HAL
open science

Enveloppe étale de morphismes plats

Daniel Ferrand, Ofer Gabber

To cite this version:

Daniel Ferrand, Ofer Gabber. Enveloppe étale de morphismes plats. Algebra & Number Theory, 2022, 16 (3), 10.2140/ant.2022.16.521 . hal-03837448

HAL Id: hal-03837448

https://hal.science/hal-03837448v1

Submitted on 2 Nov 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Enveloppe étale de morphismes plats

par Daniel Ferrand, et suivi d'un appendice par Ofer Gabber

Résumé

Pour un morphisme $T \to S$, plat et de présentation finie, l'enveloppe étale - un avatar du $\pi_0(T/S)$ - peut ne pas exister ; par contre l'enveloppe étale *séparée* i.e. celle qui est universelle pour les schémas étales et *séparés* sur S, existe dès que S est localement connexe. On la note $T \to \pi^s(T/S)$; c'est le quotient de T par la relation d'équivalence minimale à graphe ouvert et fermé dans $T \times_S T$; cette construction permet de démontrer qu'un morphisme *fpqc* de changement de base $S' \to S$ induit un isomorphisme $\pi^s(S' \times_S T/S') \to S' \times_S \pi^s(T/S)$ si ses fibres géométriques sont connexes. Par ailleurs, lorsque S est normal, disons intègre, et que le morphisme $T \to S$ est normal on dispose d'un isomorphisme $\pi^s(T_\xi/\xi) \simeq \pi^s(T/S)_\xi$; il permet d'étendre à des morphismes normaux des résultats connus sur un corps de base. Toujours sous des hypothèses de normalité, le morphisme canonique $\pi_0(T/S) \to \pi^s(T/S)$ fait apparaître le schéma π^s comme l'enveloppe séparée de l'espace algébrique π_0.

Abstract

For a flat morphism $T \to S$ of finite presentation, the étale envelope - an avatar of $\pi_0(T/S)$ - may fail to exist ; but, the *separated* étale envelope i.e. the one which is universal for the *separated* étale S-schemes only, is shown to exist as soon as S is locally connected ; denoted $\pi^s(T/S)$, it is the quotient of T by the equivalence relation which is minimal among those with clopen graph in $T \times_S T$; from that we prove that, for a *fpqc* base change $S' \to S$, the morphism $\pi^s(S' \times_S T/S') \to S' \times_S \pi^s(T/S)$ is an isomorphism if the geometric fibers of $S' \to S$ are connected. When S is integral with generic point ξ, and if both S and the morphism $T \to S$ are normal, then one gets the isomorphism $\pi^s(T_\xi/\xi) \simeq \pi^s(T/S)_\xi$, on the strength of which one can often extend to S results previously proven when the base is a field.

Introduction

Comme point de départ, considérons un corps k et une k-algèbre A de type fini. Soit $K \subset A$ la fermeture algébrique séparable de k dans A ; c'est une k-algèbre finie étale (i.e. un produit fini d'extensions finies séparable de k), et les fibres géométriques de $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(K)$ sont connexes ; autrement dit, pour tout k-homomorphisme $K \to \Omega$ dans une extension algébriquement close Ω de k, le schéma $\mathrm{Spec}(\Omega \otimes_K A)$ est connexe. Dans le langage de l'article, on dirait que le schéma $\mathrm{Spec}(K)$ a les deux propriétés suivantes qui, chacune, le caractérise :

Il « représente » les composantes connexes de fibres géométriques du morphisme $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(k)$, et c'est l'enveloppe étale de $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(k)$.

Il faut remarquer que cela ne dépend pas d'hypothèse de régularité sur le morphisme $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(k)$, et d'autre part que le morphisme étale $\mathrm{Spec}(K) \to \mathrm{Spec}(k)$ est *séparé* (il est même affine !).

Pour un morphisme plat et de présentation finie $T \to S$, sur une base S générale, il n'y a pas d'objet géométrique connu pour représenter les composantes connexes des fibres géométriques ; mais si le morphisme $T \to S$ est supposé lisse un tel objet existe, c'est un espace algébrique étale, noté $\pi_0(T/S)$; il n'est en général pas un schéma.

L'objet de l'article est de dégager des conditions d'existence de « l'enveloppe étale » d'un morphisme plat de présentation finie $f : T \to S$; assez vite on se restreindra aux enveloppes étales *séparées*. Rappelons qu'on dit que f admet une *enveloppe étale* (resp. une enveloppe étale *séparée*) s'il existe un S-morphisme $h : T \to E$ qui soit universel pour les S-morphisme de T vers un S-schéma étale (resp. étale séparé) ; autrement dit, E est un S-schéma étale (resp. étale séparé) et pour tout S-morphisme $h' : T \to E'$ vers un S-schéma étale (resp. étale séparé) il existe un unique S-morphisme $u : E \to E'$ tel que $h' = uh$.

Une enveloppe étale générale (i.e. qui concerne tous les morphismes étales) peut ne pas exister ; c'est le cas pour un morphisme plat et fini de rang 2 entre schémas de dimension 1, si ce morphisme possède une infinité de fibres $T_s \to s$ non connexes (par exemple pour $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[i]) \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$) ; la raison en est la prolifération de factorisations de f en $T \to E \to S$ où le schéma E est le « dédoublement d'un point fermé convenable de S », schéma qui est étale mais *pas séparé* sur S.

Cela justifie que la suite de l'article soit restreinte aux enveloppes étales *séparées* sur la base. Je dois à O. Gabber de m'avoir montré l'existence d'une telle enveloppe dès que le schéma de base est localement connexe (2.3.4) ; cette hypothèse est plus faible que la finitude locale de l'ensemble des composantes irréductibles, hypothèse que j'avais d'abord envisagée. Le point clé est un théorème de Gabber, donné en appendice, qui assure que la connexité locale de S se transmet à T dès que le morphisme $T \to S$ est plat de présentation finie.

Il faut signaler que l'enveloppe étale - même séparée - peut ne pas exister, elle non plus, sans hypothèse sur le schéma de base ; c'est encore O. Gabber qui m'a indiqué l'exemple d'un morphisme $T \to S$ fini libre qui n'admet pas d'enveloppe étale séparée ; dans cet exemple, S est un schéma affine dont l'espace des composantes connexes est homéomorphe au compactifié d'Alexandroff de l'espace discret $\mathbf{N}$, et S possède une composante connexe non ouverte, et n'est donc pas localement connexe.

Cela simplifie les choses d'élargir le point de vue précédent en introduisant la **catégorie des factorisations** (étales séparées) d'un morphisme $f : T \to S$ (toujours supposé plat et de présentation finie) ; cette catégorie, notée $\mathsf{E}(T/S)$, a pour objets les suites de morphismes $T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S$, tels que $f = gh$, où g est étale et séparé, et où h est surjectif. L'enveloppe étale séparée, lorsqu'elle existe, est notée $\pi^s(T/S)$; c'est *l'élément initial* de $\mathsf{E}(T/S)$, ou encore la limite projective de cette catégorie filtrante.

Il s'avère que la catégorie des factorisations $\mathsf{E}(T/S)$ est plus maniable que son objet initial $\pi^s(T/S)$. Elle est définie sans hypothèse sur S, et elle s'identifie à une sous-catégorie pleine de la catégorie des sous-schémas ouverts et fermés $\mathsf{Of}(T \times_S T)$, via le foncteur $\mathsf{E}(T/S) \to \mathsf{Of}(T \times_S T)$ qui associe, à chaque factorisation (étale séparée) $T \to E \to S$ de f, l'immersion ouverte et fermée $T \times_E T \to T \times_S T$. Comme le morphisme h est fidèlement plat de présentation finie, la suite

$$T \times_E T \rightrightarrows T \xrightarrow{h} E$$

est exacte dans la catégorie des schémas ; le morphisme $h : T \to E$ apparaît ainsi comme le quotient de T par la relation d'équivalence $R = T \times_E T \rightrightarrows T$. Réciproquement, pour une relation d'équivalence R, à graphe ouvert et fermé, on montre que le faisceau fppf quotient T/R est représentable par un schéma

étale, quasi-compact et séparé sur S.

La question de l'existence de l'enveloppe étale séparée se ramène à ceci : dégager des conditions sur S et sur le morphisme $T \to S$ pour que l'intersection des graphes dans $T \times_S T$ des relations d'équivalences ouvertes et fermées soit un ouvert. Le théorème de Gabber donné en appendice, montre que la connexité locale de S se propage à $T \times_S T$, et cette propriété entraîne que l'ensemble des ouverts fermés de $T \times_S T$ est localement fini ; les relations d'équivalence sur T, à graphe ouvert et fermé dans $T \times_S T$, forment donc aussi un ensemble localement fini ; leur intersection, qui est une relation d'équivalence fermée, est aussi ouverte ; c'est elle qui définit l'enveloppe étale séparée.

Pour un schéma de base S fixé, notons $\mathsf{Pl.pf}_S$ la catégorie des morphismes $T \to S$ plats de présentation finie, et $\iota_S : \mathsf{Et.sep}_S \to \mathsf{Pl.pf}$ l'inclusion de la sous-catégorie des S-schémas étales de présentation finie ; l'enveloppe étale séparée n'est autre que l'adjoint à gauche de cette inclusion. On a un foncteur (contravariant) qui à $T/S \in \mathsf{Pl.pf}_S$ associe la catégorie $\mathsf{E}(T/S)$ (cette catégorie est équivalente à celle associée à un ensemble ordonné fini, dès que, par exemple, S est noethérien) ; dans le texte, on limite au minimum l'étude de ce foncteur, pour développer plutôt les questions de changements de base.

Les catégories de factorisation définissent, pour un changement de base $S' \to S$, un foncteur $\mathsf{E}(T/S) \to \mathsf{E}(T'/S')$, (où on note $T' = S' \times_S T$) ; les propriétés de ce foncteur sont évidemment très liées à celles du foncteur $\mathsf{Of}(S) \to \mathsf{Of}(S')$ entre les catégories d'ouverts fermés ; en particulier, *un morphisme fpqc $S' \to S$, à fibres géométriques connexes induit une équivalence $\mathsf{E}(T/S) \simeq \mathsf{E}(T'/S')$; si l'enveloppe étale séparée existe, le morphisme $\pi^s(T'/S') \to S' \times_S \pi^s(T/S)$ est par suite un isomorphisme* (4.2.5).

Lorsque le schéma de base S est normal et, disons intègre de point générique ξ, et que le morphisme $T \to S$ est plat de présentation finie, et à fibres géométriques normales, alors le schéma $T \times_S T$ est normal, ce qui lui confère des propriétés topologiques remarquables, qui découlent de la suivante : l'adhérence d'un ouvert de $T \times_S T$ est *ouverte.*[1] On comprend alors assez bien les ouverts fermés d'un tel espace, et on en tire le théorème suivant de *prolongement de factorisations* (4.3.4) : le foncteur

$$\mathsf{E}(T/S) \to \mathsf{E}(T_\xi/\xi)$$

est une équivalence de catégories ; autrement dit, toute factorisation étale séparée *générique* se prolonge de façon unique en une factorisation au dessus de S ; autrement dit encore, la plupart des énoncés qui sont vrais lorsqu'ils sont relatifs à un corps de base restent vrais sur S.

On en tire immédiatement le même énoncé lorsque le schéma S est supposé seulement intègre et géométriquement unibranche.

Enfin, toujours en supposant que S est normal intègre, on montre que pour un morphisme *étale* de présentation finie $T \to S$, le morphisme universel $h_T : T \to \pi^s(T/S)$ est un isomorphisme local (local sur T), et qu'il fait de $\pi^s(T/S)$ l'enveloppe séparée de $T \to S$.

Considérons alors *l'espace algébrique* étale $\pi_0(T/S)$ qui représente les composantes connexes des fibres géométriques de $T \to S$ ([LMB, 6.8]) ; le morphisme $T \to \pi_0(T/S)$ est universel pour les S-morphismes $T \to E$, avec E étale, séparé ou non, sur S ; il existe donc un morphisme canonique d'espaces algébriques $\theta : \pi_0(T/S) \to \pi^s(T/S)$. On montre que si $T \to S$ est lisse de présentation finie, alors θ fait de $\pi^s(T/S)$ l'enveloppe séparée de $\pi_0(T/S)$ (dans la catégorie des S-espaces algébriques).

1. Un espace topologique séparé qui possède cette propriété est dit it extrêmement discontinu ([TG, I, §11, p. 118, exerc. 21])

Cet article doit beaucoup à Bruno Kahn. Il y a quelque temps, il avait construit cet adjoint lorsque la base est de Dedekind et que le morphisme est lisse, et il m'avait demandé si on pouvait étendre sa construction sur une base générale. Il est apparu que le procédé qu'il utilisait est trop dépendant de la dimension 1 pour pouvoir être généralisé, et qu'il fallait donc trouver autre chose.

Je tiens à remercier Laurent Moret-Bailly, lecteur émérite, qui suggéra bien des améliorations, et même décela une erreur dans une version antérieure.

L'apport de Ofer Gabber fut décisif dans la formulation finale de ce texte.

Enfin, le referee, anonyme, a soulevé une question stimulante qui m'a conduit à une refonte du texte.

Table des matières

1 Enveloppes étales **4**

2 Enveloppes étales séparées **10**

3 Fonctorialités **17**

4 Changements de base **25**

5 L'adjoint d'un étale **33**

A On locally connected schemes **37**

1 Enveloppes étales

1.1 Préliminaires

1.1.1. Rappelons qu'un morphisme de schémas $g : E \to S$ est dit **étale** s'il est plat, localement de présentation finie et si son morphisme diagonal $\Delta_g : E \to E \times_S E$ est une immersion ouverte.

D'après [EGA I, 7.3.10], un morphisme étale est universellement ouvert.

L'équivalence entre cette définition et les autres est exposée dans [EGA IV_4, 17.4.2 et 17.6.2] .

Un morphisme étale est de présentation finie si et seulement si il est quasi-compact et quasi-séparé.

1.1.2. Soit $f : T \to S$ un morphisme de schémas. Une **enveloppe étale** (resp. une enveloppe étale **séparée**) de f est un morphisme de S-schémas $h : T \to E$ qui est **universel** pour les S-morphismes de T vers un S-schéma étale (resp. étale et séparé).

Une enveloppe étale de f est donc une factorisation de f en $T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S$, où $g : E \to S$ est un morphisme étale, telle que pour toute factorisation de f en $T \xrightarrow{h'} E' \xrightarrow{g'} S$, où g' est étale, il existe un unique morphisme de $u : E \to E'$ tel que $g'u = g$ et $h' = uh$. La première égalité et le lemme 1.1.4 qui suit montrent que le morphisme u est étale ; si, de plus, g est une immersion ouverte (p. ex. un isomorphisme), alors u est une immersion ouverte ; finalement, on voit que si g est un isomorphisme et si le morphisme $h' : T \to E'$ est surjectif, alors $u : E \to E'$ est un isomorphisme.

1.1.3 Lemme. *Considérons deux morphismes de schémas $T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S$ tels que g soit étale (pas nécessairement séparé), et que le composé $f = gh : T \to S$ soit plat et localement de présentation finie. Alors :*

- *(i) le morphisme h est plat et localement de présentation finie, et donc universellement ouvert ;*
- *(ii) si h est une enveloppe étale de f, alors h est surjectif, donc fidèlement plat et localement de présentation finie ;*
- *(iii) supposons de plus que f soit quasi-compact et que h soit surjectif ; alors g est quasi-compact ;*
- *(iv) outre les hypothèses de (iii), supposons, de plus, que g soit quasi-séparé (ce qui sera le cas si g est séparé ou si S est noethérien) ; alors h est fidèlement plat de présentation finie, et c'est donc un épimorphisme effectif universel ; cela signifie que le diagramme*

$$T \times_E T \rightrightarrows T \xrightarrow{h} E \tag{1.1.3.1}$$

est exact dans la catégorie des schémas, et le reste après tout changement de base $F \to E$.

Démonstration. (i) Puisque le morphisme g est étale, il est localement de présentation finie donc ([EGA I, 6.2.6.1]) son morphisme diagonal est localement de présentation finie, et il est plat ; le lemme suivant, avec la propriété **P** : être plat et localement de présentation finie, entraîne que h satisfait cette propriété ; il est donc universellement ouvert ([EGA I, 7.3.10]).

1.1.4 Lemme. *Soit* **P** *une propriété des morphismes de schémas, stable par composition et par changement de base. Soit*

$$X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z$$

une suite de morphismes. On suppose que le composé $\beta\alpha$ vérifie **P**, *ainsi que le morphisme diagonal $\Delta_\beta : Y \to Y \times_Z Y$. Alors α vérifie* **P**.

Démonstration. En effet α est le composé

$$X \xrightarrow{\Gamma_\alpha} X \times_Z Y \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} Y$$

où le graphe Γ_α se déduit de Δ_β par changement de base, et la projection pr_2 se déduit de $\beta\alpha$ par le changement de base par β. □

Retour à la démonstration de 1.1.3 : (ii) Il reste à vérifier que h est surjective. D'après (i), ce morphisme h est ouvert ; son image $U \subset E$ est donc un ouvert, qui est par suite étale sur S ; la propriété universelle implique que $U = E$, donc que h est surjectif.

(iii) Par hypothèse, le morphisme $f = gh$ est quasi-compact et h est surjectif ; donc g est aussi quasi-compact.
(iv) Si de plus g est quasi-séparé, i.e. si Δ_g est quasi-compact, alors, d'après (1.1.4) appliqué avec la propriété d'être quasi-compact, h est fidèlement plat quasi-compact, et on peut appliquer [SGA 1, VIII, 5.3]. □

1.2 Enveloppes étales et connexité des fibres

1.2.1 Lemme. *Soient $f : T \longrightarrow S$ un morphisme plat de présentation finie et $T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S$ une factorisation de f, où g est étale, et où h est surjectif. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Les fibres du morphisme h sont géométriquement connexes.*

(ii) *Le morphisme h est une enveloppe étale de f, et garde cette propriété après tout changement de base $S' \longrightarrow S$.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) : Les hypothèses sur h étant stables par changement de base, il suffit de montrer que h est une enveloppe étale de f. Soit $f = g'h'$ une factorisation avec $g' : E' \longrightarrow S$ étale. Il s'agit de montrer qu'il existe un morphisme $v : E \to E'$ tel que $h' = vh$ et $g = g'v$.

Le morphisme $T \to E' \times_S E$ déduit de h' et de h est universellement ouvert puisque le composé $T \to E' \times_S E \xrightarrow{\mathrm{pr}_E} E$ est égal à h, et que h et $\Delta_{g'}$ sont universellement ouverts (1.1.4) ; notons $U \subset E' \times_S E$ l'ouvert image de ce morphisme, et $h'' : T \to U$ le morphisme surjectif associé. On obtient donc le diagramme commutatif ci-dessous, où u' est le morphisme composé $U \subset E' \times_S E \xrightarrow{\mathrm{pr}_{E'}} E'$.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, "h''"] \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[ddr, bend right, "h'"'] & & \\
& U \arrow[r, "u"'] \arrow[d, "u'"] & E \arrow[d, "g"] \\
& E' \arrow[r, "g'"'] & S.
\end{tikzcd}$$

Il s'agit de montrer que u est un isomorphisme. Comme le morphisme g' est supposé étale, le morphisme u est étale, et il est surjectif puisque $h = uh''$ l'est. Montrons que les fibres de u sont triviales : pour tout point x [2] de E, considérons la fibre en x du morphisme composé $h = uh''$

$$h^{-1}(x) = h''^{-1}u^{-1}(x) \longrightarrow u^{-1}(x) \longrightarrow x.$$

Cette fibre est, par hypothèse, géométriquement connexe, et h'' est surjectif ; donc la fibre du morphisme $u^{-1}(x) \to x$ est géométriquement connexe ; comme ce morphisme est étale, c'est un isomorphisme.

Cela entraîne que l'immersion ouverte Δ_u est surjective, c'est-à-dire un isomorphisme ; d'où l'on tire que l'une (quelconque) des projections $U \times_E U \to U$ est un isomorphisme ; par ailleurs, l'application u est bijective et ouverte, c'est donc un homéomorphisme, et par suite une application quasi-compacte ; on peut alors conclure par « descente fpqc », le long de u [EGA IV$_2$, 2.7.1,(viii)], que le morphisme $u : U \to E$ est un isomorphisme

(ii) $\Rightarrow$ (i) : On suppose maintenant que dans la factorisation $f = gh : T \to E \to S$ le morphisme h est universel pour les S schémas étales, et le reste par changement de base. Il s'agit de montrer que les fibres de h sont géométriquement connexes. Montrons d'abord - ce qui est bien connu - que l'implication est vraie si E est le spectre d'un corps algébriquement clos Ω, autrement dit que, dans ce cas, T est connexe. Mais un idempotent $e \in \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ engendre la sous-Ω-algèbre étale $\Omega[e] \subset \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$, et le morphisme de schémas $T \to \mathrm{Spec}(\Omega[e])$ est surjectif ; l'hypothèse sur h entraîne alors que $\Omega = \Omega[e]$ (1.1.2), donc que l'idempotent e est trivial.

Dans le cas d'une base S générale, suivant ([EGA IV$_2$, 4.5.2]), il s'agit de montrer que pour tout point géométrique $\omega = \mathrm{Spec}(\Omega) \to E$ (Ω un corps algébriquement clos), la fibre T_ω est connexe. Considérons le

2. Ici, et dans la suite, la lettre « x » désignera souvent, à elle seule, le schéma $\mathrm{Spec}(\kappa(x))$; le symbole $u^{-1}(x)$ désignera alors la fibre schématique

$$u^{-1}(x) := U \times_E \mathrm{Spec}(\kappa(x)).$$

changement de base par le morphisme composé $\omega \to E \to S$, noté ε.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "h"] & E \arrow[r, "g"] & S \\
T \times_S \omega \arrow[u] \arrow[r, "h_\varepsilon"'] \arrow[d, equal] & E \times_S \omega \arrow[u] \arrow[r, "g_\varepsilon"'] \arrow[d, equal] & \omega \arrow[u, "\varepsilon"'] \arrow[d, equal] \\
\bigsqcup_i T_i \arrow[r, "\bigsqcup h_i"'] & \bigsqcup_i \omega_i \arrow[r] & \omega
\end{tikzcd}$$

Le corps Ω étant algébriquement clos, le morphisme étale g_ε se décompose en $E \times_S \omega = \bigsqcup_i \omega_i \to \omega$, où $\omega_i \to \omega$ est un isomorphisme ; on en déduit une décomposition de $h_\varepsilon : T \times_S \omega \to E \times_S \omega$ en la somme de morphismes $h_i : T_i := h_\varepsilon^{-1}(\omega_i) \to \omega_i$, et chacun des morphismes $h_i : T_i \to \omega_i$ hérite de la propriété universelle de h_ε ; d'après le rappel du début on voit que chacun des schémas T_i est connexe. $\square$

1.2.2. La construction qui suit, le "dédoublement d'un point fermé", fournit d'utiles factorisations par un étale.

Soient $f : T \to S$ un morphisme, et $s \in S$ un point fermé tel que la fibre $T_s = f^{-1}(s)$ ne soit pas connexe ; elle est donc la réunion disjointe de deux sous-schémas fermés non vides : $T_s = D_1 \sqcup D_2$; ces D_i sont fermés aussi dans T. Les ouverts complémentaires $V_i = T - D_i$ ont les propriétés suivantes :

— $V_1 \cup V_2 = T$ et $V_1 \cap V_2 = T - T_s$.

— Les morphismes $f_i : V_i \to S$ induits par f sont surjectifs, et on a $f(V_1 \cap V_2) = S - s$.

Introduisons le schéma E obtenu par recollement de deux copies de S le long de l'ouvert $S - s$. On a donc le diagramme commutatif suivant de morphismes de schémas.

$$\begin{tikzcd}
V_1 \cap V_2 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & V_1 \sqcup V_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_1 \sqcup f_2"] & T \arrow[d, "h"] \\
S - s \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & S \sqcup S \arrow[r] & E
\end{tikzcd}$$

Les lignes sont exactes dans la catégorie des schémas ; on voit que le morphisme f se factorise en $T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S$, où h est surjectif et le morphisme $g : E \to S$ est étale quasi-compact ; il est séparé si et seulement si s est ouvert dans S.

Il faut remarquer que cette construction s'applique aussi pour un morphisme *fini étale* s'il possède une fibre non connexe ; elle donne alors une factorisation $T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S$ où gh est fini étale donc séparé, et où g est étale non séparé.

1.2.3 Exemple. Considérons une conique qui se spécialise en deux droites disjointes.

Présisément, soit $S = \mathrm{Spec}(R)$ le spectre d'un anneau de valuation discrète, d'uniformisante t, et tel que $2 \in R^\times$. Posons $F(X, Y) = X(1 - X) + tY^2$. Le morphisme

$$f : T = \mathrm{Spec}(R[X, Y]/(F)) \longrightarrow S$$

est lisse ; la fibre spéciale ($t = 0$) est la réunion de deux droites disjointes, $T_s = D_1 \sqcup D_2$, et la fibre générique $T_\eta \to \eta$ est géométriquement intègre (c'est une courbe de genre zéro). Soit E le S-schéma étale obtenu en dédoublant le point fermé de S ; d'après la remarque (1.2.2) qui précède, le morphisme f se factorise en $T \xrightarrow{h} E \to S$. La fibre générique et les deux fibres fermées de h sont géométriquement intègres ; donc (1.2.1) l'enveloppe étale de f est $h : T \to E$; notons que E n'est pas séparé sur S.

1.3 Deux exemples classiques d'enveloppe étale

On remarquera que dans ces deux exemples, l'enveloppe étale est même finie, donc séparée, sur la base, alors que sa propriété universelle l'est pour *tout* morphisme étale, qu'il soit ou non séparé.

1.3.1 Proposition. *Soient $S = \mathrm{Spec}(k)$ le spectre d'un corps et $f : T \longrightarrow S$ un morphisme de type fini. Alors,*

(i) *Il existe un S-schéma étale fini, noté $\pi_0(T/S)$, et une factorisation de f en*

$$T \xrightarrow{h} \pi_0(T/S) \longrightarrow S,$$

où le morphisme h est universel pour les S-morphismes de T vers un S-schéma étale.
Ce schéma $\pi_0(T/S)$ est le spectre de la clôture algébrique séparable de k dans $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$.

(ii) *Si $S' \to S$ désigne le morphisme de schémas associé à une extension du corps de base, le morphisme canonique*

$$\pi_0(S' \times_S T/S') \longrightarrow S' \times_S \pi_0(T/S).$$

est un isomorphisme.

(iii) *Les fibres de h sont géométriquement connexes.*

(iv) *Si $T' \to S$ est un second S-schéma de type fini, le morphisme canonique*

$$\pi_0(T \times_S T'/S) \longrightarrow \pi_0(T/S) \times_S \pi_0(T'/S).$$

est un isomorphisme.

Toutes les propriétés énoncées sont démontrées dans le traité de Demazure et Gabriel ; voir [DG, I, §4, n° 6, p.122-126] ; ces auteurs montrent d'ailleurs un énoncé plus général, où le morphisme est supposé localement de type fini.

L'énoncé (ii), compatibilité à une extension du corps de base, est le plus important pour la suite ; c'est aussi celui dont la démonstration est la plus difficile.

1.3.2 Remarque. Soient k un corps et $k \to A$ une algèbre de type fini intègre et normale, de corps des fractions K. Les éléments de K qui sont algébriques sur k, sont en particuliers entiers sur k ; ils sont donc dans A puisque A est intégralement fermé dans K ; notant $A' \subset A$ l'anneau des éléments qui sont algébriques et séparables sur k, on voit que pour tout ouvert non vide U de $T = \mathrm{Spec}(A)$, on a des isomorphismes $\mathrm{Spec}(A') \xrightarrow{\sim} \pi_0(U/S) \xrightarrow{\sim} \pi_0(T/S)$. Cela sera généralisé en 4.3.4.

La normalité est essentielle pour les résultats de ce genre ; il est bon de garder présent à l'esprit le schéma T formé de deux droites sécantes et l'ouvert $U \subset T$ complémentaire du point d'intersection, c'est-à-dire $U = \mathrm{Spec}(k[X]_X \times k[Y]_Y) \subset \mathrm{Spec}(k[X,Y]/(XY)) = T$; le morphisme $\pi_0(U/S) \to \pi_0(T/S)$ n'est pas injectif puisque c'est le morphisme $\mathrm{Spec}(k \times k) \to \mathrm{Spec}(k)$ associé à la diagonale $k \to k \times k$.

1.3.3 Proposition. *Soient S un schéma noethérien et $f : T \longrightarrow S$ un morphisme propre, plat et à fibres géométriques réduites. Alors, dans la factorisation de Stein*

$$T \xrightarrow{h} \mathrm{Spec}_S(f_\star(\mathcal{O}_T)) \xrightarrow{g} S,$$

le morphisme g est étale fini et les fibres de h sont géométriquement connexes. En particulier, l'enveloppe affine de f est aussi son enveloppe étale.

Démonstration. Le théorème de connexion de Zariski affirme que les fibres géométriques de h sont connexes, voir [EGA III_1, 4.3.1, et 4.3.4].

Puisque f est propre et que ses fibres $T_s \to s$ sont géométriquement réduites, l'homomorphisme $\kappa(s) \to \Gamma(T_s, \mathcal{O}_{T_s})$ est fini étale. Le critère de platitude cohomologique ([EGA III_2, 7.8.7]) implique alors que le morphisme g est fini localement libre à fibres étales, c'est donc un morphisme fini étale.

La dernière assertion provient de 1.2.1. □

1.4 Un exemple d'inexistence d'enveloppe étale

1.4.1 Proposition. *Soit $f : T \to S$ un morphisme entre schémas séparés, intègres et noethériens de dimension 1. On suppose que f est un morphisme plat fini de rang 2 et qu'il est génériquement étale ; plus précisément, on suppose que le fermé de S défini par l'idéal discriminant est fini non vide.*

On suppose de plus que f satisfait la propriété suivante :

(P) *Le schéma S possède une infinité de points fermés s dont l'image réciproque $f^{-1}(s)$ n'est pas connexe, i.e. comporte deux points.*

Alors f n'admet pas d'enveloppe étale.

La propriété (P) est satisfaite si S est un schéma de type fini sur un corps algébriquement clos, ou bien pour le morphisme $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z}[i]) \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$ (puisqu'il y a une infinité de nombres premiers de la forme $4n+1$).

Démonstration. On va montrer que pour toute factorisation de f en $T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S$, avec h surjectif et g étale, il existe une factorisation $T \xrightarrow{k} F \to E \to S$, où k est surjectif et où F est étale sur S et distinct de E ; il n'existe donc pas de factorisation initiale.

D'après 1.1.3 on voit déjà que g est quasi-compact, donc que E est un schéma noethérien tout comme S ; donc g est quasi-séparé, et, toujours d'après 1.1.3, h est fidèlement plat de présentation finie ; en particulier, E est intègre.

Montrons que g est birationnel : soit s un point fermé de S pour lequel la fibre $f^{-1}(s) \to s$ est ramifiée. Posons $S' = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{S,s})$ et notons

$$T' \xrightarrow{h'} E' \xrightarrow{g'} S'$$

les morphismes obtenus par changement de base. Comme f est fini de rang 2 et que s est un point de ramification, $f^{-1}(s)$ est soit le spectre d'un corps extension radicielle de $\kappa(s)$, soit le spectre de $\kappa(s)[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$; dans tous les cas le schéma T' est local, et il en est de même de E' puisque h' est fidèlement plat ; E' est donc affine ; mais T' est fini sur S', donc E' est fini sur S' ; la considération des fibres fermées

$$f^{-1}(s) \xrightarrow{\bar{h}} g^{-1}(s) \xrightarrow{\bar{g}} s$$

montre que le morphisme étale $\bar{g}$ est de rang 1, donc (Nakayama) que g' est un isomorphisme ; par suite le corps des fractions de E', i.e. le corps des fonctions rationnelles de E, est égal à celui de S.

Soit U un ouvert affine non vide de E ; montrons que g induit une immersion ouverte $U \to S$.

En effet, $g(U)$ est un ouvert de S ; c'est donc un schéma séparé, d'où l'on tire que le morphisme $U \to g(U)$ est affine (appliquer (1.1.4) aux morphismes $U \to g(U) \to \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$) ; comme il est aussi fidèlement plat et birationnel, c'est un isomorphisme [AC, I, §3.5, Prop. 9, *b*)].

Montrons qu'il existe un point $x \in U$ tel que $h^{-1}(x)$ comporte deux points de T. Les schémas S et E étant noethériens intègres de dimension 1, les ensembles fermés $S - g(U)$ et $E - U$ sont finis ; d'après

la propriété (P), il existe donc un point $s \in g(U)$ tel que s ne soit pas dans $g(E-U)$ et tel que $f^{-1}(s)$ comporte deux points. Montrons par l'absurde que la fibre $g^{-1}(s)$ est réduite à un seul point $x \in U$: si on avait $g^{-1}(s) = \{x, x'\}$, alors l'injectivité de g sur U entraînerait que $x' \notin U$, donc que $s = g(x')$ serait dans $g(E-U)$, contrairement à l'hypothèse. Cela entraine que la fibre $h^{-1}(x) = h^{-1}(g^{-1}(s)) = f^{-1}(s)$ comporte deux points.

En recollant deux copies de E le long de l'ouvert $E - x$ on construit un E-schéma étale $F \to E$ non trivial, et une factorisation de h en $T \xrightarrow{k} F \to E$, où k est surjectif (1.2.2). □

Aucun des S-schémas étales E considérés dans cet exemple n'est séparé (s'il est distinct de S)(2.1.4) ; c'est un motif suffisant pour restreindre, dans la suite, l'étude des enveloppes étales à celles qui sont séparées.

Notons cependant que dans le cadre élargi des *espaces algébriques* l'enveloppe étale existe sans cette restriction de séparation, mais au prix d'hypothèses de régularité sur le morphisme $T \to S$. Une allusion succincte à ce point de vue est indiquée en (5.2).

2 Enveloppes étales séparées

2.1 Les catégories de factorisations

2.1.1 Définition. Soit $f : T \to S$ un morphisme plat de présentation finie. La **catégorie des factorisations étales séparées** $\mathsf{E}(T/S)$ (nom souvent abrégé dans la suite en « catégorie des factorisations ») est la catégorie dont les objets sont les factorisations de f en

$$T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S,$$

où h est surjectif et où g est étale et séparé. Le morphisme g est quasi-compact puisque f l'est et que h est surjectif.

2.1.2. Dans cette catégorie une flèche de (g, h) vers (g', h') est un morphisme de schémas $u : E \longrightarrow E'$ tel que $h' = uh$ et $g'u = g$; la première égalité implique qu'un tel morphisme u est nécessairement surjectif ; de plus, comme h est un épimorphisme (1.1.3, (iv)), un tel morphisme u, s'il existe, est unique.

Pour deux factorisations $T \xrightarrow{h} E \to S$ et $T \xrightarrow{h'} E' \to S$, il en existe une qui les « coiffe » : son schéma E'' est l'ouvert image du morphisme (ouvert) $T \to E \times_S E'$ déduit de h et h'. Ce schéma E'' est le produit de E et E', *dans la catégorie* $\mathsf{E}(T/S)$.

2.1.3. Le morphisme de projection $p_E : E'' \to E$ est un isomorphisme si et seulement si il existe un morphisme $E \to E'$, dans la catégorie $\mathsf{E}(T/S)$ des factorisations.

La condition est clairement nécessaire, pour voir qu'elle est suffisante considérons un morphisme $u : E \to E'$ et la section $v : E \to E''$ de p_E qui lui est associée ; il s'agit de voir que v est un isomorphisme ; mais le morphisme composé $p_E v$ est l'identité, et Δ_{p_E} est une immersion ouverte, donc v est une immersion ouverte (1.1.4), et il suffit de vérifier qu'elle est surjective. Or, les points de E'' sont les couples $(h'(t), h(t)) \in E' \times_S E$ pour t dans T ; mais, par hypothèse, on a $h' = uh$, donc ces couples s'écrivent aussi $(uh(t), h(t)) = v(h(t))$; la section v est donc bien surjective.

Les remarques qui précèdent n'utilisent pas la séparation ; voici, par contre, un premier résultat qui en dépend.

2.1.4 Lemme. (Prolongement d'isomorphisme) *Soit $u : X \to Y$ un morphisme fidèlement plat, quasi-compact et* **séparé**. *Soit $j : Y' \to Y$ un morphisme quasi-compact, quasi-séparé et schématiquement dominant (i.e. l'application $\mathcal{O}_Y \to j_\star(\mathcal{O}_{Y'})$ est injective). Notons $u' : X' = Y' \times_Y X \to Y'$ le morphisme déduit de u par changement de base ; on suppose que u' est un isomorphisme. Alors u est un isomorphisme.*

L'hypothèse sur le morphisme $j : Y' \to Y$ est satisfaite en particulier si c'est une immersion ouverte quasi-compacte qui est, de plus, schématiquement dominante, ou bien si Y est intègre de point générique η, et que j est le morphisme $\eta \to Y$.

D'ailleurs, cet énoncé étend légèrement le cas affine bien connu, qui s'énonce ainsi : soit $A \to B$ un homomorphisme fidèlement plat d'anneaux intègres. Si B est contenu dans le corps des fractions de celui de A, alors $A = B$. (voir [AC, I, §3.5, Prop. 9, b)])

Démonstration. Par « descente fpqc »le long de u [EGA IV$_2$, 2.7.1], il suffit de montrer que l'une des projections $X \times_Y X \to X$ est un isomorphisme ; or, ces morphismes admettent une section, à savoir le morphisme diagonal $\Delta_u : X \to X \times_Y X$; il s'agit donc de montrer que Δ_u est un isomorphisme. Puisque u est supposé séparé, son morphisme diagonal Δ_u est une immersion fermée ; il suffit donc de vérifier que Δ_u est schématiquement dominant. Comme le morphisme $j : Y' \to Y$ est quasi-compact, quasi-séparé et schématiquement dominant et que u est plat, les morphismes verticaux du diagramme suivant sont, eux aussi, schématiquement dominants [EGA I, 9.3.3].

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\Delta_u"] & X \times_Y X \\ X' \arrow[u] \arrow[r, "\Delta_{u'}"'] & X' \times_{Y'} X' \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Par hypothèse, $\Delta_{u'}$ est un isomorphisme, la commutativité du diagramme implique donc que Δ_u est schématiquement dominant. □

2.1.5 Lemme. *Soit $j : S' \to S$ un morphisme quasi-compact, quasi-séparé et schématiquement dominant. Pour un morphisme plat de présentation finie $T \to S$, le foncteur de changement de base par j induit un foncteur pleinement fidèle $\mathsf{E}(T/S) \to \mathsf{E}(T'/S')$.*

Démonstration. Pour un S-schéma X, on notera $X' = S' \times_S X$ son image par $j^\star$. Comme il y a au plus un morphisme entre deux objets de $\mathsf{E}(T/S)$ (2.1.2), le foncteur en question est fidèle. Soient $T \to E \to S$ et $T \to F \to S$ deux factorisations ; il faut montrer que tout morphisme dans $\mathsf{E}(T'/S')$, $E' \to F'$ provient d'un morphisme $E \to F$; soit $F \leftarrow G \to E$ leur produit dans $\mathsf{E}(T/S)$; en utilisant la projection $p = p_E : G \to E$ considérée dans (2.1.3), laquelle est fidèlement plate quasi-compacte et séparée, on est ramené à voir que si $p' = j^*p$ est un isomorphisme, alors p est un isomorphisme ; mais c'est précisément ce qu'affirme le lemme de prolongement (2.1.4). □

2.1.6 Lemme. *Soit $f : T \to S$ un morphisme plat de présentation finie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le morphisme f admet une enveloppe étale séparée.*

(ii) *La catégorie $\mathsf{E}(T/S)$ admet un objet initial.*

Lorsqu'il existe, cet objet initial est l'enveloppe séparée.

Démonstration. Il est clair qu'une enveloppe étale séparée est un objet initial dans la catégorie des factorisations de T/S. Réciproquement, supposons que la catégorie $\mathsf{E}(T/S)$ admette un élément initial $T \xrightarrow{h} E$. Soit $T \xrightarrow{h'} E'$ un morphisme de S-schémas, où E' est étale et séparé sur S, mais où on ne suppose pas que h' soit surjectif. Il s'agit de voir qu'il existe un unique S-morphisme $E \to E'$, compatible à h et h'.

Puisque f et $\Delta_{E'/S}$ sont universellement ouverts, h' l'est aussi (1.1.4). Posons $E'' = h'(T) \subset E'$; c'est un S-schéma étale séparé qui s'insère dans la factorisation $T \to E'' \to S$, laquelle est un élément de $\mathsf{E}(T/S)$ puisque $T \to E''$ est surjectif. Comme E est l'élément initial, on a un unique morphisme $E \to E''$, d'où, par composition, le morphisme cherché $E \to E'$. □

2.2 Ouverts fermés

2.2.1. Une immersion ouverte $u : U \to X$ est déterminée par l'ensemble ouvert U puisque u est le morphisme canonique de restriction d'espaces annelés $(U, \mathcal{O}_X|U) \to (X, \mathcal{O}_X)$. Ce n'est pas le cas pour les immersions fermées dans un schéma non réduit.

De plus, une immersion fermée plate $v : V \to X$ n'est pas nécessairement une immersion ouverte ; il faut et il suffit pour cela que l'idéal quasi-cohérent qui définit ce fermé soit localement de type fini car alors le morphisme v est plat et localement de présentation finie, c'est donc un morphisme ouvert ([EGA I, 7.3.10]) ; cet idéal est alors engendré par un idempotent.

Voici un exemple de fermé plat qui n'est pas ouvert ; un exemple plus élaboré se trouve dans [EGA I, 4.2.3].

Soient K un corps et I un ensemble infini. Désignons par $A = K^I$ l'anneau des familles $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de K, indexées par I. On vérifie que tout idéal de type fini de A est engendré par un idempotent ; c'est donc un facteur direct de A ; on en déduit que tout A-module est plat [AC, I, §4]. Soit $J = K^{(I)}$ l'idéal des familles à support fini ; ce n'est pas un idéal de type fini puisque I est infini ; donc l'immersion fermée plate $\mathrm{Spec}(A/J) \to \mathrm{Spec}(A)$ n'est pas ouverte.

2.2.2 Lemme. *Soit X un schéma.*

(i) *Soit $u : U \to X$ une immersion ouverte, donc un morphisme plat. Si l'ensemble U est fermé dans X, alors u est aussi une immersion fermée, plate.*

(ii) *Soit $v : V \to X$ une immersion fermée telle que l'ensemble $U = v(V)$ soit ouvert dans X. Notons $j : U \to X$ l'immersion ouverte canonique. Alors v se factorise en $V \xrightarrow{w} U \xrightarrow{j} X$, où w est une immersion fermée surjective (i.e. $V_{\mathrm{red}} \to U_{\mathrm{red}}$ est un isomorphisme).*

(iii) *Soit $v : V \to X$ une immersion fermée plate. Si l'ensemble $v(V)$ est ouvert dans X alors v est l'immersion ouverte définie par l'ouvert $v(V)$.*

(iv) *Une partie ouverte et fermée de X est la réunion des composantes irréductibles de X qui la rencontrent.*

Dans la suite, on évoquera l'image d'une immersion ouverte et fermée sous le nom de sous-schéma *ouvert fermé* (*clopen* en anglais).

L'ensemble des sous-schémas ouverts fermés de X est noté $\mathsf{Of}(X)$, cf [EGA IV$_4$, 18.5.3].

Démonstration. (i) Considérons l'ouvert fermé U' complémentaire de U et l'immersion ouverte $u' : U' \to X$. La décomposition en somme directe $X = U \sqcup U'$ conduit à l'isomorphisme de $\mathcal{O}_X$-algèbres $\mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} u_*(\mathcal{O}_U) \times u'_*(\mathcal{O}_{U'})$; l'homomorphisme $\mathcal{O}_X \to u_*(\mathcal{O}_U)$ est donc surjectif, par suite u est une immersion fermée plate.

(ii) Soit $v : V \to X$ une immersion fermée dont l'image $v(V)$ est un ouvert, noté U, de X. Dans le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "v"] \arrow[dr, dashed, "w"] & X \\ V \times_X U \arrow[u, "j'"] \arrow[r, "v'"'] & U \arrow[u, "j"'] \end{tikzcd}$$

le morphisme j' est, comme j, une immersion ouverte, et il est surjectif par hypothèse, puisque $v(V) = j(U)$; j' est donc un isomorphisme ; par suite, $w = v'j'^{-1}$ est, comme v', une immersion fermée surjective.

(iii) Si, dans la situation précédente, on suppose de plus que v est plat, alors w l'est aussi puisque j est un monomorphisme, donc w est une immersion fermée fidèlement plate ; c'est un isomorphisme.

(iv) Soit U un ouvert fermé de X, et W une composante irréductible de X, de point générique η ; on suppose que $U \cap W \neq \emptyset$. Pour montrer l'inclusion $W \subset U$, il suffit de vérifier que η est dans U puisque U est fermé ; or, pour un point $y \in U \cap W$, on a l'inclusion $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,y}) \subset U$ puisque U est ouvert, mais η est un point générique de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,y})$ puisque W est l'adhérence de η ; donc η et son adhérence sont dans le fermé U. □

2.2.3 Lemme. *Soit $u : T' \to T$ un morphisme de schémas ; notons $T' \times_T T' \overset{u_0}{\underset{u_1}{\rightrightarrows}} T' \xrightarrow{u} T$ le diagramme associé. Alors, si u est submersif - donc en particulier surjectif - la suite d'ensembles*

$$\mathsf{Of}(T) \longrightarrow \mathsf{Of}(T') \rightrightarrows \mathsf{Of}(T' \times_T T')$$

est exacte.
Si, de plus, les fibres de u sont connexes, alors l'application $\mathsf{Of}(T) \to \mathsf{Of}(T')$ est bijective.

Démonstration. Soit U' une partie de T'. Vérifions l'équivalence : $u_0^{-1}(U') = u_1^{-1}(U') \Leftrightarrow U' = u^{-1}u(U')$. L'implication « $\Leftarrow$ » provient de l'égalité $uu_0 = uu_1$. Réciproquement, il suffit de montrer que l'inclusion $U' \subset u^{-1}u(U')$ est une égalité. Or, soit $x' \in T'$ un élément pour lequel il existe $y' \in U'$ tel que $u(x') = u(y')$; il existe donc $z \in T' \times_T T'$ tel que $u_0(z) = x'$ et $u_1(z) = y'$; mais $y' \in U'$, donc $z \in u_1^{-1}(U') = u_0^{-1}(U')$, cette égalité étant l'hypothèse ; par suite l'élément $x' = u_0(z)$ est contenu dans $u_0u_0^{-1}(U') = U'$, puisque u_0 est surjectif.
Comme u est submersif et que $U' = u^{-1}u(U')$ est ouvert fermé, il en est de même de $u(U')$.
L'injectivité de l'application $\mathsf{Of}(T) \to \mathsf{Of}(T')$ découle de la surjectivité de u.

Supposons de plus que les fibres de u soient connexes ; alors pour tout ouvert fermé U' de T', l'inclusion $U' \subset u^{-1}u(U')$ est une égalité : en effet, pour $x' \in U'$, la fibre $u^{-1}u(x')$ est connexe et rencontre l'ouvert fermé U' en x' ; elle donc contenue dans U'. □

2.3 L'enveloppe comme quotient

2.3.1. Rappelons les quelques aspects des relations d'équivalence que nous utiliserons.

Les conventions d'indices sont celles de [SGA 3, V, §§1 à 3]. Dans l'écriture des puissances d'un S-schéma T, la lettre S en indice sera omise ; les morphismes de projection $p_k : T^n \longrightarrow T^{n-1}$ sont indexés de 0 à $n-1$, l'indice k désignant la composante *omise*.

Une relation d'équivalence dans un S-schéma T est la donnée d'une immersion $d : R \to T^2$ telle que pour tout S-schéma Z l'ensemble $R(Z) = \mathrm{Hom}_S(Z, R)$ soit le graphe d'une relation d'équivalence dans $T(Z)$; selon la convention de [EGA I, 4.2.1], une immersion est un isomorphisme sur un sous-schéma ; le

sous-schéma $d(R) \subset T^2$ sera nommé le **graphe** de R ; il faudra parfois tenir compte de l'isomorphisme $R \to d(R)$.
La **réflexivité** de R signifie que l'immersion $d : R \to T^2$ factorise le morphisme diagonal $\Delta_{T/S}$.
La **symétrie** de R assure que l'automorphisme de permutation des facteurs de T^2 stabilise R.
Pour énoncer la **transitivité** de R, on utilise les morphismes de projection $p'_i : T^3 \to T^2$, et les notations ${p'_i}^{-1}(R) = (R, d) \times_{T^2} (T^3, p'_i)$. La transitivité de R se traduit alors par l'inclusion

$$ {p'_0}^{-1}(R) \cap {p'_2}^{-1}(R) \subset {p'_1}^{-1}(R). $$

2.3.2 Proposition. (Relations d'équivalence associées aux factorisations). *Soit $f : T \to S$ un morphisme plat de présentation finie. Le foncteur « carrés fibrés »*

$$ \mathsf{Cf}_{T/S} : \mathsf{E}(T/S) \ \to \ \mathsf{R}(T/S), \quad \{T \to E \to S\} \ \longmapsto \ \{T \times_E T \longrightarrow T \times_S T\} $$

établit une équivalence entre la catégorie $\mathsf{E}(T/S)$ des factorisations étales séparées et la catégorie $\mathsf{R}(T/S)$ des relations d'équivalence dans T dont le graphe est ouvert et fermé dans $T \times_S T$.

Démonstration. Considérons une factorisation étale séparée de f, $T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S$. Le diagramme suivant est cartésien

$$ \begin{array}{ccc} T \times_E T & \xrightarrow{d_E} & T \times_S T \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h \times h} \\ E & \xrightarrow{\Delta_g} & E \times_S E. \end{array} $$

Puisque le morphisme $g : E \to S$ est étale et séparé, le morphisme diagonal Δ_g est une immersion ouverte et fermée ; donc d_E est une immersion ouverte et fermée, et c'est une relation d'équivalence puisque c'est l'image réciproque par h de la relation d'égalité dans E. Notons qu'une flèche $u : E \to E'$ dans $\mathsf{E}(T/S)$ induit une immersion (ouverte et fermée) $T \times_E T \to T \times_{E'} T$, et donc une immersion (ouverte et fermée) $R \to R'$ des graphes correspondants. Cela définit le foncteur $\mathsf{Cf}_{T/S}$.

La suite exacte de morphismes de schémas (1.1.3 (iv))

$$ T \times_E T \rightrightarrows T \xrightarrow{h} E $$

fait apparaître le morphisme h comme le quotient de T par la relation d'équivalence $R = T \times_E T \to T \times_S T$. Réciproquement, soit R une relation à graphe ouvert et fermé ; d'après le théorème 2.3.3 qui suit, le faisceau quotient $E' = T/R$ est représentable par schéma étale et séparé, et le morphisme $R \to T \times_{E'} T$ est un isomorphisme. Le foncteur $R \mapsto (T \to T/R \to S)$ est donc quasi-inverse de celui de l'énoncé.

□

2.3.3 Théorème. *Soit $f : T \longrightarrow S$ un morphisme plat et de présentation finie de schémas. Soit $d : R \longrightarrow T \times_S T$ une relation d'équivalence à graphe ouvert et fermé. Alors le faisceau fppf quotient T/R est représentable par un schéma E quasi-compact étale et séparé sur S ; enfin, le morphisme $R \to T \times_E T$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Un théorème de M. Artin montre que T/R est un espace algébrique [LMB, 10.4] ; puisque l'immersion $R \longrightarrow T \times_S T$ est ouverte, cet espace algébrique est étale, et il est séparé puisque l'immersion est aussi fermée ; un autre théorème [LMB, A.2] implique qu'un espace algébrique étale et séparé est (représentable par) un schéma.[3] □

3. Une ancienne version, améliorable, du présent texte propose cependant des démonstrations plus élémentaires de ce théorème [Fer19].

2.3.4 Théorème (Existence de l'enveloppe étale séparée)**.** *Soit $f : T \to S$ un morphisme plat de présentation finie. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le morphisme f admet une enveloppe étale séparée.*

(ii) *L'intersection des graphes d'équivalence ouverts fermés dans $T \times_S T$ est (ensemblistement) un ouvert.*

Ces propriétés sont vérifiées si S est localement connexe, et en particulier si l'ensemble des composantes irréductibles de S est localement fini.

Je dois à O. Gabber le fait que l'hypothèse de connexité locale suffit. Un appendice contient le résultat utilisé et sa démonstration.

Démonstration. i) $\Rightarrow$ ii). D'après (2.1.6) et (2.3.2), la propriété (i) équivaut à l'existence d'un graphe de relation d'équivalence ouvert fermé dans $T \times_S T$, qui soit minimal pour la relation $\subset$; c'est donc l'intersection des graphes considérés.

ii) $\Rightarrow$ i). Remarquons d'abord qu'une inclusion $R \subset R'$ de tels graphes est un morphisme affine et plat ; notons R_∞ l'intersection de ces graphes ; le morphisme $R_\infty \to T \times_S T$ est donc une immersion fermée plate ; si son image est un ouvert, le lemme 2.2.2,(iii) entraîne que R_∞ est un ouvert fermé.

Supposons que S soit localement connexe. Le théorème de Gabber (**A.8**) montre que $T \times_S T$ est alors localement connexe ; par suite chaque ouvert affine V de $T \times_S T$ ne contient qu'un nombre fini d'ouverts fermés ; en particulier, $V \cap R_\infty$ est ouvert.

Si l'ensemble des composantes irréductibles de S est localement fini, S est localement connexe [EGA I, 0_I, 2.1.5]. Mais on peut conclure dans ce cas sans passer par le théorème de Gabber ; en effet, le schéma $T \times_S T$ est plat et localement de présentation finies sur S donc l'ensemble de ses composantes irréductibles est localement fini [EGA I, 3.9.6, (ii)] ; a fortiori (2.2.2) l'ensemble des ouverts fermés de $T \times_S T$ est localement fini, et on en tire, comme plus haut, que $V \cap R_\infty$ est ouvert. $\square$

2.4 Un morphisme fini libre sans enveloppe étale séparée

La construction qui suit, entièrement due à O. Gabber, montre qu'une enveloppe étale, même séparée, peut ne pas exister sans une hypothèse de finitude topologique sur S, même pour un morphisme $T \to S$ fini libre de rang 2.

2.4.1 Proposition. *Il existe un anneau R tel que le morphisme*

$$f : \mathrm{Spec}(R[i]) \to \mathrm{Spec}(R)$$

n'admette pas d'enveloppe étale séparée.

Démonstration. On notera $\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}[1/2]$ l'extension de $\mathbf{Z}$ dans laquelle 2 est inversible. On désigne par $R \subset \mathbf{Z}_2^{\mathbf{N}}$ le sous-anneau de l'anneau produit formé des suites $u : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}_2$ qui sont constantes à valeurs entières pour n assez grand, cette dernière valeur étant nommée la « valeur finale » de u. À une partie finie non vide $A \subset \mathbf{N}$ on associe l'idempotent $e_A \in R$ défini par $e_A(n) = 1$ si $n \in A$, et $= 0$ sinon. On constate immédiatement que pour un idempotent $e \in R$, il existe une partie finie $A \subset \mathbf{N}$ telle que $e = e_A$ si la valeur finale de e est nulle, et $e = 1 - e_A$ si la valeur finale de e est 1.

Posons $U_A = \mathrm{Spec}(R/(1-e_A)R)$ et $U'_A = \mathrm{Spec}(R/e_AR)$; la restriction d'une suite $u \in R$ à la partie A induit un isomorphisme d'anneaux

$$R/(1-e_A)R \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}_2^A.$$

Pour chaque partie finie A, le schéma $S = \mathrm{Spec}(R)$ est décomposé en

$$S = U_A \sqcup U'_A.$$

Posons $R[i] = R[X]/(X^2+1)$, et considérons le morphisme fini libre de rang 2

$$f : \mathrm{Spec}(R[i]) = T \to S = \mathrm{Spec}(R).$$

On va montrer que la catégorie des factorisations étales séparées $\mathsf{E}(T/S)$ n'admet pas d'élément initial.

À une partie finie non vide $A \subset \mathbf{N}$, on associe le schéma

$$T_A \;=\; f^{-1}(U_A) \sqcup U'_A.$$

Puisque U_A est un schéma sur $\mathbf{Z}_2$, le morphisme $f^{-1}(U_A) \to U_A$ est un revêtement étale ; on définit ainsi une factorisation

$$T \xrightarrow{h_A} T_A \xrightarrow{g_A} S.$$

Vérifions que toute factorisation $T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S$ dans $\mathsf{E}(T/S)$ est de ce type.

Remarquons d'abord que g est fini, i.e. que c'est un *revêtement* étale ; en effet le morphisme diagonal Δ_g est une immersion fermée puisque g est séparé, et $f = gh$ est universellement fermé ; cela entraîne la même propriété pour h ; comme h est surjectif, on en tire que g est universellement fermé ; les fibres de ce morphisme étant finies discrètes, on peut appliquer [EGA IV_4, 18.12.4].

Le rang des fibres de g, rang qui est égal à 1 ou à 2, fournit la décomposition en ouverts fermés $S = V_1 \sqcup V_2$. Au dessus de V_2 le morphisme h est un isomorphisme, donc le morphisme $f^{-1}(V_2) \to V_2$ est étale, donc l'entier 2 est inversible sur V_2. Notons $e \in R$ l'idempotent tel que $V_2 = \mathrm{Spec}(R/eR)$; l'inversibilité de 2 se traduit, dans R, par une égalité de la forme $2u - 1 = ev$ où u et v sont des suites dans R ; comme la valeur finale de u est un entier, la valeur finale de e ne peut pas être nulle ; elle est donc égale à 1 ; la remarque faite plus haut sur les idempotents de R entraîne qu'il existe une partie finie A telle que $1 - e = e_A$; autrement dit $V_2 = U_A$, et $E = T_A$.

Comme toute partie finie A de $\mathbf{N}$ est strictement contenue dans une partie plus grande B, ce qui donne un morphisme non trivial $T_B \to T_A$, la catégorie des factorisations $\mathsf{E}(T/S)$ n'admet pas d'élément initial. □

2.4.2 Remarque. Le schéma $S = \mathrm{Spec}(R)$ n'est évidemment pas localement connexe ; il est facile d'exhiber un fermé irréductible de S qui soit intersection d'ouverts fermés, mais qui ne soit pas ouvert : soit $J \subset R$ l'idéal des suites de valeur limite nulle ; on a donc $R = \mathbf{Z} \oplus J$, et cet idéal est engendré par les idempotents e_A. Le fermé $\mathbf{V} = V(J)$ est irréductible, et on a

$$\mathbf{V} = \bigcap_{A \text{ fini} \subset \mathbf{N}} U'_A.$$

Ce fermé n'est pas ouvert puisqu'on a vu que les ouverts fermés de S sont les U'_A et leur complémentaires U_A ; ces derniers sont disjoints de $\mathbf{V}$, et par ailleurs si $A \subset B$ sont deux parties finies distinctes, alors l'inclusion d'idéaux $e_AR \subset e_BR$ est stricte, ainsi que, par suite, l'inclusion $U'_B \subset U'_A$.

3 Fonctorialités

3.1 Enveloppe et foncteur adjoint

Les points de vue « enveloppe » et « adjoint à gauche » sont équivalents. Précisons le passage de l'un à l'autre.

$\mathsf{Pl.pf}_S$ désigne la catégorie dont les objets sont les S-schémas plats de présentation finie, et dont les morphismes sont tous les S-morphismes ; par définition, les objets sont aussi quasi-compacts et quasi-séparés sur S [EGA I, 6.3.7], et d'après [EGA I, 6.3.8, (v)], tout S-morphisme entre objets de $\mathsf{Pl.pf}_S$ est automatiquement de présentation finie.

$\mathsf{Et.sep}_S$ désigne la sous-catégorie pleine de la précédente dont les objets sont étales, séparés et de présentation finie, c'est-à-dire étales quasi-compacts et séparés sur S.

3.1.1. On note

$$\iota_S : \mathsf{Et.sep}_S \to \mathsf{Pl.pf}_S$$

l'inclusion de ces catégories. Un adjoint à gauche de ι_S est un foncteur

$$\pi^s : \mathsf{Pl.pf}_S \longrightarrow \mathsf{Et.sep}_S$$

muni d'un isomorphisme de bifoncteurs, pour T dans $\mathsf{Pl.pf}_S$, et E dans $\mathsf{Et.sep}_S$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Et.sep}_S}(\pi^s(T), E) \quad \xrightarrow{\sim} \quad \mathrm{Hom}_{\mathsf{Pl.pf}_S}(T, \iota_S(E)).$$

Ce foncteur, quand il existe, associe donc à tout T dans $\mathsf{Pl.pf}_S$ un schéma $\pi^s(T)$ dans $\mathsf{Et.sep}_S$ et un morphisme

$$h_T : T \longrightarrow \pi^s(T),$$

qui sont « universels »pour les morphismes de T vers un S-schéma étale quasi-compact et séparé. Autrement dit, ce morphisme h_T est une **enveloppe étale séparée** pour T/S.

Si S est localement connexe, le théorème 2.3.4 dit que tout T/S dans $\mathsf{Pl.pf}_S$ admet une enveloppe ; par suite le foncteur adjoint $T \mapsto \pi^s(T/S)$ existe sur $\mathsf{Pl.pf}_S$.

Précisons l'image d'une flèche par le foncteur π^s : soient $f : T \to S$ et $f' : T' \to S$ deux objets de $\mathsf{Pl.pf}_S$; une flèche dans cette catégorie, est un morphisme de schémas $u : T' \to T$ tel que $f' = fu$; la propriété universelle de $h_{T'}$ montre qu'il existe un unique morphisme $\pi^s(u)$ pour lequel le carré suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "h_{T'}"'] & T \arrow[d, "h_T"] \\ \pi^s(T') \arrow[r, "\pi^s(u)"'] & \pi^s(T) \end{tikzcd}$$

3.2 Exemples

3.2.1. L'unicité de l'adjoint, lorsqu'il existe, montre que si S est le spectre d'un corps k, alors, d'après 1.3.1, on a un isomorphisme de foncteurs (en T)

$$\pi^s(T/S) \simeq \pi_0(T/S),$$

où, rappelons-le, $\pi_0(T/S)$ désigne le spectre de la clôture algébrique séparable de k dans l'anneau $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$.

3.2.2. (Sur une base hensélienne)

Soit S un schéma local hensélien dont les composantes irréductibles sont en nombre fini. Soit $f : T \to S$ un morphisme fidèlement plat de présentation finie. On suppose que T est connexe. Alors le S-morphisme étale $g : \pi^s(T/S) \to S$ est *fini et local*. Le morphisme de faisceaux d'algèbres $g_\star(\mathcal{O}_{\pi^s(T/S)}) \to f_\star(\mathcal{O}_T)$ permet d'identifier la source à la « clôture entière étale »de $\mathcal{O}_S$ dans $f_\star(\mathcal{O}_T)$.

Démonstration. Posons $E = \pi^s(T/S)$; c'est un schéma quasi-fini et séparé sur S. Comme f est surjectif, il existe $e \in E$ tel que le point $g(e) = s$ soit le point fermé de S ; d'après l'implication [EGA IV_4, 18.5.11, $a) \Rightarrow c)$], le schéma E est somme de deux schémas E' et E'', tels que $E' = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{E,e})$ et que la restriction $g_{|E'} : E' \to S$ soit un morphisme fini. Mais T est connexe et le morphisme $h : T \to E' \sqcup E''$ est surjectif ; donc E'' est vide. □

3.2.3. Soit $f : T \to S$ un morphisme fidèlement plat et de présentation finie. On suppose que les composantes irréductibles de S sont en nombre fini et que l'application canonique

$$\mathcal{O}_S \ \to \ f_\star(\mathcal{O}_T)$$

est bijective. Alors $\mathsf{E}(T/S) = \{S\}$, i.e. $\pi^s(T/S) = S$.

Démonstration. L'hypothèse faite sur le schéma S entraîne que les composantes connexes de S sont en nombre fini, et donc qu'elles sont ouvertes ; on peut donc supposer que S est connexe. L'hypothèse sur f implique en particulier que l'homomorphisme entre les anneaux de sections globales

$$\Gamma(S, \mathcal{O}_S) \to \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$$

est un isomorphisme, et donc qu'il échange les idempotents de ces anneaux ; on en tire que T est connexe. Notons $p : T \times_S T \to T$ l'une des projections ; puisque f est plat, on a encore une bijection [EGA I, 9.3.2]

$$\mathcal{O}_T \xrightarrow{\sim} p_\star(\mathcal{O}_{T \times_S T}),$$

et la même remarque montre que $T \times_S T$ est connexe. Une relation d'équivalence à graphe ouvert et fermé n'est pas vide puisqu'elle contient la diagonale ; elle est donc égale à $T \times_S T$, et le quotient est S. □

3.2.4. (La conique qui dégénère)

Reprenons l'exemple (1.2.3) d'une famille lisse de coniques $f : T \to S$, dont une fibre fermée $T_s \to s$ consiste en deux droites disjointes. L'enveloppe étale séparée de f est le schéma de base puisque la fibre générique $T_\eta \to \eta$ étant géométriquement intègre son enveloppe étale séparée est η, et cet isomorphisme se prolonge (2.1.4).

3.2.5. (Morphisme d'anneaux artiniens).

Soit $A \to B$ un homomorphisme d'anneaux locaux artiniens, faisant de B un A-module libre de type fini. Notons $f : T = \mathrm{Spec}(B) \to S = \mathrm{Spec}(A)$ le morphisme de schémas associé. On va expliciter, pour ce morphisme, la relation d'équivalence « initiale »(2.3.4), et le schéma $\pi^s(T/S)$.

Comme le morphisme f est séparé, le morphisme diagonal $v : \Delta \to T \times_S T$ est une immersion fermée ; mais les schémas en jeu sont finis discrets donc l'ensemble sous-jacent à Δ est un ouvert ; d'après(2.2.2 (iii)), le morphisme v se factorise en

$$\Delta \xrightarrow{w} \widetilde{\Delta} \xrightarrow{\widetilde{d}} T \times_S T$$

où w est une immersion fermée surjective, et $\widetilde{d}$ une immersion ouverte et fermée. Vérifions que ce sous-schéma $\widetilde{\Delta}$ est le graphe de la relation d'équivalence « initiale » : ce schéma est évidemment minimal parmi les sous-schémas ouverts fermés de $T \times_S T$ qui contiennent Δ ; il reste donc à voir que c'est le graphe d'une relation d'équivalence cf. 2.3.1. Or, cette relation est clairement réflexive et symétrique.

La transitivité se traduit par l'inclusion

$$p_0'^{-1}(\widetilde{\Delta}) \cap p_2'^{-1}(\widetilde{\Delta}) \subset p_1'^{-1}(\widetilde{\Delta}).$$

Le schéma $p_i'^{-1}(\widetilde{\Delta})$ est un sous-schéma ouvert fermé de T^3 d'espace topologique sous-jacent l'ouvert et fermé $p_i'^{-1}(\Delta)$; ce schéma est donc égal à $\widetilde{p_i'^{-1}(\Delta)}$; or, l'inclusion

$$p_0'^{-1}(\Delta) \cap p_2'^{-1}(\Delta) \subset p_1'^{-1}(\Delta)$$

est vraie puisqu'elle traduit la transitivité de la relation d'égalité dans T.

Le schéma quotient $E = T/\widetilde{\Delta}$ est donc isomorphe à l'enveloppe S-étale $\pi^s(T/S)$, et on a un isomorphisme (2.3.3)

$$\widetilde{\Delta} \xrightarrow{\sim} T \times_E T.$$

Puisque le morphisme $w : \Delta \to \widetilde{\Delta}$ est une immersion fermée surjective, il résulte de l'isomorphisme précédent que l'immersion fermée $\Delta \to T \times_E T$ est surjective, donc que le morphisme $T \to E$ est radiciel ([EGA I, 3.7.1]) ; on retrouve ainsi, lorsque $T \to S$ est une extension finie de corps, la factorisation usuelle en extension radicielle et extension séparable ([A, V, §7, Prop. 12]).

Traduisons cela en termes des anneaux sous-jacents : soit $\mathfrak{n}$ l'idéal maximal de $B \otimes_A B$ image réciproque, par l'homomorphisme $B \otimes_A B \to B$, de l'idéal maximal de B ; alors le sous schéma ouvert et fermé $\widetilde{\Delta}$ de $T \times_S T = \mathrm{Spec}(B \otimes_A B)$ est associé à l'ensemble ouvert et fermé $\{\mathfrak{n}\}$; c'est donc le spectre de $(B \otimes_A B)_{\mathfrak{n}}$, et le morphisme

$$\mathrm{Spec}((B \otimes_A B)_{\mathfrak{n}}) \to \mathrm{Spec}(B \otimes_A B)$$

est le graphe de la relation « initiale » ; l'enveloppe étale $E = \pi^s(T/S)$ est donc le spectre de l'anneau noyau de la double flèche

$$B \rightrightarrows (B \otimes_A B)_{\mathfrak{n}} .$$

Lorsque A et B sont des corps, cette description de la clôture séparable se trouve déjà dans [Fév69], où sa vérification repose sur la remarque suivante : soit $A(x) \subset B$ le sous-corps engendré par un élément x du noyau de la double flèche ; alors l'homomorphisme $A(x) \otimes_A A(x) \to A(x)$ est plat, autrement dit $A(x)$ est étale sur A. □

Enfin, on peut étendre ce résultat au cas où A est un corps et où B est une algèbre de type fini sur A, à condition de réinterpréter le localisé $(B \otimes_A B)_{\mathfrak{n}}$ considéré ci-dessus ; en effet, lorsque B est local artinien, la partie multiplicative complémentaire de $\mathfrak{n}$ dans $B \otimes_A B$ est égale à l'ensemble des éléments de cet anneau dont l'image par le morphisme $m : B \otimes_A B \to B$ est inversible, et cette partie conduit au même anneau de fractions que la partie $1+\mathrm{Ker}(m) \subset B \otimes_A B$. Voici, sans démonstration, la généralisation annoncée.

3.2.6 Proposition. *Soient k un corps et B une k-algèbre de type fini. Notons J l'idéal noyau de l'homomorphisme $m : B \otimes_k B \to B$. Alors la clôture algébrique séparable de k dans B est l'anneau*

$$\mathrm{Ker}[\ B \rightrightarrows (1+J)^{-1}(B \otimes_k B)\ ].$$

3.2.7. (Sur une base de Dedekind)

Lorsque S est un schéma de Dedekind intègre, de point générique η, et que le morphisme $f : T \to S$ est lisse, l'existence de l'enveloppe étale séparée de f m'avait été indiquée par B. Kahn il y a quelque temps. Sa démonstration consistait à introduire la clôture intégrale F de S dans le schéma étale E_0 de la factorisation générique $T_\eta \to E_0 \to \eta$ (3.2.1) ; T étant lisse sur S, il est intégralement fermé dans T_η, d'où un morphisme $T \to F$. On constate alors que F est fini plat sur S, et, F étant encore de Dedekind, le morphisme $T \to F$ est plat ; son image est un ouvert $E \subset F$, d'où des morphismes $T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S$; puisque h est fidèlement plat et que $gh = f$ est lisse, g est lisse ; mais g est aussi quasi-fini, c'est donc un morphisme étale.

3.2.8. (Revêtements étales galoisiens)

L'énoncé qui suit est bien connu (voir p. ex. [Sza, 5.3.8]), mais le théorème 2.3.2 permet d'en donner une démonstration essentiellement triviale. Inversement, on peut voir le théorème 2.3.2 comme la généralisation « naturelle » de la correspondance de Galois, les relations d'équivalence à graphe ouvert fermé remplaçant les sous-groupes du groupe de Galois ; cette analogie est déjà évoquée par Grothendieck en 1960 (TDTE III, p. 212-03).

Dans le contexte galoisien qui suit, il est nécessaire de se restreindre aux schémas intermédiaires qui sont *séparés* sur la base. En effet, on a vu en 1.2.2 qu'un morphisme fini étale $f : T \to S$, possédant une fibre fermée non connexe, admet une factorisation $T \to F \to S$, où $F \to S$ est un morphisme étale birationnel, universellement fermé, mais non séparé sur S, et donc non entier ; un tel F ne peut évidemment pas être associé à un sous-groupe.

3.2.9 Proposition. (Correspondance galoisienne) *Soient G un groupe fini et $f : T \to S$ un morphisme étale fini galoisien de groupe G, de sorte qu'on a un isomorphisme de S-schémas*

$$G \times T \to T \times_S T.$$

On suppose que T est connexe. Pour tout sous-groupe $H \subset G$, T/H est un schéma étale séparé et les morphismes $T \to T/H \to S$ forment une factorisation de f, au sens de 2.1.1. Réciproquement, pour une telle factorisation $T \to E \to S$, il existe un sous-groupe H de G tel que le carré

$$\begin{tikzcd} H \times T \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & T \times_E T \arrow[d] \\ G \times T \arrow[r, "\sim"] & T \times_S T \end{tikzcd}$$

soit cartésien. Cette correspondance entre sous-groupes et classes d'isomorphie de factorisations est bijective.

Démonstration. Pour un sous-groupe $H \subset G$, le morphisme $H \times T \to T \times_S T$ est le graphe (ouvert et fermé) d'une relation d'équivalence, et le quotient par cette relation est isomorphe au faisceau T/H, qui est donc un schéma étale et séparé sur S.

Réciproquement, considérons une factorisation $T \to E \to S$ et la relations d'équivalence associée $R = T \times_E T \to T \times_S T$. À chaque élément $g \in G$ est associée l'immersion $i_g : T \to T \times_S T,\ t \mapsto (gt, t)$. Comme R est un ouvert fermé de $T \times_S T$, $i_g^{-1}(R)$ est un ouvert fermé du schéma T, lequel est supposé connexe. Notons $H \subset G$ l'ensemble des $g \in G$ tels que $i_g^{-1}(R) = T$; on a donc $R = H \times T$.Vérifions, en termes ensemblistes, que H est un sous-groupe de G : un élément $h \in G$ est dans H si et seulement si on a, pour tout $t \in T$, $(ht, t) \in R$; en particulier, pour h et h' dans H, on a, pour tout $t \in T, (ht, t) \in R$ et $(h't, t) \in R$; d'où l'on tire pour tout $t \in T$, $(hh't, h't) \in R$ et $(h't, t) \in R$; la transitivité de R entraîne que hh' est dans H ; H étant fini, c'est bien un sous-groupe de G. □

3.3 Le morphisme $\pi^s(u)$ et le foncteur $\mathsf{E}(u)$

3.3.1. Rappelons (2.1.6) que lorsque $\pi^s(T/S)$ existe, c'est l'objet initial de la catégorie $\mathsf{E}(T/S)$ des factorisations étales séparées du morphisme $T \to S$. On explicite ici, pour une flèche u de $\mathsf{Pl.pf}_S$, quelques propriétés générales du morphisme $\pi^s(u)$, en les reliant au foncteur $\mathsf{E}(u) : \mathsf{E}(T/S) \to \mathsf{E}(T'/S)$, introduits ci-après. Le terme « factorisation » a, ici encore, le sens restreint donné dans 2.1.1 : il s'agira de factorisation par un étale séparé.

3.3.2 Lemme et définition. Soient $f : T \to S$ et $f' : T' \to S$ deux objets de $\mathsf{Pl.pf}_S$, et $u : T' \to T$ un S-morphisme. Soit $T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S$ une factorisation de f. Alors il existe une factorisation $T' \xrightarrow{h'} E' \xrightarrow{g'} S$ de f' et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
T' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "h'"] \arrow[dd, bend right=60, "f'"'] & T \arrow[d, "h"] \arrow[dd, bend left=60, "f"] \\
E' \arrow[r, "u'_E"] \arrow[d, "g'"] & E \arrow[d, "g"] \\
S \arrow[r, equal] & S
\end{tikzcd}$$

où u'_E est une immersion ouverte. Cette factorisation de f' est unique à isomorphisme unique près ; elle est caractérisée comme un couple (u'_E, h') où u'_E est une immersion ouverte et où h' est surjectif, tels que $hu = u'_E h'$; l'image de la factorisation (g, h) est (gu'_E, h'). Cela définit un foncteur $\mathsf{E}(u) : \mathsf{E}(T/S) \to \mathsf{E}(T'/S)$. Lorsque le composé hu est surjectif, alors u'_E est l'identité de E, et l'image de (g, h) est alors (g, hu).

Démonstration. Le morphisme $f' = fu$ est le composé des morphismes

$$T' \xrightarrow{u} T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S.$$

Puisque f' et Δ_g sont universellement ouverts, il en est de même de hu ; le sous-schéma $E' = \mathrm{Im}(hu)$ est donc un ouvert de E, et il est quasi-compact sur S puisque T' l'est ; on a donc le carré commutatif

suivant

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "h'"'] & T \arrow[d, "h"] \\ E' \arrow[r, "u'_E"'] & E \end{tikzcd}$$

où h' est surjectif et où u'_E est une immersion ouverte. On obtient ainsi une factorisation de f' en $T' \xrightarrow{h'} E' \xrightarrow{g'} S$, avec $g' = gu'_E$. Cette construction définit le foncteur $\mathsf{E}(u) : \mathsf{E}(T/S) \to \mathsf{E}(T'/S)$, que l'on écrira simplement, et par abus de notation,

$$\mathsf{E}(u)(h) \,=\, h';$$

dans cette formule le symbole h (resp. h') désigne donc l'objet $T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S$ de $\mathsf{E}(T/S)$ (resp. l'objet $T' \xrightarrow{h'} E' \xrightarrow{g'} S$ de $\mathsf{E}(T'/S)$). □

3.3.3 Remarque. On notera que le foncteur $\mathsf{E}(u)$ est défini sans hypothèse sur S, ni d'hypothèse de platitude sur u, et que le passage $u \mapsto \mathsf{E}(u)$ est contravariant, alors que $u \mapsto \pi^s(u)$ est covariant. Noter aussi que π^s commute aux limites inductives puisque c'est un adjoint à gauche, mais que le foncteur contravariant E ne transforme en général pas une somme $T = T_1 \sqcup T_2$ en le produit de catégories $\mathsf{E}(T_1/S) \times \mathsf{E}(T_2/S)$.

3.3.4 Proposition. *Soient $u : T' \to T$ un morphisme dans $\mathsf{Pl.pf}_S$, et $\mathsf{E}(u) : \mathsf{E}(T/S) \to \mathsf{E}(T'/S)$ le foncteur qu'il induit entre les catégories de factorisations. Si le foncteur π^s existe, alors :*

1. *Le morphisme canonique $h_T : T \to \pi^s(T/S)$ induit une équivalence $\mathsf{E}(h_T)$ entre les catégories de factorisations, et un isomorphisme*

$$\pi^s(h_T) : \pi^s(T/S) \xrightarrow{\sim} \pi^s(\pi^s(T/S)/S).$$

2. *Si le foncteur $\mathsf{E}(u)$ est essentiellement surjectif, alors le morphisme $\pi^s(u) : \pi^s(T') \to \pi^s(T)$ est une immersion ouverte.*
3. *Pour que le morphisme $\pi^s(u)$ soit un isomorphisme il faut et il suffit que le foncteur $\mathsf{E}(u)$ soit une équivalence de catégories et que le morphisme composé $h_T \circ u : T' \to \pi^s(T/S)$ soit surjectif[4] ; cette dernière condition est évidemment vérifiée si u est surjectif.*

Démonstration. 1) Lorsque l'adjoint existe, le morphisme $\pi^s(u)$ s'insère dans le diagramme commutatif suivant, où v est surjectif puisque $\mathsf{E}(u)(h_T)$ est surjectif par définition, et où u' est une immersion ouverte.

4. Je remercie Laurent Moret-Bailly de m'avoir montré que cet énoncé est faux sans cette dernière hypothèse. Voici son exemple : soit $u : T' \to T$ une immersion ouverte quasi-compacte, non surjective, et prenons T comme schéma de base : le foncteur $\mathsf{E}(u) : \mathsf{E}(T/S) \to \mathsf{E}(T'/S)$ est alors une équivalence entre ces catégories puisqu'elles ont un seul objet ; on a donc $\pi^s(T/S) = T$, $\pi^s(T'/S) = T'$ et $\pi^s(u) = u$; mais u n'est pas un isomorphisme.

$(\star)$

$$\begin{tikzcd}
T' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "h_{T'}"] \arrow[dd, bend right=60, "\mathsf{E}(u)(h_T)"'] & T \arrow[d, "h_T"] \\
\pi^s(T') \arrow[r, "\pi^s(u)"] \arrow[d, "v"] & \pi^s(T) \arrow[d, equal] \\
F \arrow[r, "u'"'] & \pi^s(T)
\end{tikzcd}$$

Pour chaque T, le morphisme $h_T : T \to \pi^s(T/S)$ induit, par définition, une équivalence de catégories

$$\mathsf{E}(h_T) : \mathsf{E}(\pi^s(T/S)/S) \xrightarrow{\sim} \mathsf{E}(T/S).$$

La définition de $\pi^s(h_T)$, lue dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "h_T"] \arrow[d, "h_T"'] & \pi^s(T) \arrow[d, equal] \\
\pi^s(T) \arrow[r, "\pi^s(h_T)"'] & \pi^s(\pi^s(T)),
\end{tikzcd}$$

où h_T est un épimorphisme (1.1.3), implique immédiatement que $\pi^s(h_T)$ est un isomorphisme.

2) Lorsque le foncteur $\mathsf{E}(u)$ est essentiellement surjectif, il existe une factorisation $h : T \to E$ telle que $\mathsf{E}(u)(h) = h_{T'}$; introduisons le morphisme canonique $w : \pi^s(T) \to E$ tel que $h = wh_T$; on a donc le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
T' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "h_{T'}"'] & T \arrow[d, "h_T"] \arrow[dd, bend left=60, "h"] \\
\pi^s(T') \arrow[r, "\pi^s(u)"] \arrow[d, equal] & \pi^s(T) \arrow[d, "w"] \\
\pi^s(T') \arrow[r, "u'"'] & E
\end{tikzcd}$$

Par définition du foncteur $\mathsf{E}(u)$, u' est une immersion ouverte ; comme w est un morphisme étale, donc à diagonale une immersion ouverte, on conclut de 1.1.4 que $\pi^s(u)$ est une immersion ouverte.

3) Le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{E}(\pi^s(T/S)/S) \arrow[r, "\mathsf{E}(h_T)"] \arrow[d, "\mathsf{E}(\pi^s(u))"'] & \mathsf{E}(T/S) \arrow[d, "\mathsf{E}(u)"] \\
\mathsf{E}(\pi^s(T'/S)/S) \arrow[r, "\mathsf{E}(h_{T'})"'] & \mathsf{E}(T'/S).
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme les foncteurs « horizontaux » sont, d'après 1), des équivalences de catégories ; cela montre que si $\pi^s(u)$ est un isomorphisme alors $\mathsf{E}(u)$ est une équivalence ; par ailleurs, le diagramme $(\star)$ et la surjectivité de $h_{T'}$ montrent que le composé $h_T u$ est surjectif.

Supposons, réciproquement, que $\mathsf{E}(u)$ soit une équivalence de catégories, donc, en particulier, un foncteur essentiellement surjectif. D'après 2), le morphisme $\pi^s(u)$ est une immersion ouverte ; comme le morphisme $h_T u$ est supposé surjectif, l'immersion ouverte $\pi^s(u)$ est un isomorphisme. □

Le résultat suivant m'a été signalé par Bruno Kahn. Dans [Wis, Thm. 4.5], Jonathan Wise donne un énoncé d'adjonction analogue pour un morphisme d'espaces algébriques, mais ce morphisme est supposé avoir ses fibres géométriquement réduites, et il n'est pas question de séparation.

3.3.5 Proposition. *Soit $f : T \to S$ un morphisme plat de présentation finie, où S est localement connexe.*

i) Le foncteur

$$f^* : \mathsf{Et.sep}_S \to \mathsf{Et.sep}_T$$

admet un adjoint à gauche $f_!^{\text{ét}}$, donné, pour $F \in \mathsf{Et.sep}_T$, par la formule

$$f_!^{\text{ét}}(F) = \pi^s(F/S).$$

ii) (Transitivité de π^s) *Soit $U \in \mathsf{Pl.pf}_T$. Alors on a un isomorphisme canonique, et fonctoriel en U :*

$$\pi^s(U/S) \simeq \pi^s(\pi^s(U/T)/S).$$

Démonstration. i) Notons d'abord que le morphisme composé $F \to T \to S$ est plat et de présentation finie, de sorte que $\pi^s(F/S)$ est défini. Soit $E \in \mathsf{Et.sep}_S$. On a une suite d'isomorphismes

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Et.sep}_S}(\pi^s(F/S), E) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{Pl.pf}_S}(F, E) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{Et.sep}_T}(F, E \times_S T)$$

le premier par définition de π^s et le second par la propriété universelle du produit fibré. Cela démontre *i)*, ces isomorphismes étant naturels en E.

ii) Le foncteur f^* de changement de base $E \mapsto T \times_S E$ donne lieu au diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Et.sep}_S \arrow[r, "\iota_S"] \arrow[d, "f^*"'] & \mathsf{Pl.pf}_S \arrow[d, "f^*"] \\
\mathsf{Et.sep}_T \arrow[r, "\iota_T"'] & \mathsf{Pl.pf}_T\,.
\end{tikzcd}$$

Passant aux adjoints à gauche, on obtient l'égalité énoncée, mais il y a une vérification plus directe en montrant que les propriétés universelles coincident : soit Z étale et séparé sur S, alors on a des identifications naturelles en U et Z

$$\mathrm{Hom}_S(\pi^s(U/S), Z) = \mathrm{Hom}_S(U, Z) = \mathrm{Hom}_T(U, Z \times_S T) = \mathrm{Hom}_T(\pi^s(U/T), Z \times_S T) =$$
$$= \mathrm{Hom}_S(\pi^s(U/T), Z) = \mathrm{Hom}_S(\pi^s(\pi^s(U/S)/S), Z).$$

□

4 Changements de base

4.1

Soient $f : T \to S$ un morphisme plat et de présentation finie, et $\omega : S' \to S$ un morphisme ; désignons par ω^* le foncteur de changement de base $\mathsf{Sch}_S \to \mathsf{Sch}_{S'}$, $X \mapsto X' := S' \times_S X$; il induit un foncteur entre les catégories de factorisations

$$(\star) \qquad \mathsf{E}(T/S) \to \mathsf{E}(T'/S').$$

La propriété universelle du foncteur π^s, s'il existe, donne un S'-morphisme canonique de schémas

$$(\star\star) \qquad \pi^s(T'/S') \to S' \times_S \pi^s(T/S),$$

noté aussi

$$\pi^s(\omega^* f) \to \omega^* \pi^s(f).$$

Si le changement de base $(\star)$ est une équivalence entre ces catégories de factorisations, on en tire que le morphisme $(\star\star)$ entre leur éléments initiaux est un isomorphisme. La réciproque est fausse (4.1.1).

Dans ce paragraphe, quelques préliminaires (4.2) sur les liens entre propriétés topologiques de ω et propriétés du foncteur ω^* conduisent à un énoncé assurant que ce foncteur entre catégories de factorisations est une équivalence (4.2.5) ; l'hypothèse de connexité géométrique sur les fibres géométriques de ω y est essentielle, voir le contre-exemple (4.1.1). Nous montrons ensuite (4.3) comment des hypothèses de normalité (sur S et sur les fibres géométriques de f) entraînent des résultats de changement de base utilisables ; ces derniers sont détaillés dans quelques applications (4.4).

4.1.1 Remarque. L'exemple qui suit montre qu'un changement de base peut induire un isomorphisme sur les schémas π^s (cf. $(\star\star)$), sans établir une equivalence entre les catégories de factorisations $(\star)$.

Soient L un corps et I un ensemble fini ; notons $\prod_I L$ la L-algèbre des applications $I \to L$. Une partition de I est déterminée par une relation d'équivalence R sur I, soit une application surjective $\rho : I \to I/R$; il lui est associé un homomorphisme injectif de L-algèbres

$$\prod_{I/R} L \longrightarrow \prod_I L, \quad \alpha \mapsto \alpha \circ \rho.$$

Cette construction montre que la catégorie $\mathsf{E}(\prod_I L/L)$ des sous-L-algèbres étales de $\prod_I L$ est équivalente à la catégorie des partitions de I. (Dans les quelques lignes qui suivent ne sont écrits que des anneaux là où il faudrait lire leur spectre).

Considérons maintenant une extension finie galoisienne de corps, $k \to K$, de groupe de Galois G, de sorte que, d'après la théorie de Galois, la catégorie $\mathsf{E}(K/k)$ est équivalente à celle des sous-groupes de G. Considérons le changement de base $\omega : k \to K$. L'homomorphisme de K-algèbres (pour la structure de K-algèbre provenant du second facteur de $K \otimes_k K$)

$$K \otimes_k K \longrightarrow \prod_G K, \quad x \otimes y \longmapsto (\sigma \mapsto \sigma(x)y).$$

est un isomorphisme [A, V, §10, prop.8, p.61]. Par suite, la catégorie des sous-K-algèbres étales de $K \otimes_k K$ est équivalente à la catégorie des partitions de *l'ensemble* G, alors que l'ensemble des sous-k-algèbres de

K est isomorphe à l'ensemble des *sous-groupes* de G ; en général, il y en a beaucoup moins. Cela montre que le foncteur de changement de base ($\star$)

$$\mathsf{E}(K/k) \to \mathsf{E}(K \otimes_k K/K), \quad E \longmapsto E \otimes_k K$$

n'est en général pas surjectif (pour une extension de degré 3 il y a 2 sous-groupes et 5 partitions). Cependant, le morphisme ($\star\star$)

$$\pi^s(K \otimes_k K/K) \to K \otimes_k \pi^s(K/k)$$

est bien un isomorphisme.

4.2

4.2.1 Lemme. *Soient $X \xrightarrow{v} Y \xrightarrow{u} Z$ deux morphismes quasi-compacts et quasi-séparés de schémas. Alors l'image schématique de uv est un sous-schéma fermé de l'image schématique de u ; ces sous-schémas sont égaux si v est schématiquement dominant.*

Démonstration. Rappelons [EGA I, 6.10.1] que l'image schématique d'un morphisme $u : Y \to Z$ est le sous-schéma fermé de Z défini par l'idéal $\mathrm{Ker}(\mathcal{O}_Z \to u_\star(\mathcal{O}_Y))$. Introduisons donc les applications canoniques $\theta_u : \mathcal{O}_Z \to u_\star(\mathcal{O}_Y)$ et $\theta_v : \mathcal{O}_Y \to v_\star(\mathcal{O}_X)$. L'application analogue θ_{uv} est la composée

$$\mathcal{O}_Z \xrightarrow{\theta_u} u_\star(\mathcal{O}_Y) \xrightarrow{u_\star(\theta_v)} (uv)_\star(\mathcal{O}_X).$$

Le noyau de θ_u est donc contenu dans celui de θ_{uv}, et lui est égal lorsque $u_\star(\theta_v)$ est injectif. Ces idéaux de $\mathcal{O}_Z$ définissent respectivement l'image schématique de u, et celle de uv. □

4.2.2 Lemme. *Soit $\omega : X' \to X$ un morphisme quasi-compact, quasi-séparé et schématiquement dominant de schémas. Pour toute immersion quasi-compacte $i : Z' \to X'$ on note $\overline{Z'}$ l'image schématique de Z' dans X relativement à ωi, c'est-à-dire le sous-schéma fermé de X défini par l'idéal* $\mathrm{Ker}(\mathcal{O}_X \to (\omega i)_*(\mathcal{O}_{Z'}))$. *Alors,*

1. *Pour $Z \in \mathsf{Of}(X)$ le fermé $\overline{\omega^*(Z)}$ est égal à Z.*
2. *Le foncteur $\omega^* : \mathsf{Of}(X) \to \mathsf{Of}(X')$ est pleinement fidèle.*
3. *Si $\omega^* : \mathsf{Of}(X) \to \mathsf{Of}(X')$ est une équivalence de catégories, alors pour $Z' \in \mathsf{Of}(X')$, $\overline{Z'}$ est un ouvert fermé de X, et le foncteur $Z' \mapsto \overline{Z'}$ définit un quasi-inverse de ω^*.*
4. *Si le foncteur $\omega^* : \mathsf{Of}(X) \to \mathsf{Of}(X')$ est une équivalence, alors pour des ouverts fermés Z'_1 et Z'_2 de X', on a $\overline{Z'_1 \cap Z'_2} = \overline{Z'_1} \cap \overline{Z'_2}$.*

Démonstration. 1) Soit Z un ouvert fermé de X. Considérons le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \omega^* Z \arrow[r, "\omega_Z"] \arrow[d] & Z \arrow[d] \\ X' \arrow[r, "\omega"'] & X. \end{tikzcd}$$

La restriction ω_Z de ω au dessus de l'ouvert Z de X est un morphisme schématiquement dominant ; d'après le lemme qui précède l'image schématique de $\omega^* Z$ dans X est donc égale à celle de Z dans X, c'est-à-dire Z puisque Z est fermé dans X.

2) Soient Z_1 et Z_2 des ouverts et fermés de X ; les flèches de $\mathsf{Of}(X)$ sont les inclusions. Or, d'après 1), la relation $\omega^* Z_1 \subset \omega^* Z_2$ équivaut à $Z_1 \subset Z_2$.

3) Montrons d'abord que pour $Z' \in \mathsf{Of}(X')$, $\overline{Z'}$ est un ouvert fermé de X : en effet, puisque le foncteur ω^* est essentiellement surjectif, il existe $Z \in \mathsf{Of}(X)$ et un isomorphisme $Z' \simeq \omega^*(Z)$; mais alors, d'après 1), on a $\overline{Z'} \simeq \overline{\omega^*(Z)} = Z$, et Z est ouvert fermé dans X. L'application $Z' \mapsto \overline{Z'}$ définit donc un foncteur $\mathsf{Of}(X') \to \mathsf{Of}(X)$ qui est quasi-inverse de ω^*. D'où l'on tire que le foncteur $Z' \mapsto \omega^*(\overline{Z'})$ est isomorphe à l'identité.

4) En particulier, en utilisant la pleine fidélité de ω^* , on voit que pour des ouverts fermés Z'_1 et Z'_2 de X', on a

$$\overline{Z'_1 \cap Z'_2} = \overline{Z'_1} \cap \overline{Z'_2}.$$

□

4.2.3 Lemme. *Soit $\omega : S' \to S$ un morphisme quasi-compact et quasi-séparé de schémas. Soient $f : T \to S$ un morphisme plat de présentation finie et $f' : T' = S' \times_S T \to S'$ le morphisme obtenu par changement de base. Considérons le diagramme de foncteurs*

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{E}(T/S) \arrow[r, "\mathsf{Cf}_{T/S}"] \arrow[d, "\omega^*"'] & \mathsf{R}(T/S) \arrow[r] \arrow[d, "\omega^*"'] & \mathsf{Of}(T \times_S T) \arrow[d, "\omega^*"] \\
\mathsf{E}(T'/S') \arrow[r, "\mathsf{Cf}_{T'/S'}"'] & \mathsf{R}(T'/S') \arrow[r] & \mathsf{Of}(T' \times_{S'} T'),
\end{tikzcd}$$

où le même symbole ω^* désigne, par abus de notation, le foncteur de changement de base. Alors les deux carrés sont commutatifs. □

Il faut remarquer l'isomorphisme canonique $\omega^*(T \times_S T) = S' \times_S T \times_S T = T' \times_{S'} T'$.

4.2.4 Proposition. *Soit $\omega : S' \to S$ un morphisme quasi-compact, quasi-séparé et schématiquement dominant de schémas. Soient $f : T \to S$ un morphisme plat de présentation finie et $f' : T' = S' \times_S T \to S'$ le morphisme obtenu par changement de base. On suppose que l'application*

$$\omega^* : \mathsf{Of}(T \times_S T) \to \mathsf{Of}(T' \times_{S'} T')$$

est bijective. Alors le foncteur de changement de base $\mathsf{E}(T/S) \to \mathsf{E}(T'/S')$ est une équivalence de catégories.

Démonstration. Puisque le foncteur « oubli » $\mathsf{R}(T/S) \to \mathsf{Of}(T \times_S T)$ est pleinement fidèle, et que, par hypothèse, le foncteur ω^* induit une équivalence sur les catégories d'ouverts fermés, il suffit de montrer que sa restriction aux relations d'équivalence est essentiellement surjective. Soit donc R' une relation d'équivalence dans T', dont le graphe est ouvert et fermé ; par hypothèse, il existe un ouvert fermé $R \in \mathsf{Of}(T \times_S T)$ tel que $R' = \omega^*(R)$. Il faut montrer que R est une relation d'équivalence dans T.

Nous écrirons les puissances d'un S-schéma, ou d'un S'-schéma, en omettant les indices S et S', de sorte que $T^2 = T \times_S T$, et $T'^2 = T' \times_{S'} T' = S' \times T^2$.
Pour un sous-schéma Z' de T'^2, on note $\overline{Z'}$ l'image schématique du morphisme composé $Z' \to T'^2 \to T^2$. Si $U \subset T^2$ est ouvert fermé, alors le morphisme canonique

$$(a) \qquad \overline{\omega^*(U)} \to U$$

est un isomorphisme (4.2.2, 1.) ; de plus pour des ouverts fermés Z'_1 et Z'_2 de T'^2, on a d'après (4.2.2, 3.), la relation :

$$(b) \qquad \overline{Z'_1 \cap Z'_2} = \overline{Z'_1} \cap \overline{Z'_2}.$$

Reprenons l'ouvert fermé R de T^2 tel que $\omega^*(R)$ soit une relation d'équivalence dans T', et montrons que R est une relation d'équivalence, en reprenant les notations rappelées dans 2.3.1.

— (Réflexivité) Notons Δ' et Δ les sous-schémas diagonaux dans T'^2 et T^2 ; ils sont isomorphes respectivement à T' et T ; le morphisme $\Delta' \to \Delta$, est induit par ω ; il est donc schématiquement dominant. La commutativité du carré

$$\begin{tikzcd} \Delta' \arrow[r, "\omega"] \arrow[d] & \Delta \arrow[d] \\ T'^2 \arrow[r, "\omega"'] & T^2 \end{tikzcd}$$

implique alors (4.2.1) que l'image schématique $\overline{\Delta'}$ de Δ' dans T^2 est égale à l'adhérence schématique $\overline{\Delta}$ de Δ dans T^2 : $\overline{\Delta} = \overline{\Delta'}$. Puisque la relation $\omega^*(R)$ est réflexive par hypothèse, on a $\Delta' \subset \omega^*(R)$; d'où l'on tire, en tenant compte de (a), les inclusions suivantes.

$$\Delta \ \subset \ \overline{\Delta} = \overline{\Delta'} \ \subset \ \overline{\omega^*(R)} = R.$$

— (Symétrie) Considérons l'automorphisme σ de T^2 qui permute les facteurs. L'inclusion $R \cap \sigma R \subset R$ d'ouverts fermés de T^2 devient une égalité par image réciproque par le morphisme ω qui est schématiquement dominant. C'est donc une égalité.

— (Transitivité) Il s'agit de vérifier l'inclusion

$$p_0'^{-1}(R) \cap p_2'^{-1}(R) \subset p_1'^{-1}(R),$$

c'est-à-dire, d'après (a), l'inclusion

$$p_0'^{-1}(\overline{\omega^*(R)}) \cap p_2'^{-1}(\overline{\omega^*(R)}) \subset p_1'^{-1}(\overline{\omega^*(R)}).$$

Puisque les morphismes de projection $p_i : T^3 \to T^2$ sont plats, ils préservent la formation des images schématiques [EGA I, 9.3.3] ; on a donc $p_i'^{-1}(\overline{\omega^*(R)}) = \overline{p_i'^{-1}(\omega^*(R))}$. La formule (b) et le fait que $\omega^*(R)$ soit transitive, permettent de conclure. □

4.2.5 Théorème. *Soit $\omega : S' \to S$ un morphisme quasi-compact, quasi-séparé et fidèlement plat. Soient $f : T \to S$ un morphisme plat de présentation finie et $f' : T' = S' \times_S T \to S'$ le morphisme obtenu par changement de base. On suppose que les fibres géométriques du morphisme ω sont connexes. Alors le foncteur de changement de base ω^**

$$\mathsf{E}(T/S) \to \mathsf{E}(T'/S')$$

est une équivalence de catégories. Si, de plus, le foncteur π^s existe, alors le morphisme canonique

$$\pi^s(T'/S') \to S' \times_S \pi^s(T/S)$$

est un isomorphisme.

Cet énoncé est une conséquence immédiate de l'énoncé suivant légèrement plus général.

4.2.6 Proposition. *Soit $\omega : S' \to S$ un morphisme quasi-compact, quasi-séparé et schématiquement dominant. Soient $f : T \to S$ un morphisme plat de présentation finie et $f' : T' = S' \times_S T \to S'$ le morphisme obtenu par changement de base. On suppose que le morphisme ω est universellement submersif et que ses fibres géométriques sont connexes. Alors le foncteur de changement de base ω^**

$$\mathsf{E}(T/S) \to \mathsf{E}(T'/S')$$

est une équivalence de catégories. Si, de plus, le foncteur π^s existe, alors le morphisme canonique

$$\pi^s(T'/S') \to S' \times_S \pi^s(T/S)$$

est un isomorphisme.

Ces hypothèses sur ω sont vérifiées en particulier, pour un homéomorphisme universel schématiquement dominant.

Démonstration. Rappelons [EGA I, 3.10.1] qu'un morphisme $f : X \to Y$ est dit **submersif** s'il est surjectif et si la topologie de Y est le quotient de celle de X par la relation d'équivalence définie par f. Tout morphisme surjectif et ouvert, ou bien surjectif et fermé, est submersif. Un morphisme fidèlement plat quasi-compact est universellement submersif [EGA I, 7.3.5].

On a vérifié en 2.2.3 que si ω est submersif à fibres connexes, alors ω^* induit une bijection $\mathsf{Of}(S) \to \mathsf{Of}(S')$; par définition, les propriétés attribuées à ω sont stables par changement de base ; d'où l'on tire que ω^* induit une bijection $\mathsf{Of}(T \times_S T) \to \mathsf{Of}(T' \times_{S'} T')$, et cela implique la conclusion d'après (4.2.4). □

4.3 Cas d'une base normale. Prolongements

Lorsque S est un schéma normal intègre, de point générique ξ et que le morphisme de présentation finie $T \to S$ est, disons, lisse, alors les schémas T et $T \times_S T$ sont normaux, et ils sont sommes (finies) de leurs composantes irréductibles ; on verra, dans ce §, que sous ces hypothèses le foncteur adjoint π^s commute aux restrictions aux ouverts de la base, et même que le morphisme de restriction à la fibre générique $T_\xi \to \xi$ établit une équivalence de catégories de factorisations

$$\mathsf{E}(T/S) \to \mathsf{E}(T_\xi/\xi).$$

4.3.1. En fait, on obtiendra une équivalence de catégories pour des changement de base plus généraux que $\xi \to S$. Pour éviter la répétition de démonstrations très semblables on est amené à introduire un type de morphisme $\omega : S' \to S$ qui contienne, entre autres, à la fois les immersions ouvertes quasi-compactes, et la fibre générique $\xi \to S$ d'un schéma intègre S ; ce sont là deux occurrences de **monomorphismes plats quasi-compacts**.

Voici quelques propriétés des monomorphismes plats quasi-compacts. Notons d'abord que les propriétés qui les définissent sont stables par changement de base. Soit $\omega : S' \to S$ un monomorphisme plat quasi-compact. Pour $x' \in S'$, l'homomorphisme $\mathcal{O}_{S,\omega(x')} \to \mathcal{O}_{S',x'}$ est un isomorphisme ; en particulier, si S est normal, il en est de même de S' ; cet isomorphisme entre les anneaux locaux montre aussi que si x' est un point maximal de S' (i.e. le point générique d'une composante irréductible), alors $\omega(x')$ est maximal dans S. On en tire enfin que ω induit un homéomorphisme de S' sur son image $\omega(S')$ munie de la topologie induite par celle de S : en effet, si Z' est un sous-schéma fermé de S', son image schématique $\overline{Z'}$ dans S est bien définie (par quasi-compacité) et on a $\omega^*(\overline{Z'}) = Z'$, comme on le constate en localisant aux points de S'.

4.3.2. Rappelons qu'un schéma S est dit **normal** si tous ses anneaux locaux $\mathcal{O}_{S,x}$ sont intègres et intégralement clos ([EGA IV$_2$, 5.13.5]).

Dans la suite, on a besoin d'une propriété du morphisme $f : T \to S$ qui assure qu'une hypothèse de normalité sur S se propage à T et à $T \times_S T$. C'est le cas si f est lisse de présentation finie, ou plus généralement si f est **normal** c'est-à-dire plat à fibres géométriquement normales [EGA IV$_2$, 6.8.1] et [EGA IV$_3$, 11.3.13, (ii)] [5], et de présentation finie.

La normalité elle-même n'intervient dans la suite que par les propriétés essentiellement topologiques suivantes.

4.3.3 Proposition. *Soit S un schéma normal dont l'ensemble des composantes irréductibles est localement fini. Alors :*

1. *Les composantes irréductibles de S sont disjointes, ouvertes et fermées. Toute réunion de composantes irréductibles est un ouvert fermé de S.*
2. *Pour un ouvert U de S, son adhérence schématique dans S, notée $\overline{U}$, est une partie ouverte et fermée de S.*
3. *Pour deux ouverts U et V de S, on a*
$$\overline{U \cap V} = \overline{U} \cap \overline{V}.$$
4. *Soit $\omega : S' \to S$ un monomorphisme plat quasi-compact et schématiquement dominant. Alors le foncteur $\omega^* : \mathsf{Of}(S) \to \mathsf{Of}(S')$ est une équivalence de catégories.*

Démonstration. 1) Puisque les anneaux locaux d'un schéma normal sont intègres, les composantes irréductibles d'un tel schéma sont disjointes. Puisqu'elles sont disjointes, le complémentaire d'une composante irréductible est la réunion des autres composantes ; ce sont des fermés localement en nombre fini, c'est donc une réunion qui est fermée dans chaque ouvert d'un recouvrement convenable de S ; c'est donc un fermé.

2) Soit U un ouvert de S ; il faut montrer que $\overline{U}$ est ouvert. Un point adhérant à U est contenu dans une composante irréductible Z ; mais celle-ci est ouverte, d'après 1), donc $U \cap Z$ est non vide ; mais alors l'ouvert U contient le point générique de Z ; donc Z est contenu dans le fermé $\overline{U}$, ensemble qui est donc une réunion d'ouverts.

3) L'inclusion $\overline{U \cap V} \subset \overline{U} \cap \overline{V}$ est claire. Par ailleurs, soit x un point adhérent à U et à V ; la composante irréductible qui contient x est un ouvert (propriété 1)), donc elle rencontre U et V ; mais, étant irréductible, elle rencontre leur intersection.

4) Comme on sait déjà que le foncteur ω^* est pleinement fidèle (2.1.5), il reste à montrer qu'il est essentiellement surjectif. Mais, d'après (2.2.2 (iv)) un ouvert fermé de S' est la réunion des composantes irréductibles qui le rencontrent ; en vertu de 1), il suffit donc de montrer que chaque composante irréductible Z' de S' est l'image réciproque par ω d'une composante irréductible de S. Soit η' le point générique de Z' ; le point $\eta = \omega(\eta')$ est maximal dans S (4.3.1) ; son adhérence Z dans S est donc une composante irréductible de S. Puisque la topologie de S' est induite par celle de S (4.3.1), l'adhérence Z' de η' dans S' est l'image réciproque de l'adhérence Z de $\eta = \omega(\eta')$ dans S. □

Tous ces préliminaires aboutissent au théorème suivant.

5. C'est aussi le cas pour un morphisme plat à fibres géométriquement réduites, et dont la fibre générique $T_\xi \to \xi$ est géométriquement normale [Laz79, Thm].

4.3.4 Théorème. *Soit S un schéma normal dont l'ensemble des composantes irréductibles est localement fini. Soit $\omega : S' \to S$ un monomorphisme plat quasi-compact et schématiquement dominant. Enfin, soient $f : T \to S$ un morphisme normal de présentation finie et $f' : T' = S' \times_S T \to S'$ le morphisme obtenu par changement de base. Alors le foncteur*

$$\omega^* : \mathsf{E}(T/S) \to \mathsf{E}(T'/S')$$

est une équivalence de catégories, et le morphisme canonique

$$\pi^s(T'/S') \to S' \times_S \pi^s(T/S)$$

est un isomorphisme.

Ce résultat s'applique en particulier lorsque le morphisme $S' \to S$ est une immersion ouverte dense, ou lorsque $S' \to S$ est le plongement du point générique d'un schéma intègre S.

Démonstration. D'après la proposition 4.2.4, il suffit de montrer que le foncteur ω^* établit une équivalence de catégories $\mathsf{Of}(T \times_S T) \to \mathsf{Of}(T' \times_{S'} T')$; or, le morphisme $T' \times_{S'} T' \to T \times_S T$ satisfait les mêmes hypothèses que ω puisque le morphisme f est plat de présentation finie. De plus, le schéma $T \times_S T$ est normal et ses composantes irréductibles sont localement en nombre fini puisque f est normal et de présentation finie. On peut donc renvoyer à la proposition (4.3.3, 4)) pour conclure. □

4.4 Applications

Les résultats qui suivent concernent un schéma de base intègre ; ils utilisent le théorème (4.3.4) pour se ramener au cas d'un corps de base, où ils sont connus.

4.4.1 Proposition. *Soit $\omega : S' \to S$ un morphisme dominant de schémas normaux intègres. Soit $f : T \to S$ un morphisme normal de présentation finie, et $f' : T' \to S'$ le morphisme obtenu par changement de base. Alors le morphisme canonique*

$$\pi^s(T'/S') \to S' \times_S \pi^s(T/S)$$

est un isomorphisme.

En particulier, on obtient donc un isomorphisme lorsque S' est un ouvert non vide de S, ou le spectre de l'anneau local $\mathcal{O}_{S,s}$ d'un point de S, ou son hensélisé, ou bien un anneau de valuation, ... ; mais la connexité de S' (exprimée ici par son irréductibilité) est essentielle ; voir la remarque 4.1.1.

Démonstration. Désignons par $\xi' \to \xi$ le morphisme induit par ω sur les points génériques, de sorte qu'on a le carré commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \xi' \arrow[r] \arrow[d] & S' \arrow[d, "\omega"] \\ \xi \arrow[r] & S. \end{tikzcd}$$

Remarquons d'abord que le morphisme de S'-schémas

$$u : \pi^s(T'/S') \to S' \times_S \pi^s(T/S)$$

est étale quasi-compact séparé, et surjectif puisque le morphisme $h_T : T \to \pi^s(T/S)$ est surjectif (1.1.3) ; il suffit donc, d'après le lemme de prolongement 2.1.4, de vérifier que le morphisme u devient un isomorphisme par le changement de base $\xi' \to S'$. Or, la commutativité du diagramme suivant montre qu'il suffit de voir que les morphismes α, β et γ sont des isomorphismes pour en déduire que $u_{\xi'}$ est un isomorphisme.

$$\begin{tikzcd}
\pi^s(T'_{\xi'}/\xi') \arrow[r, equal, "\text{def.}"] \arrow[d, "\alpha"'] & \pi^s(\xi' \times_\xi T_\xi/\xi') \arrow[r, "\gamma"] & \xi' \times_\xi \pi^s(T_\xi/\xi) \arrow[d, "\beta"] \\
\pi^s(T'/S')_{\xi'} \arrow[r, "u_{\xi'}"'] & \xi' \times_S \pi^s(T/S) \arrow[r, equal, "\text{def.}"'] & \xi' \times_\xi \pi^s(T/S)_\xi
\end{tikzcd}$$

Les flèches verticales α et β sont des isomorphismes, d'après le théorème 4.3.4 appliqué respectivement aux morphismes $f' : T' \to S'$, et $f : T \to S$. Sur un corps, le foncteur π^s est isomorphe à π_0, et ce dernier commute au changement de base $\xi' \to \xi$ (1.3.1, (ii)) ; on en tire que γ est un isomorphisme. □

4.4.2 Proposition (Compatibilité au produit)**.** *Soit S un schéma normal intègre de point générique ξ. Soient $f : T \longrightarrow S$ et $f' : T' \longrightarrow S$ deux morphismes normaux et de présentation finie. Alors le morphisme canonique*

$$\mu : \pi^s(T \times_S T'/S) \longrightarrow \pi^s(T/S) \times_S \pi^s(T'/S)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Le morphisme μ relie des S-schémas étales quasi-compacts et séparés ; il est surjectif puisque les morphismes h_T et $h_{T'}$ le sont (1.1.3), et par suite aussi le morphisme composé

$$T \times_S T' \to \pi^s(T \times_S T'/S) \to \pi^s(T/S) \times \pi^s(T'/S).$$

En vertu du lemme de prolongement 2.1.4, il suffit de voir que son morphisme générique

$$\mu_\xi : \pi^s(T \times_S T'/S)_\xi \longrightarrow \pi^s(T/S)_\xi \times_\xi \pi^s(T'/S)_\xi$$

est un isomorphisme. Suivant le théorème 4.3.4, et 3.2.1, cela se réécrit

$$\pi_0(T_\xi \times_\xi T'_\xi/\xi) \xrightarrow{\sim} \pi_0(T_\xi/\xi) \times_\xi \pi_0(T'_\xi/\xi).$$

L'énoncé sur S découle donc de la compatibilité au produit lorsque la base est un corps (1.3.1 (iv)). □

4.4.3. (Base géométriquement unibranche)

Rappelons [EGA IV$_1$, 0_{IV}, 23.2.1] qu'un anneau local A est dit unibranche (resp. géométriquement unibranche) si A_{red} est intègre et si sa clôture intégrale est locale (resp. locale à extension résiduelle radicielle).

Un schéma est dit **géométriquement unibranche** si chacun de ses anneaux locaux l'est [EGA IV$_2$, 6.15.1]. Cette notion intervient dans la suite en raison du critère de [EGA IV$_2$, 6.15.3] :

Soit X un schéma réduit dont l'ensemble des composantes irréductible est fini. Soit $\omega : X' \to X$ le morphisme associé au normalisé X' de X. Alors ω est un homéomorphisme universel si et seulement si X est géométriquement unibranche.

On va montrer que l'énoncé 4.3.4 reste vrai si on y remplace l'hypothèse que S est normal par l'hypothèse que S est géométriquement unibranche.

4.4.4 Proposition. *Soit S un schéma géométriquement unibranche intègre de point générique ξ, et soit $\omega : S' \to S$ un monomorphisme plat quasi-compact schématiquement dominant. Soient $f : T \to S$ un morphisme normal de présentation finie et $f' : T' = S' \times_S T \to S'$ le morphisme obtenu par changement de base. Alors, le foncteur*

$$\omega^* : \mathsf{E}(T/S) \to \mathsf{E}(T'/S')$$

est une équivalence de catégories, et le morphisme canonique

$$\pi^s(T'/S') \to S' \times_S \pi^s(T/S)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Soit $j : \overline{S} \to S$ le normalisé de S. Pour fixer les notations, explicitons le carré cartésien de morphismes :

$$\begin{tikzcd} \overline{S} \arrow[r, "j"] & S \\ \overline{S}' \arrow[u, "\overline{\omega}"] \arrow[r, "j'"'] & S'. \arrow[u, "\omega"'] \end{tikzcd}$$

On a donc les quatre foncteurs « contravariants » de changement de base associés :

$$\begin{tikzcd} \mathsf{E}(\overline{T}/\overline{S}) \arrow[d, "\overline{\omega}^*"'] & \mathsf{E}(T/S) \arrow[l, "j^*"'] \arrow[d, "\omega^*"] \\ \mathsf{E}(\overline{T}'/\overline{S}') & \mathsf{E}(T'/S'). \arrow[l, "j'^*"] \end{tikzcd}$$

Pour montrer que ω^* est une équivalence de catégories, on va vérifier que les trois autres foncteurs sont des équivalences. Puisque S est géométriquement unibranche, j est un homéomorphisme universel et il est schématiquement dominant ; d'après 4.2.5, les foncteurs horizontaux j^* et j'^* sont des équivalences. Par ailleurs, $\overline{S}$ est normal et le morphisme $\overline{T} \to \overline{S}$ est normal ; on peut donc utiliser la conclusion de 4.3.4 pour le monomorphisme plat $\overline{\omega} : \overline{S}' \to \overline{S}$, déduit de ω. D'où le résultat. □

5 L'adjoint d'un étale

5.1 Adhérence d'une relation ouverte

5.1.1 Lemme. *Soit $f : T \to S$ un morphisme normal de présentation finie. On suppose que S est normal et intègre. Soit $R \subset T \times_S T$ un ouvert qui est le graphe d'une relation d'équivalence. Alors l'adhérence schématique $\overline{R}$ de R dans $T \times_S T$ est un ouvert fermé qui est le graphe d'une relation d'équivalence.*

Démonstration. Comme il est rappelé en (4.3.2), le schéma $T^2 = T \times_S T$ est normal et ses composantes irréductibles sont en nombre fini ; par suite (4.3.3) $\overline{R}$ est un sous-schéma ouvert et fermé dans T^2 ; il définit une relation qui est clairement réflexive et symétrique ; sa transitivité équivaut (voir 2.3.1) à l'inclusion

$$p_0'^{-1}(\overline{R}) \cap p_2'^{-1}(\overline{R}) \subset p_1'^{-1}(\overline{R}).$$

Or, les projections $p'_i : T^3 \to T^2$ sont des morphismes plats, qui préservent donc les adhérences schématiques [EGA I, 9.3.3] ; d'où les égalités $p_i'^{-1}(\overline{R}) = \overline{p_i'^{-1}(R)}$; pour conclure on utilise la compatibilité de l'adhérence aux intersections (4.3.3) et le fait que R est une relation d'équivalence. □

5.1.2 Proposition. (L'adjoint d'un étale) *Soit S un schéma intègre et normal, et $f : T \to S$ un morphisme étale de présentation finie. Alors le morphisme*

$$h_T = h : T \to \pi^s(T/S)$$

est un isomorphisme local [EGA I, 4.4.2] *; plus précisément, T admet un recouvrement par des ouverts U sur lesquels le morphisme h induit un isomorphisme de U sur l'ouvert $h(U)$.*

De plus, ce morphisme h est aussi l'enveloppe séparée de $T \to S$ au sens suivant : tout morphisme de S-schémas $h' : T \to F$, où F est séparé sur S, est de la forme $h' = uh$ pour un unique morphisme $u : \pi^s(T/S) \to F$ (On ne suppose pas que F soit plat ni de type fini sur S).

Démonstration. Comme f est étale, le morphisme diagonal $T \to T \times_S T$ est une immersion ouverte ; le lemme qui précède (5.1.1) montre que l'adhérence R du sous-schéma diagonal est une partie ouverte et fermée de $T \times_S T$ qui est le graphe d'une relation d'équivalence. Elle est évidemment la relation d'équivalence minimale à graphe ouvert fermé ; le quotient T/R définit donc $\pi^s(T/S)$.

Montrons que le morphisme h est un isomorphisme local. On peut recouvrir T par des ouverts U tels que $f(U)$ soit contenu dans un ouvert affine de S, donc tels que le morphisme $U \to S$ soit séparé. La relation induite par R sur un tel ouvert est $R_U = R \cap (U \times_S U)$; c'est donc l'adhérence schématique dans $U \times_S U$ du sous-schéma diagonal, lequel est fermé puisque U est séparé sur S ; donc R_U est ce sous-schéma diagonal ; ainsi, R_U est la relation triviale sur U, et h induit un isomorphisme $U \simeq h(U)$.

Montrons enfin que h est l'enveloppe séparée de f. Posons $E = \pi^s(T/S)$; on a vu au début de la démonstration que la relation $R = T \times_E T$ qui définit E est l'adhérence schématique de la diagonale ; par suite le morphisme $\Delta_h : T \to T \times_E T$ est schématiquement dominant. Soit $h' : T \to F$ un morphisme vers un S-schéma séparé. Considérons le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\Delta_h"] \arrow[d, "\Delta_{h'}"'] & T \times_E T \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dl, dashed, "w"] \\
T \times_F T \arrow[r, "\psi"'] & T \times_S T.
\end{tikzcd}$$

Les morphismes φ et ψ sont des immersions fermées puisque E et F sont séparés sur S, et on a vu que Δ_h est schématiquement dominant ; on en tire l'existence du morphisme w rendant les triangles commutatifs. Considérons maintenant le diagramme

$$\begin{tikzcd}
T \times_E T \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "w"'] & T \arrow[r, "h"] \arrow[d, equal] & E \arrow[d, dashed, "u"] \\
T \times_F T \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & T \arrow[r, "h'"'] & F.
\end{tikzcd}$$

La ligne supérieure est exacte (1.1.3 (iv)) ; d'où l'existence et l'unicité de u. □

5.2 L'espace des composantes connexes des fibres

C'est le lieu ici d'évoquer rapidement l'espace algébrique π_0 qui représente les composantes connexes des fibres géométriques d'un morphisme lisse ; cet espace algébrique est signalé par M. Artin, Lemma 1.17 de son article *Néron Models*, aussi dans [Art86], puis dans le livre de Laumon – Moret-Bailly [LMB, 6.8] pour les schémas, et il est enfin généralisé pour les champs par M. Romagny [Rom11, 6.2.6], où le morphisme n'est plus supposé lisse mais seulement géométriquement réduit, et où on représente plutôt « les composantes connexes ouvertes »(voir son article pour une définition en forme). Voici l'énoncé pour les schémas.

Soit $f : T \longrightarrow S$ un morphisme lisse de présentation finie de schémas. Alors il existe un espace algébrique *$\pi_0(T/S)$ qui est étale et quasi-compact sur S et un morphisme $h : T \longrightarrow \pi_0(T/S)$ ayant les propriétés suivantes :*

- *(a) Pour tout point géométrique ξ de S, $\pi_0(T/S)(\xi)$ s'identifie à l'ensemble des composantes connexes de T_ξ ;*
- *(b) les fibres de h sont géométriquement connexes (donc géométriquement irréductibles, puisque h est lisse) ;*
- *(c) tout morphisme de S-schémas $T \to E$, où E est étale sur S, se factorise par h ;*
- *(d) la formation de $\pi_0(T/S)$ commute à tout changement de base sur S.*

Cet espace π_0 est construit comme le faisceau quotient T/R pour la relation d'équivalence dont le graphe $R \subset T \times_S T$ est la réunion des composantes connexes des fibres de la première projection $p : T \times_S T \to T$, qui rencontrent la diagonale.

Indiquons succinctement comment la propriété (a) conduit à cette relation R : soit ξ un point géométrique de S ; deux points x et y de T_ξ sont dans la même composante connexe C de T_ξ si on a $(x, y) \in C \times C \subset T_\xi \times_\xi T_\xi$; notant $C(x)$ la composante connexe de x, le graphe de la relation : « être dans la même composante connexe » est donc

$$\bigcup_{x \in T_\xi} x \times C(x);$$

or, $x \times C(x)$ est la composante connexe de $p_\xi^{-1}(x) = x \times T_\xi$ qui rencontre la diagonale. Cette remarque et un peu de travail conduisent à la description donnée de la relation d'équivalence R. Le théorème [EGA IV$_3$, 15.6.5] montre alors que R est un sous-schéma ouvert de $T \times_S T$.

Notons qu'aucune des quatre propriétés énoncées ci-dessus pour π_0 n'est en général vérifiée pour π^s.

5.3 Le morphisme $\pi_0(T/S) \to \pi^s(T/S)$

La propriété universelle (c) de π_0 montre qu'il existe un morphisme d'espaces algébriques $\theta : \pi_0(T/S) \to \pi^s(T/S)$, que l'on peut préciser :

5.3.1 Proposition. *On suppose que S est normal intègre et que le morphisme $T \to S$ est lisse. Soit R l'ouvert de $T \times_S T$ qui est le graphe de la relation d'équivalence qui définit $\pi_0(T/S)$(5.2). Alors l'adhérence schématique $\overline{R}$ de R dans $T \times_S T$ est le graphe de la relation d'équivalence qui définit $\pi^s(T/S)$.*

De plus, tout morphisme de S-espaces algébriques $\pi_0(T/S) \to F$, où F est séparé, se factorise de façon unique par θ ; en d'autres termes, θ fait de $\pi^s(T/S)$ l'enveloppe séparée de $\pi_0(T/S)$.

Rappelons qu'un espace algébrique étale *et séparé* est (représentable par) un schéma ([LMB, A.2]), ou ([Knu71, 6.16]).

Démonstration. Que l'adhérence $\overline{R}$ soit le graphe ouvert et fermé d'une relation d'équivalence est établi dans (5.1.1). Montrons que cette relation est minimale parmi les relations à graphe ouvert fermé dans $T \times_S T$, i.e. que c'est la relation d'équivalence R' qui définit $\pi^s(T/S)$. L'existence du morphisme $\pi_0(T/S) \to \pi^s(T/S)$ entraîne l'inclusion $R \subset R'$; puisque le sous-schéma R' est fermé, il contient $\overline{R}$, et la minimalité de R' implique l'égalité cherchée.

La démonstration de la deuxième partie est analogue à celle de la fin de 5.1.2 : le diagramme commutatif suivant résume la situation.

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, equal] & T \times_{\pi_0} T \arrow[r, "j"] \arrow[d] & T \times_{\pi^s} T \arrow[r, equal] \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dl, dashed, "w"] & \overline{R} \\
& T \times_F T \arrow[r, "\psi"'] & T \times_S T &
\end{tikzcd}$$

Les morphismes φ et ψ sont des immersions fermées puisque π^s et F sont séparés sur S, et j est schématiquement dominant puisque $\overline{R}$ est l'adhérence schématique de R ; on en tire l'existence du morphisme w rendant les triangles commutatifs. On termine la démonstration comme dans 5.1.2. □

5.3.2 Exemple. Cet exemple est signalé dans [LMB, 6.8.1] ; c'est l'ouvert de lissité de la courbe de Mumford citée p.210 de [BLR90]. Il met en lumière quelques différences entre les foncteurs π_0 et π^s.

On pose $S = \mathrm{Spec}(A)$, où $A = \mathbf{R}[[t]]$, et on prend pour T le complémentaire de l'origine dans $\mathrm{Spec}(A[X,Y]/(X^2+Y^2-t))$.

Le morphisme $f : T \to S$ est lisse, sa fibre générique $T_{\xi'} \to \xi'$ est géométriquement irréductible. La fibre fermée $T_s \to s$ est isomorphe au morphisme

$$\mathrm{Spec}(\mathbf{C}[X]_X) \to \mathrm{Spec}(\mathbf{R}).$$

On en tire les propriétés suivantes.

— (i) Pour toute factorisation $T \xrightarrow{h} E \xrightarrow{g} S$, où h est surjectif et g étale (séparé ou non), g est un isomorphisme ; en particulier $\pi^s(T/S) = S$;
— (ii) le morphisme canonique $\pi^s(T_s/s) = \mathrm{Spec}(\mathbf{C}) \to \pi^s(T/S)_s = \mathrm{Spec}(\mathbf{R})$ n'est pas un isomorphisme (l'isomorphisme $\pi^s(T_\xi/\xi) \simeq \pi^s(T/S)_\xi$ de 4.3.4, établi pour la fibre générique, n'est donc plus vrai pour la fibre fermée) ;
— (iii) la fibre fermée du morphisme $h : T \to \pi^s(T/S) = S$ est irréductible mais pas géométriquement connexe (alors que la fibre fermée de $T \to \pi_0(T/S)$ est géométriquement connexe) ;
— (iv) l'espace algébrique $\pi_0(T/S)$ *n'est pas un schéma.*

(i) Comme la fibre générique $T_\eta \longrightarrow \eta$ est géométriquement irréductible et que $h_\eta : T_\eta \to E_\eta$ est fidèlement plat, le morphisme étale $E_\eta \to \eta$ est géométriquement irréductible, donc un isomorphisme ; en particulier, les points fermés de E sont dans la fibre fermée E_s. Le morphisme $T_s \to E_s$ est fidèlement plat et T_s est connexe, l'espace discret E_s a donc un seul point, noté e ; comme c'est l'unique point fermé de E le morphisme canonique $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{E,e}) \longrightarrow E$ est un isomorphisme. Cela montre que le morphisme g est affine fidèlement plat et birationnel ; c'est un isomorphisme.

(ii) et (iii). Clair.

(iv) (Nous devons cet argument à M. Romagny). Notons $K = \kappa(\eta)$ le corps des fractions de A, et posons $P = \pi_0(T/S)$. Cet espace algébrique est étale et commute aux changements de base ; lorsque la base est le spectre d'un corps k, cet espace est le spectre de la clôture séparable de k dans l'anneau des sections globales du schéma. Comme $T_\eta \to \eta$ est géométriquement irréductible, K est algébriquement fermé dans $\Gamma(T_\eta)$, donc $P_\eta \simeq \mathrm{Spec}(K)$. Comme la fibre fermée $T_s \to s$ est isomorphe à $\mathrm{Spec}(\mathbf{C}[X]_X) \to \mathrm{Spec}(\mathbf{R})$ la fermeture algébrique de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}[X]_X$ est égale à $\mathbf{C}$. Cela montre que P n'est pas un schéma. En effet, soit ε l'unique point de P_s ; si P était un schéma étale sur le trait hensélien $S = \mathrm{Spec}(\mathbf{R}[[t]])$, le morphisme composé

$$\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{P,\varepsilon}) \longrightarrow P \longrightarrow S$$

serait fini [EGA IV$_4$, 18.5.11, c')], donc libre ; ce qui est impossible puisque le rang générique est 1, et le rang spécial 2. □

5.3.3 Remarque. Partant de l'énoncé 5.1.2 qui concerne des schémas, on peut se demander si le morphisme d'espaces algébriques $\theta : \pi_0(T/S) \to \pi^s(T/S)$ serait, en un sens convenable, un « isomorphisme local » même lorsque $\pi_0(T/S)$ n'est pas un schéma. Mais la notion d'isomorphisme local n'a guère de sens pour les morphismes d'espaces algébriques puisque cette propriété (déjà pour un morphisme de schémas) n'est pas locale sur la base pour la topologie étale (penser à une extension galoisienne de corps de rang > 1). Finalement, L. Moret-Bailly m'a indiqué la remarque suivante qui clôt la question.

5.3.4 Lemme. *Soient F un schéma et $\theta : E \to F$ un F-espace algébrique dont le morphisme diagonal $\Delta_\theta : E \to E \times_F E$ est une immersion ouverte. On suppose qu'il existe un schéma U et un morphisme étale surjectif $u : U \to E$ tel que le composé θu soit un isomorphisme local de schémas. Alors E est un schéma.*

Démonstration. Puisque $\theta u : U \to F$ est un isomorphisme local ses sections locales $s : V \to U$ (pour des ouverts de Zariski $j : V \to F$) recouvrent U, donc les sections locales us de θ recouvrent E ; il suffit donc de voir que ces sections $us : V \to E$ sont (représentables par) des immersions ouvertes. Or us est le composé de son graphe $v : V \to V \times_F E$ et de l'immersion ouverte $j \times 1 : V \times_F E \to E$, et dans le diagramme suivant le carré est cartésien

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "v"] \arrow[d] & V \times_F E \arrow[r, "j\times 1"] \arrow[d] & E \\ E \arrow[r, "\Delta_\theta"'] & E \times_F E & \end{tikzcd} .$$

□

A On locally connected schemes

by Ofer Gabber

A topological space X is said to be *locally connected* if the connected components of each open subset of X are open, equivalently if the connected open subsets form a basis of the topology.

Lemma A.1. *One observes that if $f : X \to Y$ is an open continuous map and if X is locally connected, then $f(X)$ is locally connected. In particular, X is locally connected as soon as it has a covering by locally connected open subspaces.*

Lemma A.2. *For a topological space X the following properties are equivalent :*

(i) *The set of connected components of X is finite.*

(ii) *The set of clopen subsets of X is finite.*

(iii) *There is an r such that any partition into non empty open subsets has at most r parts.*

Proof. (i) implies (ii) as any clopen subset is a union of connected components. (ii) implies (iii) is clear.

If (iii) holds then for an open partition of X with a maximal number of parts it is easy to see that the parts must be connected, so this is the decomposition of X in connected components.

Proposition A.3. *If $f : X \to Y$ is an integral surjective morphism of schemes, and G a finite group acting on X by Y-automorphisms, such that the morphism*

$$G \times X \to X \times_Y X$$

is surjective, then, if Y is locally connected so is X.

Proof. First let us show that the morphism f is open : let U be an open set in X. Since the action of G is transitive on the fibres of f, one has $f^{-1}(f(U)) = \bigcup_{g\in G} gU$; it is an open set, and $f(X - f^{-1}(f(U))) = Y - f(U)$ is closed since f is a closed map.

If Y is connected, then the set of connected components of X is finite : in fact, let $X = Z_1 \sqcup \cdots \sqcup Z_r$ be an open partition of X ; for each i, $f(Z_i) = Y$ since Y is connected ; so for a point $y \in Y$, this partition induces an open partition on the discrete set $f^{-1}(y)$ with r distinct parts ; by transitivity of the action of G on the fibres, one has $r \leq \mathrm{Card}(G)$, and we can apply the lemma **A.2**. From this remark we deduce that

Remark A.4 *If the set of connected components of Y is finite, then so is the set of connected components of X.*

For proving the proposition we may suppose from lemma **A.1** that Y is affine and locally connected. We have to show that every quasi-compact open subset $U \subset X$ is a finite union of connected components.

The remark **A.4** applied to the morphism $f^{-1}(f(U)) \to f(U)$ shows it is the case if U is moreover G-invariant, that is if $U = f^{-1}(f(U)$.

For the other open subsets U, instead of the connected components we rather consider the set of clopen subsets of U (cf. lemma **A.2**) ; this set is in bijection with the group $H(U) = \mathrm{H}^0(U, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ of continuous maps $U \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, by attaching to a clopen subset of U its characteristic function.

Here is the main point. (Note that the morphism f being affine, X is affine and, in particular, the intersection of two quasi-compact open subsets of X is quasi-compact).

Lemma A.5. *Let U be a quasi-compact open subset of X. If $A \subset G$ is a subset of size r, then $H(\bigcap_{g\in A} gU)$ is finite.*

The case $r = 1$ is the conclusion of the proposition, whereas the case $r = \mathrm{Card}(G)$ is covered by the remark A.4 above, so the lemma is proved by descending induction on $1 \leq r \leq \mathrm{Card}(G)$.

Proof. Say $r < \mathrm{Card}(G)$ and we know the assertion for larger r. Let $V = \bigcap_{g\in A} gU$. Let $h \in G$ such that $hV \neq V$; then $hA \neq A$ so $V \cap hV$ is the intersection of more than r translates of U, and by

induction hypothesis $H(V \cap hV)$ is finite. Let W be the union of the hV which are distinct from V ; the homomorphism given by the restriction

$$H(V \cap W) \to \prod_{h, hV \neq V} H(V \cap hV)$$

is injective ; therefore $H(V \cap W)$ is finite, and it is enough to check that the kernel of the restriction map

$$H(V) \to H(V \cap W)$$

is finite. But this kernel is the set of clopen subsets in V which are disjoint from W ; thus they are clopen in $V \cup W$. But the open set $V \cup W$ is the union of all the translates of V ; so it is G-invariant and therefore $H(V \cup W)$ is finite, and so is the kernel in question. □

Proposition A.6. *If $f : X \to Y$ is finite flat locally free, and if Y is locally connected, then X is locally connected.*

Proof. Say we are in the affine case $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ where B is locally free of rank $d > 0$ over A. Denote by ν the morphism associated with the norm $\Gamma^d_A B = (\otimes^d_A B)^{\mathfrak{S}_d} \to A$, in the sense that $\mathrm{Norm}_{B/A}(b) = \nu(\gamma(b))$ where $\gamma(b) = b^{\otimes d} \in (\otimes^d_A B)^{\mathfrak{S}_d}$. Consider the co-cartesian (= tensor product) square

$$\begin{tikzcd} (\otimes^d_A B)^{\mathfrak{S}_d} \arrow[r] \arrow[d, "\nu"'] & \otimes^d_A B \arrow[d, "q"] \\ A \arrow[r] & D. \end{tikzcd}$$

We thus have $D = (\otimes^d_A B)/I(\otimes^d_A B)$, where $I = \mathrm{Ker}(\nu)$, and the group $\mathfrak{S}_d$ is acting on $\mathrm{Spec}(D)$ in such a way that $\mathfrak{S}_d \times \mathrm{Spec}(D) \to \mathrm{Spec}(D) \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(D)$ is surjective. The previous proposition shows that $\mathrm{Spec}(D)$ is locally connected.

In this cocartesian square, the top horizontal map is an integral extension of rings, so surjective on Spec, so the bottom horizontal arrow is surjective on Spec, so the morphism $A \to D$ has nil kernel.

For $1 \leq i \leq d$, let $q_i : B \to D$ be the map $b \mapsto q(1 \otimes \cdots 1 \otimes b \otimes 1 \cdots \otimes 1)$, with b at the i-th place. Let $b \in B$ such that $q_1(b) = 0$; let us show that b is nilpotent. The characteristic polynomial $P(T) = \mathrm{Pc}_{B/A}(b, T) \in A[T]$ of b factors, in $D[T]$, as $\prod(T - q_i(b))$. Since $\mathfrak{S}_d$ permutes the q_i, for all i, one has $q_i(b) = 0$, and the image of $P(T)$ in $D[T]$ reduces to T^d, showing that the coefficients of $P(T)$ of degree $< d$ are nilpotent. By Cayley-Hamilton theorem we deduce that b is nilpotent.

Therefore the morphism $\mathrm{Spec}(D) \xrightarrow{\mathrm{Spec}(q_1)} \mathrm{Spec}(B)$ is surjective, and quasi-compact. Let $U \subset \mathrm{Spec}(B)$ be quasi-compact open ; its inverse image in $\mathrm{Spec}(D)$ is quasi-compact, so it is the finite union of its connected components since $\mathrm{Spec}(D)$ is locally connected ; the images of these connected sets cover U ; thus the set of connected components of U is finite. □

Corollary A.7. *Let $f : X \to Y$ be a morphism with Y locally connected. Then X is locally connected in the following two cases :*

(i) The morphism f is étale.

(ii) The morphism f is flat, locally of finite presentation and locally quasi-finite.

Proof. The étale case follows from the local structure theorem for étale morphisms [EGA IV_4, 18.4.6, (ii)].

For the quasi-finite case we use [EGA IV$_4$, 18.12.1] : for each $x \in X$ there exists an étale morphism $g : Y' \to Y$ and a commutative diagram, where $X' = X \times_Y Y'$,

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[r, "j"] \arrow[dr] & X' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y' \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

The morphism j is an open immersion, the open subset $g'j(V')$ contains x, and $V' \to Y'$ is a finite morphism, which is flat since f is. From (i) we deduce that Y' is locally connected ; from the above proposition, V' is also locally connected, showing that X admits an covering by locally connected open subspaces. □

Theorem A.8. *Let $f : X \to Y$ be a flat and locally of finite presentation morphism. If Y is locally connected, then X is locally connected.*

Proof. We may reduce to a flat affine morphism of finite presentation $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ where $\mathrm{Spec}(A)$ is locally connected ; we have to show $\mathrm{Spec}(B)$ has a finite number of connected components.

We reduce to the quasi-finite case by using quasi-sections. In fact, let $\Gamma \subset X$ be a sub-scheme of X, on which f induces a flat quasi-finite and finitely presented morphism $\Gamma \to Y$. Let T be a connected component of X which meets Γ, say at $x \in T \cap \Gamma$; let T' be the connected component of Γ containing x ; since T is maximal connected, one has $T' \subset T$. But there are only a finite number of connected components in Γ [**A.7**, (ii)], and the connected components of X are disjoint, thus there are only a finite number of connected components of X meeting Γ.

Now let's introduce the set $V_\Gamma \subset X$, union of the connected components C of the fibres of f, such that $C \cap \Gamma \neq \emptyset$; let T be a connected component of X ; if $T \cap V_\Gamma \neq \emptyset$ then $T \cap \Gamma \neq \emptyset$: in fact, there exists a connected component C of a fibre such that $C \cap \Gamma \neq \emptyset$, and $C \cap T \neq \emptyset$; then $C \subset T$, so $\Gamma \cap T \neq \emptyset$. From the previous remark we get that there are only a finite number of connected components of X meeting V_Γ. To conclude it suffices to verify that X can be covered by a finite number of such sets V_Γ.

First we show that V_Γ is constructible. Let $\pi : X \times_Y \Gamma \to \Gamma$ be the projection, and let $s : \Gamma \to X \times_Y \Gamma$ be the section of π associated with the inclusion $\Gamma \to X$, that is $\Gamma \xrightarrow{\text{diag.}} \Gamma \times_Y \Gamma \to X \times_Y \Gamma$. Denote by $(X \times_Y \Gamma)^0$ the union of the connected components of the fibres of π meeting the section s ; this set is constructible by [EGA IV$_3$, 9.7.12] ; since the projection $X \times_Y \Gamma \to X$ is of finite presentation, the image of $(X \times_Y \Gamma)^0$ in X is constructible [EGA I, 7.1.4] ; it remains to check that this image is precisely V_Γ.

Let $y = f(x)$ be the image of a point $x \in \Gamma$. Since $\Gamma \to Y$ is quasi-finite the point $s(x)$ is closed in the fibre $\pi^{-1}(y) = X_y \times_{\kappa(y)} \kappa(x)$; the field extension $\kappa(y) \to \kappa(x)$ being finite, the projection $p : X_y \times_{\kappa(y)} \kappa(x) \to X_y$ is an open and closed morphism. Let C' be the connected component of $s(x)$ in $X_y \times_{\kappa(y)} \kappa(x)$; since everybody is here noetherian, the connected components are open and closed, so $p(C')$ is connected, closed and open ; thus it is the connected component of $ps(x) = x$, and it meets Γ at x. So one has $p(C') \subset V_\Gamma$. Conversely it is easy to check that any connected component of the fibres of f meeting Γ is the image of a $C' \subset (X \times_Y \Gamma)^0$.

Now we verify that the family of the sets V_Γ for all possible flat quasi-sections Γ is a covering of X. Let $x \in X$, and let C be a connected component of x in its fibre X_y ($y = f(x)$). Let $z \in C$ be a closed point such that the ring $\mathcal{O}_{X_y,z}$ be Cohen-Macaulay. From [EGA IV$_4$, 17.16.1] there exists a subscheme Γ of X containing z and such that the morphism $\Gamma \to Y$ is flat, quasi-finite and of finite presentation ; since $z \in \Gamma \cap C$, the set V_Γ contains C, and also x.

Finally, since X is quasi-compact, we may invoque the quasi-compactness of the constructible topology [EGA I, 7.2.7] to conclude that a finite number of those sets V_Γ suffices. $\square$

This text is a slightly expanded transcription of a letter from Gabber*, received on April 25, 2020.*

Références

[Art86] M. Artin, Néron Models, in Arithmetic Geometry (G. Cornell and J. Silverman, eds.),Springer-Verlag (1986).

[BLR90] S. Bosch, W. Lütkebhomert, M. Raynaud, *Néron Models*, Ergebnisse der Math. (3), vol. 21, Springer-Verlag, (1990).

[DG] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes algébriques*, Masson (1970).

[FAG] B. Fantechi, L. Göttsche, L. Illusie, S. L. Kleiman, N. Nitsure, A. Vistoli, *Fundamental Algebraic Geometry*, Math. Surveys, vol.123, AMS, (2005).

[Fer19] D. Ferrand, Un Adjoint, `arXiv:1902.05296` (2019)

[Fév69] P. Février, Propriétés de l'anneau $K \otimes_k K$ pour une extension de corps $k \to K$, *Mémoire de DEA, Université de Paris VI* (non publié), (1969).

[Knu71] D. Knutson, *Algebraic Spaces*, LNM vol. 203, Springer-Verlag (1971).

[Laz79] M. Lazarus, Fermeture intégrale et changement de base, *C. R. Acad. Sc. Paris*, T. 289, (9 juillet 1979).

[LMB] G. Laumon, L. Moret-Bailly, *Champs algébriques*, Springer-Verlag (2000).

[Ray67] M. Raynaud, Passage au quotient par une relation d'équivalence plate, *pp.78-85* in *: Proc.Conf.Local Fields (Driebergen) (éd T.A. Springer)*, (1967).

[Ray70] M. Raynaud, *Anneaux henséliens*, LNM 169, Springer, (1970).

[Rom11] M. Romagny, Composantes connexes et irréductibles en familles, *Manuscripta math.* **136**, 1-32, (2011).

[Sza] T. Szamuely, *Galois Groups and Fundamental Groups*, Cambridge Uni. Press(2009)

[Wis] J. Wise, Moduli of morphisms of logarithmic schemes, *Algebra Number Theory*, **10**, 695-735, (2016)

Sigles

[A] N. Bourbaki, *Algèbre, ch. 4 à 7.* Masson, (1981). Translated into English as *Algebra II.* Springer, (2003).

[AC] N. Bourbaki, *Algèbre commutative.* Translated into English as *Commutative Algebra*, chap. 1–7. Springer, (1989).

[TG] N. Bourbaki, *Topologie générale*, chap. 1 à 4, Masson, (1990).

[EGA I] A. Grothendieck, J. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique I*, Grundleheren Math. Wiss., vol. 166, Springer-Verlag (1971).

[EGA II] A. Grothendieck, J. Dieudonné *Éléments de Géométrie algébrique, II : Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes*, Publ. Math. IHÉS no 8 (1961).

[EGA III_1] A. Grothendieck, J. Dieudonné *Éléments de Géométrie algébrique, III : Étude cohomologique des faisceaux cohérents*, Publ. Math. IHÉS no 11 (1961).

[EGA III_2] A. Grothendieck, J. Dieudonné *Éléments de Géométrie algébrique, III : Étude cohomologique des faisceaux cohérents*, Publ. Math. IHÉS no 17 (1963).

[EGA IV_1] A. Grothendieck, J. Dieudonné *Éléments de Géométrie algébrique* Publ. Math. IHÉS no. 20, (1964).

[EGA IV_2] A. Grothendieck, J. Dieudonné *Éléments de Géométrie algébrique* Publ. Math. IHÉS no. 24, (1965).

[EGA IV_3] A. Grothendieck, J. Dieudonné *Éléments de Géométrie algébrique* Publ. Math. IHÉS no. 28, (1966).

[EGA IV_4] A. Grothendieck, J. Dieudonné *Éléments de Géométrie algébrique* Publ. Math. IHÉS no. 32, (1967).

[SGA 1] A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental*, Documents mathématiques n° 3, Soc. Math. France (2003).

[SGA 3] M. Demazure, A. Grothendieck, *Schémas en groupes*, Documents mathématiques n° 7, Soc. Math. France, (2011).

[SGA 4] M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas* (vol. II), Lect. Notes in Math. vol. 270, Springer-Verlag (1972).

Sorbonne Université
Institut Mathématique de Jussieu
IMJ-PRG, Case 247
4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France

daniel.ferrand@imj-prg.fr