



**HAL**  
open science

# Propriétés de moyenne dans la table de Pythagore

Charles Delaporte

► **To cite this version:**

| Charles Delaporte. Propriétés de moyenne dans la table de Pythagore. 2022. hal-03842537

**HAL Id: hal-03842537**

**<https://hal.science/hal-03842537v1>**

Preprint submitted on 7 Nov 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - ShareAlike 4.0 International License

# Propriétés de moyenne dans la table de Pythagore

Charles Delaporte

Lycée Eugène Woillez  
62 170 Montreuil-sur-Mer (France)  
cmh.delaporte@orange.fr

## Résumé

Nous prouvons dans cet article deux propriétés énoncées sans démonstration aux chapitres 11 et 12 du livre « Voyage au centre de l'hécatonicosachore » [1].

Si on trace un polygone régulier sur une table de Pythagore continue, la moyenne des sommets est au centre. Ce résultat se généralise en dimension trois aux solides de Platon, sauf pour le tétraèdre.

## Abstract

In this article, we prove two properties stated without demonstration in chapter 11 and chapter 12 of the book « Voyage au centre de l'hécatonicosachore » [1].

If we draw a regular polygon on a continuous Pythagoras table, the average of the vertices is in the centre. This result is generalised in dimension three to Plato's solids, except for the tetrahedron.

*Key words* : Elementary number theory ; regular polygons ; Plato's solids.

*AMS Subject Classification* : 11A67 ; 51M20 ; 52B10.

## 1 En dimension 2

**Définition 1.1** *On appelle table de Pythagore continue le plan euclidien  $\mathbb{R}^2$ , dans lequel on identifie chaque point  $M(x; y)$  au produit de ses coordonnées  $xy$ .*

On considère un entier naturel  $n \geq 3$ .

**Lemme 1.2** *Soit  $\alpha = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ .*

On a :

$$\sum_{k=1}^n \alpha^k = 0 \text{ et } \sum_{k=1}^n \alpha^{2k} = 0 .$$

*Preuve* : La première égalité est classique, voir [2].

Pour la deuxième égalité, comme  $n \geq 3$ , on a  $\alpha^2 \neq 1$ . Ainsi, on obtient :

$$\sum_{k=1}^n \alpha^{2k} = \alpha^2 \frac{1 - \alpha^{2n}}{1 - \alpha^2} = \alpha^2 \frac{1 - (\alpha^n)^2}{1 - \alpha^2} = 0 .$$

■

**Théorème 1.3** *Lorsqu'on trace un polygone régulier à  $n$  côtés sur une table de Pythagore continue, la moyenne des sommets est au centre.*

*Preuve* : Plaçons la table de Pythagore dans le plan complexe. Le point  $M(x; y)$  a pour affixe  $z = x + iy$ . Le produit de ses coordonnées est donné par :

$$xy = \frac{1}{2} \text{Im}(z^2) .$$

Par la suite, on notera :

$$f(z) = \frac{1}{2} \text{Im}(z^2) .$$

Soit  $\alpha = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ . Les affixes d'un polygone régulier quelconque à  $n$  côtés, notées  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , s'obtiennent par similitude directe à partir du polygone formé par les puissances de  $\alpha$ , soit :

$$z_k = \omega + b\alpha^k \text{ pour tout } k \in \llbracket 1; n \rrbracket$$

où  $\omega$  est l'affixe du centre du polygone, et  $b \in \mathbb{C}$ .

Il s'agit donc de prouver que  $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(z_k) = f(\omega)$ .

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n z_k^2 &= \sum_{k=1}^n (\omega + b\alpha^k)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n (\omega^2 + 2\omega b\alpha^k + b^2\alpha^{2k}) \\ &= \sum_{k=1}^n \omega^2 + 2\omega b \sum_{k=1}^n \alpha^k + b^2 \sum_{k=1}^n \alpha^{2k} . \end{aligned}$$

D'après le Lemme 1.2,  $\sum_{k=1}^n z_k^2 = \sum_{k=1}^n \omega^2 = n\omega^2$ .

Ainsi, on a :

$$\omega^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z_k^2 ,$$

puis :

$$f(\omega) = \frac{1}{2} \text{Im}(\omega^2) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \text{Im}(z_k^2) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(z_k) .$$

■

## 2 En dimension 3

**Définition 2.1** On appelle table de Pythagore continue tridimensionnelle l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$ , dans lequel on identifie chaque point  $M(x; y; z)$  au produit de ses coordonnées  $xyz$ .

**Théorème 2.2** Lorsqu'on trace un solide de Platon autre que le tétraèdre sur une table de Pythagore continue tridimensionnelle, la moyenne des sommets est au centre.

*Preuve :* D'après [3], les coordonnées des sommets des solides de Platon centrés en l'origine sont données ci-dessous ( $\phi$  désigne le nombre d'or) :

Pour le cube :  $(\pm 1; \pm 1; \pm 1)$ .

Pour l'octaèdre :  $(\pm 1; 0; 0)$  et leurs permutés.

Pour le dodécaèdre :  $(\pm \frac{1}{\phi}; \pm \phi; 0)$  et leurs permutés circulaires, ainsi que  $(\pm 1; \pm 1; \pm 1)$ .

Pour l'icosaèdre :  $(\pm 1; \pm \phi; 0)$  et leurs permutés circulaires.

A l'aide d'un logiciel de calcul formel, la propriété se vérifie formellement pour chacun des solides obtenus à partir de ceux-ci par similitude directe. Ainsi par exemple le logiciel Xcas [4] fournit la preuve suivante pour le cube :

n est un vecteur unitaire.

$$n := \left[ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right]$$

$$\rightarrow \left[ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \right]$$

rot est la rotation vectorielle d'angle t et d'axe dirigé par le vecteur unitaire n.

$$\text{rot} := [v] \rightarrow \text{dot}(v, n) * n + \cos(t) * (v - \text{dot}(v, n) * n) + \sin(t) * \text{cross}(n, v)$$

$$\rightarrow [v] \rightarrow \text{dot}(v, n) * n + \cos(t) * (v - \text{dot}(v, n) * n) + \sin(t) * \text{cross}(n, v)$$

hom est l'homothétie vectorielle de rapport k.

$$\text{hom} := [v] \rightarrow k * v$$

$$\rightarrow [v] \rightarrow k * v$$

omega est un vecteur.

$$\omega := [p, q, r]$$

$$\rightarrow [p, q, r]$$

tra est la translation de vecteur omega.

$$\text{tra} := [v] \rightarrow v + \omega$$

$$\rightarrow [v] \rightarrow v + \omega$$

sim est une similitude directe générique, qui transforme un polyèdre centré en l'origine en un polyèdre centré au point oméga de coordonnées (p,q,r).

$$\text{sim} := [v] \rightarrow \text{tra}(\text{rot}(\text{hom}(v)))$$

$$\rightarrow [v] \rightarrow \text{tra}(\text{rot}(\text{hom}(v)))$$

f est la fonction qui multiplie les trois coordonnées d'un vecteur.

$$f := [v] \rightarrow v[0] * v[1] * v[2]$$

$$\rightarrow [v] \rightarrow v[0] * v[1] * v[2]$$

Démonstration de la propriété dans le cas du cube.

$$\text{simplify} \left( \frac{f(\text{sim}([1, 1, 1])) + f(\text{sim}([1, 1, -1])) + f(\text{sim}([1, -1, 1])) + f(\text{sim}([-1, 1, 1])) + f(\text{sim}([1, -1, -1])) + f(\text{sim}([-1, 1, -1])) + f(\text{sim}([-1, -1, 1])) + f(\text{sim}([-1, -1, -1]))}{8} \right)$$

$$\rightarrow p * q * r$$

■

**Remarque 2.3** Les propriétés démontrées dans cet article s'étendent encore à d'autres figures, moins régulières mais suffisamment riches en symétries, notamment les polygones semi-réguliers et les solides archimédiens.

**Remarque 2.4** En revanche, la propriété ne se vérifie plus pour les polytopes réguliers de dimension 4.

## Références

- [1] C. Delaporte, Voyage au centre de l'hécatonicosachore, Publishroom factory (2022), 978-2-38454-451-6 .
- [2] J. Wacksmann, Mathématiques expertes - Terminale, Ellipses (2022), p.121, 978-2-340-06756-1 .
- [3] R. Ferréol, Encyclopédie des formes mathématiques remarquables, <https://mathcurve.com/> .
- [4] Xcas, [http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac\\_fr.html](http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac_fr.html) .