



**HAL**  
open science

# Sur l'Équité via la Sélection en Séquence pour l'Allocation de Biens Indivisibles

Laurent Gourvès, Julien Lesca, Anaëlle Wilczynski

► **To cite this version:**

Laurent Gourvès, Julien Lesca, Anaëlle Wilczynski. Sur l'Équité via la Sélection en Séquence pour l'Allocation de Biens Indivisibles. 16èmes Journées d'Intelligence Artificielle Fondamentale, Jun 2022, Saint-Etienne, France. hal-03839729

**HAL Id: hal-03839729**

**<https://hal.science/hal-03839729v1>**

Submitted on 4 Nov 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Sur l'Équité via la Sélection en Séquence pour l'Allocation de Biens Indivisibles \*

Laurent Gourvès<sup>1</sup> Julien Lesca<sup>2</sup> Anaëlle Wilczynski<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Université Paris Dauphine-PSL, LAMSADE, 75016, Paris, France

<sup>2</sup> Huawei Technologies, Paris Research Center, Paris, France

<sup>3</sup> MICS, CentraleSupélec, Université Paris-Saclay, France

laurent.gourves@dauphine.fr julien.lesca@huawei.com  
anaelle.wilczynski@centralesupelec.fr

## Résumé

Parmi les critères d'équité pour l'allocation de ressources indivisibles à un groupe d'agents, certains sont basés sur des niveaux d'utilité minimaux à garantir à tous les agents. Ces niveaux peuvent provenir d'une méthode d'allocation spécifique, telle que le critère *maximin fair-share* issu du protocole *je coupe et tu choisis*. Nous proposons d'analyser des critères dont les niveaux d'utilité minimaux s'inspirent de la sélection en séquence, un protocole bien établi pour l'attribution de biens indivisibles. Nous étudions ces critères et leurs connexions avec d'autres critères d'équité connus, permettant ainsi d'enrichir l'état des connaissances sur la répartition équitable de biens indivisibles.

## Abstract

Among the fairness criteria for allocating indivisible resources to a group of agents, some are based on minimum utility levels. These levels can come from a specific allocation method, such as maximin fair-share criterion which is based on the cut-and-choose protocol. We propose to analyze criteria whose minimum utility levels are inspired by picking sequences, a well-established protocol for allocating indivisible resources. We study these criteria and investigate their connections with known fairness criteria, enriching the understanding of fair allocation of indivisible goods.

## 1 Introduction

Le partage équitable de biens indivisibles est une question fondamentale, difficile, et largement étudiée dans le domaine de la prise de décision collective [2, 4]. De nombreux critères ont été proposés afin d'évaluer l'équité d'une allocation lorsque les agents expriment leurs préférences

sur les ensembles de biens via des utilités additives. Citons par exemple l'absence d'envie (EF) [7], critère basé sur la comparaison qui demande qu'aucun agent ne préfère le lot assigné à un autre agent au sien. De nombreux autres critères d'équité imposent, sans besoin de comparaison, que chaque agent ait une utilité pour sa part qui est supérieure ou égale à un niveau d'utilité prédéfini, appelé *garantie équitable* [1]. Dans cette veine, on peut citer la proportionnalité (Prop) [9] où chaque agent doit avoir une utilité au moins égale à sa valeur pour l'ensemble des biens divisé par le nombre d'agents  $n$ . Une garantie équitable peut aussi être définie selon une procédure d'allocation donnée comme, par exemple, la *maximin-fair-share* (MMS) [6] ou la *min-max-fair-share* (mFS) [3] calculées grâce au protocole *je coupe et tu choisis*.

Dans cet article, nous définissons des critères d'équité dont la garantie équitable est calculée grâce au protocole d'allocation bien établi dit de sélection en séquence (*picking sequences* (PS)) [5]. Pour ce protocole, tous les biens sont initialement disponibles et, étant donné une séquence d'agents appelée *politique*, les agents sélectionnent tour à tour un objet parmi ceux qui restent. La séquence est dite sincère si le choix se porte invariablement sur l'objet préféré. La sélection en séquence est un bon candidat pour le partage de ressources car facile à comprendre et à mettre en œuvre. Même si l'allocation finale n'est pas construite avec un tel protocole, tout agent peut néanmoins prétendre que son utilité devrait être aussi bonne que celle résultant de la sélection en séquence munie de la politique qu'il a en tête.

Pour un entier  $p$  compris entre 1 et  $n$ , nous proposons un critère simple nommé  $PS_p$  dans lequel la garantie équitable de chaque agent est son utilité pour le sous-ensemble d'objets construit comme suit. Classez les objets du meilleur

\*Ce résumé est issu de l'article [8] paru dans les actes de ADT 2021.

au pire selon la préférence de l'agent et conservez les éléments dont les rangs sont les multiples de  $p$ . Un agent serait doté d'un tel ensemble dans une sélection en séquence si ses positions dans la politique étaient des multiples de  $p$ , et si les autres agents avaient la même préférence que lui. En effet, sans connaître les préférences des autres, un agent peut supposer que, dans le pire des cas, tout le monde a le même classement d'objets que le sien. Le fait que l'agent apparaisse récursivement dans la politique s'inspire de la méthode *round robin*. Round robin appartient à la classe des politiques récursivement équilibrées (*recursively balanced* (RB)), où chaque séquence d'agents peut être divisée en tours au cours desquels tous les agents choisissent un objet exactement une fois. Dans  $PS_p$ , le paramètre  $p$  permet de passer progressivement d'un scénario très optimiste où tous les agents choisiraient en premier ( $p = 1$ ) à un scénario plus pessimiste où tous choisiraient en dernier ( $p = n$ ).

## 2 Contribution

Une allocation  $PS_p$  n'existe pas toujours si  $p < n$ . De plus, le problème de décision lié à l'existence d'une allocation  $PS_p$  est computationnellement difficile.

**Théorème 1** Déterminer si une allocation  $PS_p$  existe est NP-complet, même si :

- $m = 2n$  et  $p < n$  est une constante, ou
- $p = 1$  et  $n = 2$ , impliquant la difficulté quand  $p = n - 1$ .

Néanmoins, lorsque  $p = n$ , l'existence d'une allocation  $PS_p$  est garantie, tout comme l'existence d'une allocation satisfaisant la relaxation à un bien près du concept  $PS_1$ .

Pour certains critères d'équité qui s'y prêtent, on note *crit1* (resp., *critX*) la relaxation à un bien près (resp., à tout bien près) d'un critère *crit*. Une allocation est *crit1* (resp., *critX*) si elle est *crit* en retirant un élément (resp., n'importe quel élément) de l'ensemble auquel on se compare.

**Proposition 1** Toute allocation résultant d'une sélection en séquence sincère avec politique RB est  $PS_n$  et  $PS_1$ .

Notons que la réciproque de la Proposition 1 n'est pas vraie, ainsi les allocations satisfaisant les critères  $PS$  n'émergent pas forcément d'une sélection en séquence. Par la Proposition 1, une allocation  $PS_p1$  existe toujours pour tout  $p \in [n]$ . Ceci n'est pas le cas pour  $PS_pX$ , même si  $p = n - 1$ , pour tout nombre  $n$  d'agents. Puisqu'une allocation  $PS_11$  existe toujours et qu'une allocation  $PS_pX$  n'existe pas toujours même pour  $p = n - 1$ , on peut se concentrer sur les relaxations qui rendent les critères les plus forts possibles, et donc considérer seulement  $PS_11$  et  $PS_1X$ .

Nous avons établi les relations d'implication entre nos nouveaux critères et des critères d'équité connus, afin d'enrichir l'échelle d'équité suivante [3] :  $EF \Rightarrow mFS \Rightarrow Prop \Rightarrow MMS$ . Ces relations sont résumées en Figure 1.

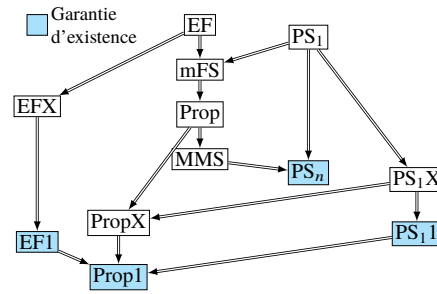


FIGURE 1 – Récapitulatif des relations entre critères d'équité ainsi que leur garantie d'existence. Un arc partant d'un critère  $A$  vers un critère  $B$  signifie que  $A$  implique  $B$  ( $A$  est plus fort que  $B$ ). S'il n'y a pas de chemin orienté de  $A$  vers  $B$  alors  $A$  n'est pas plus fort que  $B$ .

Nous prouvons également que le critère  $PS_p$  fournit une  $\frac{n-p+1}{n}$ -approximation pour MMS, amenant  $PS_n$  au même rapport d'approximation  $\frac{1}{n}$  qu' $EF1$ .

## Références

- [1] Bogomolnaia, A., H. Moulin et R. Stong: *Guarantees in Fair Division : general or monotone preferences*. arXiv preprint arXiv :1911.10009, 2019.
- [2] Bouveret, S., Y. Chevaleyre et N. Maudet: *Fair Allocation of Indivisible Goods*. Dans *Handbook of Computational Social Choice*, pages 284–310. 2016.
- [3] Bouveret, S. et M. Lemaître: *Characterizing conflicts in fair division of indivisible goods using a scale of criteria*. *Auton. Agents Multi-Agent Syst.*, 30(2) :259–290, 2016.
- [4] Brams, S. J., P. H. Edelman et P. C. Fishburn: *Fair Division of Indivisible Items*. *Theory and Decision*, 55(2) :147–180, 2003.
- [5] Brams, S. J. et A. D. Taylor: *The win-win solution : guaranteeing fair shares to everybody*. WW Norton & Company, 2000.
- [6] Budish, E.: *The Combinatorial Assignment Problem : Approximate Competitive Equilibrium from Equal Incomes*. *Journal of Political Economy*, 119(6) :1061–1103, 2011.
- [7] Foley, D. K.: *Resource Allocation and the Public Sector*. *Yale Economic Essays*, 7(1) :45–98, 1967.
- [8] Gourvès, L., J. Lesca et A. Wilczynski: *On Fairness via Picking Sequences in Allocation of Indivisible Goods*. Dans *Proc. of ADT'21*, pages 258–272, 2021.
- [9] Steinhaus, H.: *The Problem of Fair Division*. *Econometrica*, 16(1) :101–104, 1948.