



**HAL**  
open science

# Fractions continues, polynômes orthogonaux et séries de Dirichlet

Alin Bostan, Frédéric Chapoton

► **To cite this version:**

Alin Bostan, Frédéric Chapoton. Fractions continues, polynômes orthogonaux et séries de Dirichlet. 2022. hal-03832808v2

**HAL Id: hal-03832808**

**<https://hal.science/hal-03832808v2>**

Preprint submitted on 28 Oct 2022 (v2), last revised 10 Jul 2023 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Fractions continues, polynômes orthogonaux et séries de Dirichlet

Alin Bostan\* et Frédéric Chapoton†

\*Inria Saclay, Université Paris-Saclay, 1 rue Honoré d'Estienne  
d'Orves, 91120 Palaiseau, France

`alin.bostan@inria.fr`

†CNRS, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université de  
Strasbourg, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg, France

`chapoton@math.unistra.fr`

28 octobre 2022

## Résumé

En utilisant une approche de mathématiques expérimentales, de nouvelles relations sont obtenues entre les séries de Dirichlet pour certains coefficients périodiques et les moments de certaines familles de polynômes orthogonaux.

Outre les polynômes orthogonaux hypergéométriques classiques, de type Racah et dual Hahn continu, une nouvelle famille similaire de polynômes orthogonaux intervient.

*Mots clés*— fractions continues de Jacobi, fonctions hypergéométriques, séries de Dirichlet, polynômes orthogonaux, polynômes de Racah et de Hahn, moments, mathématiques expérimentales, deviner et prouver

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels</b>	<b>5</b>
1.1	Fractions continues de Jacobi . . . . .	5
1.2	Séries de Dirichlet à coefficients périodiques . . . . .	5
1.2.1	Action par dilatation d'un facteur entier . . . . .	7
1.2.2	Caractères de Dirichlet . . . . .	7
1.3	Fonctions hypergéométriques . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Cadre général et cadre décalé</b>	<b>9</b>
2.1	Cadre général . . . . .	9
2.1.1	Action par dilatation d'un facteur entier . . . . .	10

2.1.2	Approche expérimentale . . . . .	10
2.1.3	Stratégie de preuve . . . . .	11
2.2	Cadre décalé . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Fractions de la forme <math>(z^a - z^b)/(1 - z^c)</math> sans décalage</b>	<b>12</b>
3.1	Préparatifs . . . . .	13
3.2	Polynômes orthogonaux associés . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Fractions de la forme <math>(z^a - z^b)/(1 - z^c)</math> avec décalage</b>	<b>16</b>
4.1	Cas $c = b$ . . . . .	16
4.2	Cas $u = c - a$ . . . . .	18
4.3	Cas $c = a + b$ et $u = c/2$ . . . . .	19
4.4	Cas $c = 2(b - a)$ et $u = b - a$ . . . . .	21
4.5	Cas $c = 2(b - a)$ et $u = 3(b - a)$ . . . . .	23
4.6	Deux autres cas . . . . .	25
<b>A</b>	<b>Polynômes orthogonaux hypergéométriques</b>	<b>26</b>
A.1	Polynômes orthogonaux de Racah . . . . .	26
A.2	Polynômes orthogonaux de type Dual Hahn continu . . . . .	27
A.3	Une nouvelle famille de polynômes orthogonaux . . . . .	27
<b>B</b>	<b>Une formule auxiliaire</b>	<b>30</b>

## Introduction

Les valeurs aux entiers négatifs de la fonction  $\zeta$  et des fonctions  $L$  de Dirichlet forment des suites de nombres d'un grand intérêt, notamment en arithmétique, parmi lesquelles on trouve les nombres de Bernoulli, les nombres d'Euler et les nombres de Springer. Une description générale de ces nombres est donnée par leur *série génératrice exponentielle*, dont on connaît une expression simple en termes des valeurs du caractère de Dirichlet.

Pour la fonction  $\zeta$  et pour quelques caractères de petites périodes, il est connu par des résultats de Stieltjes, Touchard, Carlitz et Al-Salam que la *série génératrice ordinaire* de ces valeurs aux entiers négatifs, éventuellement sans son premier terme, admet un développement remarquable en fraction continue de Jacobi<sup>1</sup>, voir [2, 10], [8, Ch VI §8] et les références de ces articles. Par la connexion générale très forte entre fractions continues de Jacobi et polynômes orthogonaux, ceci donne une relation étroite entre certaines fonctions  $L$  et certaines familles de polynômes orthogonaux hypergéométriques dans la hiérarchie d'Askey.

---

1. Du fait de l'annulation d'une valeur sur deux, ces fractions continues de Jacobi en  $t$  prennent souvent la forme d'une fraction continue simple en  $t^2$ .

Le présent article donne une relation similaire entre des familles de polynômes orthogonaux hypergéométriques et des suites de nombres rationnels liées à certaines séries de type Dirichlet à coefficients périodiques dans  $\{-1, 0, 1\}$ .

Nous allons nous contenter ici d'esquisser rapidement le contexte qui fournit la motivation. En notant  $\chi$  la fonction périodique fixée, les suites de nombres considérées devraient être les valeurs aux entiers négatifs de fonctions de la forme

$$L_{P,\chi}(s) = \sum_{m \geq 1} \chi(m) \frac{P'(m)}{P(m)^s}, \quad (1)$$

pour  $P$  un polynôme ne s'annulant pas sur les entiers strictement positifs. Il ne s'agit donc pas de séries de Dirichlet au sens usuel.

La justification du prolongement analytique de ces fonctions et du fait que la construction donnée dans la section 2 fournit bien une description de leurs valeurs aux entiers négatifs n'est pas faite ici. Un énoncé de ce type, mais pour le seul caractère trivial, figure dans [6]. Nous nous contentons donc dans le présent article d'utiliser la construction de la section 2 comme un point de départ qui définit une suite de nombres rationnels pour chaque choix de  $\chi$  et de  $P$ .

Nous n'allons considérer que des polynômes  $P$  de degré 2 et des coefficients périodiques  $\chi$  dont la moyenne sur une période est nulle. Le cas du caractère de Dirichlet trivial, pour la fonction  $\zeta$  de Riemann, ne rentre pas dans ces hypothèses. L'étude dans ce cas de la relation similaire entre les nombres de Ramanujan-Bernoulli (ou nombres de Bernoulli médians) et les polynômes orthogonaux de Racah a été commencée dans [5].

La plupart des formules obtenues semblent nouvelles (probablement parce que ces suites de nombres n'ont jamais été considérées auparavant). Cependant, lorsque  $P = x^2$ , la formule (1) se simplifie (à un facteur près) en la série de Dirichlet usuelle  $L_\chi$  évaluée en  $2s - 1$ . Les valeurs aux entiers négatifs de  $L_{P,\chi}$  sont donc (à un facteur près) les valeurs aux entiers négatifs impairs de  $L_\chi$ . On trouve dans la littérature quelques fractions continues de Jacobi ou déterminants de Hankel pour de telles suites. Les nombres tangents sont ainsi (à un facteur près) les valeurs aux entiers négatifs impairs d'une fonction  $L$  de Dirichlet à coefficients de période 4 et leurs déterminants de Hankel sont connus, voir notamment [19, (4.56), (4.57)]. De même, les nombres de Springer d'indice impairs sont les valeurs aux entiers négatifs impairs de la série de Dirichlet ayant comme coefficients ceux de  $\frac{z-z^3}{1+z^4}$  et leur fraction continue de Jacobi est connue, voir [21, (5.11)].

Les résultats obtenus sont limités à quelques familles simples de fonctions périodiques ayant une série génératrice de la forme  $(z^a - z^b)/(1 - z^c)$ , de la même manière que les résultats antérieurs concernant les valeurs de fonctions  $L$  de Dirichlet portaient seulement sur quelques caractères. Il est fort

possible qu'une recherche élargie dans cette classe de fonctions périodiques fournisse d'autres exemples. Il serait intéressant de parvenir à des résultats exhaustifs, que ce soit pour des polynômes linéaires ou quadratiques. Une autre direction serait de regarder les fractions plus générales de la forme  $(z^a - z^b)(1 - z^d)/(1 - z^c)$ , où se produisent des phénomènes nouveaux.

Par ailleurs, on ne peut guère espérer des résultats du même type pour des polynômes  $P$  de degré au moins 3. En effet, on utilise ici des polynômes orthogonaux qui s'expriment, par un changement quadratique de variables, en termes d'une fonction hypergéométrique. Il n'existe rien de tel pour un changement de variables de degré 3 ou plus dans la hiérarchie d'Askey.

Une autre question intéressante concerne l'existence possible de  $q$ -analogues à ces résultats. Il existe en effet des  $q$ -analogues pour les fractions continues des nombres de Bernoulli-Carlitz [7]. Pour l'instant, aucun  $q$ -analogue n'est connu dans le cas d'un polynôme  $P$  quadratique, même pour la fonction  $\zeta$ . Le fait qu'il existe des  $q$ -analogues pour les polynômes orthogonaux hypergéométriques laisse la possibilité ouverte, à défaut d'être vraiment une indication positive.

Les caractères de Dirichlet réels forment, d'un point de vue arithmétique, la classe la plus naturelle de fonctions périodiques à valeurs dans  $\{-1, 0, 1\}$  qu'on puisse utiliser comme coefficients dans une série de Dirichlet. Cet article a commencé par une étude dans ce cadre, mais il est ensuite apparu que cette restriction n'était pas nécessaire, et que les résultats s'étendaient sans aucune hypothèse sur la multiplicativité des coefficients.

Ce travail est fondé sur une recherche expérimentale avec plusieurs logiciels de calcul formel (Fricas [11], SageMath [22] et Maple [17]), et en particulier sur une exploration des fonctions périodiques pouvant donner lieu à des fractions continues du type recherché. Certaines preuves utilisent également ces logiciels.

L'article est organisé comme suit. La section 1 contient de brefs rappels concernant les fractions de Jacobi en relation avec les moments de polynômes orthogonaux, les séries de Dirichlet à coefficients périodiques et les fonctions hypergéométriques. La section 2 décrit la construction des suites de nombres rationnels que nous allons considérer, ainsi qu'une description de la stratégie de preuve pour établir leur interprétation comme moments. Les sections 3 et 4 établissent les résultats voulus dans une série de cas particuliers, respectivement en incluant ou pas le premier terme des suites de nombres. L'appendice A contient des rappels sur des familles connues de polynômes orthogonaux, et la description d'une nouvelle famille. L'appendice B démontre une formule auxiliaire.

**Remerciements :** Nous remercions Jiang Zeng pour des discussions sur ce travail et pour une idée qui nous a permis d'avancer. A. Bostan a été soutenu par le projet [DeRerumNatura](#) ANR-19-CE40-0018. F. Chapoton a été soutenu par le projet [Combiné](#) ANR-19-CE48-0011.

# 1 Rappels

## 1.1 Fractions continues de Jacobi

Pour la relation étroite et classique entre les fractions continues de Jacobi, les déterminants de Hankel et les polynômes orthogonaux, on renvoie à [15, §2.7], [16, §5.4] et [23].

Pour  $f$  une série formelle en  $t$  de terme constant 1, un développement en fraction continue de Jacobi est une expression de la forme

$$f(t) = 1/(1 + A_0t + B_0t^2/(1 + A_1t + B_1t^2/(1 + \dots))), \quad (2)$$

où les coefficients forment une liste de paires  $(A_n, B_n)$  pour  $n \geq 0$ . Tous les  $B_n$  doivent être non nuls.

Lorsque le terme constant de  $f$  est non nul mais différent de 1, on normalisera implicitement en divisant  $f$  par son terme constant.

À une telle fraction continue de Jacobi, on associe une famille de polynômes orthogonaux. Avec la convention (2), la récurrence associée pour les polynômes orthogonaux unitaires de cette famille est donnée par

$$p_{n+1}(X) = (X + A_n)p_n(X) + B_{n-1}p_{n-1}(X) \quad (3)$$

avec les conditions initiales  $p_{-1} = 0$  et  $p_0 = 1$ .

Dans cette situation, les coefficients de la série formelle  $f$  (normalisée) forment la suite des moments de la famille associée de polynômes orthogonaux.

Les conventions ci-dessus pour les fractions continues de Jacobi diffèrent légèrement de la convention standard, naturelle d'un point de vue combinatoire, utilisée par exemple dans [23].

## 1.2 Séries de Dirichlet à coefficients périodiques

On renvoie au livre [9, §9 & §10] pour la théorie des fonctions  $L$  de Dirichlet et la description de leurs valeurs aux entiers négatifs. En particulier, la section 10.2.1 de ce livre contient les énoncés généraux portant sur les séries de Dirichlet à coefficients périodiques.

Soit  $\chi$  une fonction de  $\mathbb{N}_{>0}$  dans  $\{-1, 0, 1\}$ , périodique de période  $N$  et de somme nulle sur une période. Notons qu'alors  $-\chi$  est aussi une telle fonction. On peut associer à la fonction  $\chi$  sa série génératrice

$$\sum_{m \geq 1} \chi(m)z^m = Q(z)/(1 - z^N),$$

où  $Q(z) = \sum_{m=1}^N \chi(m)z^m$  est un polynôme à coefficients dans  $\{-1, 0, 1\}$ , nul en  $z = 1$ , sans terme constant et de degré au plus  $N$ . On utilisera souvent cette description de  $\chi$  sous la forme d'une fraction rationnelle.

La série de Dirichlet pour la fonction périodique  $\chi$  est définie pour  $s$  dans un demi-plan complexe par la série

$$L_\chi(s) = \sum_{m \geq 1} \chi(m) \frac{1}{m^s}$$

et s'étend en une fonction méromorphe dans le plan complexe tout entier. L'hypothèse de somme nulle sur une période implique que la fonction obtenue est holomorphe.

Les valeurs prises aux entiers négatifs par la fonction  $L_\chi$  sont des nombres rationnels, dont voici une description, qui ne fait que reformuler des énoncés bien connus.

On associe à  $\chi$  la forme linéaire  $\Psi_\chi$  sur l'espace des polynômes en  $x$  définie par la formule

$$t \frac{\sum_{m=1}^N \chi(m) e^{mt}}{1 - e^{Nt}} = - \sum_{n \geq 0} \Psi_\chi(x^n) \frac{t^n}{n!} = -\Psi_\chi(e^{xt}), \quad (4)$$

en tant qu'égalité entre séries formelles en la variable  $t$ , où  $N$  est la période de  $\chi$ . Alors, pour tout  $n \geq 1$ , on a la relation

$$L_\chi(1 - n) = -\frac{\Psi_\chi(x^n)}{n}. \quad (5)$$

Les valeurs  $\Psi_\chi(x^n)$  sont les analogues pour la fonction  $\chi$  des nombres de Bernoulli (qui correspondent de la même manière à la fonction constante égale à 1). L'hypothèse que  $\chi$  est de somme nulle sur une période implique que  $\Psi_\chi(1) = 0$ .

Soit par ailleurs  $\varphi_\chi$  la forme linéaire définie par

$$\varphi_\chi(x^n) = \Psi_\chi \left( \int_0^1 x^n dx \right) = -L_\chi(-n), \quad (6)$$

pour  $n \geq 0$ . Par linéarité, on a alors, pour tout polynôme  $E$ ,

$$\varphi_\chi(E(x)) = \Psi_\chi \left( \int_0^1 E(x) dx \right).$$

On en déduit la série génératrice exponentielle

$$\sum_{n \geq 0} \varphi_\chi(x^n) \frac{t^n}{n!} = \frac{\sum_{m=1}^N \chi(m) e^{mt}}{e^{Nt} - 1} \quad (7)$$

pour les valeurs de  $\varphi_\chi$  sur les monômes.

On a l'identité

$$\varphi_\chi(E(x + N)) - \varphi_\chi(E(x)) = \sum_{m=1}^N \chi(m) E(m), \quad (8)$$

pour tout polynôme  $E$ . Il suffit de la démontrer pour les monômes  $x^n$  pour tout  $n \geq 0$ . Ceci s'obtient en multipliant (7) par  $e^{Nt} - 1$  puis en comparant les coefficients de  $t^n$ .

On a aussi une variante de l'identité précédente lorsque la fraction

$$F_\chi = \frac{\sum_{m=1}^N \chi(m)z^m}{z^N - 1}$$

n'est pas réduite. On peut alors multiplier (7) par le dénominateur de la fraction évalué en  $z = e^t$ , et comparer à nouveau les coefficients de  $t^n$ . On peut aussi utiliser ainsi toute expression partiellement réduite de  $F_\chi$ .

### 1.2.1 Action par dilatation d'un facteur entier

Si  $\ell \geq 1$  est un entier, on peut considérer l'action de  $\ell$  par dilatation sur la fonction  $\chi$ , c'est-à-dire la fonction  $\bar{\chi}$  définie par

$$\bar{\chi}(\ell m) = \chi(m)$$

pour tout  $m \geq 1$  et  $\bar{\chi}(m) = 0$  si  $\ell$  ne divise pas  $m$ . Au niveau de la fraction associée, ceci correspond à la substitution  $F_{\bar{\chi}}(z) = F_\chi(z^\ell)$ .

Pour la série de Dirichlet, on trouve la relation

$$L_{\bar{\chi}}(s) = \ell^{-s} L_\chi(s).$$

On en déduit aussi les formules suivantes, pour tout polynôme  $P$  :

$$\Psi_{\bar{\chi}}(P(x)) = \ell^{-1} \Psi_\chi(P(\ell x)) \quad \text{et} \quad \varphi_{\bar{\chi}}(P(x)) = \varphi_\chi(P(\ell x)).$$

Ces relations sont bien compatibles avec la formule (5).

### 1.2.2 Caractères de Dirichlet

Tout caractère de Dirichlet réel fournit un exemple de fonction périodique à valeurs dans  $\{-1, 0, 1\}$ . La condition d'annulation de la somme sur une période est vérifiée exactement lorsque le caractère n'est pas trivial, par orthogonalité.

Voici une table de tels caractères qui apparaissent par la suite. On donne à chaque fois la période  $N$ , la liste des valeurs sur une période  $\{0, \dots, N-1\}$  et la série génératrice sous forme de fraction.

$$\left| \begin{array}{c|c|c} \chi_3 & 3 & 0, 1, -1 \\ \chi_4 & 4 & 0, 1, 0, -1 \\ \chi_6 & 6 & 0, 1, 0, 0, 0, -1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \frac{z-z^2}{1-z^3} \\ \frac{z-z^3}{1-z^4} \\ \frac{z-z^5}{1-z^6} \end{array} \right| \quad (9)$$

Cette liste finie de caractères est en fait délimitée par une condition simple sur la fraction associée, qui doit être de la forme

$$\frac{z - z^a}{1 - z^d},$$

ce qui aboutit à chercher les entiers  $d$  dont l'indicatrice d'Euler  $\varphi(d)$  vaut 2.

### 1.3 Fonctions hypergéométriques

On utilisera dans tout l'article les notations standard pour les fonctions hypergéométriques [1, 12], et notamment, pour  $k \geq 0$  entier, la notation  $(\alpha)_k$  pour la factorielle ascendante, définie par

$$(\alpha)_k = \prod_{i=0}^{k-1} (\alpha + i).$$

Pour  $k \geq 0$ , on introduit la notation

$$M_k(\alpha, \beta) = (\beta - \alpha)(\alpha)_k(\beta)_k.$$

**Proposition 1.1.** *Pour tout  $k \geq 0$ , on a le développement*

$$M_k(\alpha, \beta) = \sum_{\ell=0}^{k+1} c_{k,\ell} \cdot (\alpha)_{k+\ell}, \quad (10)$$

avec

$$c_{k,\ell} = \frac{(-k-1)_\ell (k+2)_\ell}{(1)_\ell (k+1)_\ell} (\alpha + \beta + k + \ell)_{k+1-\ell}.$$

*Démonstration.* En termes de fonctions hypergéométriques, la sommation à droite de (10) est le produit du terme initial

$$(\alpha + \beta + k)_{k+1} \cdot (\alpha)_k$$

par la somme finie

$${}_3F_2 \left( \begin{matrix} -k-1, k+2, \alpha+k \\ k+1, \alpha+\beta+k \end{matrix}; 1 \right).$$

Par une identité hypergéométrique (déflation suivie de Chu-Vandermonde), cette dernière vaut

$$(\beta - \alpha) \frac{(\beta)_k}{(\alpha + \beta + k)_{k+1}},$$

ce qui conclut la preuve.  $\square$

**Lemme 1.2.** *Pour  $k \geq 0$  et  $\alpha, \beta$  deux paramètres, on a*

$$\sum_{\ell=0}^{k+1} \frac{(-k-1)_\ell}{(1)_\ell} (\alpha + k + \ell)_{k+1-\ell} (\beta)_{k+\ell+1} = (\beta)_{k+1} (\alpha - \beta - 1)_{k+1}.$$

*Démonstration.* En termes de fonctions hypergéométriques, cette somme s'écrit

$$(\alpha + k)_{k+1} (\beta)_{k+1} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -k-1, \beta+k+1 \\ \alpha+k \end{matrix}; 1 \right).$$

Mais la fonction hypergéométrique vaut, par Chu-Vandermonde,

$$(\alpha - \beta - 1)_{k+1} / (\alpha + k)_{k+1},$$

ce qui conclut la preuve.  $\square$

**Lemme 1.3.** *On a la formule suivante :*

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} -m, m+1 \\ x \end{matrix}; 1/2\right) = \frac{2^m((x-m)/2)_m}{(x)_m},$$

pour tout entier  $m \geq 0$ .

*Démonstration.* C'est une conséquence directe de la formule classique [3, §2.4, (3)]

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} 1-a, a \\ c \end{matrix}; 1/2\right) = \frac{\Gamma(c/2)\Gamma((c+1)/2)}{\Gamma((a+c)/2)\Gamma((c+1-a)/2)},$$

en prenant  $c = x$  et  $a = -m$ . □

## 2 Cadre général et cadre décalé

### 2.1 Cadre général

On va considérer par la suite plusieurs situations très similaires, dont voici la description commune.

On fixe une fonction périodique  $\chi$  de  $\mathbb{N}_{>0}$  dans  $\{-1, 0, 1\}$ , supposée de moyenne nulle sur une période. On s'intéresse au polynôme quadratique  $x(x+u)$ , où  $u$  sera soit une variable, soit un petit entier ou demi-entier. Suivant la discussion de l'introduction, on considère la série formelle

$$f_\chi = \sum_{n \geq 1} \Psi_\chi((x(x+u))^n) t^{n-1}/n. \quad (11)$$

Le paramètre  $u$  est souvent omis de la notation. Notons que la série associée ainsi à  $-\chi$  est  $-f_\chi$ , parce que  $\Psi_{-\chi} = -\Psi_\chi$ .

On aurait pu considérer plus généralement

$$f_{\chi, P} = \sum_{n \geq 1} \Psi_\chi(P^n) t^{n-1}/n,$$

pour un polynôme  $P$  de la forme  $\lambda x^2 + ux + v$  avec  $\lambda \neq 0$ . Dans l'interprétation future des coefficients de la série  $f_{\chi, P}$  normalisée comme les moments d'une famille de polynômes orthogonaux, on peut se ramener par une dilatation au cas  $\lambda = 1$ , car

$$f_{\chi, \lambda P}(t) = \lambda f_{\chi, P}(\lambda t).$$

De plus, le fait que  $\Psi_\chi(1)$  soit nul implique qu'une translation par  $v$  de la variable des polynômes orthogonaux correspond à une addition de  $v$  au polynôme  $P$ . On peut donc se ramener au cas  $v = 0$  sans perte de généralité.

### 2.1.1 Action par dilatation d'un facteur entier

Si on remplace  $\chi$  par son image  $\bar{\chi}$  par la dilatation d'un facteur  $\ell \geq 1$ , et simultanément  $u$  par  $\ell u$ , on trouve que

$$f_{\bar{\chi}, \ell u}(t) = \ell f_{\chi, u}(\ell^2 t).$$

Dans la future interprétation des coefficients de cette série comme des moments, ceci revient à une dilatation d'un facteur  $\ell^2$  dans la variable des polynômes orthogonaux. On considère donc que c'est une situation équivalente.

### 2.1.2 Approche expérimentale

Notre approche suit une démarche classique en mathématiques expérimentales, et repose sur le paradigme *deviner et prouver* (*guess and prove*, en anglais). De ce point de vue, la méthodologie est proche de celle de l'article [18], dont l'objectif est néanmoins différent.

Pour chaque choix de  $\chi$  et  $u$ , on peut d'abord calculer aisément les premiers coefficients  $A_n$  et  $B_n$  du développement de  $f_\chi$  en fraction continue de Jacobi sous la forme (2).

Dans les cas favorables, on peut *deviner* une expression, sous forme de fraction rationnelle en  $n$ , pour les coefficients  $A_n$  et  $B_n$  obtenus. On peut alors introduire une famille  $p_n^\chi$  de polynômes orthogonaux définis par la récurrence (3) pour ces coefficients  $A_n$  et  $B_n$ .

L'étape suivante consiste à identifier ces polynômes comme faisant partie d'une famille de polynômes orthogonaux. La plupart des cas étudiés font intervenir des polynômes orthogonaux hypergéométriques dans la hiérarchie d'Askey : soit les polynômes de Racah, soit les polynômes de type dual Hahn continu. Ceci nécessite un changement affine de variables, à la fois dans la variable  $Y$  des polynômes orthogonaux, mais aussi dans une variable auxiliaire  $y$ . On aboutit à des polynômes orthogonaux  $p_n^\chi$  en une variable  $X$ , qui s'expriment à l'aide d'une fonction hypergéométrique dont les paramètres dépendent de  $x$ , avec la relation  $X = x(x + u)$ .

Il reste ensuite à vérifier que les moments de cette famille de polynômes orthogonaux  $p_n^\chi$  sont bien les coefficients de la série  $f_\chi$ , une fois normalisée par division par son terme constant. Pour ceci, on introduit la forme linéaire  $\Lambda_\chi$  (qui joue le rôle de mesure) sur les polynômes en  $X$  telle que

$$\Lambda_\chi(nX^{n-1}) = \frac{1}{f_\chi(0)} \Psi_\chi(x^n(x + u)^n)$$

pour  $n \geq 1$ .

Par le théorème de Favard [8, Thm. 4.4], il suffit alors de montrer d'une part que  $\Lambda_\chi(1) = 1$  (ce qui est immédiat par les définitions de  $\Lambda_\chi$  ci-dessus et de  $f_\chi$  dans (11)) et d'autre part que  $\Lambda_\chi$  s'annule sur les polynômes  $p_n^\chi(X)$

pour  $n \geq 1$ . On observe alors, en utilisant la définition de  $\Lambda_\chi$  et l'égalité  $X = x(x + u)$ , que

$$\begin{aligned} \Lambda_\chi(p_n^\chi(X)) &= \Lambda_\chi \left( \partial_X \int_0^1 p_n^\chi(X) dX \right) = \\ &= \frac{1}{f_\chi(0)} \Psi_\chi \left( \int_0^1 p_n^\chi(x(x + u))(2x + u) dx \right) = \frac{1}{f_\chi(0)} \varphi_\chi((2x + u)p_n^\chi(x(x + u))). \end{aligned}$$

On se ramène donc à montrer dans chaque cas l'énoncé suivant :

**(N)** Pour  $n \geq 1$ , l'expression  $\varphi_\chi((2x + u)p_n^\chi(x(x + u)))$  est nulle.

Une fois cet énoncé démontré, on aura obtenu dans chacun des cas particuliers l'énoncé suivant.

**Théorème 2.1.** *La famille de polynômes orthogonaux  $p_n^\chi$  a pour moments les coefficients de la fonction  $f_\chi/f_\chi(0)$ .*

On peut alors déduire, par la théorie générale qui relie fractions continues de Jacobi, déterminants de Hankel et polynômes orthogonaux, l'existence du développement en fraction continue de Jacobi qui a servi de point de départ expérimental, et des énoncés sur la factorisation des déterminants de Hankel pour la liste des moments.

### 2.1.3 Stratégie de preuve

La stratégie générale de preuve de l'énoncé **(N)** est la suivante. On obtient d'abord des évaluations de  $\varphi_\chi$  sur des expressions de la forme

$$\left( \frac{cx + d}{e} \right)_k$$

pour certains entiers  $(c, d, e)$ . On en déduit des évaluations de  $\varphi_\chi$  sur des polynômes de la forme

$$\left( \frac{(c - c')x + (d - d')}{e} \right) \left( \frac{cx + d}{e} \right)_k \left( \frac{c'x + d'}{e} \right)_k,$$

en utilisant l'identité de la proposition 1.1. On se sert enfin de ces secondes évaluations pour calculer la valeur de  $\varphi_\chi$  sur le développement en série des fonctions hypergéométriques et obtenir l'annulation voulue.

## 2.2 Cadre décalé

On s'intéresse par ailleurs en parallèle aux séries de la forme

$$f_\chi^+ = \sum_{n \geq 2} \Psi_\chi((x(x + u))^n) t^{n-2}/n,$$

obtenues en oubliant le terme constant de  $f_\chi$  et en divisant par  $t$ . Ici encore,  $u$  est soit une variable soit un petit entier, souvent omis dans les notations. On note que  $f_{-\chi}^+ = -f_\chi^+$ .

On peut alors, de la même manière que précédemment, deviner dans certains cas une expression pour les coefficients  $\mathbf{A}_n$  et  $\mathbf{B}_n$  du développement de  $f_\chi^+$  en fraction continue de Jacobi sous la forme (2), puis identifier les polynômes orthogonaux associés à ces coefficients. On note  $p_n^{\chi,+}$  ces polynômes orthogonaux.

On introduit la forme linéaire (mesure) associée :

$$\Lambda_\chi^+(nX^{n-2}) = \frac{1}{f_\chi^+(0)} \Psi_\chi(x^n(x+u)^n)$$

pour  $n \geq 2$ . Alors

$$\Lambda_\chi^+(nX^{n-2}) = \Lambda_\chi^+\left(\frac{1}{X} \partial_X X^n\right).$$

On observe alors, en utilisant la définition de  $\Lambda_\chi^+$  et la relation  $X = x(x+u)$ , que

$$\begin{aligned} \Lambda_\chi^+(p_n^{\chi,+}(X)) &= \Lambda_\chi^+\left(\frac{1}{X} \partial_X \int_0^1 p_n^{\chi,+}(X) X dX\right) = \\ &= \frac{1}{f_\chi^+(0)} \Psi_\chi\left(\int_0^1 p_n^{\chi,+}(x(x+u)) x(x+u)(2x+u) dx\right) = \\ &= \frac{1}{f_\chi^+(0)} \varphi_\chi((2x+u)x(x+u)p_n^{\chi,+}(x(x+u))). \end{aligned}$$

On se ramène donc à montrer dans chaque cas l'énoncé suivant :

(N+) Pour  $n \geq 1$ , l'expression  $\varphi_\chi((2x+u)x(x+u)p_n^{\chi,+}(x(x+u)))$  est nulle.

Une fois cet énoncé démontré, on aura obtenu dans chacun des cas particuliers l'énoncé suivant.

**Théorème 2.2.** *La famille de polynômes orthogonaux  $p_n^{\chi,+}$  a pour moments les coefficients de la fonction  $f_\chi^+/f_\chi^+(0)$ .*

### 3 Fractions de la forme $(z^a - z^b)/(1 - z^c)$ sans décalage

On se place dans toute cette section dans la situation décrite dans la section 2.1. On va considérer dans cette section et dans la suivante les coefficients périodiques qui correspondent à des fractions de la forme

$$\frac{z^a - z^b}{1 - z^c}, \quad (12)$$

pour  $a, b, c$  des entiers strictement positifs tels que  $c$  ne divise pas  $b - a$ . (Selon la table (9), ceci comprend le cas des caractères de Dirichlet  $\chi_3, \chi_4$  et  $\chi_6$ .)

On note  $\Psi_{a,b,c}$  et  $\varphi_{a,b,c}$  les formes linéaires associées à la fraction (12) par les formules (4) et (6) de la section 1.2. On note  $f_{a,b,c}$  la série de type (11) avec les coefficients définis par  $\Psi_{a,b,c}$ . Dans toute la section,  $u$  sera une variable.

Quitte à échanger  $a$  et  $b$ , ce qui remplace  $f_{a,b,c}$  par son opposé et laisse inchangé le quotient  $f_{a,b,c}/f_{a,b,c}(0)$ , on peut supposer  $a < b$ .

On note ici pour usage ultérieur l'identité

$$\varphi_{a,b,c}(E(x+c)) - \varphi_{a,b,c}(E(x)) = E(a) - E(b), \quad (13)$$

pour tout polynôme  $E$ ; il s'agit d'un cas particulier de l'égalité (8).

### 3.1 Préparatifs

On va maintenant évaluer  $\varphi_{a,b,c}$  sur des expressions de nature hypergéométrique, contenant des factorielles ascendantes.

**Lemme 3.1.** *Pour tous entiers  $k \geq j \geq 0$ , on a*

$$\varphi_{a,b,c} \left( \left( \frac{-x+b}{c} - j \right)_k \right) = -\frac{1}{k+1} \left( \frac{b-a}{c} - j \right)_{k+1}.$$

*Démonstration.* On note  $N_k(x)$  pour  $\left( \frac{-x+b}{c} - j \right)_k$ . On vérifie que

$$N_{k+1}(x+c) - N_{k+1}(x) = -(k+1)N_k(x)$$

pour tout  $k \geq 0$ . On applique à ceci la forme linéaire  $\varphi_{a,b,c}$  et on utilise (13) sur le membre de gauche pour obtenir

$$N_{k+1}(a) - N_{k+1}(b) = -(k+1)\varphi_{a,b,c}(N_k(x)).$$

Il reste à noter que  $N_{k+1}(b) = (-j)_{k+1}$  s'annule parce que  $k \geq j$ .  $\square$

On pose, pour  $k \geq j \geq 0$ ,

$$M_{k,j}^{(b,c)}(x, u) = M_k \left( \frac{-x+b}{c} - j, \frac{x+u+b}{c} - j \right). \quad (14)$$

**Proposition 3.2.** *Pour tous entiers  $k \geq j \geq 0$ , on a*

$$\varphi_{a,b,c} \left( M_{k,j}^{(b,c)}(x, u) \right) = -\frac{1}{k+1} \left( \frac{b-a}{c} - j \right)_{k+1} \left( \frac{u+b+a-c}{c} - j \right)_{k+1}. \quad (15)$$

*Démonstration.* En spécialisant la proposition 1.1, on a le développement

$$M_{k,j}^{(b,c)}(x, u) = \sum_{\ell=0}^{k+1} c_{k,\ell} \left( \frac{-x+b}{c} - j \right)_{k+\ell}, \quad (16)$$

avec

$$c_{k,\ell} = \frac{(-k-1)_\ell (k+2)_\ell}{(1)_\ell (k+1)_\ell} \left( \frac{u+2b}{c} + k + \ell - 2j \right)_{k+1-\ell}, \quad (17)$$

qui donne une écriture de  $M_{k,j}^{(b,c)}(x, u)$  comme une combinaison linéaire de polynômes  $\left(\frac{-x+b}{c} - j\right)_\ell$  avec des coefficients indépendants de  $x$ .

En appliquant le lemme 3.1 à l'image par  $\varphi_{a,b,c}$  de l'expression (16) avec les coefficients (17), on trouve pour  $\varphi_{a,b,c}(M_{k,j}^{(b,c)}(x, u))$  une formule hypergéométrique :

$$\frac{-1}{k+1} \sum_{\ell=0}^{k+1} \frac{(-k-1)_\ell}{(1)_\ell} \left( \frac{u+2b}{c} + k + \ell - 2j \right)_{k+1-\ell} \left( \frac{b-a}{c} - j \right)_{k+\ell+1}.$$

En termes de fonctions hypergéométriques, ceci donne

$$\frac{-1}{k+1} \left( \frac{u+2b}{c} + k - 2j \right)_{k+1} \left( \frac{b-a}{c} - j \right)_{k+1} \times {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -k-1, (b-a)/c + k + 1 - j \\ (u+2b)/c + k - 2j \end{matrix}; 1 \right).$$

En utilisant alors la formule de Chu-Vandermonde sous la forme

$${}_2F_1 \left( \begin{matrix} -k-1, (b-a)/c + k + 1 - j \\ (u+2b)/c + k - 2j \end{matrix}; 1 \right) = \frac{((u+b+a-c)/c - j)_{k+1}}{((u+2b)/c + k - 2j)_{k+1}},$$

on trouve bien le terme de droite de (15).  $\square$

### 3.2 Polynômes orthogonaux associés

On rappelle que, pour tout triplet  $(a, b, c) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^3$  tel que  $a < b$  et tel que  $c$  ne divise pas  $b - a$ , nous avons défini la série formelle  $f_{a,b,c}$  de  $\mathbb{Q}[u][[t]]$  par

$$f_{a,b,c} = \sum_{n \geq 1} \Psi_{a,b,c}(x^n(x+u)^n) \frac{t^{n-1}}{n},$$

où  $\Psi_{a,b,c}$  est une forme linéaire qui agit sur tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{Q}[u, x]$  par

$$\Psi_{a,b,c}(P) = \sum_{k \geq 1} k! \cdot [x^k]P \cdot [t^{k-1}] \frac{e^{at} - e^{bt}}{e^{tc} - 1}.$$

En calculant les premiers termes du développement en série de

$$f_{a,b,c} = \frac{(a-b)(u+a-c+b)}{c} \cdot \left( 1 + \frac{(a+b-c)u + a^2 + b^2 - ac - bc}{2}t + \dots \right)$$

on peut *deviner* pour la série  $f_{a,b,c}$  divisée par son terme constant une fraction continue de Jacobi de la forme (2), avec

$$A_n = (c^2n^2 + c^2n + u(c-b-a) + a(c-a) + b(c-b))/2 \quad (18)$$

et

$$B_n = -\frac{(cn+c+a-b)(cn+c+b-a)(n+1)^2}{4(2n+1)(2n+3)}(cn-u+2c-a-b)(cn+u+a+b), \quad (19)$$

pour  $n \geq 0$ .

Afin de *prouver* cette fraction continue de Jacobi pour  $f_{a,b,c}$ , on introduit les polynômes orthogonaux  $p_n^{(a,b,c)}(X)$  définis par la récurrence (3) avec les coefficients ci-dessus. On montre d'abord qu'ils appartiennent à la famille des polynômes orthogonaux hypergéométriques de Racah.

**Proposition 3.3.** *Les polynômes orthogonaux  $p_n^{(a,b,c)}$  sont donnés, à une constante multiplicative près, par la formule*

$${}_4F_3 \left( \begin{matrix} -n, n+1, (-x+b)/c, (x+u+b)/c \\ 1, (u+a+b)/c, (b-a+c)/c \end{matrix}; 1 \right) \quad (20)$$

comme fonctions de  $X(x) = x(x+u)$ .

*Démonstration.* La formule (31) pour les polynômes orthogonaux de Racah, pour les paramètres  $\alpha = (u+a+b-c)/c$ ,  $\beta = -(u+a+b-c)/c$ ,  $\gamma = (b-a)/c$  et  $\delta = (u+a+b-c)/c$  donne

$${}_4F_3 \left( \begin{matrix} -n, n+1, -y, y+u/c+2b/c \\ 1, (u+a+b)/c, (b-a+c)/c \end{matrix}; 1 \right)$$

comme fonction de  $Y(y) = y(y+u/c+2b/c)$ . On passe à la formule (20) par le changement de variables

$$\begin{cases} X = c^2Y + b(b+u), \\ x = cy + b. \end{cases}$$

Le même changement de variables effectué dans la formule (30) pour la récurrence des polynômes de Racah donne les coefficients  $A_n$  de (18) et  $B_n$  de (19), ce qui démontre la proposition.  $\square$

Remarque : l'expression (19) se simplifie lorsque  $2(b - a) = c$ . Dans ce cas, les polynômes orthogonaux appartiennent en fait au type Dual Hahn continu.

On veut maintenant démontrer que les coefficients du quotient de  $f_{a,b,c}$  par son terme constant sont bien les moments de la famille de polynômes orthogonaux (20). Comme expliqué dans la section 2, on se ramène à montrer le lemme suivant, qui donne (N).

**Lemme 3.4.** *L'expression*

$$\varphi_{a,b,c} \left( (2x + u) p_n^{(a,b,c)}(x(x + u)) \right)$$

s'annule pour tout  $n \geq 1$ .

*Démonstration.* En développant la formule explicite (20) pour les polynômes  $p_n^{(a,b,c)}$ , cette expression devient la somme finie

$$\varphi_{a,b,c} \left( \sum_{k \geq 0} (2x + u) \frac{(-n)_k (n + 1)_k ((-x + b)/c)_k ((x + u + b)/c)_k}{(1)_k (1)_k ((u + a + b)/c)_k ((b - a + c)/c)_k} \right)$$

dans laquelle on reconnaît un facteur  $M_k^{(b,c)}(x, u)$  défini par (14). On peut donc utiliser l'évaluation (15) de  $\varphi_{a,b,c}$  et obtenir une somme hypergéométrique qui se simplifie (à un facteur près) en

$${}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n, n + 1 \\ 2 \end{matrix}; 1 \right).$$

Ceci s'annule pour  $n \geq 1$  par Chu-Vandermonde.  $\square$

## 4 Fractions de la forme $(z^a - z^b)/(1 - z^c)$ avec décalage

On garde les mêmes notations et la même condition :  $a, b, c$  sont des entiers strictement positifs tels que  $c$  ne divise pas  $b - a$ .

On peut supposer sans perte de généralité que  $a < b$ . Ce ne sera pas toujours utile, notamment pour ne pas distinguer de cas.

On se place dans toute cette section dans la situation décrite dans la section 2.2.

### 4.1 Cas $c = b$

On considère dans cette section les fractions de la forme  $\frac{z^a - z^b}{1 - z^b}$ , pour  $a, b$  entiers strictement positifs tels que  $b$  ne divise pas  $a$ . Le paramètre  $u$  est une variable.

On devine les coefficients de la fraction continue de Jacobi :

$$A_n = \frac{(2b^2(n+1)^2 + (b-2a)u - b^2 + 2ab - 2a^2)(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}$$

et

$$B_n = -\frac{(bn+u+b+a)(bn-u+2b-a)(bn+b+a)(bn+2b-a)(n+2)(n+1)}{4(2n+3)^2}.$$

On identifie ces coefficients comme ceux de la récurrence pour les polynômes de Racah de paramètres  $\alpha = (b-a)/b$ ,  $\beta = a/b$ ,  $\gamma = (u+a)/b$ ,  $\delta = (b-a)/b$ , modulo le changement de variables

$$\begin{cases} X = b^2Y + bu + b^2, \\ x = b(y+1). \end{cases}$$

Les polynômes orthogonaux  $p_n$  sont donc donnés, à une constante multiplicative près, par la formule

$${}_4F_3 \left( \begin{matrix} -n, n+2, (-x+b)/b, (x+u+b)/b \\ (u+a+b)/b, 2, 1+(b-a)/b \end{matrix}; 1 \right) \quad (21)$$

comme fonctions de  $X(x) = x(x+u)$ .

On peut noter que ceci se simplifie en des polynômes de type Dual Hahn continu lorsque  $b = 2a$ .

Il reste à démontrer **(N+)** pour cette famille de polynômes et la forme linéaire  $\varphi_{a,b,b}$ .

**Lemme 4.1.** *L'expression*

$$\varphi_{a,b,b}((2x+u)(x(x+u))p_n(x(x+u)))$$

*s'annule pour tout  $n \geq 1$ .*

*Démonstration.* En développant la formule explicite (21) pour les polynômes  $p_n$ , cette expression devient (à un facteur près) la somme finie

$$\varphi_{a,b,b} \left( \sum_{k \geq 0} (2x+u) \frac{(-n)_k (n+2)_k (-x/b)_{k+1} ((x+u)/b)_{k+1}}{(1)_k (2)_k ((u+a+b)/b)_k (1+(b-a)/b)_k} \right)$$

dans laquelle on reconnaît un facteur  $M_{k+1}(-x/b, (x+u)/b)$ . On peut donc utiliser la formule

$$\varphi_{a,b,b}(M_k(-x/b, (x+u)/b)) = \frac{-1}{k+1} (-a/b)_{k+1} ((u+a-b)/b)_{k+1}$$

qui résulte de la proposition 3.2 avec  $j = 1$ , et obtenir une somme hypergéométrique qui se simplifie (à un facteur près) en

$${}_2F_1 \left( \begin{matrix} -n, n+2 \\ 3 \end{matrix}; 1 \right).$$

Ceci s'annule pour  $n \geq 1$  par Chu-Vandermonde.  $\square$

## 4.2 Cas $u = c - a$

On considère dans cette section les fractions de la forme  $\frac{z^a - z^b}{1 - z^c}$ , pour  $a, b$  entiers strictement positifs tels que  $c$  ne divise pas  $a - b$ . Le paramètre  $u$  est fixé égal à  $c - a$ . On suppose de plus que  $c$  ne divise pas  $b$ .

On devine les coefficients de la fraction continue de Jacobi :

$$A_n = \frac{(n+1)^2(2c^2n^2 + 4c^2n + 2c^2 - ac - 2b^2 + 2ab)}{(2n+1)(2n+3)}$$

et

$$B_n = -\frac{(cn + c + a - b)(cn + 2c - b)(cn + c + b)(cn + 2c + b - a)(n+1)(n+2)}{4(2n+3)^2}.$$

On note dans ces coefficients une symétrie par échange de  $b$  et  $a - b$ .

On identifie ces coefficients comme ceux de la récurrence pour les polynômes de Racah de paramètres  $\alpha = b/c, \beta = (c - b)/c, \gamma = (a - b)/c, \delta = b/c$ , modulo le changement de variables

$$\begin{cases} X = c^2Y + ca, \\ x = cy + a. \end{cases}$$

Les polynômes orthogonaux  $p_n$  sont donc donnés, à une constante multiplicative près, par la formule

$${}_4F_3\left(\begin{matrix} -n, n+2, (-x+a)/c, (x+c)/c \\ (b+c)/c, 2, (a-b+c)/c \end{matrix}; 1\right) \quad (22)$$

comme fonctions de  $X(x) = x(x + c - a)$ .

On peut noter que ceci se simplifie en des polynômes de type Dual Hahn lorsque  $c = 2b$  ou  $c = 2(a - b)$ .

Il reste à démontrer **(N+)** dans ce cas.

**Lemme 4.2.** *L'expression*

$$\varphi_{a,b,c}((2x + c - a)x(x + c - a)p_n(x(x + c - a)))$$

*s'annule pour tout  $n \geq 1$ .*

*Démonstration.* En développant la formule explicite (22) pour les polynômes  $p_n$  et en intégrant les facteurs  $x$  et  $x + c - a$  dans les factorielles ascendantes, cette expression devient (à un facteur près) la somme finie

$$\varphi_{a,b,c} \left( \sum_{k \geq 0} (2x + c - a) \frac{(-n)_k (n+2)_k ((-x+a-c)/c)_{k+1} (x/c)_{k+1}}{(1)_k (2)_k ((b+c)/c)_k ((a-b+c)/c)_k} \right).$$

On peut donc utiliser le lemme qui suit, et obtenir une somme hypergéométrique qui se simplifie (à un facteur près) en

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, n+2 \\ 3 \end{matrix}; 1\right).$$

Ceci s'annule pour  $n \geq 1$  par Chu-Vandermonde.  $\square$

**Lemme 4.3.** *Pour  $k \geq 1$ ,*

$$\varphi_{a,b,c}((2x+c-a)((-x+a-c)/c)_k(x/c)_k) = \frac{(b-c)(a-b-c)}{(k+1)c} (b/c)_k((a-b)/c)_k.$$

*Démonstration.* L'argument de  $\varphi_{a,b,c}$  est  $cM_k((-x+a-c)/c, x/c)$ . La formule est juste la proposition 3.2 après échange de  $a$  et  $b$ , avec  $j = 1$  et  $u = c - a$ .  $\square$

### 4.3 Cas $c = a + b$ et $u = c/2$

On considère dans cette section les fractions de la forme  $\frac{z^a - z^b}{1 - z^{a+b}}$ , pour  $a, b$  entiers strictement positifs. Le paramètre  $u$  est fixé égal à  $(a+b)/2$ . Pour simplifier les notations, on pose  $c = a + b$ . La situation étudiée est alors symétrique en  $a, b$ .

On devine les coefficients de la fraction continue de Jacobi :

$$A_n = c^2 n^2 / 2 + c^2 n + c^2 / 4 + ab$$

et

$$B_n = -\frac{c^2}{16}(cn + 3a + b)(cn + a + 3b)(n + 1)^2.$$

On identifie ces coefficients comme ceux du type dual Hahn continu de paramètres  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} = (3/2, (3a-b)/(2c), (3b-a)/(2c))$ , modulo le changement de variables

$$\begin{cases} X = \frac{c^2}{4}Y - c^2/16, \\ x = \frac{c}{2}y - c/4. \end{cases}$$

Les polynômes orthogonaux  $p_n$  sont donc donnés, à une constante multiplicative près, par la formule

$$p_n(X) = {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n, (-2x)/c + 1, (2x)/c + 2 \\ (3a+b)/c, (3b+a)/c \end{matrix}; 1\right) \quad (23)$$

comme fonctions de  $X(x) = x(x + c/2)$ .

Il reste à démontrer **(N+)** dans ce cas.

**Lemme 4.4.** *L'expression*

$$\varphi_{a,b,a+b}((2x + c/2)x(x + c/2)p_n(x(x + c/2)))$$

*s'annule pour tout  $n \geq 1$ .*

*Démonstration.* On développe l'argument de  $\varphi_{a,b,a+b}$  en utilisant l'expression hypergéométrique (23). On utilise ensuite le lemme ci-dessous. On obtient un multiple de

$${}_1F_0\left(\begin{matrix} -n \\ \end{matrix}; 1\right) = (1-1)^n,$$

qui s'annule bien pour  $n \geq 1$ .  $\square$

**Lemme 4.5.** *Pour  $k \geq 0$ ,*

$$\varphi_{a,b,a+b}((2x+c/2)((-2x)/c)_{k+1}((2x)/c+1)_{k+1}) = \frac{c}{2}((a-b)/c)_{k+2}((b-a)/c+1)_{k+1}. \quad (24)$$

*Démonstration.* On remarque d'abord que l'argument de  $\varphi_{a,b,a+b}$  est  $c/2$  fois  $M_{k+1}(-2x/c, 2x/c+1)$ . On va simplifier par le facteur  $c/2$ , qui est aussi présent dans le membre de droite de (24). On développe l'argument en utilisant la proposition 1.1 pour obtenir

$$\sum_{\ell=0}^{k+2} \frac{(-k-2)_\ell(k+\ell+2)(k+2+\ell)_{k+2-\ell}}{(1)_\ell(k+2)} \varphi_{a,b,a+b}((-2x/c)_{k+1+\ell}).$$

En utilisant le lemme ci-dessous, on trouve

$$-(2k+3)! \sum_{\ell=0}^{k+2} \frac{(-k-2)_\ell(k+\ell+2)}{(1)_\ell(k+2)2^{k+1+\ell}} \sum_{j=0}^{k+1+\ell} \frac{2^{j-1}}{(j+1)!} ((-2a/c)_{j+1} - (-2b/c)_{j+1}).$$

Par la proposition B.1 en  $N = 1$ , ceci devient

$$\frac{(-1)^{k+1}}{2k+4} ((-2a/c-k-1)_{2k+4} - (-2b/c-k-1)_{2k+4}).$$

Il reste juste à factoriser cette différence pour obtenir le résultat voulu.  $\square$

**Lemme 4.6.**

$$\varphi_{a,b,a+b}((-2x/c)_k) = \frac{-k!}{2^k} \left( \sum_{j=0}^k \frac{2^{j-1}}{(j+1)!} ((-2a/c)_{j+1} - (-2b/c)_{j+1}) \right).$$

*Démonstration.* On pose  $N_k(x) = (-2x/c)_k$ . On note  $Z_k$  pour  $\varphi_{a,b,a+b}(N_k(x))$ . Alors

$$N_{k+1}(x+c/2) - N_{k+1}(x) = -(k+1)N_k(x),$$

donc

$$N_{k+1}(x+c) - N_{k+1}(x) = -(k+1)(N_k(x) + N_k(x+c/2)).$$

En appliquant  $\varphi_{a,b,a+b}$  aux deux équations ci-dessus, on en déduit

$$2Z_k = -\frac{1}{k+1}(N_{k+1}(a) - N_{k+1}(b)) + kZ_{k-1}.$$

Donc

$$\frac{2^k Z_k}{k!} = -\sum_{j=0}^k \frac{2^{j-1}}{(j+1)!} (N_{j+1}(a) - N_{j+1}(b)).$$

□

#### 4.4 Cas $c = 2(b - a)$ et $u = b - a$

On considère dans cette section les fractions de la forme

$$\frac{z^a - z^b}{1 - z^{2(b-a)}} = \frac{z^a}{1 + z^{b-a}},$$

pour  $a, b$  entiers strictement positifs. Le paramètre  $u$  est fixé égal à  $b - a$ . On suppose ici que  $a < b$  et que  $b - a$  ne divise pas  $a$ .

On devine les coefficients de la fraction continue de Jacobi :

$$A_n = 2(b - a)^2 n^2 + 4(b - a)^2 n + 2b^2 - 4ab + a^2$$

et

$$B_n = -(b - a)^2 ((b - a)n + 2b - a)((b - a)n + 2b - 3a)(n + 1)^2.$$

On identifie ces coefficients comme ceux de la récurrence de type Dual Hahn continu de paramètres  $(3/2, 1 - (a + b)/(2(b - a)), (a + b)/(2(b - a)))$ , modulo le changement de variables

$$\begin{cases} X = (b - a)^2(Y - 1/4), \\ x = (b - a)(y - 1/2). \end{cases}$$

On obtient donc les polynômes définis, à une constante multiplicative près, par

$${}_3F_2\left(\begin{matrix} -n, 1 - x/(b - a), 2 + x/(b - a) \\ (2b - a)/(b - a), (2b - 3a)/(b - a) \end{matrix}; 1\right) \quad (25)$$

pour  $X = x(x + b - a)$ .

On veut montrer **(N+)** :

**Proposition 4.7.** *L'expression*

$$\varphi_{a,b,2(b-a)}((2x + b - a)(x(x + b - a))p_n(x(x + b - a)))$$

*s'annule pour tout  $n \geq 1$ .*

*Démonstration.* On commence par remplacer  $p_n(x(x+b-a))$  par son expression (25) développée comme une somme. On peut alors intégrer les facteurs  $x$  et  $x+b-a$  chacun dans une factorielle ascendante dans le numérateur. En utilisant la formule (26) en  $k+1$ , la sommation se simplifie en  ${}_1F_0\left(\begin{smallmatrix} -n \\ \end{smallmatrix}; 1\right)$ , qui s'annule bien pour tout entier strictement positif.  $\square$

On a donc besoin de la valeur exacte suivante.

**Proposition 4.8.** *Pour  $k \geq 0$ ,*

$$\varphi_{a,b,2(b-a)}((2x+b-a)(-x/(b-a))_k(1+x/(b-a))_k) = (b-a)(-a/(b-a))_{k+1}(b/(b-a))_k. \quad (26)$$

*Démonstration.* L'argument de  $\varphi_{a,b,2(b-a)}$  est  $b-a$  fois  $M_k(-x/(b-a), x/(b-a) + 1)$ . On va simplifier par le facteur  $b-a$ , qui est aussi présent dans le membre de droite de (26). On développe l'argument en utilisant la proposition 1.1 pour obtenir

$$\sum_{\ell=0}^{k+1} \frac{(-k-1)_\ell(k+\ell+1)(k+1+\ell)_{k+1-\ell}}{(1)_\ell(k+1)} \varphi_{a,b,a+b}((-x/(b-a))_{k+\ell}).$$

En utilisant le lemme ci-dessous, on trouve

$$-(2k+1)! \sum_{\ell=0}^{k+1} \frac{(-k-1)_\ell(k+\ell+1)}{(1)_\ell(k+1)2^{k+\ell}} \sum_{j=0}^{k+\ell} \frac{2^{j-1}}{j!} (-a/(b-a))_j.$$

Par la proposition B.1 en  $N=0$ , ceci devient

$$(-1)^k (-a/(b-a) - k)_{2k+1}.$$

Il reste juste à réécrire pour obtenir le résultat voulu.  $\square$

**Lemme 4.9.** *Pour tout  $k \geq 0$ ,*

$$\varphi_{a,b,2(b-a)}((-x/(b-a))_k) = -\frac{k!}{2^k} \sum_{j=0}^k \frac{2^{j-1}(-a/(b-a))_j}{j!}.$$

*Démonstration.* Pour tout polynôme  $E$ , on a

$$\varphi(E(x+b-a)) + \varphi(E(x)) = -E(a).$$

En posant  $N_k(x) = (-x/(b-a))_k$ , on vérifie que

$$N_{k+1}(x+b-a) - N_{k+1}(x) = -(k+1)N_k(x),$$

d'où on tire en appliquant  $\varphi$  que

$$2\varphi(N_{k+1}) = -N_{k+1}(a) + (k+1)\varphi(N_k).$$

On peut enfin sommer :

$$\frac{2^k \varphi(N_k)}{k!} = - \sum_{j=0}^k \frac{2^{j-1} N_j(a)}{j!}.$$

□

#### 4.5 Cas $c = 2(b - a)$ et $u = 3(b - a)$

Pour simplifier les notations, on va dans cette section seulement remplacer  $b - a$  par la lettre  $d$ . Ce choix de paramètres correspond alors aux fractions de la forme

$$\frac{z^a}{1 + z^d}$$

pour  $u = 3d$ . Le cas  $a = 1, d = 2$  est lié au caractère de Dirichlet  $\chi_4$  de (9).

On note  $\varphi_d = \varphi_{a,d+a,2d}$  la forme linéaire associée à cette fraction. On peut calculer  $\varphi_d(1) = -1/2$  et  $\varphi_d(x) = d/4 - a/2$ .

En calculant d'abord les premiers termes de la fraction continue, on peut déterminer les premiers polynômes orthogonaux correspondants. Ces polynômes  $q_n$  ne sont pas dans la hiérarchie d'Askey et ne sont peut-être pas connus. On introduit dans l'appendice A.3 des polynômes  $p_n$  qui dépendent d'un paramètre. On a alors

$$q_n(X) = q_n(x(x + 3d)) = p_n\left(\frac{x}{d}\left(\frac{x}{d} + 3\right)\right),$$

où les  $p_n$  sont pris pour le paramètre  $a/d$ .

Il s'agit maintenant de vérifier le critère (N+) pour les polynômes  $q_n$  et la forme linéaire  $\varphi_d$ .

**Proposition 4.10.** *Pour tout  $n \geq 1$ ,  $\varphi_d((2x + 3d)(x(x + 3d))q_n(x(x + 3d)))$  s'annule.*

*Démonstration.* En utilisant le lemme 4.11 et la définition (33) spécialisée en le paramètre  $a/d$ , on trouve une somme de 4 termes,

$$\begin{aligned} & d(d+a)(2d+a)((2n+2)d^2 - a^2)_3 F_2\left(\begin{matrix} -n, 2, 1 - a/d \\ 1, 2 - a/d \end{matrix}; 1\right) \\ & - a(d+a)(3d+a)((2n+2)d^2 - a^2)_2 F_1\left(\begin{matrix} -n, 1 - a/d \\ 2 - a/d \end{matrix}; 1\right) \\ & - ad^2(d+a)(2d+a)_4 F_3\left(\begin{matrix} -n, 2, -a/d, 1 - a/(2d) \\ 1, 2 - a/d, -a/(2d) \end{matrix}; 1\right) \\ & + a^2 d(d+a)(3d+a)_3 F_2\left(\begin{matrix} -n, -a/d, 1 - a/(2d) \\ 2 - a/d, -a/(2d) \end{matrix}; 1\right). \end{aligned}$$

On peut vérifier que cette somme s'annule bien pour tout  $n > 0$ . □

**Lemme 4.11.** Pour tout  $k \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \varphi_d((2x+3d)x(x+3d)((x+d-a)/d)_k((-x-2d-a)/d)_k = \\ d(d+a)(2d+a)(2)_k(-a/d)_k - a(d+a)(3d+a)(1)_k(-a/d)_k. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Pour calculer ceci, on le découpe en deux en utilisant

$$x(x+3d) = (x-a)(x+3d+a) + a(3d+a).$$

Le résultat découle alors du lemme 4.12.  $\square$

**Lemme 4.12.** On a, pour tout  $k \geq 0$ ,

$$\varphi_d((2x+3d)((x-a)/d)_{k+1}((-x-3d-a)/d)_{k+1}) = (2d+a)(k+1)!(-1-a/d)_{k+1},$$

et

$$\varphi_d((2x+3d)((x+d-a)/d)_k((-x-2d-a)/d)_k) = -(d+a)k!(-a/d)_k.$$

*Démonstration.* Ces deux formules peuvent s'écrire comme

$$(-d)\varphi_d(M_{k+1}((x-a)/d, (-x-3d-a)/d))$$

et

$$(-d)\varphi_d(M_k((x+d-a)/d, (-x-2d-a)/d)).$$

On va donner la preuve de la première formule, la seconde étant similaire.

On utilise l'expansion de  $M_k$  donnée par la proposition 1.1 :

$$\begin{aligned} (-d) \sum_{\ell=0}^{k+2} \frac{(-k-2)_\ell (k+\ell+2) ((-3d-2a)/d + k + 1 + \ell)_{k+2-\ell}}{(1)_\ell (k+2)} \times \\ \varphi_d(((x-a)/d)_{k+1+\ell}). \end{aligned}$$

On utilise ensuite le lemme 4.13 pour obtenir

$$(-d) \sum_{\ell=0}^{k+2} \frac{(-k-2)_\ell (k+\ell+2)! (-2a/d + k - 2 + \ell)_{k+2-\ell}}{(1)_\ell (k+2) 2^{k+\ell+2}},$$

ce qui s'écrit

$$(-d)(k+1)! \frac{(-2a/d + k - 2)_{k+2}}{2^{k+2}} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} -k-2, k+3 \\ k-2-2a/d \end{matrix}; 1/2 \right).$$

On utilise alors le lemme 1.3 avec  $m = k + 2$  pour conclure.  $\square$

**Lemme 4.13.** *On a*

$$\varphi_d((x-a)/d)_k = k!/2^{k+1}$$

pour  $k > 0$  et

$$\varphi_d((x-a)/d+1)_k = -k!/2^{k+1}$$

pour  $k \geq 0$ .

*Démonstration.* Par définition de  $\varphi_d$ ,

$$\varphi_d(E(x+d)) + \varphi_d(E(x)) = -E(a)$$

pour tout polynôme  $E$ . Par ailleurs, en notant  $N_k(x) = ((x-a)/d)_k$ , on vérifie que

$$N_{k+1}(x) - N_{k+1}(x-d) = (k+1)N_k(x)$$

pour tout  $k \geq 0$ . En appliquant  $\varphi_d$  à cette égalité, on trouve

$$2\varphi_d(N_{k+1}) - (-1)_{k+1} = (k+1)\varphi_d(N_k),$$

ce qui implique que  $\varphi_d(N_k) = (k+1)!/2^k \varphi_d(N_1)$ . On conclut en utilisant que  $\varphi_d(N_1) = 1/4$ . La seconde partie de l'énoncé se montre de la même manière.  $\square$

#### 4.6 Deux autres cas

On considère d'abord le cas  $c = (a+b)/2$  et  $u = c/2 = (a+b)/4$ , en supposant que  $a$  et  $b$  sont strictement positifs,  $a \neq b$ ,  $b \neq 3a$  et  $a \neq 3b$ . La situation est symétrique en  $a$  et  $b$ . On pose  $D = (b-a)/2$ . On va travailler avec les paramètres  $c$  et  $D$ .

On devine alors les coefficients de la fraction continue de Jacobi :

$$A_n = -D^2 + c^2 n + \frac{c^2}{2} n^2 + K_n \quad (27)$$

où

$$K_n = \frac{(c+4D) \cdot (c-4D)c^2}{16(2n+1)(2n+3)} \cdot \frac{(c^2 n^2 + (2c^2 - 4D^2)n + c^2/2 - 2D^2)}{(2D^2 n + (c/2)^2 - D^2) \cdot (2D^2 n + (c/2)^2 + D^2)}. \quad (28)$$

et

$$B_n = -\frac{(\frac{c}{2})^2(2n+1)(2n+5)(\frac{c}{2}n+c-D)(\frac{c}{2}n+c+D)}{(2n+3)^2(2D^2 n + (c/2)^2 + D^2)^2} \cdot \frac{1}{(2D^2 n + (c/2)^2 - D^2)(2D^2 n + (c/2)^2 + 3D^2)(n+1)^2}. \quad (29)$$

Ceci se simplifie en type dual Hahn continu de paramètres  $(-1, 3/2, 2)$  si  $3a = 5b$  ou  $3b = 5a$ , *i.e.* lorsque  $c = \pm 4D$ .

Par ailleurs, on considère le cas  $b = a + 3c/2$  (donc  $c$  pair) et  $u = c/2$ , en supposant que  $a$  et  $c$  sont strictement positifs et que  $a$  n'est pas un multiple de  $c/2$ .

On a une symétrie sous la transformation  $(a, c) \mapsto (-a - c, c)$ . Un point fixe de cette transformation est  $c$ , un point anti-fixe est  $D = a + c/2$ . On va travailler avec les paramètres  $c$  et  $D$ .

On devine alors les coefficients de la fraction continue de Jacobi, et on trouve exactement les mêmes formules (27), (28) et (29) que dans le cas précédent. Ce second cas fait donc intervenir les mêmes polynômes orthogonaux.

On pourrait espérer une formule pour ces polynômes orthogonaux unitaires, sous la forme d'une combinaison linéaire de termes hypergéométriques, similaire à la formule (33) obtenue dans A.3. Nous ne sommes pas parvenus à trouver une telle formule.

## A Polynômes orthogonaux hypergéométriques

### A.1 Polynômes orthogonaux de Racah

On rappelle ici les expressions connues pour la récurrence des polynômes orthogonaux de Racah, prises *verbatim* dans le livre de Koekoek et Swarttouw [13, 14], section 1.2. Notons

$$A_n = \frac{(n + \alpha + 1)(n + \alpha + \beta + 1)(n + \beta + \delta + 1)(n + \gamma + 1)}{(2n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta + 2)}$$

et

$$C_n = \frac{n(n + \alpha + \beta - \gamma)(n + \alpha - \delta)(n + \beta)}{(2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta + 1)}.$$

Alors les polynômes orthogonaux *unitaires* de Racah vérifient la récurrence

$$p_{n+1}(Y) = (Y + A_n + C_n)p_n(Y) - A_{n-1}C_n p_{n-1}(Y). \quad (30)$$

La formule générale pour les polynômes de Racah *non-unitaires* est

$${}_4F_3 \left( \begin{matrix} -n, n + \alpha + \beta + 1, -y, y + \gamma + \delta + 1 \\ \alpha + 1, \beta + \delta + 1, \gamma + 1 \end{matrix} ; 1 \right) \quad (31)$$

comme fonctions de  $Y(y) = y(y + \gamma + \delta + 1)$ .

## A.2 Polynômes orthogonaux de type Dual Hahn continu

On rappelle ici les expressions connues pour la récurrence des polynômes orthogonaux de type dual Hahn continu, prises dans le livre de Koekoek et Swarttouw [13, 14], section 1.3. On va cependant modifier un peu les notations de ce livre.

Il faut d'abord bien prendre soin de distinguer deux variables, la variable  $x$  qui apparaît sous la forme  $ix$  dans les paramètres de la fonction hypergéométrique  ${}_3F_2$ , et la variable  $X$  qui est l'argument des polynômes orthogonaux  $p_n(X)$ . Ces variables sont liées par la relation  $X = x^2$ .

On effectue les changements de variables  $Y = -X$  et  $y = ix$  dans les notations de Koekoek et Swarttouw. Les nouvelles variables sont donc liées par  $Y = y^2$ . Il faut aussi faire attention au changement de signe du terme dominant des polynômes orthogonaux induit par ce changement de variables. On donne ci-dessous le résultat final, sans entrer dans les détails.

Notons

$$A_n = (n + \mathbf{a} + \mathbf{b})(n + \mathbf{a} + \mathbf{c}) \quad \text{et} \quad C_n = n(n + \mathbf{b} + \mathbf{c} - 1).$$

Alors les polynômes orthogonaux *unitaires* de type dual Hahn continu vérifient la récurrence

$$p_{n+1}(Y) = (Y + A_n + C_n - \mathbf{a}^2)p_n(Y) - A_{n-1}C_n p_{n-1}(Y). \quad (32)$$

La formule générale pour les polynômes de type dual Hahn continu *non-unitaires* est

$${}_3F_2 \left( \begin{matrix} -n, -y + \mathbf{a}, y + \mathbf{a} \\ \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{c} \end{matrix}; 1 \right)$$

comme fonctions de  $Y(y) = y^2$ .

## A.3 Une nouvelle famille de polynômes orthogonaux

On va utiliser le paramètre  $a$ , avec  $a \notin \mathbb{N}$ .

On considère les polynômes  $p_n(X)$  définis pour  $n \geq 0$  par la formule

$$\begin{aligned} & (2(n+1) - a^2) {}_4F_3 \left( \begin{matrix} -n, x+1-a, -x-2-a, 1-a \\ 1, 2-a, -a \end{matrix}; 1 \right) \\ & - a {}_4F_3 \left( \begin{matrix} -n, x+1-a, -x-2-a, 1-a/2 \\ 1, 2-a, -a/2 \end{matrix}; 1 \right) \end{aligned} \quad (33)$$

et par la relation  $X = x(x+3)$ . Les deux premiers termes sont

$$p_0(X) = (1-a)(a+2), \quad p_1(X) = \frac{(a^2+2a-2)}{a}X - \frac{(a^2+2a-4)(a^2+2a-1)}{a}.$$

Par déflation, on trouve la formule plus simple

$$\frac{n(a-x-1)(a+x+2)(2a+a^2-2(n+1))}{a(a-2)} {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n+1, x+2-a, -x-1-a \\ 2, 3-a \end{matrix}; 1\right) \\ + (2(n+1) - a^2 - a) {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n, x+1-a, -x-2-a \\ 1, 2-a \end{matrix}; 1\right).$$

On peut récrire cette expression sous la forme

$$\frac{n(a-x-1)(a+x+2)(2a+a^2-2(n+1))}{a(a-2)n!(-a+3)_{n-1}} u_n(X) + \frac{(2(n+1) - a^2 - a)}{n!(-a+2)_n} v_n(X), \quad (34)$$

en introduisant les polynômes unitaires

$$u_n(X) = n! \cdot (3-a)_{n-1} \cdot {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n+1, x+2-a, -x-1-a \\ 2, 3-a \end{matrix}; 1\right),$$

et

$$v_n(X) = n! \cdot (2-a)_n \cdot {}_3F_2\left(\begin{matrix} -n, x+1-a, -x-2-a \\ 1, 2-a \end{matrix}; 1\right).$$

Les premiers termes de ces suites de polynômes sont

$$u_0(X) = 0, \quad u_1(X) = 1, \quad u_2(X) = X - a^2 - a + 8$$

et

$$v_0(X) = 1, \quad v_1(X) = X - b - 1, \quad v_2(X) = X^2 - 2(b-3)X + b^2 - 5b - 10,$$

où  $b = (a-1)(a+3) - 2$ .

Ces polynômes  $u_n(X)$  et  $v_n(X)$  sont de type *dual Hahn continuus*, et vérifient par conséquent les récurrences (32), qui s'écrivent

$$u_{n+1} = (X + 9/4 + (n+1)(n-a+2) + (n-1)(n+2+a) - (1/2-a)^2)u_n \\ - n(n+1-a)(n-1)(n+2+a)u_{n-1}$$

et

$$v_{n+1} = (X + 9/4 + (n+1)(n-a+2) + n(n+a+3) - (1/2+a)^2)v_n \\ - n^2(n-a+1)(n+3+a)v_{n-1}.$$

De ces récurrences et de l'identité (34), il s'ensuit que la suite  $(p_n(X))_{n \geq 0}$  vérifie une récurrence linéaire à coefficients polynomiaux (en  $n$ , en  $x$  et en  $a$ ) d'ordre 4. Cette équation de récurrence peut être calculée explicitement en utilisant des algorithmes de clôture pour les suites P-récurrentes, comme ceux décrits dans [20, §2.1].

Il apparait que cette récurrence n'est pas celle d'ordre minimal vérifiée par  $(p_n(X))_{n \geq 0}$ , et que cette suite satisfait à la récurrence d'ordre 2 :

$$(a+n+3)(n+1)(b+1-2n)^2 p_n(X) - ((b+1-2n)(b+3-2n)X + 8n^4 - 8(b-2)n^3 + 2(b^2-14b-23)n^2 + 4(3b+7)bn - b^3 + 19b + 34) p_{n+1}(X) + (n+2)(2-a+n)(b+3-2n)^2 p_{n+2}(X) = 0. \quad (35)$$

Il y a plusieurs manières de prouver la récurrence (35). Une première approche consiste à d'abord conjecturer cette récurrence à partir des 20 premiers termes  $p_0(X), \dots, p_{19}(X)$ . Cela peut être fait en utilisant des algorithmes de *divination* (*guessing* en anglais), voir [20, §1]. Ensuite, en notant par  $S_n$  l'opérateur de décalage qui associe à la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  la suite  $(u_{n+1})_{n \geq 0}$ , par  $R_4(n, S_n)$  l'opérateur de récurrence (prouvé) d'ordre 4 et par  $C_2(n, S_n)$  l'opérateur de récurrence (conjectural) d'ordre 2, on peut vérifier par une division Euclidienne à droite dans l'anneau  $\mathbb{Q}(a, x)\langle n, S_n \rangle$  qu'il existe un opérateur  $Q_2(n, S_n)$  tel que  $R_4 = Q_2 C_2$ . En particulier, la suite  $(Q_2 \cdot p_n(X))_{n \geq 0}$  du membre gauche de (35) vérifie une récurrence d'ordre 2 dont le terme de tête ne s'annule en aucun nombre naturel. Comme les deux premiers termes de cette suite sont nuls, on conclut que la suite  $(Q_2 \cdot p_n(X))_{n \geq 0}$  est nulle, donc que la récurrence conjecturée (35) est prouvée.

Une autre approche pour démontrer (35) consiste à employer directement un algorithme de *minimisation de récurrences*, qui prend en entrée la récurrence d'ordre 4 vérifiée par la suite  $(p_n(X))_{n \geq 0}$  et les premiers termes  $p_0(X), \dots, p_3(X)$  et qui renvoie la récurrence d'ordre minimal vérifiée par  $(p_n(X))_{n \geq 0}$ . Un tel algorithme est implémenté en Maple, dans la fonction `LREtools[MinimalRecurrence]`, basée sur les résultats de [24]. Appliqué dans notre situation, cet algorithme prouve que la récurrence (35) est la récurrence d'ordre minimal satisfaite par  $(p_n(X))_{n \geq 0}$ .

De (35), il découle que  $p_n(X)$  est de degré  $n$  avec pour coefficient dominant

$$\frac{(n+1-a) \cdot (a^2 + 2a - 2n)}{n! \cdot a \cdot (2-a)_n}. \quad (36)$$

Pour montrer que les polynômes  $p_n(X)$  sont des polynômes orthogonaux, il suffit à présent d'observer que les équations (35) et (36) entraînent que la version unitaire de ces polynômes vérifie la récurrence (3) avec coefficients

$$A_n = 2(n+1)^2 - a(a+2) \frac{(2n-3a-a^2)(2(n+1)-a-a^2)}{(2n-a(a+2))(2(n+1)-a(a+2))}$$

et

$$B_n = -\frac{(2(n+2)-a(a+2))(2n-a(a+2))}{(2(n+1)-a(a+2))^2} \times (n+3+a)(n+1-a)(n+1)^2,$$

pour  $n \geq 0$ .

Terminons avec deux remarques. D'abord, on observe une symétrie sous l'involution  $a \mapsto -2 - a$  dans  $A_n$  et  $B_n$ .

Ensuite, une même simplification se produit formellement dans les coefficients  $A_n$  et  $B_n$  lorsque  $a = 0$  ou  $a = -2$  :

$$A_n = 2(n+1)^2 \quad \text{et} \quad B_n = -n(n+1)(n+2)(n+3).$$

Cependant le coefficient  $B_0$  est alors nul, donc ce cas particulier définit bien des polynômes orthogonaux  $q_n$  mais ne donne pas lieu à une fraction continue de Jacobi. La famille de polynômes orthogonaux  $q_n(X-2)$  est essentiellement identique au cas  $\nu = 1$  d'une famille considérée dans [4], voir aussi la suite **A130182**.

## B Une formule auxiliaire

Nous avons besoin de la formule suivante.

**Proposition B.1.** *Pour tous entiers  $0 \leq k$  et  $0 \leq N$ , on a*

$$\sum_{\ell=0}^{k+1} \frac{(-k-1)_\ell (k+\ell+1)}{(1)_\ell} \sum_{j=0}^{k+\ell} 2^{j-k-\ell} \frac{(x)_{j+N}}{(j+N)!} = (-1)^{k+1} (2k+2) \frac{(x-k)_{2k+1+N}}{(2k+1+N)!}.$$

*Démonstration.* En échangeant les sommations, on trouve

$$\sum_{0 \leq j \leq 2k+1} \frac{2^j (x)_{j+N}}{(j+N)!} \sum_{0 \leq \ell \leq k+1} \frac{(-k-1)_\ell (k+\ell+1)}{2^{k+\ell} \ell!},$$

où la variable de sommation  $\ell$  vérifie aussi  $j-k \leq \ell$ . En utilisant le lemme B.2 ci-dessous pour simplifier la somme interne, on obtient

$$2 \sum_{k+1 \leq j \leq 2k+1} \frac{(x)_{j+N}}{(j+N)!} \frac{(-1)^{j-k} (k+1)!}{(j-k-1)! (2k+1-j)!}.$$

On peut écrire ceci comme

$$(-1) \frac{(x)_{k+1+N} (2k+2)}{(k+1+N)!} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} x+k+1+N, -k \\ k+2+N \end{matrix}; 1 \right).$$

Par la formule de Gauss, la fonction hypergéométrique vaut

$$\frac{(1-x)_k}{(k+2+N)_k},$$

ce qui permet de conclure. □

**Lemme B.2.** Pour  $0 \leq k$  et  $0 \leq M \leq k$ ,

$$\sum_{0 \leq \ell \leq M} \frac{(-k-1)_\ell (k+\ell+1)}{2^{k+\ell} \ell!} = (-1)^M \frac{(k+1)!}{2^{M+k} M! (k-M)!} \quad (37)$$

et

$$\sum_{0 \leq \ell \leq k+1} \frac{(-k-1)_\ell (k+\ell+1)}{2^{k+\ell} \ell!} = 0. \quad (38)$$

*Démonstration.* Pour prouver la formule (37), nous partons de l'observation que pour tout  $0 \leq \ell \leq k$ , on a l'identité *télescopique*

$$\frac{(-k-1)_\ell (k+\ell+1)}{2^{k+\ell} \ell!} = \frac{(-1)^\ell \ell \binom{k+1}{\ell}}{2^{k+\ell-1}} - \frac{(-1)^{\ell+1} (\ell+1) \binom{k+1}{\ell+1}}{2^{k+\ell}}. \quad (39)$$

Alors, pour tout  $0 \leq M \leq k$ , la formule (37) se déduit en sommant l'identité (39) sur  $\ell$  entre 0 et  $M$ .

D'un autre côté, l'identité (39) persiste à être vraie pour  $\ell = k+1$ , et une nouvelle sommation de (39) pour  $\ell$  entre 0 et  $k+1$  démontre l'égalité (38).  $\square$

## Références

- [1] George E. Andrews, Richard Askey, and Ranjan Roy. *Special functions*, volume 71 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [2] T. Arakawa, T. Ibukiyama, and M. Kaneko. *Bernoulli numbers and zeta functions*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Tokyo, 2014. With an appendix by D. Zagier.
- [3] W. N. Bailey. *Generalized hypergeometric series*. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 32. Stechert-Hafner, Inc., New York, 1964.
- [4] M. Bruschi, F. Calogero, and R. Droghei. Proof of certain Diophantine conjectures and identification of remarkable classes of orthogonal polynomials. *J. Phys. A*, 40(14) :3815–3829, 2007.
- [5] Frédéric Chapoton. Ramanujan-Bernoulli numbers as moments of Racah polynomials. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 32(1) :205–215, 2020.
- [6] Frédéric Chapoton and Driss Essouabri.  $q$ -Ehrhart polynomials of Gorenstein polytopes, Bernoulli umbra and related Dirichlet series. *Mosc. J. Comb. Number Theory*, 5(4) :13–38, 2015.
- [7] Frédéric Chapoton and Jiang Zeng. Nombres de  $q$ -Bernoulli-Carlitz et fractions continues. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 29(2) :347–368, 2017.

- [8] T. S. Chihara. *An introduction to orthogonal polynomials*. Gordon and Breach Science Publishers, New York-London-Paris, 1978. Mathematics and its Applications, Vol. 13.
- [9] Henri Cohen. *Number theory. Vol. II. Analytic and modern tools*, volume 240 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2007.
- [10] Karl Dilcher and Lin Jiu. Hankel determinants of sequences related to Bernoulli and Euler polynomials. *Int. J. Number Theory*, 18(2) :331–359, 2022.
- [11] FriCAS team. FriCAS—an advanced computer algebra system, 2021. Available at <http://fricas.github.io>.
- [12] George Gasper and Mizan Rahman. *Basic hypergeometric series*, volume 35 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. With a foreword by Richard Askey.
- [13] R. Koekoek, P. A. Lesky, and R. F. Swarttouw. *Hypergeometric orthogonal polynomials and their  $q$ -analogues*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2010. With a foreword by Tom H. Koornwinder.
- [14] R. Koekoek and R. Swarttouw. The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its  $q$ -analogue. Technical report, Delft Univ. of Technology, 1994. <http://homepage.tudelft.nl/11r49/documents/as98.pdf>.
- [15] C. Krattenthaler. Advanced determinant calculus. *Sém. Lothar. Combin.*, 42 :Art. B42q, 67, 1999. The Andrews Festschrift (Maratea, 1998).
- [16] C. Krattenthaler. Advanced determinant calculus : a complement. *Linear Algebra Appl.*, 411 :68–166, 2005.
- [17] Maplesoft. Maple—Mathematics-based software & services for education, engineering, and research, 2022. <https://www.maplesoft.com/>.
- [18] Sébastien Maulat and Bruno Salvy. Formulas for continued fractions : an automated guess and prove approach. In *ISSAC'15—Proceedings of the 2015 ACM International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 275–282. ACM, New York, 2015.
- [19] Stephen C. Milne. Infinite families of exact sums of squares formulas, Jacobi elliptic functions, continued fractions, and Schur functions. *Ramanujan J.*, 6(1) :7–149, 2002.
- [20] B. Salvy and P. Zimmermann. Gfun : a Maple package for the manipulation of generating and holonomic functions in one variable. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 20(2) :163–177, 1994.
- [21] Alan D. Sokal. The Euler and Springer numbers as moment sequences. *Expo. Math.*, 38(1) :1–26, 2020.

- [22] The Sage Developers. *SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 9.4)*, 2021. <https://www.sagemath.org>.
- [23] G. Viennot. Une théorie combinatoire des polynômes orthogonaux. Lecture Notes UQAM, 219p., 1984. [http://www.xavierviennot.org/xavier/polynomes\\_orthogonaux.html](http://www.xavierviennot.org/xavier/polynomes_orthogonaux.html).
- [24] Yi Zhou and Mark van Hoeij. Fast algorithm for factoring difference operators. *ACM Commun. Comput. Algebra*, 53(3) :150–152, 2019.