



**HAL**  
open science

## Développement des méthodes inverses RI et RIC en coordonnées polaires

Justine Carpentier, Charles Pézerat, Jean-Hugh Thomas

► **To cite this version:**

Justine Carpentier, Charles Pézerat, Jean-Hugh Thomas. Développement des méthodes inverses RI et RIC en coordonnées polaires. 16ème Congrès Français d'Acoustique, CFA2022, Société Française d'Acoustique; Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, Apr 2022, Marseille, France. hal-03848282

**HAL Id: hal-03848282**

**<https://hal.science/hal-03848282v1>**

Submitted on 10 Nov 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



16<sup>ème</sup> Congrès Français d'Acoustique  
11-15 Avril 2022, Marseille

## Développement des méthodes inverses RI et RIC en coordonnées polaires

J. Carpentier <sup>a</sup>, C. Pézerat <sup>b</sup>, J. H. Thomas <sup>b</sup>

<sup>a</sup> Institut de Recherche de l'Ecole Navale - EA 3634 - BCRM Brest – École navale – CC600 29240 Brest

<sup>b</sup> LAUM, UMR 6613, IA-GS, CNRS, Le Mans Université, 72085 Le Mans,



La méthode RI (Résolution Inverse) a été créée en 1995 pour l'identification de forces appliquées à une structure. Contrairement aux méthodes modales, la méthode est locale et repose uniquement sur l'équation du mouvement discrétisée de la structure : les dérivées quatrièmes de l'équation sont approximées par un schéma aux différences finies cartésien. Pour calculer la distribution de force en un point, il suffit alors de mesurer le déplacement de la structure en quelques points dont les coordonnées spatiales sont définies par les schémas aux différences finies. L'efficacité de la méthode repose sur le filtrage passe-bas que réalise l'équation discrétisée dans le domaine des nombres d'onde. Dans le cas d'une plaque, le filtrage est circulaire et présente un nombre d'onde de coupure égal au nombre d'onde de flexion  $k_f$ . Le principal inconvénient de la méthode est que ce filtrage présente, autour du nombre d'onde de coupure, des singularités qui peuvent fausser la reconstruction. Ce problème a déjà été en partie résolu par la création de la méthode RIC (Résolution Inverse Corrigée) qui permet une bien meilleure reconstruction de la distribution de force même si le filtrage passe-bas réalisé n'est pas encore parfaitement corrigé. En effet, la définition du schéma aux différences finies en coordonnées cartésiennes ne permet sa correction qu'en trois directions principales. Les amplifications restent présentes partout ailleurs sur le cercle de rayon  $k_f$ . Pour pallier ce problème et corriger le filtre dans toutes les directions, l'idée développée ici est de redéfinir les méthodes RI et RIC dans le repère polaire qui serait plus adapté à la création d'un filtre passe-bas circulaire.

## 1 Introduction

La méthode inverse RI (Résolution Inverse) a été créée par Pézerat et Guyader [1] pour la reconstruction de force excitant une structure. Elle a l'avantage d'être locale et ne requiert pas la connaissance des conditions aux limites de la structure. Elle utilise simplement l'équation du mouvement de la structure discrétisée par un schéma aux différences finies. L'efficacité de la méthode repose sur l'effet de filtrage passe-bas qu'elle réalise dans le domaine des nombres d'onde. Cependant l'approximation utilisée dans l'équation apporte des singularités au nombre d'onde de coupure de ce filtre. Elles amplifient les erreurs, ce qui fausse la reconstruction, notamment lorsque les données sont bruitées. Pour corriger ce problème, Leclère et Pézerat [2] ont calculé une correction qui s'applique sur le schéma aux différences finies et qui permet d'annuler une grande partie des singularités, c'est la méthode RIC (Résolution Inverse Corrigée). Les méthodes ont été depuis largement utilisées sur différentes structures et avec différents types d'excitation allant du cas simple de l'excitation ponctuelle harmonique au cas plus complexe des écoulements turbulents [4]. Elles peuvent répondre à des problématiques rencontrées dans des domaines très variés comme ceux de l'industrie navale, aéronautique ou automobile [5]. Il est proposé ici une amélioration de la méthode RIC en réécrivant les différentes équations en coordonnées polaires. En effet le filtrage réalisé par les méthodes inverses est un filtre passe-bas circulaire et le fait que le schéma aux différences finies soit défini en coordonnées cartésiennes ne permet pas de créer un filtre parfaitement symétrique. De même, cette écriture ne permet pas à la correction d'être effective dans toutes les directions et des singularités persistent sur une grande partie du filtre au nombre d'onde de coupure  $k_f$ .

La première partie de l'article reprend la théorie sur les méthodes RI et RIC cartésiennes. Cela permet de comprendre l'effet de filtrage réalisée par les méthodes et d'aborder la deuxième partie détaillant la redéfinition des méthodes dans le repère polaire. La troisième et dernière partie présente une application des différentes méthodes sur le cas d'une plaque, dont les paramètres mécaniques sont

proches de ceux d'un vitrage automobile, excitée par une couche limite turbulente.

## 2 Les méthodes RI et RIC classiques

Les méthodes inverses permettent de calculer la distribution de force appliquée sur une structure en utilisant la mesure du champ de déplacement et l'équation discrétisée du mouvement. Dans le cas d'une plaque en flexion excitée en régime harmonique (hypothèse Euler-Bernoulli), la distribution de force est estimée, dans le domaine fréquentiel, par les méthodes RI et RIC grâce aux équations suivantes :

$$F^{\text{RI}}(x, y, \omega) = D(\delta_{\Delta}^{4x} + \delta_{\Delta}^{4y} + 2\delta_{\Delta}^{2x2y}) - \rho h \omega^2 w(x, y, \omega), \quad (1)$$

$$F^{\text{RIC}}(x, y, \omega) = D(\tilde{\mu}^4 \delta_{\Delta}^{4x} + \tilde{\mu}^4 \delta_{\Delta}^{4y} + 2\tilde{\nu}^4 \delta_{\Delta}^{2x2y}) - \rho h \omega^2 w(x, y, \omega), \quad (2)$$

où  $w$  est le déplacement,  $F$  la distribution de force reconstruite par les méthodes RI ou RIC au point  $(x, y)$  et à la fréquence  $\omega$ ;  $h$  et  $\rho$  sont respectivement l'épaisseur et la

masse volumique de la plaque,  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  la rigidité

de flexion avec  $E$  le module d'Young complexe et  $\nu$  le coefficient de Poisson.  $\delta_{\Delta}^{4x}$ ,  $\delta_{\Delta}^{4y}$  et  $\delta_{\Delta}^{2x2y}$  sont respectivement les approximations par schéma aux différences finies des dérivées partielles du déplacement  $\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$ ,  $\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$  et  $\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}$  et définies par :

$$\delta_{\Delta}^{4x} = \frac{1}{\Delta^4} [w(x+2\Delta, y) - 4w(x+\Delta, y) + 6w(x, y) - 4w(x-\Delta, y) + w(x-2\Delta, y)], \quad (3)$$

$$\delta_{\Delta}^{4y} = \frac{1}{\Delta^4} [w(x, y+2\Delta) - 4w(x, y+\Delta) + 6w(x, y) - 4w(x, y-\Delta) + w(x, y-2\Delta)], \quad (4)$$

$$\delta_{\Delta}^{2x2y} = \frac{1}{\Delta^4} [w(x+\Delta, y+\Delta) - 2w(x+\Delta, y) + 4w(x, y) + w(x+\Delta, y-\Delta) - 2w(x, y+\Delta) - 2w(x, y-\Delta) + w(x-\Delta, y+\Delta) - 2w(x-\Delta, y) + w(x-\Delta, y-\Delta)]. \quad (5)$$

La distribution de force au point  $O(x, y)$  est déterminée par la mesure du déplacement en 13 points autour de  $O(x, y)$  dont

les coordonnées spatiales sont fixées dans un repère cartésien par le choix du schéma aux différences finies (cf. Figure 1).

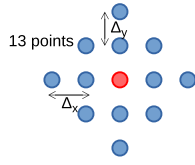


FIGURE 1 – Schéma aux différences finies permettant d'estimer l'effort en un point, ici le point rouge.

Pour la méthode RIC, deux facteurs correctifs,  $\tilde{\mu}^4$  et  $\tilde{\nu}^4$  sont ajoutés pour corriger l'erreur apportée par l'utilisation du schéma aux différences finies [2]. Les méthodes inverses agissent comme des filtres passe-bas dans le domaine des nombres d'onde avec un nombre d'onde de coupure proche du nombre d'onde de flexion  $k_f$  de la plaque. Pour visualiser ce phénomène, les équations 1 et 2 sont réécrites dans le domaine des nombres d'onde en utilisant la transformée de Fourier spatiale, ce qui donne :

$$\widehat{F}^{RI}(k_x, k_y, \omega) = D(\kappa_{2D}^4 - k_f^4)\widehat{w}(k_x, k_y, \omega), \quad (6)$$

$$\widehat{F}^{RIC}(k_x, k_y, \omega) = D(\tilde{\kappa}_{2D}^4 - k_f^4)\widehat{w}(k_x, k_y, \omega), \quad (7)$$

avec  $k_f = \sqrt[4]{\frac{\rho h}{D}} \sqrt{\omega}$  le nombre d'onde de flexion de la plaque et  $\widehat{w}(k_x, k_y, \omega)\kappa_{2D}^4$  la transformée de Fourier dans le domaine des nombres d'onde du schéma aux différences finies ( $\delta_{\Delta}^{4x} + \delta_{\Delta}^{4y} + 2\delta_{\Delta}^{2x2y}$ ) et  $\widehat{w}(k_x, k_y, \omega)\tilde{\kappa}_{2D}^4$  celle du schéma aux différences finies corrigé.

Le filtrage est étudié en analysant le ratio de la distribution de force reconstruite par les méthodes inverses sur l'équation analytique de la plaque. Ces fonctions de transfert appelées  $H^{RI}$  et  $H^{RIC}$  sont définies aux équations 8 et 9 et sont tracées pour une valeur du nombre de points par longueur d'onde égale à 2 à la figure 2.

$$H^{RI}(k_x, k_y, \omega) = \frac{\widehat{F}^{RI}(k_x, k_y, \omega)}{\widehat{F}(k_x, k_y, \omega)} = \frac{\kappa_{2D}^4 - k_f^4}{(k_x^2 + k_y^2)^2 - k_f^4}, \quad (8)$$

$$H^{RIC}(k_x, k_y, \omega) = \frac{\widehat{F}^{RIC}(k_x, k_y, \omega)}{\widehat{F}(k_x, k_y, \omega)} = \frac{\tilde{\kappa}_{2D}^4 - k_f^4}{(k_x^2 + k_y^2)^2 - k_f^4}. \quad (9)$$

Les filtres sont des filtres circulaires marqués par deux singularités présentes autour du nombre d'onde de coupure  $k_f$  et qui correspondent au zéro et au pôle des fonctions de transfert  $H^{RI}$  et  $H^{RIC}$ . La correction apportée par la méthode RIC permet de corriger ces singularités en trois directions principales  $x_1(k_x = 0, k_y = k_f)$ ,  $x_2(k_x = k_f, k_y = 0)$  et  $x_3(k_x = k_f = \frac{\sqrt{2}}{2}k_f)$  (cf. Figure 4b).

La méthode RIC bien qu'elle ne soit pas totalement corrigée a fait ses preuves dans de nombreux cas, on pourra citer par exemple celui d'un vitrage automobile excité par une couche limite turbulente [4, 7]. Lorsqu'elle ne permet pas un filtrage assez sélectif, il existe une autre alternative aux méthodes RI et RIC : la méthode RIFF (Résolution

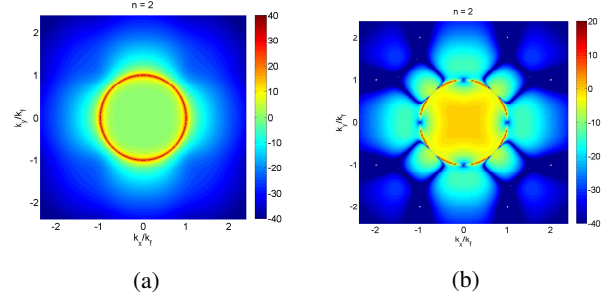


FIGURE 2 – Filtrés  $H^{RI}$  (a) et  $H^{RIC}$  (b) pour une valeur du nombre de points par longueur d'onde égale à  $n = 2$ .

Inverse Filtrée Fenêtrée) [1] qui régularise le problème par l'ajout d'un filtrage sur la distribution de force reconstruite. Cette méthode, nécessite un post-traitement contrairement à la méthode RIC où la correction est intégrée dans l'équation discrétisée.

### 3 Les méthodes inverses RI et RIC polaires

L'objectif de la méthode RIC polaire est d'améliorer le filtrage réalisé par l'équation discrétisée de la structure en le rendant parfaitement symétrique et en corrigeant les singularités sur tout le cercle du nombre d'onde de coupure.

#### 3.1 Équation analytique du mouvement de la plaque en coordonnées polaires

Pour définir l'équation du mouvement de la plaque dans le repère polaire, il faut premièrement introduire le Bilaplacien polaire qui est défini par :

$$\Delta_p^2 = \frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4}{\partial r^2 \partial \theta^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{4}{r^4} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4}{\partial \theta^4}. \quad (10)$$

Pour chaque fréquence, l'équation du mouvement de la plaque selon l'hypothèse de Kirchhoff-love s'écrit en fonction du Bilaplacien polaire selon :

$$D\Delta_p^2 w(r, \theta) - \rho h \omega^2 w(r, \theta) = f(r, \theta), \quad (11)$$

avec

$$w(r, \theta) = \sum_{n=-N}^N \bar{w}_n(r) e^{jn\theta}, \quad (12)$$

et

$$\bar{w}_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} w(r, \theta) e^{-jn\theta} d\theta, \quad (13)$$

car  $w(r, \theta)$  est une fonction périodique de période  $2\pi$  en  $\theta$  et peut se décomposer en séries de Fourier.

De même,  $f(r, \theta)$  est exprimé à l'aide des séries de Fourier par :

$$\bar{f}_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(r, \theta) e^{-jn\theta} d\theta. \quad (14)$$

D'après ces définitions, en remplaçant les expressions des séries de Fourier dans l'équation 11, on obtient :

$$D \sum_{n=-N}^N \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} \right)^2 \bar{w}_n(r) e^{jn\theta} \right] - \rho h \omega^2 \sum_{n=-N}^N \bar{w}_n(r) e^{jn\theta} = \sum_{n=-N}^N \bar{f}_n(r) e^{jn\theta}. \quad (15)$$

Dans notre étude, l'identification de la force  $f$  est étudiée en  $r = 0$ . C'est un point particulier où  $f(r = 0, \theta)$  ne dépend pas de  $\theta$ . Il est donc possible de n'étudier que la composante en  $n = 0$  de l'équation 15 :

$$D \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right]^2 \bar{w}_0(r) - \rho h \omega^2 \bar{w}_0(r) = \bar{f}_0(r), \quad (16)$$

avec  $\bar{w}_0(r)$  et  $\bar{f}_0(r)$  respectivement les valeurs du déplacement moyen et de la pression moyenne sur le cercle de rayon  $r$ .

### 3.2 Équation du mouvement discrétisée en coordonnées polaires

De la même façon que pour les dérivées quatrièmes en  $x$  et  $y$  du Bilaplacien cartésien, les dérivées en  $r$  et  $\theta$  sont estimées par un schéma aux différences finies du premier ordre et à espacement régulier. Le résultat est un schéma à 13 points :

$$\begin{aligned} \delta_{d_r, d_\theta}^2 = & Aw(r - 2d_r, \theta) + Bw(r - d_r, \theta) + Cw(r, \theta) \\ & + Dw(r + d_r, \theta) + Ew(r + 2d_r, \theta) + Fw(r, \theta - 2d_\theta) + Gw(r, \theta - d_\theta) \\ & + Gw(r, \theta + d_\theta) + Fw(r, \theta + 2d_\theta) + Iw(r - d_r, \theta - d_\theta) \\ & + Jw(r + d_r, \theta - d_\theta) + Iw(r - d_r, \theta + d_\theta) + Jw(r + d_r, \theta + d_\theta), \end{aligned} \quad (17)$$

avec  $d_r$  et  $d_\theta$  les pas de discrétisation radiale et angulaire. Les coefficients sont détaillés dans [4].

Dans cette formulation, on note que le centre du schéma est un point singulier (le rayon est égal à zéro) et par conséquent le terme  $1/r$  mène à une indétermination. Le schéma n'est pas utilisable à l'origine du repère mais peut être exprimé en n'importe quel autre point du repère.

Pour lever l'indétermination et utiliser le schéma aux différences finies au centre du repère, il a été choisi d'utiliser la technique développée par Constantinescu et Lele [6] qui consiste à reformuler le schéma aux différences finies du Bilaplacien par un développement en séries de Taylor.

Les auteurs ont démontré que le Laplacien à l'origine d'un repère polaire peut être approximé par l'équation :

$$\tilde{\delta}_{dr} w_0 = \frac{4}{d_r^2} (\bar{w}_1 - w_0), \quad (18)$$

avec  $\tilde{\delta}_{dr} w_0$  l'opérateur Laplacien approximé,  $\bar{w}_1$  est la moyenne des déplacements des  $N_\theta$  points situés sur le

premier cercle, c'est-à-dire au premier pas de rayon et  $w_0$  le déplacement à l'origine du repère.

Le Bilaplacien s'obtient en composant le Laplacien avec lui-même. L'opérateur  $\delta_{dr}$  est remplacé par  $\tilde{\delta}_{dr}$  à l'origine du repère, on a alors :

$$\tilde{\delta}_{dr}^2 = \delta_{dr} \left( \tilde{\delta}_{dr} w_0 \right) = \frac{4}{d_r^2} \left( \delta_{dr} \bar{w}_1 - \tilde{\delta}_{dr} w_0 \right), \quad (19)$$

ce qui donne après quelques manipulations algébriques [6] :

$$\tilde{\delta}_{dr}^2 w_0 = \frac{6}{d_r^4} (\bar{w}_2 - 4\bar{w}_1 + 3w_0) + O(d_r^2), \quad (20)$$

avec  $\bar{w}_2$  la moyenne des déplacements des  $N_\theta$  points situés sur le second cercle (second pas de rayon  $d_r$ ).

En conclusion, le bilaplacien à l'origine du repère ( $r = 0$ ) s'exprime comme une somme pondérée du déplacement au point central et de la moyenne des déplacements situés sur les deux premiers cercles du maillage autour du point  $w_0$ . Le nombre de points de mesure de déplacement dépend de la discrétisation angulaire choisie. Pour  $N_\theta = 6$ , soit un pas angulaire de  $\pi/3$  radians, le schéma nécessite 13 points de mesures (cf. Figure 3) comme pour l'antenne cartésienne.

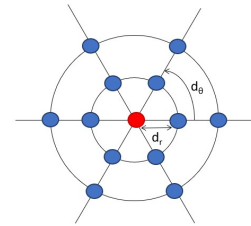


FIGURE 3 – Schéma aux différences finies polaires.

D'après ces résultats, la distribution de force estimée par la méthode RI et notée  $F^{RIp}$  est égale à :

$$F_0^{RIp} = D \tilde{\delta}_{dr}^2 w_0 - \rho h \omega^2 \bar{w}_0(r), \quad (21)$$

Pour la méthode RIC polaire, il faut préalablement calculer le facteur correctif à appliquer sur le schéma aux différences finies pour corriger les singularités sur le cercle de rayon  $k_f$ .

### 3.3 Étude du filtrage réalisé par les méthodes inverses polaires

Le filtre étant décrit dans le domaine des nombres d'onde, les équations 16 et 21 doivent être réécrites dans le domaine des nombres d'onde polaire.

#### 3.3.1 Équation analytique de la plaque dans le domaine des nombres d'onde polaires

La transformée de Fourier à deux dimensions d'une fonction radiale correspond à l'utilisation de la transformée

de Hankel définie par la formule générale suivante :

$$\mathbb{H}[\bar{w}_0(r)] = \bar{W}_0(k_r) = \int_0^{+\infty} \bar{w}_0(r) J_0(k_r r) r dr, \quad (22)$$

où  $J_0(k_r r) = \int_0^{+2\pi} e^{-jk_r r \cos \theta} d\theta$  est la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre 0, qui satisfait la propriété mathématique suivante :

$$\Delta_p J_0(k_r r) = -k_r^2 J_0(k_r r). \quad (23)$$

La transformation de Hankel du Bilaplacien est :

$$\mathbb{H}[\Delta_p^2 \bar{w}_0(r)] = (\mathbb{H}[\Delta_p \bar{w}_0(r)])^2 = +k_r^4 \bar{W}_0(k_r). \quad (24)$$

Dans le domaine des nombres d'onde, l'équation de mouvement de la plaque 16 s'écrit alors :

$$Dk_r^4 \bar{W}_0(k_r) - \rho h \omega^2 \bar{W}_0(k_r) = \bar{F}_0(k_r), \quad (25)$$

ou en simplifiant :

$$D(k_r^4 - k_f^4) \bar{W}_0(k_r) = \bar{F}_0(k_r). \quad (26)$$

### 3.3.2 Équation de la plaque discrétisée dans le domaine des nombres d'onde polaires

La transformée de Hankel d'une fonction radialement symétrique et décalée de  $r_0$  est :

$$\mathbb{H}[f(r - r_0)] = J_0(k_r r_0) \mathbb{H}[f(r)] = J_0(k_r r_0) \int_0^{+\infty} r f(r) J_0(k_r r) dr. \quad (27)$$

La transformée de Hankel de l'équation 20 est :

$$\mathbb{H}[\delta_{dr}^2 w_0](k_r) = \frac{6}{d_r^4} (J_0(2k_r d_r) - 4J_0(k_r d_r) + 3) \bar{W}_0(k_r), \quad (28)$$

où  $\kappa_p = \frac{6}{d_r^4} (J_0(2k_r d_r) - 4J_0(k_r d_r) + 3)$ .

L'équation discrétisée de la plaque en utilisant un schéma aux différences finies polaire s'écrit donc :

$$D(\kappa_p - k_f^4) \bar{W}_0(k_r) = \bar{F}_0(k_r). \quad (29)$$

### 3.3.3 Définition du filtre $H^{RIP}$ réalisé par l'équation discrétisée polaire

Le filtre  $H^{RIP}$  est égal au ratio de l'équation 29 sur l'équation 26 :

$$H^{RIP}(k_r, \omega) = \frac{\kappa_p - k_f^4}{k_r^4 - k_f^4}. \quad (30)$$

Le filtre est tracé à la figure à la figure 4a pour une valeur de  $n = 4$ . Quelles que soient la valeur de  $n$  et la direction, le filtre  $H^{RIP}(k_r, \omega)$  est un filtre passe-bas parfaitement circulaire (cf. Figure 4). Les singularités, bien que quelque peu atténuées, persistent sur le cercle de rayon  $k_f$ .

### 3.3.4 Définition du filtre corrigé $H^{RICp}$

Le facteur correctif  $\mu_p$  est calculé en égalisant les racines du numérateur de la fonction de transfert  $H^{RIP}(k_r, \omega)$  avec les pôles du dénominateur, ce qui se traduit par :

$$\mu_p(\kappa_p - k_f^4) = k_r^4 - k_f^4. \quad (31)$$

En résolvant l'équation, il vient :

$$\mu_p = \frac{k_f^4 d_r^4}{6J_0(2k_f d_r) - 24J_0(k_f d_r) + 18}. \quad (32)$$

Le filtre  $H^{RICp}$  s'exprime en appliquant le facteur correctif sur le schéma aux différences finies polaire tel que :

$$H^{PlaqueRICp}(k_r, \omega) = \frac{\mu_p \kappa_p - k_f^4}{k_r^4 - k_f^4}. \quad (33)$$

La figure 4b illustre les filtres  $H^{RIP}$  et  $H^{RICp}$  à  $n = 4$ . Les singularités sont corrigées au nombre d'onde de flexion et cela dans toutes les directions. La figure 5 compare la

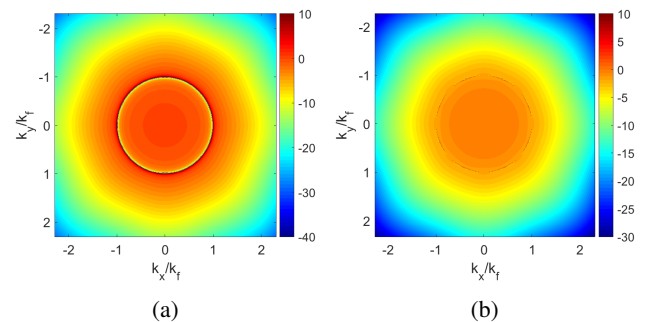


FIGURE 4 – Filtrés  $H^{RIP}$  et  $H^{RICp}$  pour une valeur de  $n = 4$ .

sélectivité des filtres polaire  $H^{RICp}$  et cartésien  $H^{RIC}$  pour un nombre de points par longueur d'onde fixé à  $n = 4$  et dans

les directions  $k_x/k_f$  et  $\sqrt{(\frac{k_x}{k_f})^2 + (\frac{k_y}{k_f})^2}$ . Le filtrage polaire est

parfaitement circulaire et symétrique et par conséquent aussi sélectif dans toutes les directions. Ce n'est pas le cas pour le filtre cartésien dont le nombre d'onde de coupure varie selon la direction. Le filtre polaire est un peu moins sélectif que le filtre cartésien dans les directions principales, c'est-à-dire là où la correction de RIC est effective. On peut aussi noter que la correction apportée par le filtre polaire agit sur le filtre entier et pas seulement au nombre d'onde de flexion de la plaque. Les singularités qui apparaissent plus loin en nombre d'onde sont elles aussi corrigées. En pratique, le calcul de la distribution de force est réalisé de la même manière que pour la méthode RIC classique. La correction est appliquée sur le schéma aux différences finies dans l'équation du mouvement discrétisée :

$$F^{RICp}(r = 0, \omega) = D\mu_p \delta_{dr}^2 w_0 - \rho h \omega^2 w(r = 0, \omega). \quad (34)$$

### 3.4 Application des méthodes polaires

Les méthodes RI et RIC polaires sont testées et comparées aux méthodes cartésiennes par simulation

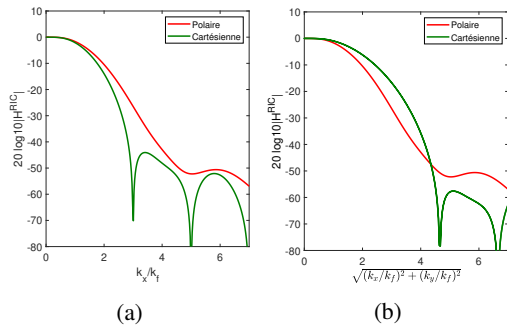


FIGURE 5 – Comparaison de la sélectivité des filtres  $H^{RIC}$  et  $H^{RICp}$  pour  $n = 4$  en fonction de la direction.

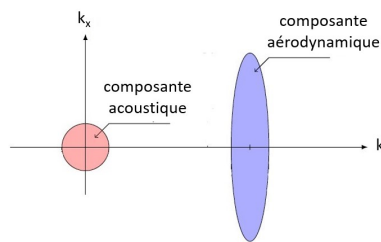


FIGURE 6 – Composantes acoustique et aérodynamique d’une couche limite turbulente.

numérique sur le cas d’une plaque de 0.5 m de coté et de 3.85 mm d’épaisseur dont les paramètres mécaniques sont  $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$ ,  $E = 70 \text{ GPa}$  et  $\nu = 0.3$ . D’après la théorie décrite par [9], une couche limite turbulente est composée de deux excitations distinctes : une composante aérodynamique forte énergétiquement et située dans les hauts nombres d’onde et une composante acoustique faible énergétiquement et située dans les bas nombres d’onde. Le niveau de cette dernière est très inférieur à celui de la composante aérodynamique à tel point qu’une mesure du champ de pression total ne rend compte que du niveau de la composante aérodynamique. Arguillat [8] démontre que son niveau est inférieur de 20 dB à celui du niveau total. La composante acoustique est symétrique : elle est la même dans toutes les directions (cf. Figure 6). Les méthodes inverses, qui réalisent un filtrage circulaire des bas nombres d’onde, sont donc parfaitement adaptées pour la détecter. Différentes études ont déjà traité ce problème et prouvé l’efficacité des méthodes [4, 7]. Leur principal avantage est leur facilité de mise en oeuvre aussi bien numériquement qu’expérimentalement.

### 3.5 Synthèse de la couche limite turbulente et calcul du déplacement

La première étape consiste à synthétiser la couche limite turbulente excitant la plaque à une vitesse de 180 km/h. Le champ de pression total calculé est composé

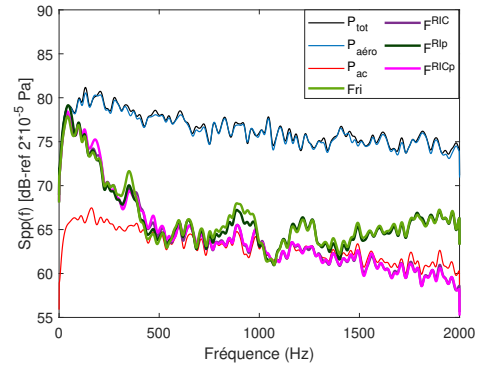


FIGURE 7 – DSP des composantes acoustique et aérodynamique et de la pression identifiée au centre de la plaque par les méthodes inverse cartésienne et polaire.

d’une composante aérodynamique et d’une composante acoustique d’un niveau très inférieur, choisi arbitrairement égal à 0.05 fois celui de la composante aérodynamique. La méthode utilisée est détaillée dans les travaux de Lecoq [3] qui utilise les modèles d’autospectre de Goody et d’interspectre de Corcos auquel est ajouté l’interspectre d’un champ diffus acoustique. Le champ de vibration est ensuite calculé à partir du champ de pression total dans le domaine temporel en utilisant une décomposition modale. Les différentes méthodes inverses sont appliquées sur le champ de déplacement total au centre de la structure et avec un pas spatial  $\Delta = 6 \text{ cm}$ .

### 3.6 Application des méthodes inverses

Sur la figure 7, sont représentées les densités spectrales de puissance (DSP) des composantes acoustique et aérodynamique obtenues par synthèse de signaux et celles des pressions identifiées par les méthodes RI et RIC polaires et cartésiennes. La partie acoustique de l’excitation étant très faible dans l’excitation, le champ de pression total ne rend compte que du niveau de la composante aérodynamique. Dans cette première simulation, les données ne sont pas bruitées. Les résultats confirment l’effet du filtrage passe-bas apporté par les méthodes inverses. La méthode RI polaire dont le filtre est encore marqué par les singularités surestime très vite le niveau de la composante acoustique contrairement aux méthodes RIC cartésienne et polaire qui l’identifient jusqu’à la fin du domaine d’étude. Les deux méthodes RIC donnent des résultats quasiment identiques. La correction, bien que partielle, des singularités par la méthode RIC cartésienne permet déjà un filtrage suffisant pour la reconstruction. Les méthodes sont ensuite appliquées sur le champ de déplacement bruité avec un RSB égal à 20 dB (cf. Figure 8). Pour toutes les méthodes, la présence du bruit impacte surtout la reconstruction en basses fréquences car le filtrage appliqué par les différentes méthodes est moins sélectif dans cette gamme de fréquences. Contrairement au premier cas étudié, les méthodes diffèrent : la méthode RIC cartésienne n’est pas assez sélective pour permettre un

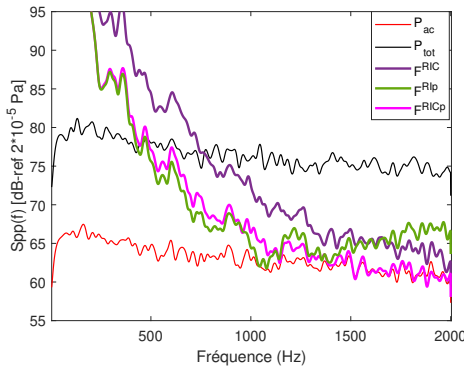


FIGURE 8 – DSP des composantes acoustique et aérodynamique et de la pression identifiée au centre de la plaque par les méthodes inverses RIC cartésienne et polaire appliquées sur un champ de déplacement bruité.

filtrage complet des hauts nombres d'onde contrairement aux méthodes polaires qui permettent une détection de la composante acoustique à partir de 1400 Hz. Les méthodes RI et RIC polaires sont assez similaires jusqu'à 1500 Hz, fréquence à partir de laquelle la méthode RI commence à surestimer la reconstruction. Ce phénomène s'explique par l'évolution en fréquence de la composante acoustique. En basses fréquences, le rayon de la composante acoustique est plus petit que le nombre d'onde de coupure du filtrage réalisé, les singularités n'ont alors pas d'impact. Dans cette gamme de fréquences, le fait que la méthode RIC cartésienne filtre moins bien les hauts nombres d'onde n'est pas dû à la présence des singularités mais à la sélectivité du filtrage. Comme illustré à la figure 5b, le filtre de la méthode RIC cartésienne est moins sélectif que celui des méthodes polaires sur une grande partie du cercle de rayon  $k_f$ . De plus, dans les basses fréquences la composante aérodynamique est encore proche de la composante acoustique. La sélectivité du filtre est donc un paramètre important pour pouvoir isoler complètement la partie acoustique de l'écoulement. Avec l'évolution de la fréquence, le rayon de la composante acoustique augmente et finit, en haute fréquence, par être plus grand que le nombre d'onde de coupure  $k_f$ , les singularités amplifient alors beaucoup la reconstruction.

## 4 Conclusion

Cet article présente une nouvelle version des méthodes inverses RI et RIC qui permet un filtrage en nombre d'onde plus adapté géométriquement et parfaitement corrigé dans toutes les directions. Le filtre de la méthode RI présente des singularités importantes au nombre d'onde de coupure, ce qui fausse très rapidement la reconstruction de la distribution de force. La méthode RIC, bien qu'elle soit efficace dans de nombreux cas, ne permet pas un filtrage circulaire symétrique parfait, des singularités sont encore présentes dans certaines directions et le filtre n'a pas la

même sélectivité en fonction de la direction. La réécriture des méthodes dans un repère polaire est plus adaptée à la géométrie du filtre : le filtre RI polaire est totalement circulaire mais présente encore des singularités au nombre d'onde de coupure. Un facteur correctif est calculé de la même façon que pour la méthode RIC cartésienne et les singularités sont annulées sur tout le cercle de rayon  $k_f$ . La méthode RIC polaire permet un filtrage circulaire parfait des bas nombres d'onde. Les simulations ont montré, dans un cas où la méthode RIC cartésienne permet déjà un filtrage assez sélectif pour reconstruire la distribution de force, que la méthode RIC polaire est aussi efficace. Elle s'avère même particulièrement utile dans les cas plus dégradés où la méthode RIC classique n'est pas assez sélective et présente encore trop de singularités pour identifier la distribution de force.

## Remerciements

Cette étude est en partie financée par le CNRT R2A qui est un consortium d'entreprises. Les auteurs souhaitent remercier les représentants des entreprises Renault et PSA Peugeot Citroën pour leurs apports et leurs conseils.

## Références

- [1] C. Pézerat, J.-L. Guyader, Two inverse methods for localization of external sources exciting a beam, *Acta Acustica*, 3(1) : 1-10, (1995).
- [2] Q. Leclère, C. Pézerat, Vibration source identification using corrected finite difference schemes, *Journal of Sound and Vibration*, **331**, 1366–1377 (2012).
- [3] D. Lecoq, C. Pézerat, J.-H. Thomas, W. Bi, Identification of the acoustic component in the turbulent boundary layer excitation by the Force Analysis Technique, *Acoustics 2012*, (2012).
- [4] J. Carpentier, Identification des sources aéroacoustiques à partir de mesures vibratoires sur vitrages automobiles, *Thèse de doctorat*, (2019).
- [5] C. Pézerat, O. Grosset, J. Carpentier, J.-H. Thomas, Wall pressure identification by using the force analysis technique in automotive, naval and aeronautic applications, *International Conference on Flow Induced Noise and Vibration Issues and Aspects*, 39–57 (2017).
- [6] G. Constantinescu, S.K. Lele, A highly accurate technique for the treatment of flow equations at the polar axis in cylindrical coordinates using series expansions, *Journal of Computational Physics*, **183**, 165–186 (2002).
- [7] D. Lecoq, C. Pézerat, J.-H. Thomas, W. Bi, Extraction of the acoustic component of a turbulent flow exciting a plate by inverting the vibration problem, *Journal of Sound and Vibration*, **333**, 2505–2519 (2014).
- [8] B. Arguillat, D. Ricot, C. Bailly, G. Robert, Measured wavenumber : Frequency spectrum associated with acoustic and aerodynamic wall pressure fluctuations, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **128**, 1647–1655 (2010).
- [9] W. Blake, *Mechanics of Flow-Induced Sound and Vibration*, Vols. 1 and 2. *Academic Press* (1987).