HAL
open science

Une méthode de type “ scaled wave finite element ” pour le calcul du rayonnement et de la diffraction des ondes acoustiques

Denis Duhamel

To cite this version:

Denis Duhamel. Une méthode de type “ scaled wave finite element ” pour le calcul du rayonnement et de la diffraction des ondes acoustiques. 16ème Congrès Français d'Acoustique, CFA2022, Société Française d'Acoustique; Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, Apr 2022, Marseille, France. hal-03848199

HAL Id: hal-03848199

https://hal.science/hal-03848199

Submitted on 10 Nov 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

16ème Congrès Français d'Acoustique
11-15 Avril 2022, Marseille

Une méthode de type "scaled wave finite element" pour le calcul du rayonnement et de la diffraction des ondes acoustiques.

D. Duhamel [a],
[a] Laboratoire Navier - Ecole des Ponts - CNRS - UGE
6 et 8 Avenue Blaise Pascal, Cité Descartes, Champs sur Marne, 77455 Marne la vallée cedex 2

Le calcul du rayonnement acoustique à haute fréquence dans les domaines extérieurs par des méthodes d'éléments finis peut conduire à des calculs volumineux. Dans cet article, on montre que la solution dans le domaine extérieur peut être décomposée en un développement en série de fonctions avec une partie analytique constituée du produit d'ondes harmoniques et de polynômes dans une variable d'échelle et une partie numérique constituée de vecteurs d'approximation en éléments finis. La solution du problème peut être trouvée en résolvant un système linéaire creux qui est défini à partir des matrices de rigidité dynamique de plusieurs couches mises à l'échelle autour du corps rayonnant. Ces matrices de rigidité dynamiques sont des matrices éléments finis classiques obtenues à partir de n'importe quel logiciel d'éléments finis. Plusieurs exemples sont donnés pour estimer l'efficacité de la méthode proposée.

1 Introduction

De nombreuses approches ont été utilisées dans le passé pour calculer les solutions de problèmes d'ondes dans des milieux infinis. Les méthodes classiques incluent la méthode des éléments de frontière décrite dans de nombreux ouvrages classiques comme [1, 2] et la méthode multipôle rapide développée par de nombreux auteurs comme [3, 4]. On peut aussi trouver, par exemple, la méthode Dirichlet to Neumann (DtN) proposée par [5, 6] qui est également assez précise mais conduit aussi à des conditions aux limites non locales. Les méthodes locales, au contraire, sont plus efficaces en termes de calcul car la condition à un nœud frontière implique seulement un nombre limité de nœuds voisins. Diverses classes de conditions aux limites absorbantes locales ont par exemple été développées par [7, 8, 9, 10, 11, 12]. On peut également entourer le domaine de calcul par des couches absorbantes, comme proposé par [13, 14] dans la perfectly matched layer dans laquelle l'équation d'onde se poursuit analytiquement en coordonnées complexes. Dans toutes ces méthodes locales, une partie importante du domaine extérieur est maillée, et des conditions aux limites plus ou moins précises sont posées à la surface externe du maillage. Peu ou pas d'informations sont données sur la solution en dehors du domaine maillé.

Parmi toutes les méthodes, il faut surtout remarquer la scaled boundary finite-element method proposée par [15, 16, 17]. Elle est basée sur une transformation de coordonnées avec une coordonnée radiale interprétée comme un facteur d'échelle avec une référence à un centre à l'intérieur du domaine. Le problème est formulé comme une équation différentielle dans la coordonnée radiale et peut être résolu analytiquement le long de cette coordonnée. Cependant, la méthode a besoin de matrices spéciales définies sur la frontière du corps rayonnant qui ne sont pas les matrices usuelles obtenues par les logiciels d'éléments finis classiques.

D'autres méthodes intéressantes ont été développées pour l'analyse des guides d'ondes. Par exemple, la semi-analytical finite element (SAFE) proposée par [18, 19] sépare la solution en une fonction harmonique analytique e^{ikx} dans la direction du guide d'onde et une approximation par éléments finis dans la section. Cela ne peut être appliqué qu'à des guides d'ondes uniformes et nécessite des matrices spéciales définies sur la section transversale du guide d'ondes. L'approche a donc des points communs avec la scaled boundary finite-element method : une expression analytique de la solution dans la direction radiale/guide d'onde et des matrices spéciales pour la frontière/section transversale.

Pour les guides d'ondes non uniformes avec des structures vraiment périodiques, la méthode Wave Finite Element (WFE) peut être utilisée. Cela consiste à calculer les modes d'onde (constantes de propagation, formes d'onde) d'une structure périodique à partir du modèle par éléments finis (EF) d'une sous-structure et de ses matrices de masse, d'amortissement et de rigidité associées qui peuvent être obtenues à partir de n'importe quel logiciel FE. Ensuite, ces modes d'onde peuvent être utilisés pour calculer la réponse harmonique de structures périodiques de manière efficace. Les principales étapes de la méthode se trouvent dans [20, 21, 22, 23]. Par la suite, [24, 25] ont essayé d'appliquer la WFE au rayonnement d'une structure en divisant le domaine extérieur en couches et en appliquant des corrections sur la solution pour obtenir un flux d'énergie constant à travers les couches. Cependant, comme les matrices dans les différentes couches du domaine extérieur ne sont pas constantes, seules des solutions approchées ont été obtenues.

Dans ce document, nous proposons d'améliorer ces dernières tentatives de [24, 25] en couplant les équations d'équilibre entre les couches adjacentes comme dans l'approche WFE, qui ne nécessite que des matrices d'éléments finis classiques, à l'expansion de la solution suggérée par la scaled boundary finite-element method. La solution dans le domaine extérieur sera décomposée comme une somme de fonctions élémentaires constituées d'ondes harmoniques multipliées par des polynômes et des vecteurs d'approximation par éléments finis. La solution peut alors être trouvée en résolvant un système linéaire creux qui est défini à partir des matrices de rigidité dynamique de plusieurs couches mises à l'échelle autour du corps rayonnant. Ces matrices de rigidité dynamiques sont des matrices éléments finis classiques obtenues à partir de n'importe quel logiciel d'éléments finis, éliminant ainsi le besoin de construire des matrices spéciales. Le document est divisé en trois sections et est décrit comme suit. Dans la deuxième section, les principes de la méthode sont décrits en général. Dans la troisième section, des exemples sont détaillés pour illustrer l'approche proposée avant la conclusion.

2 Solution dans le domaine extérieur

2.1 Comportement d'une couche

On considère le cas général d'un corps convexe Ω entouré d'un domaine infini comme dans la figure 1. Pour simplifier, nous ne considérons ici que des problèmes bidimensionnels. Le rayonnement est décrit par l'équation de Helmholtz

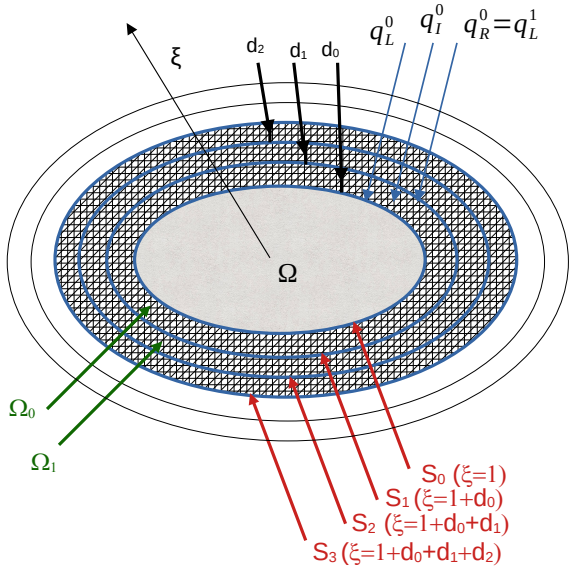


FIGURE 1 – Domaine extérieur divisé en différentes couches.

$$\Delta q + k^2 q = 0 \tag{1}$$

avec $k = \omega/c$ le nombre d'onde, ω la pulsation et c la vitesse du son. On considérera par exemple une condition aux limites de Neumann (vitesse imposée)

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial n} &= r_0 \;\; sur\; S_0 \\ \frac{\partial q}{\partial n} - ikq &= o(\frac{1}{\sqrt{r}}) \;\; pour\; r \to \infty \end{aligned} \tag{2}$$

avec S_0 la frontière du domaine et r_0 une fonction donnée. La dernière relation est la condition de rayonnement de Sommerfeld pour les problèmes bidimensionnels.

Une couche n, définie comme le domaine Ω_n entre les surfaces S_n et S_{n+1}, est décrite par un modèle éléments finis. La surface S_n est définie par une valeur constante du paramètre de mise à l'échelle $\xi = \xi_n$ avec $\xi_n = 1 + \sum_{i=0}^{i=n-1} \mathrm{d_i}$ (comme dans la méthode scaled boundary finite-element) où les $\mathrm{d_i}$ sont les variables donnant l'épaisseur en terme de ξ de chaque couche et $\xi = \xi_0$ avec $\xi_0 = 1$ définit la surface S_0 du corps rayonnant. Une couche peut être maillée avec un nombre arbitraire d'éléments en utilisant les pleines possibilités des logiciels usuels d'éléments finis. Le comportement dynamique discret d'une couche n est obtenu par

$$(\mathbf{K}^n - \omega^2 \mathbf{M}^n)\mathbf{q}^n = \mathbf{f}^n \tag{3}$$

où $\mathbf{K}^n$ et $\mathbf{M}^n$ sont les matrices de rigidité et de masse respectivement, $\mathbf{f}^n$ est le vecteur des efforts internes et $\mathbf{q}^n$ le vecteur des degrés de liberté. La matrice de rigidité dynamique de la couche $\mathbf{D}^n = \mathbf{K}^n - \omega^2\mathbf{M}^n$, est décomposée en degrés de liberté sur la frontière gauche (L) associés aux ddl dans S_n et aux ddl de la frontière droite (R) associés aux ddl dans S_{n+1}. Nous supposons ici pour simplifier qu'il n'y a pas de degrés de liberté internes aux couches. Le cas avec degré de liberté interne est traité dans [26]. Nous obtenons la relation suivante

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}_{LL}^n & \mathbf{D}_{LR}^n \\ \mathbf{D}_{RL}^n & \mathbf{D}_{RR}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_L^n \\ \mathbf{q}_R^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_L^n \\ \mathbf{f}_R^n \end{bmatrix} \tag{4}$$

2.2 Relations entre couches adjacentes

A l'interface entre les couches $n-1$ et n (sur la surface S_n), il y a continuité du déplacement et équilibre des forces, de sorte qu'on a

$$\mathbf{q}_L^n = \mathbf{q}_R^{n-1} \tag{5}$$

$$\mathbf{f}_L^n + \mathbf{f}_R^{n-1} = 0 \tag{6}$$

L'équilibre des forces conduit à la relation

$$\mathbf{D}_{RL}^{n-1}\mathbf{q}_L^{n-1} + \mathbf{D}_{RR}^{n-1}\mathbf{q}_R^{n-1} + \mathbf{D}_{LL}^n\mathbf{q}_L^n + \mathbf{D}_{LR}^n\mathbf{q}_R^n = 0 \tag{7}$$

ou, en utilisant (5) et en notant le vecteur de déplacement $\mathbf{q}^n$ sur la surface S_n, cela peut s'écrire

$$\mathbf{D}_{RL}^{n-1}\mathbf{q}^{n-1} + (\mathbf{D}_{RR}^{n-1} + \mathbf{D}_{LL}^n)\mathbf{q}^n + \mathbf{D}_{LR}^n\mathbf{q}^{n+1} = 0 \tag{8}$$

Donc la relation (8) donne

$$\mathbf{D}_T^n \mathbf{Q}_n = \mathbf{0} \tag{9}$$

avec

$$\mathbf{D}_T^n = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{RL}^{n-1} & \mathbf{D}_{RR}^{n-1} + \mathbf{D}_{LL}^n & \mathbf{D}_{LR}^n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{q}^{n-1} \\ \mathbf{q}^n \\ \mathbf{q}^{n+1} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Notons que $\mathbf{Q}_n$ est le vecteur constitué des ddl associés au domaine $\Omega_{n-1} \cup \Omega_n$ et, si on note M_n ce nombre de ddl, la taille de $\mathbf{Q}_n$ est de $M_n \times 1$ tandis que le nombre de lignes de $\mathbf{D}_T^n$ vaut le nombre de degrés de liberté sur la surface S_n noté m, et donc la taille de $\mathbf{D}_T^n$ est $m \times M_n$ avec $m < M_n$.

2.3 Développement en série de la solution

Comme nous traitons des problèmes à deux dimensions, nous nous attendons à un comportement à grande distance comme $\frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}$. Ainsi, le déplacement à un nœud de position $\mathbf{r}_j$ de paramètre d'échelle ξ_j sera supposé donné par le développement,

$$q(\mathbf{r}_j) = \sum_{p=0}^{p=P} \left(a_{jp}\xi_j^{-(2p+1)/2}\right) e^{ik|\mathbf{r}_j|} \tag{11}$$

en terme de paramètres a_{jp} à trouver. Notez que cette série inclut à la fois la distance r_j du nœud j au centre de l'objet et le paramètre ξ_j qui localise la surface à laquelle appartient

le nœud j. Pour un nœud j_s à la surface de l'objet, on a donc $\xi_{j_s} = 1$ et le développement se réduit à

$$q(\mathbf{r}_{j_s}) = \left(\sum_{p=0}^{p=P} a_{j_s p}\right) e^{ik|\mathbf{r}_{j_s}|} \tag{12}$$

La forme de la série (11) a été suggérée par le développement des fonctions de Hankel pour les grands arguments. Notons également que nous faisons l'hypothèse que les domaines sont maillés de manières identiques, voir figure 2. Ainsi les nœuds sur les différentes surfaces S_n sont situés sur la même ligne radiale et les nœuds sur une surface S_n peuvent être obtenus à partir des nœuds sur la surface S_{n-1} en mettant à l'échelle ξ. Donc la valeur de $q(\mathbf{r}_j)$ est exprimée en terme

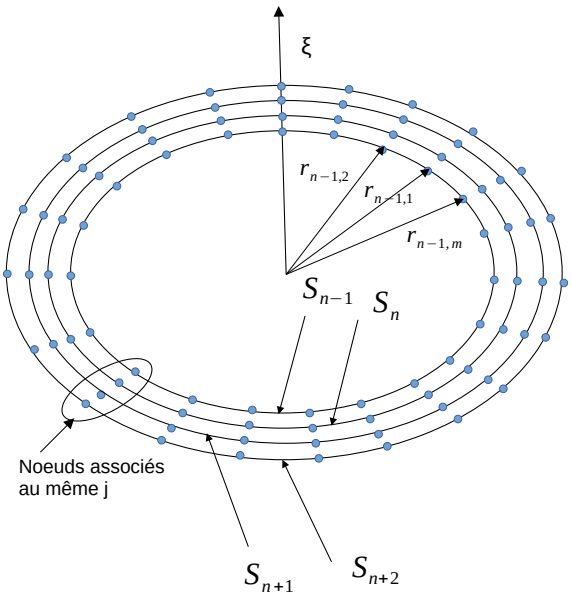


FIGURE 2 – Maillage des surfaces S_n.

de $p+1$ paramètres a_{jp} avec $0 \leq p \leq P$ associés dans la même direction sur des surfaces différentes et ainsi de suite pour une valeur fixe de j qui définit la direction radiale auquel appartient $\mathbf{r}_j$. Le vecteur de déplacement $\mathbf{Q}_n$ des ddl du domaine $\Omega_{n-1} \cup \Omega_n$ peut donc s'écrire comme

$$\mathbf{Q}_n = \mathbf{T}^n \mathbf{a} \tag{13}$$

où le vecteur des paramètres a_{jp} est

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_p \\ \vdots \\ \mathbf{a}_P \end{pmatrix}, \quad avec \ \mathbf{a}_p = \begin{pmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ a_{mp} \end{pmatrix} \tag{14}$$

et

$$\mathbf{T}^n = \left(\mathbf{t}_n, \Xi_n.\mathbf{t}_n, \ldots, \Xi_n^P.\mathbf{t}_n\right) \tag{15}$$

avec

$$\mathbf{t}_n = \left(\xi_{n,j}^{-1/2} e^{ik|\mathbf{r}_{n,j}|} d_{jj'}\right)_{j=1\ldots M, j'=1\ldots m} \tag{16}$$

$$\Xi_n = diag(\frac{1}{\xi_{n,j}})_{j=1\ldots M} \tag{17}$$

avec $diag$ signifiant une matrice diagonale et le domaine $\Omega_{n-1} \cup \Omega_n$ est supposé maillé avec M nœuds de positions $\mathbf{r}_{n,j}$ pour $j = 1...M$ avec les paramètres d'échelle associés $\xi_{n,j}$ et m est le nombre de nœuds sur une surface S_n. Le paramètre $d_{jj'}$ est égal à 1 si le nœud j est associé au nœud j' sur la surface S_n de la manière indiquée sur la figure 2. En d'autres termes, les nœuds sur la même ligne radiale sont associés au même j'. Donc la matrice $\mathbf{t}_n$ est creuse et n'a que un élément non nul sur chaque ligne.

En combinant avec la relation (9), l'équation de la couche peut finalement être écrite comme

$$\mathbf{S}^n \mathbf{a} = \mathbf{D}_T^n \mathbf{T}^n \mathbf{a} = \mathbf{0} \tag{18}$$

où la relation précédente définit la matrice $\mathbf{S}^n$. Le nombre d'équations est égal à m, le nombre de ddl sur la surface S_n. Notez que selon la forme de la matrice $\mathbf{T}^n$ vue dans les relations (13) et (15), la matrice $\mathbf{S}^n$ est donné par

$$\mathbf{S}^n = \left(\mathbf{D}_T^n \mathbf{t}_n, \mathbf{D}_T^n \Xi_n.\mathbf{t}_n, \ldots, \mathbf{D}_T^n \Xi_n^P.\mathbf{t}_n\right) \tag{19}$$

et est également une matrice creuse car $\mathbf{D}_T^n$, qui est creuse, ne multiplie que d'autres matrices creuses.

2.4 Solution globale

Maintenant, les relations (13) et (18) sont appliquées pour la surface S_0 et les couches $n_1, n_2, ..., n_P$, voir Figure 1. On considère d'abord un problème de Dirichlet avec le déplacement donné $\mathbf{q}_0$ sur la surface frontière S_0. L'utilisation de la relation (13) conduit à

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{T}_r^0 \mathbf{a} \tag{20}$$

avec $\mathbf{T}_r^0$ obtenu de la même manière que (13) mais en ne gardant que les lignes associées aux ddl de la surface S_0. C'est aussi la composante $\mathbf{q}_0$ du vecteur $\mathbf{Q}_1$ dans la relation (13). Donc, le nombre d'équations est égal au nombre de ddl sur la surface S_0, noté m_0.

Ensuite, on choisit P couches centrales $n_1, ..., n_P$, et autour de chaque couche on applique la relation (18) de sorte que pour les autres couches n_i, la relation est

$$\mathbf{S}^{n_i} \mathbf{a} = 0 \tag{21}$$

En assemblant les relations (20) et (21), finalement, le système global à résoudre est

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}_r^0 \\ \mathbf{S}^{n_1} \\ \vdots \\ \mathbf{S}^{n_P} \end{pmatrix} \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{22}$$

La solution de ce système donne les paramètres a_{jp} et la solution pour tout nœud peut être obtenue par le

développement (11). Pour obtenir un système carré un paramètre a_{jp} doit être associé à chaque ddl de S_{n_i} et à chaque ddl de S_0.

Dans le cas d'un problème de Neumann où la force externe $\mathbf{f}_0$ est donnée sur la surface S_0, la relation (20) est changée en

$$\mathbf{f}_0 = \mathbf{S}_r^0 \mathbf{a} \tag{23}$$

avec

$$\mathbf{S}_r^0 \mathbf{a} = \mathbf{D}_L^0 \mathbf{T}_0^1 \mathbf{a} \tag{24}$$

avec $\mathbf{D}_L^0$ la sous-matrice de $\mathbf{D}^0$ avec seulement les lignes associées aux ddl de S_0 (première ligne de la relation (4)) et $\mathbf{T}_0^1$ la sous-matrice de $\mathbf{T}^1$ avec uniquement les lignes associées aux ddl de Ω_0 (deux premières lignes de $\mathbf{Q}_1$ dans (13)). La relation finale est

$$\begin{pmatrix} \mathbf{S}_r^0 \\ \mathbf{S}^{n_1} \\ \vdots \\ \mathbf{S}^{n_P} \end{pmatrix} \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^0 \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \tag{25}$$

Le nombre d'équations vaut $(P+1)m$. Notons que le système linéaire à résoudre est creux.

3 Exemples numériques

3.1 Cas d'un disque

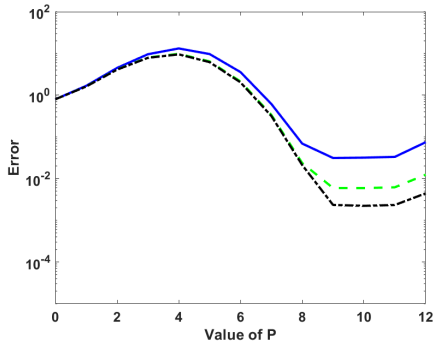
On considère maintenant le rayonnement par un cercle avec une condition aux limites de Dirichlet et une solution satisfaisant l'équation de Helmholtz (1) dans le domaine extérieur. Pour pouvoir comparer avec des solutions analytiques, la valeur limite est d'abord construite à partir du champ créé par une source à une position $\mathbf{r}_s = (x_s, y_s)$ à l'intérieur du cercle. La valeur limite est donc

$$q_0(\mathbf{r}_b) = H_0(k|\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_s|) \tag{26}$$

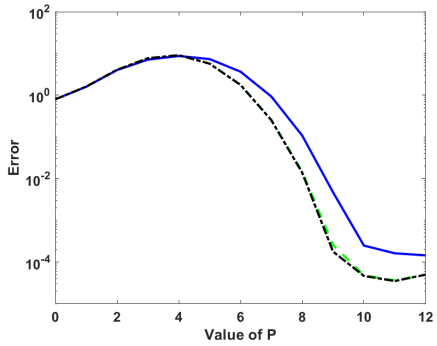
avec $\mathbf{r}_b$ la position d'un nœud sur la frontière. Nous étudions d'abord l'influence du paramètre P donnant le nombre de couches sur la solution. Dans la figure 3, nous traçons l'erreur relative L^2 sur la solution sur la ligne $1m \leq x \leq 12m$ pour le cas d'une solution obtenue avec $\mathbf{r}_s = (0.8m, 0m)$. Dans les deux cas, la frontière est le cercle avec $r_0 = 1m$, la fréquence est $f = 1000Hz$ et la vitesse du son est de 340 m/s. Chaque couche est d'abord maillée avec des éléments linéaires à quatre nœuds, d'autre part avec des éléments quadratiques et l'épaisseur est $e = 0.001m$. On peut voir que la valeur optimale de P est autour de 9 et que l'erreur est réduite, comme prévu, en augmentant le nombre d'éléments sur la frontière. Prendre des éléments du second ordre améliore nettement la solution pour des valeurs de P autour de 9.

On considère maintenant le cas d'une source située à $(0.8m, 0m)$ et $kr_0 = 10$. Nous traçons la solution entre le rayon $r_0 = 1m$ et $7m$ sur la figure 4. On peut observer un très bon accord entre les solutions numérique et analytique.

Considérons maintenant la diffraction d'une source ponctuelle par un cylindre rigide de même géométrie. La source est située à $(-2m, 0)$. $P = 9$ et 500 éléments sont utilisés jusqu'à $kr_0 = 10$. La solution est tracée sur un demi-cercle de rayon $2m$ entre les angles $-\pi$ et 0. La figure 5 présente la comparaison entre la solution numérique actuelle et la solution analytique. Un bon accord peut être observé.



(a) Degré 1



(b) Degré 2

FIGURE 3 – Erreur sur la solution pour différentes valeurs de P et du nombre d'éléments sur la frontière, — 100 éléments,- - 250 éléments,-.- 500 éléments.

3.2 Cas d'une cavité résonnante

Pour finir, considérons le cas d'une cavité résonnante triangulaire présentée à gauche de la figure 6. A droite de la figure, on a le maillage des différents domaines extérieurs utilisés pour satisfaire les équations (21). Une progression en puissance quatre a été jugée satisfaisante telle qu'en terme de ξ on applique la relation sur des surfaces telles que $\xi = 1 + d \times n^4$. Les sommets des triangles sont situés sur les cercles de rayon intérieur $0.06m$ et de rayon extérieur $0.1m$. Les matrices de rigidité et de masse ont été créées avec FEniCS puis importées dans Matlab. Tout autre logiciel d'éléments finis aurait pu être utilisé. La source sonore est située au point $(0, -0.2m)$. La figure 7 compare les résultats BEM et ceux de la méthode présentée pour cette géométrie non lisse. La comparaison est très bonne.

4 Conclusion

Une nouvelle méthode numérique a été présentée pour calculer le rayonnement et la diffusion des ondes dans les domaines extérieurs. La solution sur le domaine extérieur est décomposée en la somme de produits de fonctions polynomiales et exponentielles multipliées par des vecteurs FEM discrets. Il n'y a pas besoin d'une solution fondamentale et il n'y a pas non plus besoin de matrices spéciales. Les matrices impliquées dans ce problème sont obtenues à partir de matrices de masse et de rigidité classiques produites par n'importe quel logiciel d'éléments finis standard. Les exemples montrent de bons accords avec les résultats analytiques et BEM.

Références

[1] C. A. Brebbia, S. Walker, Boundary Element Techniques in Engineering, Newnes-Butterworths, London, England, 1980.

[2] M. Bonnet, Boundary Integral Equation Methods for Solids and Fluids, John Wiley and Sons, Chichester, England, 1995.

[3] V. Rokhlin, Rapid solution of integral equations of classical potential theory, Journal of Computational Physics 60 (2) (1985) 187–207.

[4] E. Darve, The fast multipole method : Numerical implementation, Journal of Computational Physics 160 (1) (2000) 195–240.

[5] D. Givoli, J. B. Keller, A finite element method for large domains, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 76 (1) (1989) 41–66.

[6] J. B. Keller, D. Givoli, Exact non-reflecting boundary conditions, Journal of computational physics 82 (1) (1989) 172–192.

[7] P. Bettess, Infinite elements, International Journal for Numerical Methods in Engineering 11 (1) (1977) 53–64.

[8] P. Bettess, Infinite Elements, Penshaw Press, 1992.

[9] K. Gerdes, A review of infinite element methods for exterior helmholtz problems, Journal of Computational Acoustics 8 (01) (2000) 43–62.

[10] B. Engquist, A. Majda, Absorbing boundary conditions for numerical simulation of waves, Mathematics of Computation 31 (139) (1977) 629–651.

[11] R. Clayton, B. Engquist, Absorbing boundary conditions for acoustic and elastic wave equations, Bulletin of the Seismological Society of America 67 (6) (1977) 1529–1540.

[12] A. Bayliss, E. Turkel, Radiation boundary conditions for wave-like equations, Communications on Pure and Applied Mathematics 33 (6) (1980) 707–725.

[13] J. P. Berenger, A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves, Journal of computational physics 114 (2) (1994) 185–200.

[14] J. P. Berenger, Three-dimensional perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves, Journal of computational physics 127 (2) (1996) 363–379.

[15] C. Song, J. P. Wolf, Consistent infinitesimal finite-element cell method : three-dimensional vector wave equation, International Journal for Numerical Methods in Engineering 39 (13) (1996) 2189–2208.

[16] C. Song, J. P. Wolf, The scaled boundary finite-element method—alias consistent infinitesimal finite-element cell method—for elastodynamics, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 147 (3) (1997) 329–355.

[17] C. Song, J. P. Wolf, The scaled boundary finite-element method : analytical solution in frequency domain, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 164 (1) (1998) 249–264.

[18] B. Aalami, Waves in Prismatic Guides of Arbitrary Cross Section, Journal of Applied Mechanics 40 (4) (1973) 1067–1072.

[19] L. Gavrić, Computation of propagative waves in free rail using a finite element technique, Journal of Sound and Vibration 185 (3) (1995) 531–543.

[20] B. Mace, D. Duhamel, M. Brennan, L. Hinke, Finite element prediction of wave motion in structural waveguides, Journal of the Acoustical Society of America 117 (2005) 2835–2843.

[21] D. Duhamel, B. R. Mace, M. J. Brennan, Finite element analysis of the vibrations of waveguides and periodic structures, Journal of Sound and Vibration 294 (1-2) (2006) 205–220.

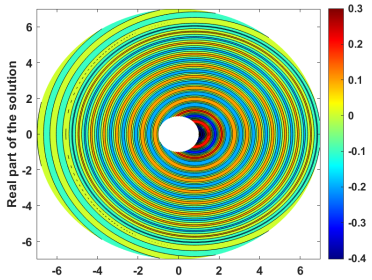
[22] J.-M. Mencik, D. Duhamel, A wave-based model reduction technique for the description of the dynamic behavior of periodic structures involving arbitrary-shaped substructures and large-sized finite element models, Finite Elements in Analysis and Design 101 (2015) 1–14.

[23] J.-M. Mencik, M. N. Ichchou, Multi-mode propagation and diffusion in structures through finite elements, European Journal of Mechanics - A/Solids 24 (5) (2005) 877–898.

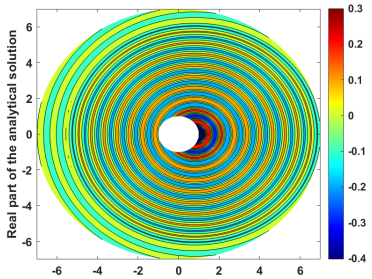
[24] A. Hvatov, S. Sorokin, On application of the Floquet theory for radially periodic membranes and plates, Journal of Sound and Vibration 414 (2018) 15–30.

[25] E. Manconi, S. Sorokin, R. Garziera, Wave propagation in polar periodic structures using Floquet theory and finite element analysis, in : 7th International Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering, Crete, Greece, 2019, pp. 3448–3456.

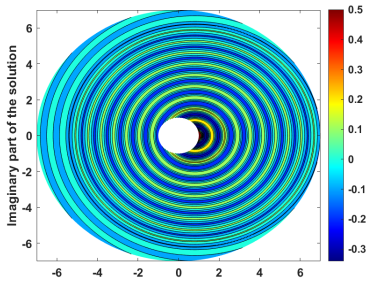
[26] D. Duhamel, A scaled wave finite element method for computing scalar wave radiation and scattering in exterior domains, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 392 (2022) 114676.



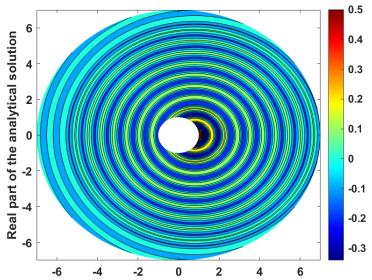
(a) Solution numérique, partie réelle.



(b) Solution analytique, partie réelle.

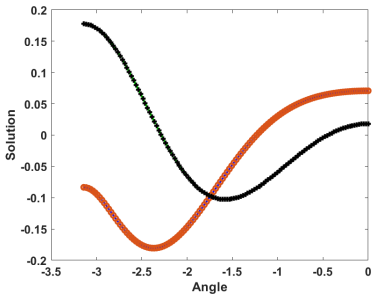


(c) Solution numérique, partie imaginaire.

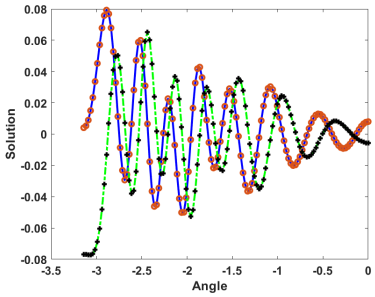


(d) Solution analytique, partie imaginaire.

FIGURE 4 – Solutions numérique et analytique sur un domaine annulaire pour $kr_0 = 10$.



(a) $kr_0 = 1$



(b) $kr_0 = 10$

FIGURE 5 – Comparaison des solutions numériques et analytiques sur un demi-cercle pour différentes fréquences, — partie réelle analytique , o partie réelle numérique, -.- partie imaginaire analytique , + partie imaginaire numérique.

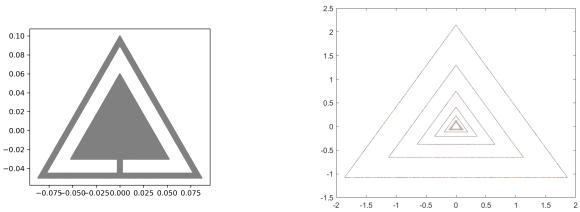


FIGURE 6 – Maillage de la cavité résonnante triangulaire et son domaine extérieur.

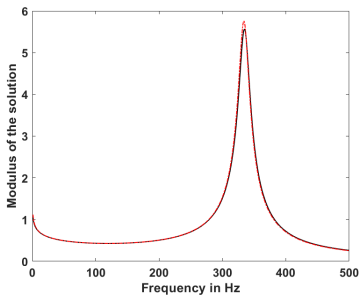


FIGURE 7 – Comparaison entre BEM (-.-) et la présente méthode (—) pour le module de la solution du résonateur triangulaire.