  tendent vers  $+\infty$  quand  $\Sigma$  tend vers  $\Sigma_\infty$  par valeurs supérieures, et que les intégrales  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$  et  $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t+t^2}}$  sont égales à  $+\infty$ , on obtient que  $I(\Sigma)$  tend vers  $+\infty$  quand  $\Sigma$  tend vers  $\Sigma_\infty$ .  $\square$

### Annexe 4 Algorithme itératif de couplage

Nous présentons brièvement dans cette section l'algorithme itératif utilisé au §5.2 pour résoudre le *problème de recherche du  $k_{eff}$* . Puis nous proposons un algorithme pour le *problème de recherche de  $h_s$*  utilisant cet algorithme. Ces deux algorithmes sont présentés en supposant que  $\Sigma_f$  et  $D$  dépendent de  $h$  à l'instar de  $\Sigma_a(h)$ .

#### Annexe 4.1 Algorithme itératif de couplage pour le calcul du $k_{eff}$

Nous présentons brièvement l'algorithme itératif utilisé au §5.2 pour résoudre

$$\begin{cases} SD_e \frac{d}{dz} h(z) = \mathcal{P} \times \frac{\mathbb{E} \Sigma_f(h) \phi(z)}{\int_0^L \mathbb{E} \Sigma_f(h) \phi(z) dz}, & \text{(a)} \\ -\frac{d}{dz} \left[ D(h) \frac{d}{dz} \phi(z) \right] + \left[ \Sigma_a(h) - \frac{\nu \Sigma_f(h)}{k_{eff}} \right] \phi(z) = 0 & \text{(b)} \end{cases} \tag{125}$$

muni des conditions aux limites

$$\begin{cases} h|_{z=0} = h_e, \\ h|_{z=L} = h_s, \\ \phi|_{z=0} = 0, \\ \phi|_{z=L} = 0. \end{cases} \tag{126}$$

Notons que l'on suppose ici que  $\Sigma_f$  et  $D$  dépendent de  $h$  à l'instar de  $\Sigma_a(h)$ .

Pour cela, on généralise tout d'abord l'opérateur  $\mathcal{L}(h)$  introduit au Lemme 3.1 avec

$$\mathcal{L}(h)\phi := -\frac{d}{dz} \left[ D(h) \frac{d}{dz} \phi \right] + \Sigma_a(h)\phi$$

puisque l'on suppose que  $\Sigma_f$  et  $D$  ne sont pas des constantes dans cette présentation de l'algorithme. Puis on introduit les opérateurs

$$\begin{cases} R(h)\psi = \frac{1}{\sqrt{\Sigma_f(h)}}\psi, \\ P(h)\psi = R(h)\mathcal{L}(h)R(h)\psi. \end{cases}$$

On suppose donc que  $z \mapsto \frac{1}{\sqrt{\Sigma_f[h(z)]}}$  est dans  $C^1([0, L])$  de sorte que  $R(h)$  soit un opérateur de  $H_0^1([0, L])$  dans  $H_0^1([0, L])$ . L'équation (22)(b) est alors équivalente à trouver  $\psi$  solution de

$$P(h)\psi = \frac{\nu}{k_{eff}}\psi$$

et à en déduire  $\phi$  avec

$$\phi = R(h)\psi.$$

La fonction intermédiaire  $\psi$  est donc un vecteur propre de l'opérateur  $P(h)$  associé à la valeur propre  $\frac{\nu}{k_{eff}}$ . Traditionnellement, les codes de neutronique trouvent des solutions de (28)(29) via une procédure qui résout itérativement l'équation sur l'enthalpie interne puis l'équation sur le flux neutronique qui est résolue par l'intermédiaire d'un problème de recherche de plus petite valeur propre.

On note  $n$  l'indice de l'itération de cet algorithme de couplage itératif. Et on introduit les opérateurs de Sturm–Liouville

$$P_n := P(h_n) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_n := \mathcal{L}(h_n)$$

qui sont connus lorsque l'enthalpie  $h_n$  à l'itération  $n$  l'est. Chaque itération  $n$  se décompose en 4 étapes:

- **Étape 1:** On suppose connue l'enthalpie  $h_n$ . On cherche alors le couple  $(k_n, \tilde{\psi}_n)$  où  $\frac{\nu}{k_n}$  est la plus petite valeur propre de l'opérateur  $P_n$  avec conditions de Dirichlet homogènes et telle que  $\tilde{\psi}_n$  soit l'unique vecteur propre normalisé dans  $L^2([0, L])$ . Soulignons à nouveau que selon la théorie des opérateurs de Sturm–Liouville [17, 18], le vecteur propre  $\tilde{\psi}_n$  est strictement positif ou strictement négatif sur  $]0, L[$ . Ici, on le choisit strictement positif pour respecter la contrainte de positivité (11). Selon cette même théorie, les vecteurs propres associés aux autres valeurs propres ne sont pas de signe constant sur  $]0, L[$ , ce qui justifie la recherche de plus petite valeur propre.
- **Étape 2:** On calcule

$$\tilde{\phi}_n = R(h_n)\tilde{\psi}_n$$

qui vérifie donc

$$\mathcal{L}_n\tilde{\phi}_n = \mathcal{L}_nR(h_n)\tilde{\psi}_n = (R(h_n))^{-1}P_n\tilde{\psi}_n = \frac{\nu}{k_n}(R(h_n))^{-2}\tilde{\phi}_n = \frac{\nu\Sigma_f(h_n)}{k_n}\tilde{\phi}_n.$$

- **Étape 3:** On calcule  $\phi_n$  *via* la normalisation

$$\phi_n = \frac{\tilde{\phi}_n(z)}{\int_0^L \mathbb{E}\Sigma_f[h_n(z)]\tilde{\phi}_n(z)dz}.$$

Cette fonction est alors l'unique solution positive de  $\mathcal{L}_n\phi_n = \frac{\nu\Sigma_f}{k_n}\phi_n$  telle que

$$\int_0^L \mathbb{E}\Sigma_f[h_n(z)]\phi_n(z)dz = 1.$$

- **Étape 4:** On met à jour l'enthalpie *via* la résolution de

$$\begin{cases} SD_e \frac{d}{dz} h_{n+1} = \mathcal{P}\mathbb{E}\Sigma_f[h_n(z)]\phi_n, \\ h_{n+1}(0) = h_e. \end{cases} \tag{127}$$

Puis on passe à l'Étape 1 de l'itération  $n + 1$  en fonction du niveau de convergence souhaité, celui-ci pouvant se mesurer par la quantité  $\|h_{n+1} - h_n\|_\infty$ .

Il est important de souligner que la mise en œuvre pratique de cet algorithme nécessite de plus la discrétisation du domaine spatial  $[0, L]$  (qui représente le cœur nucléaire) avec un nombre fini de mailles. Lorsque l'espace est ainsi discrétisé, les étapes 1 et 4 correspondent à respectivement rechercher la plus petite valeur propre d'une matrice  $P_n^{\Delta z}$  correspondant à la discrétisation de l'opérateur  $P_n$  (pour un pas en espace de l'ordre de  $\Delta z$ ) et à l'intégration discrète de l'équation différentielle (127). La discrétisation des étapes 2 et 3 est immédiate. Notons que la matrice  $P_n^{\Delta z}$  peut par exemple être obtenue *via* une approximation de type éléments finis. Au §5.2, on utilise des éléments finis de Lagrange d'ordre 1 avec un pas en espace  $\Delta z$  constant pour discrétiser l'opérateur  $\frac{d^2}{dz^2}$  dans  $P_n$ , ce qui correspond alors à une approximation de type différences finies.

Il reste à établir qu'au moins sous certaines conditions, cet algorithme converge. Nous abordons cette question délicate dans [20] en nous limitant au cas continu (c'est-à-dire sans discrétisation de l'espace physique).

### Annexe 4.2 Algorithme itératif de couplage pour le calcul de $h_s$

Nous souhaitons maintenant résoudre

$$\begin{cases} D_e \frac{d}{dz} h(z) = \mathbb{E}\Sigma_f(h)\phi(z), & \text{(a)} \\ -\frac{d}{dz} \left[ D(h) \frac{d}{dz} \phi(z) \right] + [\Sigma_a(h) - \nu\Sigma_f(h)]\phi(z) = 0 & \text{(b)} \end{cases} \tag{128}$$

muni des conditions aux limites

$$\begin{cases} h|_{z=0} = h_e, \\ \phi|_{z=0} = 0, \\ \phi|_{z=L} = 0. \end{cases} \tag{129}$$

Pour résoudre (128)(129), nous proposons une méthode itérative basée sur une méthode de tir, et qui trouve sa justification dans le *point 1* du Lemme 2.3. Chaque itération  $m$  de cet algorithme se décompose en 2 étapes:

- **Étape 1:** Connaissant  $h_s^m > h_e$ , on résout le système (125)(126) avec l’algorithme itératif décrit au §4.1. On obtient alors  $h^m, \phi^m$  et  $k_{eff}^m$ .  
Notons que  $\phi^m = \mu^m \varphi^m$  où  $\mu^m = D_e(h_s^m - h_e)$  et où  $\varphi^m$  est le flux neutronique normalisé solution de (125)(126) (i.e.  $\int_0^L \mathbb{E}\Sigma_f[h^m(z)]\varphi^m(z)dz = 1$ ).
- **Étape 2:** Suivant la valeur de  $k_{eff}^m$  par rapport à 1, on met à jour la valeur de  $h_s$  à partir de la connaissance de  $h_s^m$ , ce qui définit  $h_s^{m+1}$ . Le choix explicite de  $h_s^{m+1}$  en fonction de  $k_{eff}^m$  dépend de la physique du problème. Plus précisément:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Lorsque dans le voisinage de } h_s^m, \text{ l'on a } \frac{dk_{eff}}{dh_s} > 0 : \\ \text{Lorsque dans le voisinage de } h_s^m, \text{ l'on a } \frac{dk_{eff}}{dh_s} < 0 : \end{array} \right. \begin{cases} k_{eff}^m \geq 1 \Rightarrow h_s^{m+1} = h_s^m \cdot (1 - \varepsilon^m), \\ k_{eff}^m \leq 1 \Rightarrow h_s^{m+1} = h_s^m \cdot (1 + \varepsilon^m). \\ k_{eff}^m \geq 1 \Rightarrow h_s^{m+1} = h_s^m \cdot (1 + \varepsilon^m), \\ k_{eff}^m \leq 1 \Rightarrow h_s^{m+1} = h_s^m \cdot (1 - \varepsilon^m) \end{cases}$$

où  $\varepsilon^m \in [0, 1[$  est un petit paramètre fixé par l'utilisateur qui tend vers zéro lorsque  $k_{eff}^m$  tend vers 1. Par exemple  $\varepsilon^m = \min(\varepsilon^0, |k_{eff}^m - 1|)$  où  $\varepsilon^0 \in ]0, 1[$ .

Puis on passe à l'Étape 1 de l'itération  $m + 1$  en fonction du niveau de convergence souhaité, celui-ci pouvant se mesurer par la quantité  $|k_{eff}^m - 1|$ .

Soulignons que cet algorithme itératif nécessite l'utilisation d'un algorithme itératif dans l'Étape 1. Il est donc constitué de 2 boucles itératives imbriquées, la boucle extérieure étant sur la valeur du scalaire  $k_{eff}^m$ . Notons par ailleurs que dans l'Étape 2, la connaissance du signe de  $\frac{dk_{eff}}{dh_s}$  au voisinage de  $h_s^m$  et le choix optimal de  $\varepsilon^m$  en fonction de  $k_{eff}^m$  dépendent de la physique du problème c'est-à-dire de  $\Sigma_a(h), \Sigma_f(h)$  et  $D(h)$ , et pourront être appréhendés *via* quelques essais lorsqu'aucune information n'est disponible. Par exemple, dans le cas d'une section efficace d'absorption affine, et lorsque  $\Sigma_f(h)$  et  $D(h)$  sont des constantes, la formule (96) montre que

$$\frac{dk_{eff}}{dh_s} = - \frac{v \Sigma_f}{\left( \frac{\sigma_a(1 + m^2)}{3m^2} (h_s - h_e) + \Sigma_{a,e} \right)^2} \cdot \frac{\sigma_a(1 + m^2)}{3m^2} < 0. \tag{130}$$

La connaissance explicite du signe de  $\frac{dk_{eff}}{dh_s}$  dans le cas affine oriente donc l'algorithme dans l'Étape 2. Le choix optimal de  $\varepsilon^m$  en fonction de  $k_{eff}^m$  reste cependant à être évalué.

Lorsque l'algorithme de calcul du  $k_{eff}$  converge, cet algorithme de calcul de  $h_s$  converge forcément dès lors que (128)(129) admet une unique solution. D'après le Théorème 3.2, lorsque  $\Sigma_f(h)$  et  $D(h)$  sont des constantes, sous l'Hypothèse 3.1 et lorsque  $L \geq L_{min}$ , l'algorithme de calcul de  $h_s$  converge donc si et seulement si l'algorithme de calcul du  $k_{eff}$  converge. Par contre, dans le cas général, lorsque (128)(129) admet une solution, il n'y a pas nécessairement unicité comme le souligne le Théorème 3.5. Dans ce cas, la convergence de l'algorithme de calcul du  $k_{eff}$  n'assure pas la convergence de l'algorithme de calcul de  $h_s$  vers une des solutions de (128)(129) pour toute itérée initiale  $h_s^0$ , l'algorithme pouvant par exemple osciller entre 2 solutions de (128)(129) ou converger vers une des solutions mais pour un choix particulier de  $h_s^0$ .

## Références

1. Baudron, A.M., Crouzet, N., Döderlein, C., Geay, A., Lautard, J.-J., Richebois, E., Royer, E., Siréta, P.: Unstructured 3D MINOS/FLICA4 coupling in SALOME. In: Application to JHR Transient Analysis International Conference on the Physics of Reactors “Nuclear Power: A Sustainable Resource”. Casino-Kursaal Conference Center, Interlaken, Switzerland, September 14–19 (2008)
2. Bruna, G., Dubois, F., Fouquet, F., Mury, E., Normand, B., Sargeni, A., Scarcelli, F., Touillo, R., Le Pallec, J.-C., Hourcade, E., Richebois, E., Poinot-Salanon, C.: HEMERA: a 3D Computational Chain for PWR Safety Analysis International Conference on the Physics of Reactors “Nuclear Power: A Sustainable Resource”. Casino-Kursaal Conference Center, Interlaken, Switzerland, September 14–19 (2008)
3. Le Pallec, J.-C.: Étude bibliographique sur les schémas en temps dans les modélisations couplées en physique des réacteurs. Technical report DEN/DANS/DM2S/SERMA/LPEC/NT/15-5778/A, CEA (2015)
4. Capellan, N.: Couplage 3D neutronique thermohydraulique. Développement d'outils pour les études de sûreté des réacteurs innovants. Thèse de doctorat de l'Université d'Orsay
5. Ragusa, J., Siegel, A., Ruggieri, J.-M.: Neutronic/thermalhydraulic coupling techniques for sodium cooled fast reactor simulations. Technical report DE-FC07-07ID14837, NERI Final Progress Report (2010)
6. Vaïana, F.: Couplage neutronique–thermohydraulique. Application au Réacteur à Neutrons Rapides Refroidis à l'Hélium. Thèse de doctorat de l'Institut Polytechnique de Grenoble
7. Wu, H.: A tightly coupled scheme for neutronics and thermalhydraulics using open-source software. *Ann. Nucl. Energy* **87**, 16–22 (2016)
8. Greiner, N.: Prise en compte d'un couplage fin neutronique–thermique dans les calculs d'assemblage pour les réacteurs à eau pressurisée. Mémoire de maîtrise de l'École Polytechnique de Montréal
9. Shan, J., Chen, W., Thee, B., Leung, L.: Coupled neutronics/thermalhydraulics analysis of CANDUSCWR fuel channel. *Ann. Nucl. Energy* **37**, 58–65 (2010)
10. Bernard, M., Dellacherie, S., Faccanoni, G., Grec, B., Lafitte, O., Nguyen, T.-T., Penel, Y.: Study of low Mach nuclear core model for single-phase flow. In: ESAIM: Proc, vol. 38, pp. 118–134 (2012)
11. Bernard, M., Dellacherie, S., Faccanoni, G., Grec, B., Penel, Y.: Study of a low Mach nuclear core model for two-phase flows with phase transition I: stiffened gas law. *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.* **48**, 1639–1679 (2014)
12. Dellacherie, S.: On a low Mach nuclear core model. *ESAIM: PROC* **35**, 79–106 (2012)
13. Reuss, P.: Précis de neutronique. In: Génie Atomique. EDP Sciences, Les Ulis (2003)
14. Pope, M., Mousseau, V.: Accuracy and efficiency of a coupled neutronics and thermal hydraulics model. Technical Report INL/CON-07-12487, Idaho National Report, paru aussi dans les actes de la conférence NURETH-12 (2007)
15. Jamelot, E., Lafitte, O.: Différents modèles analytiques ou simplifiés pour le couplage Thermohydraulique-Neutronique. Technical Report DEN/DANS/DM2S/SERMA/LLPR/NT/15-5884/A, CEA (2015)
16. Dellacherie, S., Jamelot, E., Lafitte, O.: A simple monodimensional model coupling an enthalpy transport equation and a neutron diffusion equation. *Appl. Math. Lett.* **62**, 35–41 (2016)
17. Coddington, E., Levinson, N.: Theory of ordinary differential equations. In: International Series in Pure and Applied Mathematics, chap. 8. McGraw-Hill, New York (1955)
18. Dautray, R., Lions, J.-L.: Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. In: Spectral Theory and Applications, vol. 3. Springer, Berlin (2000)
19. Abramovitz, M., Stegun, I.: Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Applied Mathematics Series, vol. 55. National Bureau of Standards, USA (1972)
20. Dellacherie, S., Lafitte, O.: Study of a coupling algorithm for a simplified thermohydraulic–neutronic model (**In preparation**)