



HAL
open science

Vibrations par sympathie dans le clavicorde

Jean-Théo Jiolat, Jean-Loïc Le Carrou, Christophe d'Alessandro

► **To cite this version:**

Jean-Théo Jiolat, Jean-Loïc Le Carrou, Christophe d'Alessandro. Vibrations par sympathie dans le clavicorde. 16ème Congrès Français d'Acoustique, CFA2022, Société Française d'Acoustique; Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, Apr 2022, Marseille, France. hal-03847829

HAL Id: hal-03847829

<https://hal.science/hal-03847829>

Submitted on 10 Nov 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



16^{ème} Congrès Français d'Acoustique
11-15 Avril 2022, Marseille

Vibrations par sympathie dans le clavicorde

J-T. Jiolat ^a, J-L. Le Carrou ^a, C. d'Alessandro ^a

^a Sorbonne Université, CNRS, Institut d'Alembert UMR 7109, LAM, Paris France



Le clavicorde est un instrument à clavier de faible niveau sonore. Lorsqu'une des touches du clavier est enfoncée, une tige de métal (appelée tangente) percute une paire de cordes et reste en contact avec elle, la tangente jouant le rôle à la fois d'excitateur et de sillet. Le point d'excitation de la corde devient une condition à la limite de cette corde, d'où le faible niveau sonore. Au clavicorde, une même corde comprend plusieurs parties : entre la pointe d'accroche et la tangente (partie étouffée); entre la tangente et la pointe de chevalet (partie jouée); entre la pointe de chevalet et la cheville d'accord (partie sympathique). Par couplage avec le chevalet, la partie jouée de la corde excitée transmet de l'énergie vibratoire à la partie sympathique de toutes les autres cordes. La mise en vibration indirecte de ces parties de corde est dite sympathique. L'effet de réverbération renvoie au halo sonore créé par ces vibrations par sympathie, élevant le niveau sonore de l'instrument. D'autre part, la corde excitée et de la corde sympathique peuvent être accordées à la même fréquence. Par cette coïncidence fréquentielle, la corde sympathique entre en résonance. La force du couplage entre les deux cordes dépend de la mobilité du chevalet, modifiant la vibration de ces cordes en résonance. L'objectif de cette étude consiste à étudier l'influence de la mobilité du chevalet sur la mise en vibration des cordes sympathiques par l'usage d'un modèle physique du clavicorde. Une étude paramétrique des propriétés modales du chevalet est faite. Une variation de la déviation des fréquences et des amortissements des cordes en résonance en fonction de ces paramètres modaux est mise en évidence. Ainsi, une discussion sur l'influence des paramètres de factures du chevalet sur la vibration par sympathie des cordes est proposée.

1 Introduction

Dans le cas du clavicorde, le chevalet délimite deux parties d'une même corde. La partie jouée est mise en vibration directement par le système d'excitation de l'instrument. La seconde partie, appelée sympathique, est mise en vibration indirectement par son couplage avec le chevalet **1**. Le transfert d'énergie vibratoire de la corde excitée vers la corde sympathique est effectuée grâce à ce couplage. Dès lors que la corde vibre indirectement par ce transfert d'énergie vibratoire, cette mise en vibration est considérée comme étant sympathique. La partie jouée des cordes vibre très peu par sympathie à cause de l'amortissement du tissu enroulé autour de cette partie. En revanche, la vibration par sympathie de la partie sympathique des cordes est significative compte tenu de leur contribution à l'enrichissement du son du clavicorde. L'effet de cette vibration a été signalé par les fabricants de clavicorde comme le témoignent certains traités historiques. En 1511, Sebastian Virdung fait référence à cet effet en parlant d'une « résonance » provenant des cordes sympathiques. En 1768, l'expression « cum sympathia » est utilisée par Jakob Adlung pour faire référence à l'effet des cordes sympathiques [1]. L'effet dont il fait référence par ces luthiers est celui de l'effet de réverbération. Cela correspond à la contribution globale de toutes les cordes de la partie sympathique mises en vibration indirectement par la corde excitée, créant un halo dans le son rayonné par l'instrument [2]. Cet effet de réverbération permet de renforcer le son au niveau des hautes fréquences. Étant donné le faible niveau sonore produit par le clavicorde (appelé « épinette sourde » au XVII^e siècle par Marin Mersenne), le renforcement du son créé par l'effet de réverbération est un effet désiré par les luthiers et les musiciens. La figure 2 donne les fréquences fondamentales pour la partie jouée et la partie sympathique des cordes d'un clavicorde (celui décrit dans [2]). La partie jouée s'étend d'environ 65 Hz à environ 1200 Hz pour le fondamental. La partie sympathique entre environ 450 Hz et 1000 Hz pour le fondamental, avec une densité de 102 cordes réparties

sur cet intervalle. Ainsi, en première approximation, toute note jouée va exciter 102 cordes sympathiques libres dont la réponse fréquentielle couvre l'intervalle 450-1000 Hz. Cela donne un effet de réverbération centré sur cet intervalle.

D'autre part, une coïncidence entre la fréquence de la corde excitée et une des cordes sympathiques est aussi possible. On observe cette situation pour les notes $Do\#_4$ et $Ré_4$ (notations américaines sur la figure $C\#_2$ et D_2), sur la figure 2, dont la fréquence fondamentale de la partie jouée coïncide assez exactement avec celles de la partie sympathique de plusieurs autres cordes. Dans ce cas, le partiel de la corde sympathique gagne en amplitude et l'amplitude vibratoire de cette dernière devient plus grande. L'effet de cette vibration se manifeste par l'émergence du son, un peu comme un sifflement, à cette fréquence de coïncidence et par une déviation en fréquence et en amortissement de la corde sympathique par rapport au cas non couplé. Gough associe ce phénomène physique à la notion de résonance de la corde [3].

Ainsi sur la figure 2, le nuage de points jaunes et rouges correspond aux cordes qui vont contribuer à la réverbération, alors que les zones communes entre ce nuage et la courbe bleue indiquent les possibles cas de résonance.

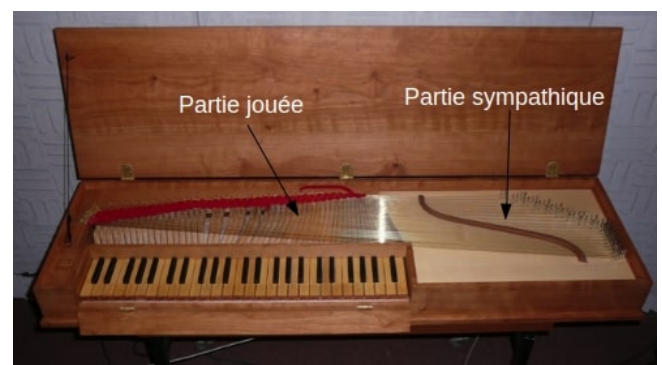


FIGURE 1 – Photo du clavicorde d'étude, en mettant la partie jouée et la partie sympathiques des cordes.

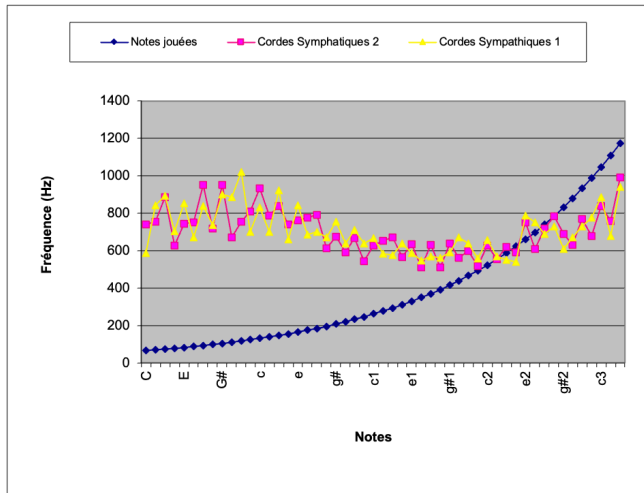


FIGURE 2 – Fréquences fondamentales et fréquences des deux premiers partiels pour la partie jouée et la partie sympathiques des cordes.

La vibration de la corde sympathique dépend de la mobilité du chevalet. Si l’amplitude de vibration du point de couplage entre la corde et le chevalet est élevée à la fréquence de la corde sympathique, alors l’amplitude de vibration de cette corde sera favorisée. Au contraire, proche d’un nœud de vibration, cette vibration devient plus faible. Selon la proximité entre les modes de chevalet et les modes de la corde sympathique, la base modale du système vibratoire peut favoriser la vibration sympathique de cette corde. Une étude du couplage corde-chevalet pour la harpe de concert a été effectuée par Le Carrou [4]. Selon les propriétés modales de la corde et du chevalet, le couplage entre ces sous-structures vibratoires est plus ou moins fort. Cette force du couplage peut être estimée par l’indicateur *veering* introduit par Woodhouse [5]. Le terme *veering* fait référence au phénomène de décalage de la fréquence et de l’amortissement des modes couplés par coïncidence fréquentielle.

L’objectif est d’effectuer une étude de la résonance des cordes sympathiques du clavicorde. Pour cela, des mesures de vibrations de toutes les cordes sympathiques du clavicorde d’étude en réponse à l’excitation d’une même corde jouée (copie d’un clavicorde historique construit en 1784 par Hubert, voir figure 1) sont effectuées (section 2). Ainsi, la distinction entre l’effet de réverbération et la résonance pourra être illustrée par ces mesures. Puis, une modélisation de deux cordes couplée à un même point de couplage au chevalet est faite par l’utilisation de deux approches : le modèle de Weinreich et celui fondé sur le formalisme Udwardia-Kalaba (Section 3). Ainsi, les résultats de ces modèles sont comparés en étudiant la variation des paramètres de fréquence et d’amortissement des modes couplés des deux cordes à la résonance (Section 4). Puis, une réflexion sur l’influence de la mobilité sur la déviation de ces paramètres est discutée (Section 5).

2 Mesures expérimentales de la réponse sympathiques des cordes

L’effet de réverbération et la résonance comme phénomène de vibration sympathique peut être mis en évidence par la mesure de la réponse de chaque corde sympathique à une même excitation de corde. Le clavicorde d’étude (celui de la Figure 1) est placé dans une salle acoustiquement isolée. Un doigt robotisé est utilisé afin de reproduire la même trajectoire programmée pour la mise en vibration de la corde excitée. La corde Fa₃ est excitée tandis que la réponse vibratoire à 2 cm du chevalet de chacune des 74 cordes sympathiques est effectuée par vibromètre laser (Polytech PDV 100). L’expérience est refaite autant de fois que nécessaire. Les mesures sont échantillonnées à une fréquence de 51,2 kHz.

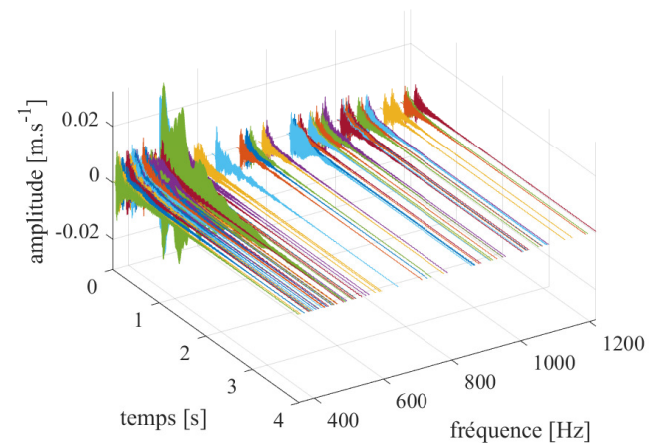


FIGURE 3 – Signaux de vitesse de chaque corde sympathique en réponse à l’excitation de la corde Fa₃, chacun mesuré à 2 cm du chevalet.

La figure 3 montre les réponses vibratoires en vitesse de chaque corde sympathique pour la même excitation de la corde jouée Fa₃. Dans cette figure, l’ensemble des formes d’onde des réponses vibratoires des cordes est regroupé en fonction de leur fréquence fondamentale. Il apparaît, tout d’abord, que l’ensemble des cordes sympathiques rentrent en vibration après excitation de la corde jouée. Le niveau vibratoire des cordes sympathiques est relativement homogène, autour de 0.01 m.s⁻¹. Cependant, la partie sympathique de la corde Do₅ accordée à 491 Hz possède un niveau vibratoire 3 fois supérieur aux autres. L’effet de réverbération s’observe dans la figure 3 par l’ensemble des réponses vibratoires de toutes les cordes sympathiques. En considérant leur fréquence fondamentale ainsi que leurs partiels, l’ensemble de ces réponses créent le halo sonore du son du clavicorde et qui est associé à l’effet de réverbération. En même temps, la partie sympathique de la corde Do₅ reçoit une amplitude de vibration plus élevée que les autres cordes sympathiques. Or, le second partiel de cette corde a une fréquence de 978.4 Hz et celle du troisième partiel

de la corde excitée Fa_3 est de 980.5 Hz. En constatant la proximité entre ces deux valeurs, ces partiels de ces deux cordes sont donc en coïncidence fréquentielle. La partie sympathique de la corde Do_5 résonne par la coïncidence en fréquence entre son troisième partial et le second partial de la corde excitée. Par conséquent, la figure 3 expose les deux phénomènes sympathiques étudiés, à savoir l'effet de réverbération et la résonance. Outre l'amplitude de vibration de la corde sympathique, il y a aussi une variation des propriétés modales des deux cordes couplées autour de la résonance. Ceci est un phénomène qui peut être étudié par un modèle physique simulé numériquement.

3 Modélisation de deux cordes identiques couplées à un chevalet

3.1 Formulation Udwadia-Kalaba

Dans cette section, la formulation modale Udwadia-Kalaba (U-K) est présentée en vue de la modélisation du couplage corde-chevalet. On considère un système mécanique avec une matrice de masse \mathbf{M} soumis à un vecteur de force $\mathbf{F}_c(t)$ comprenant toutes les forces internes et externes indépendantes des contraintes. Ce système est aussi soumis aux forces de contraintes $\mathbf{F}_c(t)$. En posant $\mathbf{y}_u(t)$ et $\mathbf{y}(t)$ renvoyant respectivement la solution dynamique du système non contraint et du système contraint, les équations du mouvement du système contraint sont données par la formulation Udwadia-Kalaba [6] :

$$\ddot{\mathbf{y}} = \ddot{\mathbf{y}}_u + \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{B}^+ (\mathbf{b} - \mathbf{A} \ddot{\mathbf{y}}_u), \quad \ddot{\mathbf{y}}_u = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{F}_c(t) \quad (1)$$

où \mathbf{A} est la matrice des contraintes et \mathbf{b} le vecteur des contraintes obtenus par les contraintes holonomiques et non-holonomiques, respectivement ϕ_p et ψ_p , définit ainsi :

$$\phi_p(\mathbf{y}, t) = 0, \quad p = 1, 2, \dots, P_h \quad (2)$$

$$\psi_p(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) = 0, \quad p = P_h + 1, P_h + 2, \dots, P_h + P_{nh} \quad (3)$$

Où P_h et P_{nh} sont respectivement le nombre de contraintes holonomiques et non-holonomiques. Par la dérivation temporelle des équations 2 et 4, cela conduit à l'équation matricielle des contraintes en terme d'accélération :

$$\mathbf{A}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) \ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{b}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, t) \quad (4)$$

La matrice Moore-Penrose inverse généralisé \mathbf{B}^+ de $\mathbf{B} = \mathbf{A} \mathbf{M}^{1/2}$ peut être traité numériquement de façon robuste, même pour une matrice de contrainte singulière. Pour une excitation extérieure particulière $\mathbf{F}_c(t)$, ces équations sont résolues en utilisant un schéma en différences finies adéquat. Par la suite, une version modale de la formulation U-K

adaptée aux systèmes continue souples a été dérivée, une approche efficace pour la modélisation des instruments de musique. En considérant un ensemble de S sous-systèmes vibratoires définis en termes de leur base modale non contraint et couplés par P contraintes cinématiques, on a [7, 8] :

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{W} \tilde{\mathbf{M}}^{-1} (-\tilde{\mathbf{C}} \dot{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{q} + \mathbf{F}_{\text{ext}}) \quad (5)$$

où \mathbf{q} représente le vecteur de déplacement modal, $\tilde{\mathbf{M}}$, $\tilde{\mathbf{K}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$ sont respectivement la matrice modale de masse, la matrice modale de raideur, et la matrice d'amortissement, ainsi que $\mathbf{W} = \mathbf{1} - \tilde{\mathbf{M}}^{-1/2} \mathbf{B}^+ \mathbf{A}$ étant une matrice de transformation globale pratique (calculé avant la boucle de calcul temporel), avec \mathbf{A} est la matrice de contrainte modale, et \mathbf{F}_{ext} sont les forces modales extérieures appliquées au système. Ensuite, un schéma en différences finies dans le domaine temporel est utilisée pour résoudre numériquement l'équation 5 et simuler le modèle physique.

3.2 Formalisme de Weinreich

On considère deux cordes modélisées par deux oscillateurs harmoniques conservatives couplées au chevalet au même point. Ce point de couplage est modélisé par une admittance constante. Une matrice dynamique Ω pour ce modèle simplifié de deux cordes s'énonce ainsi [9] :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 2\epsilon + \zeta & \zeta \\ \zeta & \zeta \end{pmatrix} \quad (6)$$

cette matrice étant utilisée pour coupler les équations du mouvement des deux cordes. Au sein de cette matrice dynamique, le désaccord ϵ et un terme ζ incluant l'admittance Y du chevalet, la pulsation modale de corde ω_0 et l'impédance caractéristique Z_0 de la corde sont introduits :

$$\zeta = j\omega_0 Z_0 \frac{Y}{\pi}, \quad \epsilon = \frac{f - f_0}{2} \quad (7)$$

où f est la fréquence de désaccord de la première corde et f_0 est la fréquence de la seconde corde. En remarquant que ζ est complexe, donc l'écriture $\zeta = \xi + j\eta$ est possible. La partie réelle ξ peut être positive ou négative, où une valeur positive conduit à un support massique et une valeur négative conduit à un support de raideur. La partie imaginaire de η est une mesure de la dissipation par le support et sa valeur doit être positive. En recherchant les valeurs propres de la matrice dynamique, les deux valeurs propres correspondantes β s'expriment ainsi :

$$\beta_{\pm} = \epsilon + j\eta \pm \sqrt{\epsilon^2 + \xi^2 - \eta^2 + 2j\xi\eta} \quad (8)$$

où β est complexe. Sa partie réelle donne le décalage de fréquence des modes couplés en fonction du désaccord ϵ et sa partie imaginaire donne le décalage d'amortissement de ces mêmes modes en fonction de ϵ .

3.3 Paramètres des cordes et du chevalet

On considère deux cordes identiques avec une fréquence fondamentale accordée autour de 144,37 Hz, de longueur de $L = 87.7$ cm, de diamètre $d = 0.35$ mm, de masse volumique $\rho = 7000$ kg.m⁻³. Ces deux cordes sont considérées comme souples, avec une modification du nombre d'onde par l'effet de la raideur (module de Young : $E = 62 \times 10^9$ Pa) . Les deux cordes sont libres au point de couplage avec le chevalet et fixes à l'autre extrémité. Elles sont couplées au même point de couplage avec le chevalet. Le modèle analytique de corde souple permet de déduire ses propriétés modales. L'amortissement des cordes est ici négligé. Celles du point de couplage au chevalet sont déterminées par de l'analyse modale expérimentale. Pour cela, des mesures de réponse impulsionnelle sur le clavicorde d'étude, co-localisées au point de couplage avec la corde Sol#₃ sont effectuées en utilisant un marteau d'impact (PCB 086E80) et un accéléromètre (PCB M352C65). Le choix de ce point de couplage est effectué ici par défaut. Les fréquences et amortissements de la fonction de réponse en fréquence (FRF) mesurée sont déterminées par la méthode d'estimation LSRF (*Least Square Rational Function*), implémentée dans la toolbox Matlab (*Signal Processing Toolbox*) [10]. Ceci nous permet d'en déduire les déformées modales au point de couplage en normalisant toutes les masses modales à la valeur de 1 kg. 47 modes de chevalet ont été identifiés entre 100 et 600 Hz. Ainsi, l'ensemble des paramètres modaux nécessaire pour la simulation numérique sont obtenus. Les deux modèles de couplage, celui élaborés par Weinreich et celui basé sur le formalisme Udwardia-Kalaba, sont considérés pour faire l'étude de la résonance de la corde sympathique.

4 Simulation numérique de cordes couplées

La figure 4 montre les fréquences et amortissement des deux cordes couplées en fonction du désaccord entre elles donnés par la simulation des deux modèles physiques. La déviation (dit *veering*) en fréquence et en amortissement des deux cordes couplées donnée par le modèle de Weinreich est reproduite par le modèle U-K de façon satisfaisante. On remarque que la déviation en fréquence et en amortissement diminue en fonction de la masse modale. La déviation en fréquence à l'unisson passe de 0.154 à 0.0038 Hz, celle de la déviation en amortissement à l'unisson passe de 0.021 à 0.005 %.

La vibration des deux cordes couplées à la même fréquence crée une force au chevalet, de sorte que son déplacement entraîne un allongement de la corde sympathique. Cet allongement est la cause du décalage de fréquence du partiel couplé de cette corde. De plus, de l'énergie est transférée de la corde à la table d'harmonie par ce déplacement du chevalet, ce qui cause le décalage de l'amortissement du partiel de corde couplée [9, 11]. Ainsi, la déviation de la fréquence et de l'amortissement

de la corde vient respectivement de la modification de sa longueur et de la perte d'énergie entraînée par le mouvement au point de couplage au chevalet lors de la résonance. Plus la masse modale augmente, plus la mobilité du chevalet diminue. Donc cette augmentation de la masse modale entraîne une diminution de l'amplitude du mouvement du point de couplage au chevalet à la résonance. Par voie de conséquence, la modification de la fréquence et de l'amortissement du mode couplé de la corde sympathique est plus faible autour de la coïncidence fréquentielle. Ainsi, les valeurs de fréquence et d'amortissement de la corde en résonance simulées sont donc cohérentes.

5 Conclusion

Le clavicorde est un instrument dont la partie sympathique des cordes joue un rôle vibro-acoustique non négligeable. Deux phénomènes liés à la sympathie ont été mis en lumière, à savoir l'effet de réverbération et la résonance. Le premier phénomène est créé par la transmission d'énergie vibratoire de la corde excitée à toutes les cordes sympathiques de l'instrument par couplage mécanique. L'effet de cette mise en vibration de toutes les cordes sympathiques par couplage entraîne l'apparition d'un halo sonore dans le son rayonné. Pour visualiser la manifestation de ce phénomène de sympathie, une approche expérimentale sur un clavicorde d'étude a été prise en mesurant les réponses vibratoires de toutes les cordes sympathiques à une même excitation de la corde Fa₃. Les mesures montrent la vibration de toutes les cordes sympathiques en réponse à cette excitation, avec une amplitude vibratoire initiale équivalente pour toutes les cordes exceptées quelques cordes particulières. Notamment, la partie sympathique de la corde Do₅ présente une réponse vibratoire avec une amplitude initiale plus élevée que les autres cordes. Cette amplitude de vibration s'explique par la coïncidence fréquentielle entre un des partiels de cette corde avec un partiel de la corde d'excitation. Cela met en exergue le phénomène de résonance. Ce phénomène est étudié à l'aide d'une modélisation de deux cordes identiques conservatives couplées à un même point de couplage au chevalet. Deux formalismes de couplage sont utilisés pour cette modélisation : le modèle de Weinreich et le formalisme Udwardia-Kalaba. Les paramètres modaux du point de couplage au chevalet ont été extraits expérimentalement afin de pouvoir simuler numériquement ces deux modèles de couplage. Les résultats donnés par la simulation de ces modèles sont confrontés en examinant la variation de la fréquence et de l'amortissement des modes couplés en fonction du désaccord entre les deux cordes. La comparaison des résultats est satisfaisante. Ainsi, la déviation (*veering*) des fréquences et amortissements de la corde en résonance en fonction des valeurs de mobilité du chevalet a pu être mise en évidence. Cette déviation est d'autant plus faible que la masse du chevalet est plus grande, c'est-à-dire lorsque la mobilité du chevalet est plus faible.

Pour poursuivre cette étude, il faudrait conduire des

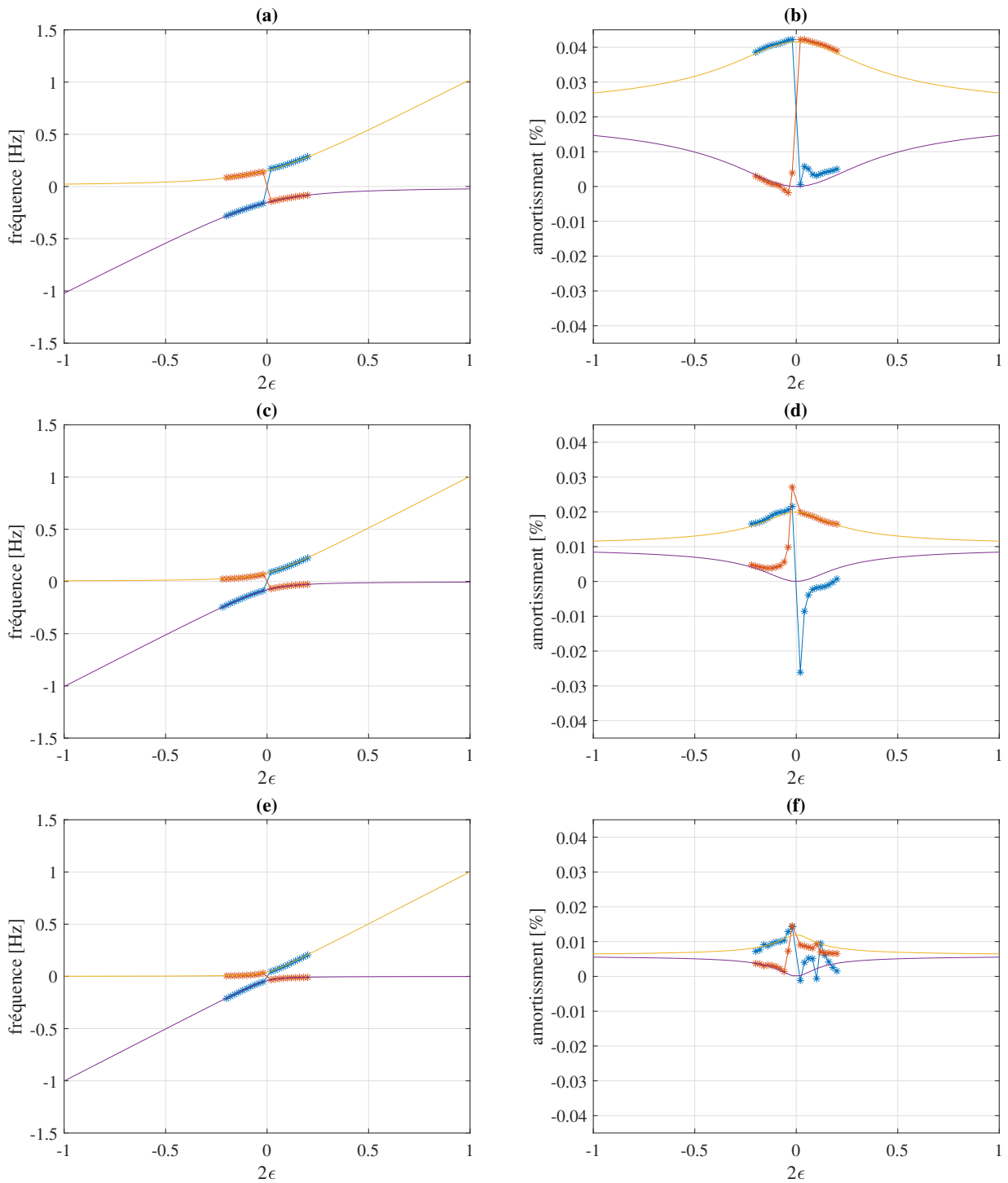


FIGURE 4 – Comparaison entre la déviation de la fréquence fondamentale et de l’amortissement des cordes couplées données par la simulation du modèle U-K (étoile) et celle donnée par le modèle de Weinreich (trait continu) dans le cas où la masse modale est divisée par 2, avec $\xi = 0.154$ et $\eta = 0.021$ (a) (b), avec la masse modale inchangée, avec $\xi = 0.078$ et $\eta = 0.010$ (c) (d), avec la masse modale multipliée par 2, avec $\xi = 0.038$ et $\eta = 0.005$ (e) (f).

mesures expérimentales de ce phénomène de déviation de fréquence et d’amortissement à la résonance de la corde sympathique. Il s’agirait de considérer deux cordes sympathiques différentes en étudiant leur réponse à la résonance, à une même excitation répétable d’une même

corde jouée de l’instrument. Ces deux cordes devront être couplées à des intermobilités du chevalet suffisamment différentes entre elles pour observer une différence de réponse vibratoire entre ces cordes. Par la suite, une modélisation de cette configuration expérimentale peut

être faite afin de la simuler numériquement, en réutilisant le formalisme de couplage Udadia-Kalaba. Ainsi, une comparaison entre la simulation et la mesure des paramètres de fréquence et d'amortissement des cordes couplés autour de la résonance serait possible.

Références

- [1] Bernard Brauchli. *The clavichord*. Cambridge University Press, 1998.
- [2] Christophe d'Alessandro and Brian F.G. Katz. Tonal quality of the clavichord : The effect of sympathetic strings. In *Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics ISMA '04*, pages 21–24, 2004.
- [3] Colin E. Gough. The theory of string resonances on musical instruments. *Acta Acustica united with Acustica*, 49(2) :124–141, 1981.
- [4] Jean-Loïc Le Carrou, Francois Gautier, Nicolas Dauchez, and Joël Gilbert. Modelling of sympathetic string vibrations. *Acta Acustica united with Acustica*, 91(2) :277–288, 2005.
- [5] Jim Woodhouse. Plucked guitar transients : Comparison of measurements and synthesis. *Acta Acustica united with Acustica*, 90(5) :945–965, 2004.
- [6] Firdaus E. Udadia and Robert E. Kalaba. On the foundations of analytical dynamics. *International Journal of non-linear mechanics*, 37(6) :1079–1090, 2002.
- [7] Jose Antunes and Vincent Debut. Dynamical computation of constrained flexible systems using a modal udwadia-kalaba formulation : Application to musical instruments. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 141(2) :764–778, 2017.
- [8] Vincent Debut and Jose Antunes. Physical synthesis of six-string guitar plucks using the udwadia-kalaba modal formulation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 148(2) :575–587, 2020.
- [9] Gabriel Weinreich. Coupled piano strings. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 62(6) :1474–1484, 1977.
- [10] Ahmet Arda Ozdemir and Suat Gumussoy. Transfer function estimation in system identification toolbox via vector fitting. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1) :6232–6237, 2017.
- [11] Jim Woodhouse and Nicolas Lynch-Aird. Choosing strings for plucked musical instruments. *Acta Acustica united with Acustica*, 105(3) :516–529, 2019.