HAL open science

Coefficient de Diffusion Effectif d'une Matrice Poroélastique Contenant des Diffuseurs Sphériques Aléatoirement Répartis

Adjovi Josette Kuagbenu, Herve Franklin, Amah d'Almeida

To cite this version:

Adjovi Josette Kuagbenu, Herve Franklin, Amah d'Almeida. Coefficient de Diffusion Effectif d'une Matrice Poroélastique Contenant des Diffuseurs Sphériques Aléatoirement Répartis. 16ème Congrès Français d'Acoustique, (CFA) 2022, Société Française d'Acoustique; Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, Apr 2022, Marseille, France. hal-03848415

HAL Id: hal-03848415

https://hal.science/hal-03848415v1

Submitted on 10 Nov 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

16ème Congrès Français d'Acoustique
11-15 Avril 2022, Marseille

Coefficients de diffusion effectifs d'une matrice poroélastique contenant des diffuseurs sphériques aléatoirement répartis

A. KUAGBENU [a], H. FRANKLIN [a], A. d' ALMEIDA [b]

[a] Laboratoire Ondes et Milieux Complexes - UMR CNRS 6294 - Université Le Havre Normandie, 75 Rue Bellot, 76600, Le Havre, France

[b] Département de Mathématiques, BP 1515, Université de Lomé, Togo,

De nombreux travaux ont montré qu'une onde rapide, une onde lente et une onde transversale sont susceptibles de se propager dans un milieu poroélastique saturé (MP) obéissant à la théorie de Biot. Parmi ces 3 ondes dispersives et atténuées, l'onde lente est du type diffusif aux basses fréquences, devenant propagative seulement à partir de fréquences suffisamment élevées. Un matériau composite poroélastique (MCP) constitué d'un MP dans lequel sont répartis aléatoirement des obstacles de propriétés mécaniques différentes et de tailles finies a la particularité, tout comme un MP sans obstacles, de favoriser la propagation d'ondes lentes. Dans cet article, nous considérons une onde longitudinale lente incidente sur une région contenant une distribution aléatoire d'obstacles sphériques de rayons identiques. Partant de la théorie de la diffusion multiple de Linton et Martin étendue au cas du MCP (deuxième ordre en concentration inclus), supposant que les obstacles sont des sphères élastiques ou des cavités fluides, et se plaçant dans la limite de Rayleigh où l'onde lente est diffusive, nous déterminons le coefficient de diffusion effectif du milieu homogène équivalent. Des simulations numériques permettent de comparer le comportement du coefficient de diffusion pour différentes combinaisons de matériaux.

1 Introduction

On considère une distribution aléatoire de sphères élastiques identiques placées dans un MP saturé par un liquide visqueux. Le MP obéit à la théorie de Biot [1] - [5]. Le rayon des inclusions sphériques est supposé très grand devant le rayon moyen des pores.

Lorsqu'une onde longitudinale lente rencontre une sphère, cette dernière, en réponse, ré-émet en direction du MP trois ondes de nature différente : une onde rapide, une onde lente et une onde transversale. Ce problème de diffusion de l'onde par un seul obstacle sphérique (sphère fluide à la sec. 2 ou élastique à la sec. 3) dans un milieu poroélastique n'est pas détaillé ici. On pourra se reporter aux Réfs. [6] et [7] pour plus d'information. Nous rappelons seulement les conditions de passages utilisées en vue de calculer les coefficients de diffusion par les inclusions.

Considérant donc le cas d'une onde lente incidente sur le MCP décrit ci-dessus, nous rappelons dans la sec. 4 la formule du nombre d'onde effectif lent dans le cas d'une matrice hôte poroélastique. Dans la sec. 5, des simulations numériques sont menées en considérant soit des cavités, soit des sphères en epoxy. Deux types de matrices saturées en eau sont examinées : le QF20 et le sable de Stoll. Les vitesses et les atténuations effectives tirées du nombre d'onde effectif lent sont comparées à celles du milieu poroélastique sans diffuseurs. Enfin dans la sec. 6, nous déterminons un coefficient de diffusion effectif approché relatif à l'onde lente.

2 Diffusion par une cavité

Considérons une cavité sphérique remplie de fluide, de rayon a, dans un MP obéissant à la théorie de Biot. Ce milieu supporte deux ondes longitudinales (rapide et lente) de nombre d'onde respectifs k_1 et k_2, et une onde transversale de nombre d'onde k_t. Soient U_r le déplacement radial du solide, P la pression interstitielle et σ_{rr}, $\sigma_{r\theta}$ les composantes du tenseur des contraintes dans le milieu poreux. Dans la cavité fluide, la pression est P_f et le déplacement radial $u_{f,r}$. L'application des conditions aux limites en $r = a$ (écriture tenant compte des parties incidentes *inc* et diffusées $diff$)

$$(U_r)_{inc} + (U_r)_{diff} = u_{f,r} \quad (1)$$
$$(P)_{inc} + (P)_{diff} = P_f \quad (2)$$
$$(\sigma_{rr})_{inc} + (\sigma_{rr})_{diff} = -P_f \quad (3)$$
$$(\sigma_{r\theta})_{inc} + (\sigma_{r\theta})_{diff} = 0 \quad (4)$$

fournit un système linéaire de 4 équations à 4 inconnues pour chaque mode n, de la forme

$$A_n \vec{X}_n^\alpha = \vec{S}_n^\alpha, \quad (5)$$

où l'exposant α indique le type de l'onde incidente ($\alpha = 1, 2$ or t). Le vecteur $\vec{X}_n^\alpha$ contient les inconnues (les amplitudes de diffusion $\mathbb{T}_n^{\alpha 1}$, $\mathbb{T}_n^{\alpha 2}$ et $\mathbb{T}_n^{\alpha t}$ de la cavité) et $\vec{S}_n^\alpha$ est le vecteur source.

3 Diffusion par une sphère élastique

Considérons maintenant, à la place de la cavité, une sphère élastique dont le matériau possède les coefficients de Lamé λ_s et μ_s et la masse volumique ρ_s. On désigne par u_{sr} et $u_{s\theta}$ le déplacement radial et orthoradial dans la sphère, par σ_{srr} et $\sigma_{sr\theta}$ les contraintes radiale et tangentielle, et enfin par w_r le déplacement relatif radial du fluide par rapport au solide dans les pores. Quelle que soit la nature de l'onde incidente dans le MP, en vertu de la conversion d'ondes elle génèrera à l'intérieur de la sphère élastique une onde longitudinale L et une onde transversale T que l'on ne confondra pas l'onde transversale t dans le MPE. En appliquant les conditions de continuité

$$(u_r)_{inc} + (u_r)_{diff} = u_{sr} \quad (6)$$
$$(u_\theta)_{inc} + (u_\theta)_{diff} = u_{s\theta}, \quad (7)$$
$$(w_r)_{inc} + (w_r)_{diff} = 0, \quad (8)$$
$$(\sigma_{rr})_{inc} + (\sigma_{rr})_{diff} = \sigma_{srr}, \quad (9)$$
$$(\sigma_{r\theta})_{inc} + (\sigma_{r\theta})_{diff} = \sigma_{sr\theta} \quad (10)$$

à l'interface entre le MP et la sphère élastique, située en $r = a$, on obtient un système linéaire de 5 équations à 5 inconnues, de la forme

$$B_n \vec{Y}_n^\alpha = \vec{R}_n^\alpha, \quad (11)$$

où l'exposant α indique le type de l'onde incidente ($\alpha = 1, 2$ or t). Le vecteur $\vec{Y}_n^\alpha$ contient les inconnues (les amplitudes de diffusion $\mathbb{T}_n^{\alpha 1}$, $\mathbb{T}_n^{\alpha 2}$ et $\mathbb{T}_n^{\alpha t}$ de la sphère élastique), tandis que $\vec{R}_n^\alpha$ est le vecteur source. Les matrices 4x4 A_n et B_n sont identiques.

4 Expression du nombre d'onde effectif lent

Dans le cas d'une onde lente incidente sur la distribution aléatoire de cavités ou de sphères, on obtient les expressions suivantes [6]

$$\left(\frac{\zeta_2}{k_2}\right)^2 = 1 + \frac{n_0}{k_2^2}\mathbb{D}_1^2 + \frac{n_0^2}{k_2^2}(\mathbb{D}_2^{2,0} + \mathbb{D}_2^{2,c}) + O(\frac{n_0^3}{k_2^2}) \tag{12}$$

où k_2 est le nombre d'onde de l'onde plane incidente (c'est-à-dire, le nombre d'onde en l'absence de diffuseurs). L' expression ci-dessus est issue de développements asymptotiques par rapport à n_0 le nombre de sphères par unité de volume [8], [9]. Elle suppose de faibles concentrations de diffuseurs (en anglais : *dilute case*), si bien que les termes d'ordre n_0^3 et les suivants décrivant les ordres plus élevés d'interactions entre les sphères, sont négligés. Dans l'Eq. (18), on a après troncature des séries de la formule complète aux termes d'indice $m, n = 2$ (sous l'hypothèse basse fréquence)

$$\frac{n_0}{k_2^2}\mathbb{D}_1^2 = \mathbb{C}\left(\frac{-3i}{x_2^3}\right)\left(\mathbb{T}_0^{22} + 3\mathbb{T}_1^{22}\right), \tag{13}$$

et

$$\frac{n_0^2}{k_2^2}\mathbb{D}_2^{2,0} = \frac{\mathbb{C}^2}{2}\left(\frac{-9}{x_2^6}\right)\begin{pmatrix}\mathbb{T}_0^{22} & \mathbb{T}_1^{22}\end{pmatrix}\mathbf{G}\begin{pmatrix}\mathbb{T}_0^{22}\\ \mathbb{T}_1^{22}\end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\frac{n_0^2}{k_2^2}\mathbb{D}_2^{2,c} &= \frac{\mathbb{C}^2}{2}\left(\frac{-9}{x_2^6}\right)r^{21}\begin{pmatrix}\mathbb{T}_0^{12} & \frac{1}{2}\mathbb{T}_1^{12}\end{pmatrix}\mathbf{G}^{21}\begin{pmatrix}\mathbb{T}_0^{21}\\ \mathbb{T}_1^{21}\end{pmatrix}\\ &+\frac{\mathbb{C}^2}{2}\left(\frac{-9}{x_2^6}\right)r^{2t}\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\mathbb{T}_1^{t2}\end{pmatrix}\mathbf{G}^{2t}\begin{pmatrix}0\\ \mathbb{T}_1^{2t}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{15}$$

où $\mathbb{C} = \frac{4\pi a^3}{3}n_0$ et où

$$r^{2\beta} = \frac{2k_2^3}{k_\beta(k_2^2 - k_\beta^2)}, \quad (\beta = 1, t).$$

Les matrices 2x2 $\mathbf{G}$ et $\mathbf{G}^{2\beta}$ s'expriment, respectivement

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix}0 & 3\\ 3 & 12\end{pmatrix}, \tag{16}$$

et

$$\mathbf{G}^{2\beta} = \begin{pmatrix}1 & 3\frac{k_2}{k_\beta}\\ 3\frac{k_2}{k_\beta} & 3 + 6\left(\frac{k_2}{k_\beta}\right)^2\end{pmatrix}, \quad (\beta = 1, t). \tag{17}$$

5 Étude numérique du nombre d'onde effectif lent

5.1 Caractéristiques acoustiques du QF20 [10] et du sable de Stoll [4]

La liste de ces caractéristiques des MP est fournie dans le tableau 1. Les modules de compressibilité $\bar{K}_s$, K_b et K_f sont respectivement ceux du solide constituant les grains, du squelette sec et de l'eau. Le module de cisaillement du milieu poreux est noté μ. Les masses volumiques $\bar{\rho}_s$ et ρ_f sont celles du solide constituant les grains et de l'eau. Les autres constantes du milieu poreux sont : β (porosité), κ (perméabilité), a_p (rayon des pores), η (viscosité du fluide dans les pores) et τ (constante de structure). Nous considérons par ailleurs des sphères en epoxy pour lesquelles $\rho_s = 1180$ kg/m^{-3} (masse volumique), $c_L = 2540$ m/s (vitesse des ondes longitudinales) et $c_T = 1160$ m/s (vitesse des ondes transversales). Dans les figures 1 à 4, la vitesse $\omega/\mathrm{Re}(k_2)$ et l'atténuation $\mathrm{Im}(k_2)/\mathrm{Re}(k_2)$ de l'onde lente dans le QF20 et le sable de Stoll (sans les sphères) sont repérables par les lignes continues.

Tableau 1 – Valeurs des constantes physiques du QF-20, du sable et de l'eau saturant les pores.

Cte.	Unité	QF20	Sable
K_b	Pa	$9{,}47\times10^9$	$4{,}36\times10^7$
K_f	Pa	$2{,}22\times10^9$	$2{,}22\times10^9$
μ	Pa	$7{,}63\times10^9$	$2{,}61\times10^7$
$\bar{\rho}_s$	kg. m^{-3}	2760	2650
ρ_f	kg. m^{-3}	1000	1000
β	-	0,402	0,47
κ	m^2	$1{,}68\times10^{-11}$	$5{,}0\times10^{-11}$
a_p	m	$3{,}26\times10^{-5}$	10^{-5}
η	kg.m^{-1}s^{-1}	$1{,}14\times10^{-3}$	$1{,}14\times10^{-3}$
τ	-	1,89	3

5.2 Vitesse et atténuation effectives de l'onde lente. Cas du QF20

Pour le MCP avec des cavités ou des sphères élastiques, la vitesse et l'atténuation sont définies respectivement par les rapports $\omega/\mathrm{Re}(\zeta_2)$ et $\mathrm{Im}(\zeta_2)/\mathrm{Re}(\zeta_2)$. Les figures 1 et 2 illustrent le comportement de ces grandeurs pour le MP appelé QF20. On observe que les grandeurs effectives (vitesse ou atténuation) diffèrent très peu de celles de la matrice sans sphères et ce sur tout l'intervalle de fréquence étudié.

5.3 Vitesse et atténuation effectives de l'onde lente. Cas du sable

Les figures 3 et 4 illustrent le comportement de la vitesse de phase et de l'atténuation pour le MCP à base de sable. Bien que le MP soit différent du précédent, les grandeurs

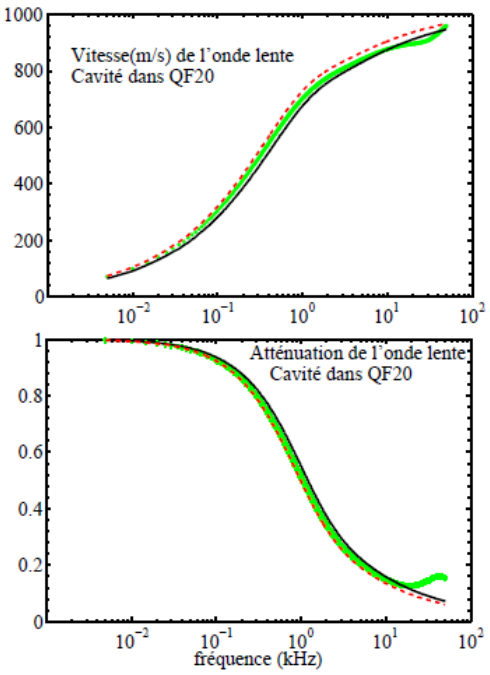

FIGURE 1 – Vitesses de phase et atténuations de l'onde lente en fonction de la fréquence pour du QF20 sans cavités (courbe continue noire) et pour du QF20 contenant des cavités de rayons $a = 4 \times 10^{-3}$m. La fraction de volume occupée par les cavités est égale à $\mathbb{C} = 20\%$. Les résultats basés sur l'Eq.(12) tiennent compte des amplitudes de diffusion $\mathbb{T}_n^{\alpha\beta}$ (i) exacts (courbe en vert) et (ii) approchés (courbe en pointillé rouge).

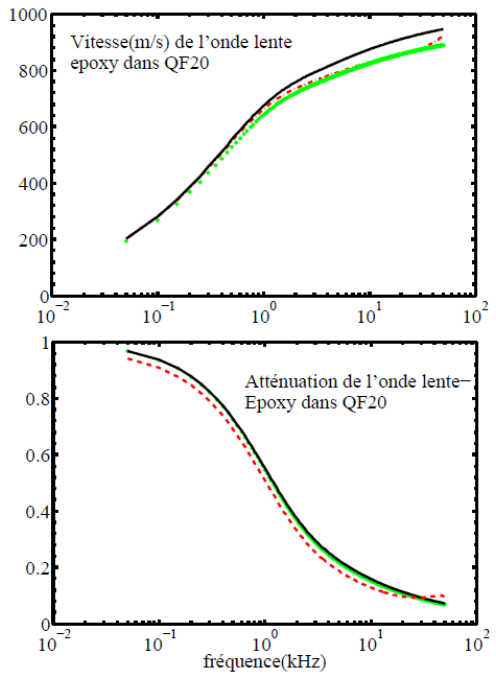

FIGURE 2 – Vitesses de phase et atténuations de l'onde lente en fonction de la fréquence pour du QF20 sans sphères (courbe continue noire) et pour du QF20 contenant des sphères en epoxy de rayons $a = 4 \times 10^{-3}$m. La fraction de volume occupée par les cavités est égale à $\mathbb{C} = 20\%$. Les résultats basés sur l'Eq.(12) tiennent compte des amplitudes de diffusion $\mathbb{T}_n^{\alpha\beta}$ (i) exacts (courbe en vert) et (ii) approchés (courbe en pointillé rouge).

effectives (vitesse ou atténuation) diffèrent très peu de celles de la matrice sans sphères, sur tout l'intervalle de fréquence considéré.

6 Coefficient de diffusion

Dans un MP homogène sans sphères, les conditions favorisant l'émergence une onde lente de forte amplitude sont les suivantes : continuité des deux phases (fluide et solide), fréquence acoustique élevée, perméabilité aux fluides élevée et faible viscosité [3]. On peut mettre le nombre d'onde effectif lent sous la forme

$$\zeta_2^2 = k_2^2 \xi^2 \tag{18}$$

où ξ^2 est facilement identifiable en partant de l'Eq. (12). En basse fréquence (où $\omega << \omega_c$), l'onde lente correspond à un mode de propagation de type diffusif. Ce résultat suggère un processus de diffusion dans le domaine temporel régi par l'équation aux dérivées partielles de la forme

$$\mathcal{D}_e \vec{\nabla}^2 \phi_2 = \frac{\partial \phi_2}{\partial \tau}. \tag{19}$$

où ϕ_2 est un potentiel de déplacement pour l'onde lente (avec dépendance du temporelle en $e^{-i\omega\tau}$) et où $\mathcal{D}_e$ est le coefficient de diffusion effectif. Dans le cas de sphères élastiques, à suffisamment basse fréquence les développements asymptotiques des coefficients $\mathbb{T}_n^{\alpha\beta}$ conduisent après quelques calculs à $\xi^2 = 1 + \mathbb{C}/2 - 5\mathbb{C}/4$, et donc à

$$\mathcal{D}_e = \frac{\chi}{1 + \frac{1}{2}\mathbb{C} - \frac{5}{4}\mathbb{C}^2}, \tag{20}$$

où

$$\chi = \frac{HM - C^2}{\omega_c \rho_f H}. \tag{21}$$

Les constantes H, M, C sont des modules de poroélasticité [4] et ω_c une fréquence caractéristique du milieu poreux. Les figures 5 à 8 montrent l'évolution des coefficients de diffusion en fonction de la fraction volumique $\mathbb{C}$ dans le cas du QF20 puis du sable. On observe que $\mathbb{C}$ dépend de la fréquence. Lorsque la fréquence augmente, $\mathbb{C}$ devient partiquement constant et s'approche de 0.

7 Conclusion

Dans cette étude, nous nous sommes placés dans le régime de diffusion de l'onde lente, qui a lieu aux basses fréquences. Le comportement de ce coefficient en fonction de la fraction volumique de sphères et de la fréquence a été présenté. Il s'agit d'un régime important car les effets

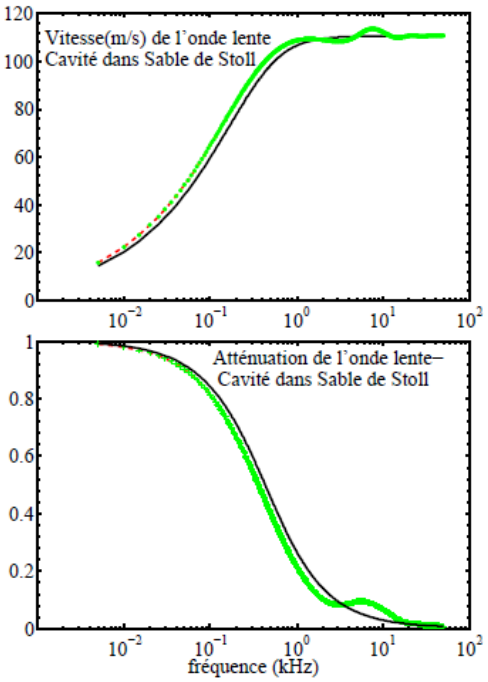

FIGURE 3 – Vitesses de phase et atténuations de l'onde lente en fonction de la fréquence pour du sable sans cavités (courbe continue noire) et pour du sable contenant des cavités de rayons $a = 4 \times 10^{-3}$m. La fraction de volume occupée par les cavités est égale à $\mathbb{C} = 20\%$. Les résultats basés sur l'Eq.(12) tiennent compte des amplitudes de diffusion $\mathbb{T}_n^{\alpha\beta}$ (i) exacts (courbe en vert) et (ii) approchés (courbe en pointillé rouge).

de diffusion multiple s'y réduisent à une forme simple, indépendante du matériau constitutif des sphères.

Références

[1] M. A. Biot, Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid, I. Low-frequency range, J. Acoust. Soc. Am. 28 (2) (1956) 168 –178

[2] M. A. Biot, Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media, J. Appl. Phys. 33 (4) (1962), 1482-1498.

[3] T. J. Plona, Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies, Appl. Phys. Lett. 36 (1980), 259

[4] R.D. Stoll, T.-K. Kan Reflection of acoustic waves at a water-sediment interface, J. Acoust. Soc. Am. 70 (1) (1981), 149-156.

[5] J. G. Berryman, Elastic wave propagation in fluid-saturated porous media, J. Acoust. Soc. Am. 69 (2) (1981), 416-424.

[6] A. Kuagbenu, H. Franklin and A. d'Almeida, Fast and slow effective waves across dilute random distributions of elastic spheres in a poroelastic medium, Ultrasonics (2021)

[7] J.-P. Sessarego, Jean Sageloli and R. Guillermin, Scattering by an elastic sphere in an elastic isotropic medium, J. Acoust. Soc. Am. (1998) 104 (5) 2836–2844

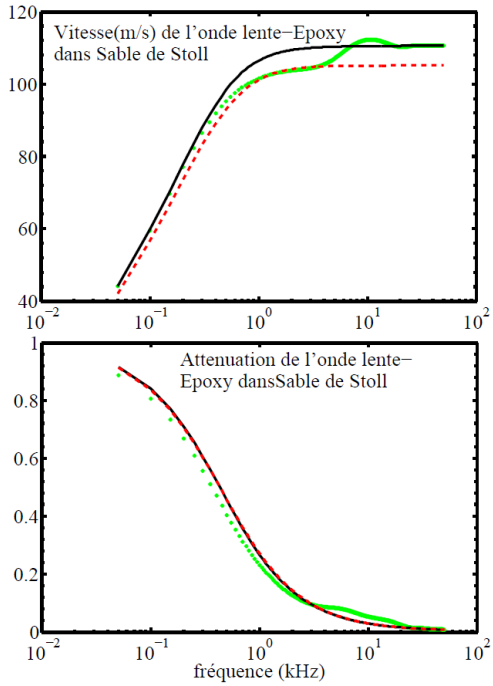

FIGURE 4 – Vitesses de phase et atténuations de l'onde lente en fonction de la fréquence pour du sable sans sphères (courbe continue noire) et pour du sable contenant des sphères en epoxy de rayons $a = 4 \times 10^{-3}$m. La fraction de volume occupée par les cavités est égale à $\mathbb{C} = 20\%$. Les résultats basés sur l'Eq.(12) tiennent compte des amplitudes de diffusion $\mathbb{T}_n^{\alpha\beta}$ (i) exacts (courbe en vert) et (ii) approchés (courbe en pointillé rouge).

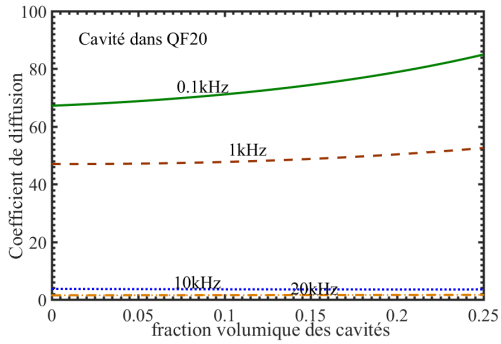

FIGURE 5 – Evolution des coefficients de diffusion en fonction de la fraction de volume $\mathbb{C}$ dans le cas du QF20 contenant des cavités de rayons $a = 4 \times 10^{-3}$m.

[8] C. M. Linton and P. A. Martin, Multiple scattering by multiple spheres : A new proof of the Lloyd-Berry formula for the effective wavenumber, SIAM J. Appl. Math. 66 (5) (2006) 1649-1668

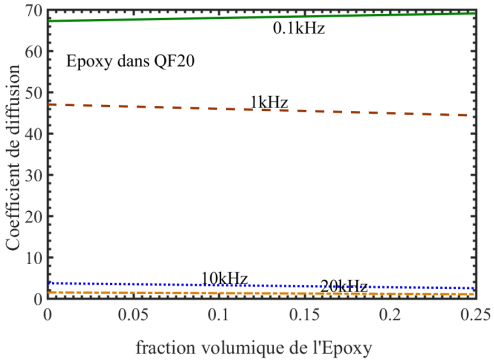

FIGURE 6 – Evolution des coefficients de diffusion en fonction de la fraction de volume $\mathbb{C}$ dans le cas du QF20 contenant des sphères en epoxy de rayons $a = 4 \times 10^{-3}$m.

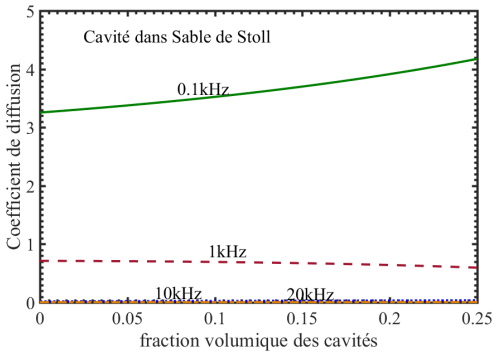

FIGURE 7 – Evolution des coefficients de diffusion en fonction de la fraction de volume $\mathbb{C}$ dans le cas du sable de Stoll contenant des cavités de rayons $a = 4 \times 10^{-3}$m.

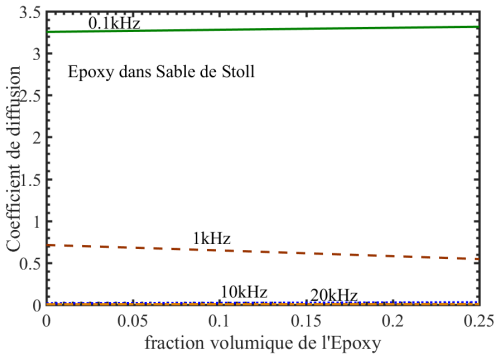

FIGURE 8 – Evolution des coefficients de diffusion en fonction de la fraction de volume $\mathbb{C}$ dans le cas du sable de Stoll contenant des sphères en epoxy de rayons $a = 4 \times 10^{-3}$m.

[9] F. Luppé, J. M. Conoir and A. N. Norris, Effective wave numbers from thermo-viscoelastic media containing random configurations of spherical scatterers, J. Acoust. Soc. Am. 131 (2012) 1113-1120

[10] D. L. Johnson, T. J. Plona and H. Kojima, Probing porous media with first and second sound. II. Acoustic properties of water-saturated porous media, J. Appl. Phys. 76(1) (1994) 115-125