



HAL
open science

Réduction de Modèle et Rayonnement Acoustique des Structures Viscoélastiques

Alexandre Berthet, Emmanuel Perrey-Debain, Jean-Daniel Chazot, Sylvain Germès

► **To cite this version:**

Alexandre Berthet, Emmanuel Perrey-Debain, Jean-Daniel Chazot, Sylvain Germès. Réduction de Modèle et Rayonnement Acoustique des Structures Viscoélastiques. 16ème Congrès Français d'Acoustique, CFA2022, Société Française d'Acoustique; Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, Apr 2022, Marseille, France. hal-03848201

HAL Id: hal-03848201

<https://hal.science/hal-03848201>

Submitted on 10 Nov 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



16^{ème} Congrès Français d'Acoustique
11-15 Avril 2022, Marseille

Réduction de Modèle et Rayonnement Acoustique des Structures Viscoélastiques

A. Berthet ^a, E. Perrey-Debain ^a, J.-D. Chazot ^a, S. Germès ^b

^a Université de Technologie de Compiègne, laboratoire Roberval, Compiègne - France

^b Saint-Gobain Research Compiègne, Thourotte - France,



La modélisation des structures viscoélastiques est une étape délicate puisqu'il faut prendre en compte de manière précise les propriétés mécaniques des matériaux qui varient avec la température et la fréquence. Ici, nous cherchons à réduire un modèle éléments finis d'une structure composée de matériaux viscoélastiques sans perdre l'information de la dépendance en fréquence du module d'élasticité complexe. Pour cela, nous appliquons dans un premier temps la méthode de Golla-Hughes-MacTavish (GHM) qui permet d'approximer le module par une fonction polynomiale et de réécrire les équations du système avec des variables supplémentaires. De cette façon, les matrices deviennent constantes mais sont de taille supérieure. Ensuite, nous utilisons la Balanced Proper Orthogonal Decomposition (BPOD) qui permet de réduire efficacement une fonction de transfert définie par un faible nombre d'inputs (forces) et d'outputs (déplacements). Nous montrons dans cet article que la formulation de la méthode GHM réduit significativement les coûts numériques de la BPOD, ce qui permet de l'appliquer sur des grands modèles numériques dépendants de la fréquence. Enfin, grâce à une variante de la BPOD, nous construisons un modèle réduit où la fonction de transfert relie un faible nombre d'excitations à la quasi-totalité des déplacements de la structures. L'utilisateur est donc capable d'appliquer un jeu de force et de récupérer le champ de déplacement total à moindre coût et de calculer le rayonnement acoustique associé.

1 Introduction

Les simulations numériques des vibrations des structures sont indispensables pour étudier de nombreux phénomènes physiques, comme le rayonnement acoustique. Dans l'hypothèse où le fluide n'influe pas sur la structure, l'étude se fait en deux étapes : on calcule d'abord la déformation *in vacuo* de la surface rayonnante, puis on en déduit le champ acoustique rayonné. Les méthodes de discrétisation comme la FEM¹ ou la BEM² sont souvent employées pour traiter ce cas de figure.

Le premier effort numérique correspond au calcul de la déformation de la structure. Il est directement lié au nombre d'équations à résoudre, autrement dit à la taille du modèle. Afin de réduire cet effort, on cherche à réduire cette taille en appliquant une méthode de réduction de modèle. La plus familière d'entre elles est certainement la décomposition modale où le champ de déplacements est exprimé sous la forme d'une combinaison linéaire des modes propres de la structure. En basses fréquences, seul un faible nombre de modes est nécessaire, ce qui offre des taux de réduction considérables allégeant ainsi les coûts numériques.

Cependant l'utilisation de matériaux visco-élastiques complexifie les choses puisque la matrice de raideur dépend maintenant de la fréquence. Des variantes de la décomposition modale classique existent et sont répertoriées par Rouleau et al [1]. Ces méthodes visent à réduire le modèle dans sa globalité, ce qui est utile quand on ne sait pas a priori quelles données sont à post-traiter. Dans le cas où les inputs (forces injectées dans le système) et les outputs (combinaisons linéaires des variables) sont déterminés avant les simulations, le système peut être réduit efficacement par la méthode de *balanced truncation* (BT) [2]. L'un des avantages de la BT est d'offrir un critère d'erreur *a priori*, ce qui aide à choisir la taille du modèle réduit. Or, l'utilisation de cette méthode est limitée par deux points : les matrices doivent être constantes et le nombre de variables initiales doit être raisonnable.

Le problème de la dépendance en fréquence peut être traité par la méthode de Golla-Hughes-MacTavish

(GHM) [3, 4, 5], qui définit un nouveau système aux matrices constantes, prenant toujours en compte les effets d'amortissement. Le nouveau système est quadratique et de taille plus importante, mais les matrices sont constantes. Dans le cas des problèmes à grande dimension (environ 10^4 degrés de liberté) la BT n'est plus applicable (résolution des équations de Lyapunov) mais peut être approximée par la *balanced proper orthogonal decomposition* (BPOD) [6].

Dans cet article, nous nous intéressons au cas où la structure est excitée en peu de points et où un large champ de déplacements est requis afin de procéder à un calcul de rayonnement acoustique. D'abord, nous rappelons brièvement les étapes des méthodes GHM et de la BPOD ainsi que les travaux de Rowley [7] qui montrent comment gérer un grand nombre d'outputs. Ensuite nous montrons que les coûts de calcul relatifs à la BPOD peuvent être considérablement réduits lorsqu'elle s'applique à un modèle éléments finis modélisé par la méthode GHM. Enfin, un calcul de pression acoustique rayonnée par une plaque multicouche est présenté en section 4, avant de conclure.

2 Méthode GHM

Dans le cas d'une structure constituée uniquement d'un matériau viscoélastique, les modules d'élasticité dépendent de la fréquence. Dans l'espace de Laplace, où $s = i\omega$, l'équation du mouvement s'écrit

$$(s^2\mathbf{M}_v + \mathbf{K}_v(s))\mathbf{q}_v = \mathbf{F}_v, \quad (1)$$

où $\mathbf{q}_v \in \mathbb{C}^n$ désigne le vecteur des déplacements, $\mathbf{M}_v \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice de masse, $\mathbf{K}_v(s) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ la matrice de raideur dépendante de la fréquence et $\mathbf{F}_v \in \mathbb{C}^n$ le vecteur force. Alors que le module de cisaillement peut se factoriser tel que $\mathbf{K}_v(s) = G(s)\bar{\mathbf{K}}_v$, Golla, Hughes et MacTavish [3, 4, 5] proposent de l'approximer par la fonction

$$G(s) = G_\infty \left(1 + \sum_{j=1}^k \hat{\alpha}_j \frac{s^2 + 2\hat{\zeta}_j \hat{\omega}_j s}{s^2 + 2\hat{\zeta}_j \hat{\omega}_j s + \hat{\omega}_j^2} \right) \quad (2)$$

où G_∞ correspond au module statique, et les k jeux de paramètres réels $(\hat{\alpha}_j, \hat{\zeta}_j, \hat{\omega}_j)$ sont déterminés par curve-fitting

1. Finite Element Method
2. Boundary Element Method

sur des données expérimentales. Dans le cas où $\mathbf{K}_v = \mathbf{G}_\infty \tilde{\mathbf{K}}_v$ est non-singulière (pas de mode rigide), on introduit k nouveaux vecteurs $\mathbf{z}_j \in \mathbb{C}^n$ contenant les *coordonnées de dissipations* définis tels que

$$\mathbf{z}_j = \frac{\hat{\omega}_j^2}{s^2 + 2\hat{\zeta}_j \hat{\omega}_j s + \hat{\omega}_j^2} \mathbf{K}_v \mathbf{q}_v, \quad (3)$$

Le nouveau système d'équations de taille $N = n(1+k)$ est de la forme quadratique

$$(s^2 \tilde{\mathbf{M}} + s \tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{K}}) \mathbf{v} = \tilde{\mathbf{F}} \quad (4)$$

avec $\mathbf{v} = [\mathbf{q}_v^T \mathbf{z}_1^T \dots \mathbf{z}_k^T]^T \in \mathbb{C}^N$ le nouveau vecteur des degrés de liberté et

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\hat{\alpha}_1}{\hat{\omega}_1^2} \mathbf{K}_v & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\hat{\alpha}_k}{\hat{\omega}_k^2} \mathbf{K}_v \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{2\hat{\alpha}_1 \hat{\zeta}_1}{\hat{\omega}_1} \mathbf{K}_v & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{2\hat{\alpha}_k \hat{\zeta}_k}{\hat{\omega}_k} \mathbf{K}_v \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}(1 + \sum_{i=1}^k \hat{\alpha}_i) & -\hat{\alpha}_1 \mathbf{K} & \dots & -\hat{\alpha}_k \mathbf{K} \\ -\hat{\alpha}_1 \mathbf{K}_v & \hat{\alpha}_1 \mathbf{K}_v & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ -\hat{\alpha}_k \mathbf{K}_v & \dots & 0 & \hat{\alpha}_k \mathbf{K}_v \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Bien que la forme du système soit quadratique, et la taille plus importante, les méthodes de réduction de modèle comme la BPOD peuvent maintenant s'appliquer [8].

3 Réduction de modèle

3.1 Modèle d'état

Considérons maintenant une structure constituée de différents matériaux élastiques et viscoélastiques. La méthode des éléments finis renvoie les équations de mouvements sous la forme matricielle

$$(s^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}(s)) \mathbf{q} = \mathbf{F}. \quad (6)$$

Une fois les vecteurs d'inputs $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^p$ et d'outputs $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^m$ définis ainsi que les matrices de localisation \mathbf{B} et \mathbf{C} telles que $\mathbf{F} = \mathbf{B}\mathbf{u}$ et $\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{q}$, on peut écrire la fonction de transfert du système

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{C} (s^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}(s))^{-1} \mathbf{B}. \quad (7)$$

Une fois la méthode GHM appliquée, l'Eq. (6) peut se réécrire sous la forme d'un modèle d'état au second ordre

$$\begin{cases} (s^2 \tilde{\mathbf{M}} + s \tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{K}}) \mathbf{v} = \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{v} \end{cases}. \quad (8)$$

Cependant, la BPOD s'applique sur des systèmes linéaires, une seconde transformation [9] est alors nécessaire et revient à réécrire l'Eq. (8) telle que

$$\begin{cases} s \mathbf{E} \mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{G} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{L} \mathbf{x} \end{cases}, \quad (9)$$

avec, considérant le nouveau vecteur d'état $\mathbf{x} = [\mathbf{v}^T s \mathbf{v}^T]^T$,

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{D}} & \tilde{\mathbf{M}} \\ \tilde{\mathbf{M}} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\tilde{\mathbf{K}} & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{M}} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = [\tilde{\mathbf{C}} \quad 0].$$

La matrice de transfert devient alors

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{L} (s \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{G}. \quad (11)$$

3.2 Balanced POD

La BPOD est basée sur l'approximation des Gramiens de *contrôlabilité* et d'*observabilité* \mathbf{P} et \mathbf{Q} définis par les expressions

$$\mathbf{P} = \int_0^\infty \mathbf{R}(\omega) \mathbf{R}^*(\omega) d\omega, \quad (12)$$

$$\mathbf{Q} = \int_0^\infty \mathbf{S}(\omega) \mathbf{S}^*(\omega) d\omega,$$

avec $\mathbf{R}(\omega) = (i\omega \mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{G}$ et $\mathbf{S}(\omega) = (i\omega \mathbf{E}^* - \mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{L}^*$ les réponses des systèmes direct et adjoint à la pulsation ω . En utilisant une règle d'intégration numérique, on peut approximer les Gramiens

$$\mathbf{P} \approx \sum_{j=1}^J \mathbf{R}(\omega_j) \mathbf{R}(\omega_j)^* \delta_j = \mathbf{R} \mathbf{R}^*, \quad (13)$$

$$\mathbf{Q} \approx \sum_{j=1}^J \mathbf{S}(\omega_j) \mathbf{S}(\omega_j)^* \delta_j = \mathbf{S} \mathbf{S}^*,$$

où \mathbf{R} et \mathbf{S} regroupent en colonnes les solutions pondérées pour les J pulsations ω_j :

$$\mathbf{R} = [\dots \mathbf{R}(\omega_j) \sqrt{\delta_j} \dots]_{j=1, \dots, J}, \quad (14)$$

$$\mathbf{S} = [\dots \mathbf{S}(\omega_j) \sqrt{\delta_j} \dots]_{j=1, \dots, J}.$$

Contrairement à la BT, la matrice de projection \mathbf{T} qui permet de balancer le système, ainsi que son inverse \mathbf{T}^{-1} , ne se déduisent pas du problème aux valeurs propres $\mathbf{P} \mathbf{Q} \mathbf{T} = \Sigma$, mais sont tirées de la SVD de $\mathbf{S}^* \mathbf{R} \in \mathbb{C}^{Jm \times Jp}$ telle que

$$\mathbf{S}^* \mathbf{R} = [\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & \\ & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^* \\ \mathbf{V}_2^* \end{bmatrix} \approx \mathbf{U}_1 \Sigma_1 \mathbf{V}_1^* \quad (15)$$

où, le plus souvent, $Jm, Jp \ll 2N$. Une troncature aux r premières valeurs singulières donnent

$$\mathbf{T} = \mathbf{R} \mathbf{V}_1 \Sigma_1^{-\frac{1}{2}} \quad \text{and} \quad \mathbf{T}^{-1} = \Sigma_1^{-\frac{1}{2}} \mathbf{U}_1^* \mathbf{S}^*. \quad (16)$$

et le système réduit s'écrit

$$\begin{cases} s \hat{\mathbf{E}} \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{G}} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \hat{\mathbf{L}} \hat{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (17)$$

avec $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{T} \mathbf{x}$, $\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{T}$ and $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} \in \mathbb{C}^{r \times r}$, $\hat{\mathbf{G}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{G} \in \mathbb{C}^{r \times m}$, $\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{L} \mathbf{T} \in \mathbb{C}^{p \times r}$. La fonction de transfert du système réduit

$$\hat{\mathbf{H}}(s) = \hat{\mathbf{L}} (s \hat{\mathbf{E}} - \hat{\mathbf{A}})^{-1} \hat{\mathbf{G}} \quad (18)$$

approxime la fonction de transfert initiale tel que $\mathbf{y} = \mathbf{H} \mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{H}} \mathbf{u}$.

3.3 Méthode d'output projection

Dans le cas où le nombre d'outputs est élevé, la matrice \mathbf{L} possède un nombre important de colonnes et le coût numérique relatif à chaque snapshots $\mathbf{S}(\omega) = (i\omega\mathbf{E}^* - \mathbf{A}^*)^{-1}\mathbf{L}^*$ est non négligeable. Afin de réduire ces coûts, Rowley [7] propose d'effectuer un changement de base sur les outputs tel que

$$\begin{aligned} s\mathbf{E}\mathbf{x} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{W}\mathbf{L}\mathbf{x} \end{aligned}, \quad (19)$$

avec $\mathbf{W} = \mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^*$ une projection orthogonale de rang $l \ll m$ et $\mathbf{\Phi}^*\mathbf{\Phi} = \mathbf{I}$. On peut montrer que les snapshots à calculer sont $\tilde{\mathbf{S}}(\omega_j) = (i\omega_j\mathbf{E}^* - \mathbf{A}^*)^{-1}\mathbf{L}^*\mathbf{\Phi}$ où le terme de droite $\mathbf{L}^*\mathbf{\Phi}$ ne possède maintenant plus que l colonnes. Le calcul de $\tilde{\mathbf{S}}$ est donc plus rapide, moins coûteux et la SVD de l'Eq. (15) se réalise sur une matrices plus petite.

Rowley montre que la base \mathbf{W} optimale provient des l premiers modes POD $\mathbf{\Phi} = [\phi_1 \dots \phi_l]$ de \mathbf{R} . Pour les obtenir, on calcule dans un premier temps les l premiers vecteurs et valeurs propres de $(\mathbf{L}\mathbf{R})^*\mathbf{L}\mathbf{R}$ tels que

$$\mathbf{\Psi} = [\psi_1 \dots \psi_l] \quad \text{and} \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_l \end{bmatrix}, \quad (20)$$

alors les modes POD $\mathbf{\Phi}$ sont

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{L}\mathbf{R}\mathbf{\Psi}\mathbf{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}. \quad (21)$$

3.4 Réduction des coûts numériques

D'une manière plus globale, le calcul de \mathbf{R} et \mathbf{S} reste coûteux même si les nombres d'inputs et d'outputs sont faibles. Cependant, la structure de $\mathbf{x} = [\mathbf{v}^T \ s\mathbf{v}^T]^T$ permet dans un premier temps de ramener l'effort numérique au calcul de \mathbf{v} . Ensuite, si les matrices \mathbf{E} et \mathbf{A} ainsi que les matrices du système GHM sont hermitiennes, le vecteur $\mathbf{v} = [\mathbf{q}^T \ \mathbf{z}_1^T \dots \ \mathbf{z}_k^T]^T$ se déduit directement du vecteur \mathbf{q} à partir d'un simple produit matriciel indiqué par l'Eq. (3). Dans le cas d'un système d'état modélisé par la méthode GHM, les efforts numériques de la BPOD peuvent être ramenés à ceux du modèle éléments finis initial (1) que les codes commerciaux résolvent facilement.

4 Exemple d'un calcul de vibro-acoustique

4.1 Modèle numérique

On considère ici une plaque multicouche représentative d'un pare-brise automobile dont les dimensions et paramètres mécaniques sont renseignés dans la Table 1. La couche centrale est composé du matériaux viscoélastique dont les coefficients GHM sont donnés dans la Table 2 et le module représenté sur la Figure 2.

La structure, encastrée sur son contour, est connectée à une cavité acoustique, notée Ω , de dimensions 2 m, 1 m et

Paramètre	Verre	Viscoélastique
Length (mm)	300	300
Width (mm)	200	200
Thickness (mm)	1.6 et 2.1	0.8
Young's modulus (Pa)	$79 \cdot 10^9$	GHM
Density ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	2500	1600
Poisson ratio (-)	0.22	0.49

Tableau 1 – Paramètres mécaniques.

Oscillateur	G_∞ (Pa)	$\hat{\alpha}$	$\hat{\zeta}$	$\hat{\omega}$
1	$3 \cdot 10^6$	4.8278	22.013	28045
2		14.548	2.1275	41494
3		40.043	0.6165	41601

Tableau 2 – Paramètres GHM du 3M ISD112 à 27°C .

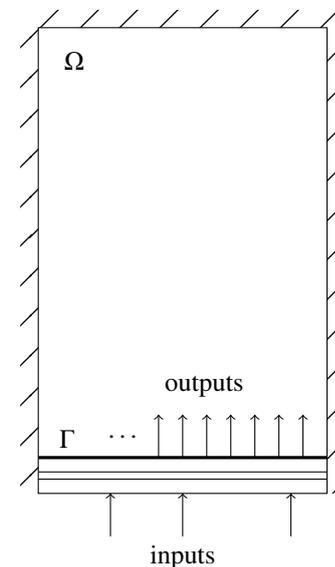


FIGURE 1 – Schéma (coupe 2D) du cas d'étude vibro-acoustique : plaque multicouche rayonnante dans une cavité 3D.

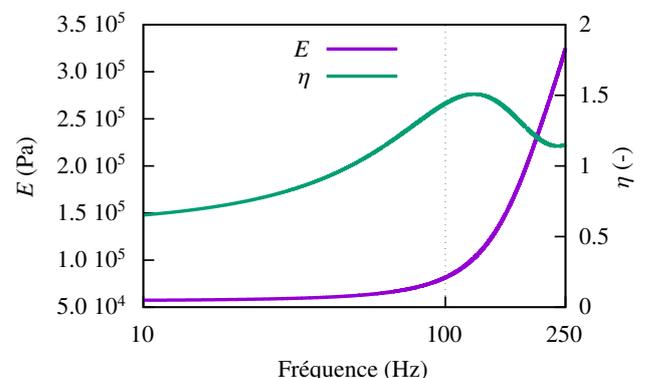


FIGURE 2 – Module de cisaillement et facteur de perte du 3M-ISD112.

3 m selon u_x , u_y et u_z (voir Figure 1). On définit 3 forces normales comme inputs appliquées sur la surface inférieure alors que les 1633 outputs correspondent aux déplacements normaux en chaque nœuds de la surface supérieure, notée Γ .

Bien que des éléments complexes existent [10], on utilise des éléments finis volumiques quadratiques pour le multicouche, et la méthode GHM est appliquée sur la couche intermédiaire. Côté acoustique, on exploitera les modes propres calculés de façon analytique. L'objectif est de construire un modèle réduit de la structure en appliquant les méthodes GHM et BPOD décrites précédemment, puis de calculer une donnée acoustique à partir du modèle réduit.

4.2 Calcul de la pression acoustique

Le domaine acoustique Ω est habituellement discrétisé par la méthode FEM ou BEM pour les basses fréquences. Lorsque l'étude s'étend aux moyennes fréquences, d'autres méthodes peuvent être employées comme la PU-FEM où le couplage fort à récemment été étudié [11]. Dans cette étude, on néglige l'effet du fluide sur la structure et on détermine la pression acoustique p en un point $\mathbf{r} \in \Omega$ [12] par le théorème de Green

$$p(\mathbf{r}) = \int_{\Gamma} G_{\Omega}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \partial_n p(\mathbf{r}') d\Gamma(\mathbf{r}') \quad (22)$$

avec $G_{\Omega}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ la fonction de Green définie pour la cavité Ω telle que

$$G_{\Omega}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = c^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi_n(\mathbf{r}) \phi_n(\mathbf{r}')}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad (23)$$

où les modes propres normés ϕ_n et les pulsation propres ω_n sont définis analytiquement. Une simplification peut être apportée à l'expression initiale du théorème de Green en considérant l'intégrale comme une somme finie

$$p(\mathbf{r}) = -\rho \omega^2 dS \sum_{j=1}^J u_x(\mathbf{r}'_j) G_{\Omega}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'_j) \quad (24)$$

avec ρ masse volumique de l'air, $u_x(\mathbf{r}'_j)$ les déplacements normaux au point $\mathbf{r}'_j \in \Gamma$ et dS correspond à la surface Γ divisé par le nombre de déplacements normaux J .

4.3 Étude numérique

La première étape consiste à construire le modèle réduit en appliquant la BPOD et la méthode d'*output projection* sur la structure. Pour calculer la matrice \mathbf{R} de l'Eq. (13), on suit la règle de quadrature de Gauss-Legendre avec 75 points d'intégration. Ces mêmes points sont utilisés pour calculer la matrice \mathbf{S} avec la méthode d'*output projection* où, selon les valeurs propres λ représentées sur la Figure 3, seuls les 70 premiers modes POD sont gardés, soit 23 fois moins de snapshots à calculer pour les outputs. La figure 4 représente les valeurs singulières déduites de l'Eq. (15) et indique que seulement 100 sont significatives. On construit donc un modèle réduit de dimensions 100×100 à partir de l'Eq. (16). Le champ de déplacements sur la surface Γ peut alors se déduire du modèle complet (FOM) à partir du modèle EF (6), où du modèle réduit (ROM) à partir de l'Eq. (17).

On définit un vecteur d'input $\mathbf{u} = [10 \ -2 \ 5]$ et on calcule la pression au point $\mathbf{r} = [0.2 \ 0.4 \ 2.4]$ à partir des modèles FOM et ROM ainsi que l'erreur relative entre les deux modèles. Ces deux données, représentées sur les Figures 5 et 6, montrent une erreur inférieure à 0.1% sur toute la bande de fréquences. Des différences de niveau (en dB) peuvent être observées quand l'erreur dépasse 1%.

Les taux de réduction sont significatifs étant donné que l'on passe de 24645 à 100 degrés de liberté (ddl) bien qu'en réalité, le système réduit par la BPOD (Eq. (9)) en possède 118176. Le calcul de la pression, effectué en séquentiel sur Matlab 2021b, CPU i7-8665U 1.90 GHz, RAM 32Gb, se fait 13000 plus rapidement avec le modèle réduit, comme en témoigne la Table 3. Le temps de calcul pour la construction du modèle réduit concerne le calcul des snapshots et de la SVD. Ces deux étapes prennent respectivement 37000 s et 34 s mais ne sont à réaliser qu'une seule fois.

	Temps CPU (s)
$\mathbf{H}(i\omega) = \mathbf{C}(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}(i\omega))^{-1} \mathbf{B}$	63022.00
$\hat{\mathbf{H}}(i\omega) = \hat{\mathbf{L}}(i\omega \hat{\mathbf{E}} - \hat{\mathbf{A}})^{-1} \hat{\mathbf{G}}$	4.89

Tableau 3 – Temps CPU (s) pour le calcul de la déformation de la structure à partir des modèles FOM (24645 ddl) et ROM (100 ddl).

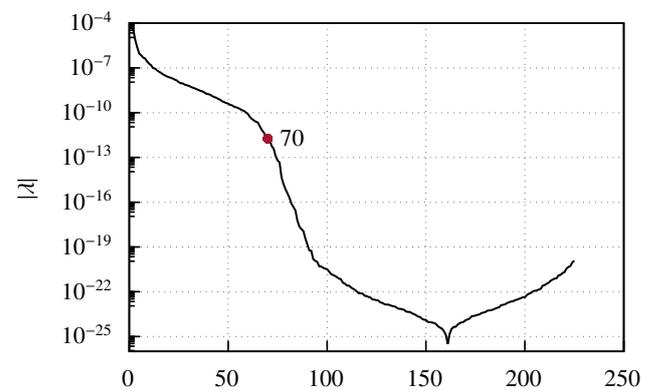


FIGURE 3 – Valeurs propres des modes POD pour la méthode d'*output projection*.

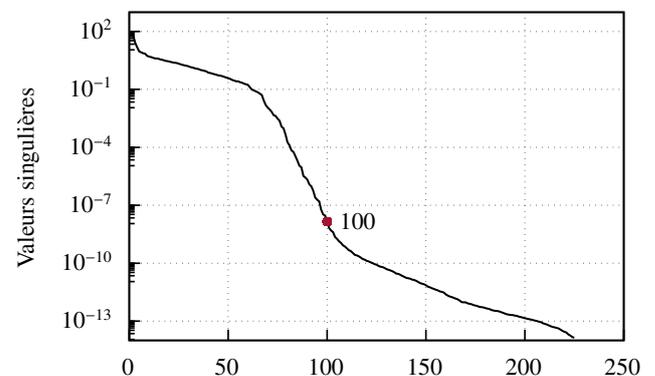


FIGURE 4 – Valeurs singulières.

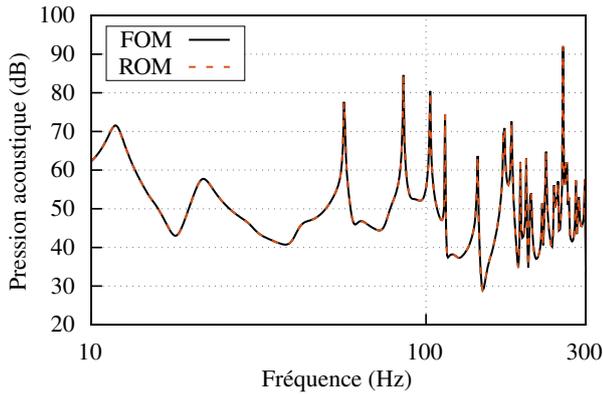


FIGURE 5 – Pression acoustique (dB).

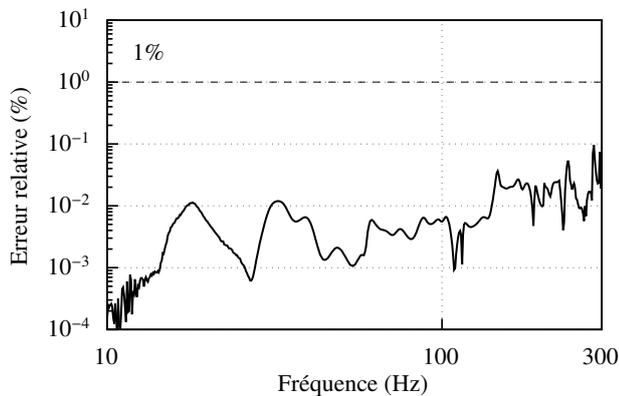


FIGURE 6 – Erreur relative sur la pression (%).

5 Conclusion

Ce papier présente une nouvelle façon de construire un modèle réduit d'une structure contenant des matériaux viscoélastiques. Dans un premier temps, la dépendance en fréquence des modules d'élasticité est traitée par la méthode GHM pour rendre les matrices du système constantes. Ensuite, après une étape de linéarisation, une variante de la BPOD est utilisée pour construire un modèle réduit dans le cas où la structure n'est soumise qu'à peu d'excitations et où un grand nombre de déplacements est requis. Après les manipulations (GHM et linéarisation) le système à réduire est de taille beaucoup plus importante que le modèle éléments finis initial. Cependant les coûts de calcul de la BPOD peuvent être minimisés.

L'étude numérique menée correspond au calcul de la pression acoustique en un point dans une cavité fermée générée par les vibrations d'une structure multicouche composée de matériaux viscoélastiques. Dans notre cas, il est possible de construire un modèle réduit du multicouche à seulement 100 ddl contrairement aux 24645 du modèle éléments finis initial. L'erreur relative entre les deux méthodes (calcul de la pression à partir du modèle FOM ou ROM) est largement inférieure à 1%. Cette précision peut être améliorée en prenant plus de points d'intégration et/ou plus de modes propres dans la méthode d'*output projection*,

ce qui augmenterait le temps de construction du modèle réduit ainsi que la mémoire requise. Côté temps de calcul, des réductions considérables sont également observées puisque la déformée s'obtient 13000 fois plus rapidement.

Remerciements

Ces travaux ont été réalisés dans le cadre de la chaire "surfaces intelligentes et transparentes pour l'automobile du futur", soutenue par l'UTC, la Fondation UTC pour l'innovation et SAINT-GOBAIN. Les auteurs remercient le Fonds Européen de Développement Régional (FEDER) 2014/2020 et la chaire "surfaces intelligentes et transparentes pour l'automobile du futur" pour le cofinancement de ce travail.

Références

- [1] L. Rouleau, J.-F. Deü et A. Legay. *A comparison of model reduction techniques based on modal projection for structures with frequency-dependent damping*, Mechanical Systems and Signal Processing, 110-125, 2017.
- [2] B. Moore. *Principal component analysis in linear systems : Controllability, observability, and model reduction*, IEEE journal, 17-32, 1981.
- [3] D. F. Golla et P. C. Hughes. *Dynamics of Viscoelastic Structures-A Time-Domain, Finite Element Formulation*, Journal of Applied Mechanics, 897-906, 1985.
- [4] D. MacTavish. *The mini-oscillator technique : a finite element method for the modelling of linear viscoelastic structures*, Journal of Applied Mechanics, 1988.
- [5] D. MacTavish et P. C. Hughes. *Modeling of linear viscoelastic space structures*, ASME Transactions Journal of Vibration Acoustics, 103-110, 1993.
- [6] K. Willcox et J. Peraire. *Balanced Model Reduction via the Proper Orthogonal Decomposition*, AIAA Journal, 2323-2330, 2002.
- [7] C. W. Rowley. *Model Reduction For Fluids, Using Balanced Proper Orthogonal Decomposition*, International Journal of Bifurcation and Chaos, 997-1013, 2005.
- [8] A. Berthet, E. Perrey-Debain, J.-D. Chazot et S. Germès (2021), A GHM reduced order model using an accelerated version of the BPOD method, Proc. ICSV 27 : International Congress on Sound and Vibration, 2021.
- [9] F. Tisseur et K. Meerbergen. *The Quadratic Eigenvalue Problem*, SIAM Review, 235-286, 2001.
- [10] Chazot, J., Nennig, B. et Chettah, A. *Harmonic response computation of viscoelastic multilayered structures using a ZPST shell element*, Computers & Structures, 2522-2530, 2011.
- [11] Langlois, C., Chazot, J., Cheng, L. et Perrey-Debain, E., Partition of Unity Finite Element Method for 2D Vibro-Acoustic Modeling, Journal Of Theoretical And Computational Acoustics, 2021.
- [12] Perrey-Debain, E., Maréchal R. et Ville, J. Side-branch resonators modelling with Green's function methods, Journal Of Sound And Vibration, 4458-4472, 2014.