



HAL
open science

Les t-normes en logique multivalente : un théorème de représentation de l'ABOP

Marie-Jeanne Lesot, Adrien Revault d'Allonnes

► **To cite this version:**

Marie-Jeanne Lesot, Adrien Revault d'Allonnes. Les t-normes en logique multivalente : un théorème de représentation de l'ABOP. Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA) 2022, Oct 2022, Toulouse, France. hal-03832459

HAL Id: hal-03832459

<https://hal.science/hal-03832459>

Submitted on 27 Oct 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Les t-normes en logique multivalente : un théorème de représentation de l'ABOP

Marie-Jeanne Lesot¹

Adrien Revault d'Allonnes²

¹ LIP6, Sorbonne Université, F-75005, Paris, France, Marie-Jeanne.Lesot@lip6.fr,

² LIASD, PASTIS, Université Paris 8, FR-93526, Saint-Denis, France, ara@up8.edu

Résumé :

Cet article se place dans le cadre d'une logique multi-valente possédant un ensemble fini et totalement ordonné de valeurs de vérité noté \mathcal{L}_M . Il étudie un opérateur d'agrégation configurable, dénommé ABOP, pour ABating Operator, opérateur à la baisse. L'article se concentre sur la capacité de l'opérateur d'implémenter toute t-norme : le théorème principal de l'article propose une démonstration constructive de l'existence de configuration pour toute t-norme de \mathcal{L}_M , montrant ainsi qu'ABOP en est une généralisation. De plus, il fournit le jeu de paramètres correspondant, défini par l'implication résiduelle associée dans \mathcal{L}_M à la t-norme considérée. L'article se penche ensuite sur quelques exemples de t-normes classiques de la logique floue, adaptées à \mathcal{L}_M , et en examine les paramètres comme des instantiations du théorème de représentation.

Mots-clés :

logique multi-valente, opérateur d'agrégation, t-normes

Abstract:

This paper considers the framework of a many-valued logic using a finite and totally ordered set of truth degrees, denoted \mathcal{L}_M . It proposes a study of a configurable aggregation operator, called ABOP, for ABating Operator. It focuses on its capacity of implementing any t-norm : the paper's main theorem offers a constructive proof of the existence of a configuration for any given t-norm in \mathcal{L}_M , showing ABOP is a generalisation of t-norm operators. Furthermore, it specifies the corresponding parameter values, defined by the residuated implication associated in \mathcal{L}_M to the considered t-norm. The paper then considers examples of classical fuzzy logic t-norms, adapted to \mathcal{L}_M , and examines the corresponding parameters, as instantiations of the general representation theorem.

Keywords:

many-valued logics, aggregation operator, t-norms

1 Introduction

Cet article se place dans le cadre d'une logique multivalente [4, 8] utilisant M degrés de vérité de l'ensemble fini, dénombrable et totalement ordonné $\mathcal{L}_M = \{\tau_0, \dots, \tau_{M-1}\}$, où $\tau_\alpha \leq \tau_\beta \Leftrightarrow \alpha \leq \beta$. Ces degrés couvrent, à une granularité variant avec M , les différents niveaux de vérité, de τ_0 , signifiant 'faux', à τ_{M-1} , pour 'vrai' : ils définissent une échelle

de degrés de vérité discrète, entre l'échelle binaire $\{0, 1\}$ et l'échelle floue continue $[0, 1]$. L'agrégation y est essentiellement faite à l'aide d'opérateurs logiques [4], tels que des t-normes, des t-conormes ou des implications, et inclut, au-delà du cadre purement logique, quelques opérateurs arithmétiques [11]. Ces opérateurs d'agrégation, qui combinent plusieurs valeurs d'entrée en une unique valeur de sortie, proposent des sémantiques pouvant mettre en œuvre divers principes, comme des comportements conjonctifs, disjonctifs ou de compromis, et proposer d'autres propriétés comme le renforcement par exemple [2, 5].

Cet article étudie d'une part des opérateurs d'agrégation conjonctifs, les t-normes [7] et d'autre part l'opérateur ABOP [9], proposé dans le contexte applicatif de la cotation de l'information. Cette tâche [3] vise à mesurer la qualité d'une information, par exemple comprise comme la confiance qu'on peut lui accorder. Elle est le plus souvent mesurée par l'agrégation des évaluations de plusieurs dimensions qui qualifient par exemple le contenu ou la source de l'information, comme sa plausibilité et sa crédibilité pour le premier, la fiabilité et la compétence pour la seconde [9].

L'opérateur ABOP a été introduit comme un opérateur paramétrique général, mettant en œuvre une influence à la baisse sur son premier argument, qui lui donne son nom : formellement $\forall x, y \text{ ABOP}(x, y) \leq x$. Pour la cotation d'informations, cette propriété est utilisée pour agréger, par exemple, les effets de la fiabilité et la compétence d'une source : l'évaluation d'une information dont la source est peu fiable n'augmente alors pas, même si celle-ci est compétente. Afin d'augmenter l'expressivité de

l'opérateur ABOP, la seule contrainte additionnelle imposée est une monotonie croissante en ses deux arguments.

Il a été montré [10] que la famille d'opérateurs paramétriques ABOP est plus générique que les t-normes : ces dernières satisfont les contraintes de monotonie et de comportement à la baisse mais en ajoutent d'autres comme la commutativité, l'associativité et l'existence d'un élément neutre. Les opérateurs ABOP permettent de représenter d'autres types d'agrégation, des degrés de sévérité variables ou l'absence d'élément neutre, illustrant leur polyvalence [10].

Cet article examine, réciproquement, si l'ensemble des t-normes est plus général que celui des ABOP : il étudie si toutes les t-normes sont incluses dans la famille paramétrique des ABOP ou s'il existe des t-normes prenant d'autres formes. Il répond par la négative à cette dernière interrogation : il établit un théorème de représentation pour toute t-norme sur \mathcal{L}_M et fournit une preuve constructive de l'existence de ces configurations, produisant les jeux de paramètres associés. Il montre que ceux-ci sont définis par l'implication résiduelle associée dans \mathcal{L}_M à la t-norme considérée, qui peut différer de la transposition à \mathcal{L}_M de l'implication résiduelle associée dans le cas flou continu. L'article examine ensuite quatre exemples de t-normes classiques en logique floue, ramenées au cadre de \mathcal{L}_M , et fournit leurs configurations en illustration.

L'article est organisé de la façon suivante : la section 2 propose un rappel sur l'agrégation dans \mathcal{L}_M , en détaillant le cas d'ABOP. La section 3 présente le résultat principal, établissant le théorème de représentation pour toute t-norme en ABOP. Elle offre également quelques commentaires sur la configuration paramétrique induite, ainsi que la structure minimale de toute t-norme dans ce cadre. La section 4 illustre l'application du théorème à diverses t-normes de référence. La section 5 conclut l'article.

2 Agrégation dans \mathcal{L}_M

Cette section offre un rappel sur l'agrégation dans \mathcal{L}_M , en se concentrant sur les deux types d'opérateurs traités dans l'article : les t-normes dans \mathcal{L}_M , en adaptant les définitions issues de la logique floue, et la famille d'opérateurs paramétriques ABOP.

2.1 Les t-normes sur \mathcal{L}_M

De façon générale, un opérateur d'agrégation sur \mathcal{L}_M est une application $F : \mathcal{L}_M \times \mathcal{L}_M \rightarrow \mathcal{L}_M$. Ne considérer que le cas à deux arguments n'est pas restrictif pour les t-normes, puisqu'elles sont, par définition (voir ci-dessous), associatives.

Si l'on transpose les propriétés imposées en logique floue, une t-norme \top sur \mathcal{L}_M est un opérateur d'agrégation satisfaisant les contraintes suivantes, pour tout τ_α , τ_β et $\tau_\gamma \in \mathcal{L}_M$

- commutativité : $\top(\tau_\alpha, \tau_\beta) = \top(\tau_\beta, \tau_\alpha)$
- associativité :
 $\top(\top(\tau_\alpha, \tau_\beta), \tau_\gamma) = \top(\tau_\alpha, \top(\tau_\beta, \tau_\gamma))$
- monotonie :
si $\tau_\alpha \leq \tau_\gamma$, $\top(\tau_\alpha, \tau_\beta) \leq \top(\tau_\gamma, \tau_\beta)$
- élément neutre : $\top(\tau_{M-1}, \tau_\alpha) = \tau_\alpha$

On peut citer par exemple la t-norme de Zadeh $F_Z(\tau_\alpha, \tau_\beta) = \min(\tau_\alpha, \tau_\beta)$, ainsi que les autres formes étudiées dans la section 4.

Dans \mathcal{L}_M , définir une t-norme, voire tout opérateur d'agrégation F , est équivalent à préciser les M^2 coefficients de la matrice donnant le résultat de $F(\tau_\alpha, \tau_\beta)$ pour tout couple $\tau_\alpha, \tau_\beta \in \mathcal{L}_M$. Cependant, une telle définition explicite et exhaustive rend l'interprétation de l'opérateur difficile. Les définitions fonctionnelles, posant, par exemple, $F = \min$, aident à aborder ce principe sous-jacent. Comme discuté plus loin, un des avantages de l'opérateur ABOP est de fournir une représentation graphique qui augmente sa lisibilité, ainsi qu'une matrice creuse, ayant moins de M^2 paramètres.

2.2 ABOP : définition

ABOP, introduit dans [9] et précisé dans [10], désigne une famille paramétrique d'opérateurs sur \mathcal{L}_M . Il dépend d'une matrice creuse de

$M \times M$ paramètres κ :

$$\kappa \subseteq \{\kappa_\alpha^\gamma \in \mathcal{L}_M, \alpha, \gamma \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket\} \quad (1)$$

devant satisfaire les contraintes présentées dans la section suivante. L'opérateur F_κ s'écrit :

$$F_\kappa(\tau_\alpha, \tau_\beta) = \min\{\tau_\gamma \in \mathcal{L}_M \mid \tau_\beta \leq \kappa_\alpha^\gamma\} \quad (2)$$

La figure 1 présente un tel opérateur dans le cas d'une logique à cinq degrés, \mathcal{L}_5 . Les disques représentent les degrés de \mathcal{L}_5 , de τ_0 à τ_4 , et correspondent soit à différentes valeurs de τ_α , soit à la sortie de l'agrégation, $F_\kappa(\tau_\alpha, \tau_\beta)$. Les étiquettes des flèches représentent les paramètres κ_α^γ , qui contraignent le passage de τ_α à τ_γ . Le calcul de $F_\kappa(\tau_\alpha, \tau_\beta)$ consiste alors à partir du disque τ_α et suivre les flèches dont les étiquettes κ_α^γ sont supérieures à τ_β . Le résultat est le plus petit des τ_γ accessibles, le disque le plus à gauche tel que $\tau_\beta \leq \kappa_\alpha^\gamma$.

Cette représentation graphique peut être vue comme augmentant la lisibilité et l'interprétabilité du comportement de l'opérateur. Par exemple, le fait que toutes les flèches de la figure 1 pointent vers la gauche est une illustration de la propriété à la baisse d'ABOP : la sortie de l'agrégation est inférieure à la valeur initiale, le premier argument.

Dans le cadre de la cotation de l'information évoqué dans l'introduction, les disques correspondent à l'évaluation, dont la valeur est initialisée par la fiabilité de la source. Supposons, par exemple, que celle-ci prenne la valeur médiane τ_3 . Son agrégation avec la compétence de la source est une transition vers un des disques au bout d'une des flèches émanant de τ_3 . La compétence, supposons évaluée à τ_{M-1} , est comparée aux coûts de transition κ_3^β , afin de déterminer les transitions autorisées, celles dont le coût est supérieur à τ_{M-1} . L'agrégation est donc le disque le plus à gauche d'une transition acceptable. Comme les flèches pointent toutes vers la gauche, celle-ci sera nécessairement strictement inférieure à τ_3 .

2.3 ABOP : paramètres

Les paramètres κ donnés dans l'éq. (1) doivent satisfaire plusieurs contraintes afin d'assurer

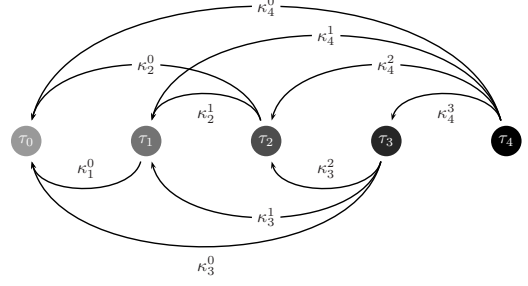


FIGURE 1 – $F(\tau_\alpha, \tau_\beta)$ dans \mathcal{L}_5 , tiré de [9].

que la fonction définie dans l'éq. (2) soit bien-définie et qu'elle ait les propriétés voulues (influence à la baisse sur son premier argument et croissance en ses deux arguments, cf. [9]). Cette section résume ces contraintes, avec les κ présentés sous forme matricielle.

Contraintes Formellement, quatre conditions sont imposées à la matrice de paramètres κ (voir [10] pour une discussion et une justification) :

- (P1) chaque ligne possède au moins une occurrence de la valeur τ_{M-1} , sur la diagonale ou dans une colonne plus à gauche ;
- (P2) les valeurs sur chaque ligne sont ordonnées et croissantes ;
- (P3) étant donné une position a_{ij} de la matrice, toute valeur située dans la sous-matrice inférieure (i.e. a_{kl} tel que $k \geq i$ et $l \leq j$) est inférieure à celle de a_{ij} ;
- (P4) certaines cellules peuvent être vides.

La parcimonie de la matrice est essentielle puisque, sans elle, il serait plus pertinent et pas plus coûteux de définir explicitement et complètement les valeurs de $F_\kappa(\tau_\alpha, \tau_\beta)$ pour tout couple $(\tau_\alpha, \tau_\beta) \in \mathcal{L}_M^2$. Cette parcimonie a deux causes : l'existence de cellules redondantes et celle de cellules non définies, discutées tour à tour ci-dessous.

Valeurs redondantes Certaines cellules de la matrice sont redondantes parce que sur chaque ligne α une unique occurrence d'une valeur peut être conservée parmi les κ_α^β : l'opérateur ABOP reposant sur l'utilisation du min, les répétitions de valeurs ne modifient pas le résultat final.

En conséquence, la combinaison de (P1) et (P2) implique que κ est, au pire, une matrice triangulaire inférieure : seule l'apparition la plus à gauche de chaque valeur est conservée et, d'après (P2), chaque ligne contient τ_{M-1} , au moins sur la diagonale. La matrice contient donc, au maximum, $M(M-1)/2$ coefficients. Parce que la redondance peut également apparaître dans le triangle inférieur gauche, le nombre de coefficients peut être inférieur.

Valeurs indéfinies La parcimonie de la matrice est de plus due au fait que certaines cellules sont non définies, n'ayant pas de valeur autorisée. Ceci est vrai, par exemple, sur n'importe quelle ligne, de toutes les cellules situées à gauche d'une apparition de τ_0 . Des valeurs dans cette situation pointerait vers des valeurs exclues, ne pouvant être atteintes [10].

De fait, l'instanciation de ABOP consiste à choisir, sur chaque ligne, la position de τ_{M-1} , sur la diagonale ou à sa gauche, l'éventuelle position de τ_0 et celles des valeurs intermédiaires, en satisfaisant les contraintes entre lignes et laissant, parfois, des cellules vides.

3 Représentation de t-normes sur \mathcal{L}_M en ABOP

Cette section contient le résultat principal de l'article, le théorème de représentation selon lequel toute t-norme sur \mathcal{L}_M correspond à une configuration d'ABOP, dont les paramètres sont définis par l'implication résiduelle qui lui est associée dans \mathcal{L}_M . Elle étudie d'abord les propriétés de la matrice définie par ces coefficients et montre qu'elle satisfait les conditions spécifiant une configuration ABOP. Le théorème montre ensuite que cette configuration induit la t-norme considérée.

3.1 Résultat préliminaire

Etant donné une t-norme \top sur $\mathcal{L}_M \times \mathcal{L}_M$, l'implication résiduelle associée I_\top est la fonction de $\mathcal{L}_M \times \mathcal{L}_M$ dans \mathcal{L}_M définie par

$$I_\top(\tau_\alpha, \tau_\beta) = \max\{\tau_\gamma \in \mathcal{L}_M \mid \top(\tau_\alpha, \tau_\gamma) \leq \tau_\beta\} \quad (3)$$

Cette définition transpose celle donnée dans le cadre de la logique floue [1] en remplaçant

l'opérateur sup par max puisque l'espace de définition considéré, \mathcal{L}_M , est discret. De plus, il n'y a pas de contrainte de continuité à gauche pour les t-normes, pour la même raison.

Il faut noter que, comme illustré dans la section 4 pour la t-norme drastique, l'opérateur ainsi défini peut différer de la transposition au cas de \mathcal{L}_M de l'implication résiduelle associée à une t-norme floue.

Pour une t-norme \top fixée, cette section étudie la matrice de taille $M \times M$ dont les coefficients sont définis par l'implication résiduelle associée et montre qu'elle forme un jeu de paramètres correspondant à une configuration d'un opérateur ABOP.

Lemme 1. *Étant donné une t-norme \top sur \mathcal{L}_M , les paramètres définis par*

$$\kappa_\alpha^\beta = I_\top(\tau_\alpha, \tau_\beta) \quad (4)$$

constituent une configuration correcte d'ABOP, de fonction F_κ , telle que donnée dans l'éq (2).

Démonstration. La démonstration consiste à montrer que toutes les conditions mentionnées dans la section 2.3 sont satisfaites.

(P1) est satisfaite car, pour tout α ,

$$\kappa_\alpha^\alpha = \max\{\tau_\gamma \mid \top(\tau_\alpha, \tau_\gamma) \leq \tau_\alpha\} = \tau_{M-1}$$

En effet, $M-1$ fait partie de l'ensemble des γ candidats car $\top(\tau_\alpha, \tau_{M-1}) = \tau_\alpha$ puisque τ_{M-1} est l'élément neutre de \top . Calculer le maximum sur l'ensemble des candidats γ conduit alors bien à $\kappa_\alpha^\alpha = \tau_{M-1}$ puisque τ_{M-1} est l'élément maximal de \mathcal{L}_M .

Cette propriété découle aussi des propriétés de l'implication : $\kappa_\alpha^\alpha = I_\top(\tau_\alpha, \tau_\alpha) = \tau_{M-1}$, redémontrée ci-dessus.

(P2) est satisfaite car, pour tous α, β, δ , si $\beta \leq \delta$, $\kappa_\alpha^\beta \leq \kappa_\alpha^\delta$. En effet, si $\beta \leq \delta$, pour tout γ , $\top(\tau_\alpha, \tau_\gamma) \leq \tau_\beta$ implique que $\top(\tau_\alpha, \tau_\gamma) \leq \tau_\delta$. Aussi,

$$\{\tau_\gamma \mid \top(\tau_\alpha, \tau_\gamma) \leq \tau_\beta\} \subseteq \{\tau_\gamma \mid \top(\tau_\alpha, \tau_\gamma) \leq \tau_\delta\}$$

Le calcul du maximum de ces deux ensembles conduit à l'inégalité souhaitée $\kappa_\alpha^\beta \leq \kappa_\alpha^\delta$.

Cette propriété découle aussi de la monotonie de l'implication en son second argument, redémontrée ci-dessus.

(P3) est satisfaite en raison de la monotonie de \top : pour tous $\alpha, \beta, \eta, \delta$ tels que $\eta \geq \alpha$ et $\delta \leq \beta$ (c'est-à-dire tels que κ_η^δ est dans la sous-matrice gauche de κ_α^β), (P2) implique que $\kappa_\eta^\delta \leq \kappa_\eta^\beta$, et on a $\kappa_\eta^\beta \leq \kappa_\alpha^\beta$, par monotonie de I_\top en son premier argument ou, de façon équivalente, parce que pour tout γ , la monotonie de \top implique que

$\top(\tau_\alpha, \tau_\beta) \leq \top(\tau_\eta, \tau_\beta)$, aussi
 $\{\tau_\gamma | \top(\tau_\eta, \tau_\gamma) \leq \tau_\beta\} \subseteq \{\tau_\gamma | \top(\tau_\alpha, \tau_\gamma) \leq \tau_\beta\}$
 Le calcul du maximum de ces deux ensembles conduit à l'inégalité souhaitée $\kappa_\eta^\beta \leq \kappa_\alpha^\beta$.

(P4) est satisfaite car l'équation (4) spécifie toutes les valeurs, n'en laissant aucune non définie. Aussi, la parcimonie de la matrice ne peut provenir que de valeurs redondantes. \square

3.2 Théorème de représentation

Cette section démontre le principal théorème de l'article, offrant une preuve constructive de la configuration d'ABOP correspondant à une t-norme donnée. Plus précisément, cette configuration est celle définie dans le lemme 1 :

Théorème 1. *Toute t-norme \top définie sur $\mathcal{L}_M \times \mathcal{L}_M$ est obtenue par la configuration ABOP définie par les paramètres*

$$\kappa_\alpha^\beta = I_\top(\tau_\alpha, \tau_\beta)$$

Démonstration. Soit \top une t-norme définie sur $\mathcal{L}_M \times \mathcal{L}_M$ et κ comme spécifié dans l'équation (4). D'après le lemme 1, ces κ constituent une configuration valide de l'ABOP F_κ . On a de plus

$$\begin{aligned} F_\kappa(\tau_\alpha, \tau_\beta) &= \min\{\tau_\gamma \in \mathcal{L}_M | \tau_\beta \leq \kappa_\alpha^\gamma\} \\ &= \min\{\tau_\gamma \in \mathcal{L}_M | \tau_\beta \leq I_\top(\tau_\alpha, \tau_\gamma)\} \\ &= \min\{\tau_\gamma \in \mathcal{L}_M | \top(\tau_\alpha, \tau_\beta) \leq \tau_\gamma\} \\ &= \top(\tau_\alpha, \tau_\beta) \end{aligned}$$

La première égalité utilise la définition de F_κ rappelée dans l'équation (2), la deuxième utilise la définition des paramètres considérée. La

troisième utilise la propriété d'adjonction de la t-norme avec son implication résiduelle associée [1]

$$\top(x, y) \leq z \quad \text{ssi} \quad y \leq I_\top(x, z)$$

satisfaite pour toute t-norme dans le cas \mathcal{L}_M discret (preuve sans difficulté omise). \square

3.3 Structure minimale

Cette section étudie l'effet des propriétés des t-normes sur l'opérateur ABOP et la forme générale de la matrice de paramètres associés : pour toute t-norme, la représentation non redondante de la matrice induite par l'équation (4) a les deux propriétés (T1) et (T2) données ci-dessous. (T1) spécialise (P1) et (T2) est une caractérisation additionnelle par rapport aux propriétés générales discutées dans la section 2.3.

(T1) les termes diagonaux valent τ_{M-1} ,

(T2) la dernière ligne contient toutes les valeurs de τ_0 to τ_{M-1} .

En effet, (T1) a été établi dans la preuve du lemme 1, dans la démonstration de (P1). (T2) est une conséquence directe de la définition générale de κ_α^β donnée dans l'éq. (4) : pour $\alpha = M - 1$, par définition de l'élément neutre de \top , pour tout τ_γ , $\top(\tau_{M-1}, \tau_\gamma) = \tau_\gamma$, et le plus grand τ_γ tel que $\top(\tau_{M-1}, \tau_\gamma) = \tau_\gamma \leq \tau_\beta$ vaut τ_β . Aussi $\kappa_{M-1}^\beta = \tau_\beta$.

La matrice de paramètres a donc la forme globale suivante, où la partie supérieure droite est vide et la partie inférieure gauche est remplie selon l'équation (4), chacune étant filtrée selon le principe de redondance :

$$\begin{bmatrix} \tau_{M-1} & & & & & \\ & \tau_{M-1} & & & & \\ & & \tau_{M-1} & & & \\ \vdots & \vdots & & \tau_{M-1} & & \\ & & & \dots & \ddots & \\ \tau_0 & \tau_1 & & \dots & \tau_{M-2} & \tau_{M-1} \end{bmatrix}$$

De façon équivalente, la représentation graphique de l'opérateur ABOP pour toute t-norme présente une structure commune : des flèches de chaque cercle vers lui-même, étiquetées τ_{M-1} ,

et du disque τ_{M-1} vers chaque disque. Pour faciliter leur comparaison d'une t-norme à l'autre, ces flèches communes sont représentées en gris sur les figures données dans le tableau 1.

4 Exemples : représentations de quatre t-normes sur \mathcal{L}_M

Cette section instancie le théorème établi dans la section précédente et examine la configuration ABOP qu'il induit pour quatre cas de référence, les t-normes de Zadeh, Łukasiewicz, nilpotente minimale et drastique. Le tableau 1 donne, dans la première colonne, le nom et l'équation de la t-norme définie sur \mathcal{L}_M , la formule de l'implication résiduelle associée, qui définit κ_α^β . Les autres colonnes fournissent la représentation matricielle associée et la représentation graphique dans le cas \mathcal{L}_5 .

La démonstration est omise dans les trois premiers cas, où les coefficients obtenus correspondent à une transposition dans \mathcal{L}_M de l'implication résiduelle du cas flou, les preuves étant identiques. Elle est donnée uniquement dans le cas de la t-norme drastique, où le passage à un univers discret conduit à une différence.

T-norme de Zadeh Comme indiqué dans la première ligne du tableau 1, la configuration ABOP correspondant à $\top(\tau_\alpha, \tau_\beta) = \min(\tau_\alpha, \tau_\beta)$ conduit, dans la représentation matricielle, à des valeurs sous la diagonale constantes dans chaque colonne. La matrice triangulaire inférieure est non parcimonieuse, contenant le nombre maximal de paramètres $M(M-1)/2$.

La matrice est, comme attendu, cohérente avec la proposition établie dans [10]. La différence vient de la façon dont ces résultats sont obtenus : dans [10], cette configuration est arbitrairement considérée et l'article montre qu'elle permet en effet de représenter la t-norme de Zadeh. Ici, l'utilisation du théorème 1 permet d'établir ce résultat en justifiant son établissement.

T-norme de Łukasiewicz La configuration d'ABOP correspondant à la t-norme de Łukasiewicz est elle-aussi une matrice trian-

gulair inférieure non parcimonieuse, mais diffère de la version de Zadeh par les valeurs des cellules : celles-ci ne sont plus constantes en colonne, la colonne β contient ici toutes les valeurs de τ_{M-1} à τ_β , en ordre décroissant.

Ce résultat est aussi, comme attendu, identique à celui de [10], obtenu comme un cas particulier du théorème 1, et non proposé arbitrairement.

La représentation graphique a la même structure que celle de la configuration de Zadeh, avec d'autres étiquettes, supérieures, sur les flèches.

T-norme nilpotente minimum La configuration obtenue pour la t-norme nilpotente minimum, qui est plus sévère que les t-normes précédentes, conduit à une matrice plus parcimonieuse : en effet, l'expression $\max(\tau_{M-1-\alpha}, \tau_\beta)$ montre que des valeurs sont répétées dans une ligne jusqu'à la colonne β . A titre d'exemple, dans l'avant-dernière ligne de la matrice, la deuxième colonne ne contient pas la valeur τ_1 , redondante avec la première colonne.

La t-norme drastique Le cas extrême de la t-norme drastique, dont la définition est rappelée dans la dernière ligne du tableau 1, conduit à une matrice fortement parcimonieuse. La preuve est ici détaillée, car le cas de \mathcal{L}_M diffère du cas continu, et n'est pas une transposition de l'implication de Weber qui en est l'implication résiduelle floue associée (cf par exemple [6]). La définition des coefficients est en effet

$$\kappa_\alpha^\beta = \begin{cases} \tau_{M-1} & \text{si } \tau_\alpha \leq \tau_\beta \\ \tau_\beta & \text{si } \tau_\alpha = \tau_{M-1} \\ \tau_{M-2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. Si $\tau_\alpha \leq \tau_\beta$, τ_{M-1} fait partie des candidats parmi lesquels le maximum doit être calculé dans la définition de l'équation (3) puisque $\top(\tau_\alpha, \tau_{M-1}) = \tau_\alpha \leq \tau_\beta$. C'est donc le plus grand des candidats.

Le second cas, où $\tau_\alpha = \tau_{M-1}$, est une conséquence directe de la définition d'une t-norme et de la contrainte sur τ_β : pour tout γ , $\top(\tau_{M-1}, \tau_\gamma) = \tau_\gamma$. Aussi, le plus grand γ tel que $\top(\tau_{M-1}, \tau_\gamma) \leq \tau_\beta$ est τ_β .

Le dernier cas s'applique quand $\tau_\beta < \tau_\alpha < \tau_{M-1}$. $\top(\tau_\alpha, \tau_\gamma)$ vaut alors τ_0

T-norme, expression et configuration F_κ associée	Représentation matricielle	Représentation graphique cas \mathcal{L}_5
<p>Zadeh</p> $\top(\tau_\alpha, \tau_\beta) = \min(\tau_\alpha, \tau_\beta)$ $\kappa_\alpha^\beta = \begin{cases} \tau_{M-1} & \text{si } \tau_\alpha \leq \tau_\beta \\ \tau_\beta & \text{sinon} \end{cases}$	$\begin{bmatrix} \tau_{M-1} & & & & & \\ \tau_0 & \tau_{M-1} & & & & \\ \tau_0 & \tau_1 & \tau_{M-1} & & & \\ \tau_0 & \tau_1 & \tau_2 & \tau_{M-1} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \\ \tau_0 & \tau_1 & \tau_2 & \dots & \dots & \tau_{M-1} \end{bmatrix}$	
<p>Łukasiewicz</p> $\top(\tau_\alpha, \tau_\beta) = \tau_{\max(\alpha+\beta-(M-1), 0)}$ $\kappa_\alpha^\beta = \begin{cases} \tau_{M-1-\alpha+\beta} & \text{si } \tau_\alpha > \tau_\beta \\ \tau_{M-1} & \text{sinon} \end{cases}$	$\begin{bmatrix} \tau_{M-1} & & & & & \\ \tau_{M-2} & \tau_{M-1} & & & & \\ \tau_{M-3} & \tau_{M-2} & \tau_{M-1} & & & \\ \tau_{M-4} & \tau_{M-3} & \tau_{M-2} & \tau_{M-1} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \\ \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 & \dots & \tau_{M-1} & \\ \tau_0 & \tau_1 & \tau_2 & \dots & \dots & \tau_{M-1} \end{bmatrix}$	
<p>Nilpotente minimum</p> $\top(\tau_\alpha, \tau_\beta) = \begin{cases} \min(\tau_\alpha, \tau_\beta) & \text{si } \tau_{\alpha+\beta} > \tau_{M-1} \\ \tau_0 & \text{sinon} \end{cases}$ $\kappa_\alpha^\beta = \begin{cases} \max(\tau_{M-1-\alpha}, \tau_\beta) & \text{si } \tau_\alpha > \tau_\beta \\ \tau_{M-1} & \text{sinon} \end{cases}$	$\begin{bmatrix} \tau_{M-1} & & & & & \\ \tau_{M-2} & \tau_{M-1} & & & & \\ \tau_{M-3} & \tau_{M-2} & \tau_{M-1} & & & \\ \tau_{M-4} & \tau_{M-3} & \tau_{M-2} & \tau_{M-1} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \\ \tau_1 & \tau_1 & \tau_2 & \dots & \tau_{M-1} & \\ \tau_0 & \tau_1 & \tau_2 & \dots & \dots & \tau_{M-1} \end{bmatrix}$	
<p>Drastique</p> $\top(\tau_\alpha, \tau_\beta) = \begin{cases} \tau_\beta & \text{si } \tau_\alpha = \tau_{M-1} \\ \tau_\alpha & \text{si } \tau_\beta = \tau_{M-1} \\ \tau_0 & \text{sinon} \end{cases}$ $\kappa_\alpha^\beta = \begin{cases} \tau_{M-1} & \text{si } \tau_\alpha \leq \tau_\beta \\ \tau_\beta & \text{si } \tau_\alpha = \tau_{M-1} \\ \tau_{M-2} & \text{sinon} \end{cases}$	$\begin{bmatrix} \tau_{M-1} & & & & & \\ \tau_{M-2} & \tau_{M-1} & & & & \\ \tau_{M-2} & & \tau_{M-1} & & & \\ \tau_{M-2} & & & \tau_{M-1} & & \\ \vdots & & & \dots & \ddots & \\ \tau_{M-2} & \tau_1 & \tau_2 & \dots & \dots & \tau_{M-1} \\ \tau_0 & \tau_1 & \tau_2 & \dots & \dots & \tau_{M-1} \end{bmatrix}$	

TABLEAU 1 – Représentation de 4 t-normes sur \mathcal{L}_M dans le cadre ABOP

(si $\tau_\gamma \neq \tau_{M-1}$) ou τ_{M-1} (si $\tau_\gamma = \tau_{M-1}$). La seconde possibilité ne vérifie pas la contrainte $\top(\tau_\alpha, \tau_\gamma) \leq \tau_\beta$. La plus grande valeur que τ_γ peut alors prendre en respectant la condition $\tau_\gamma \neq \tau_{M-1}$ est alors la seconde plus grande valeur de \mathcal{L}_M , τ_{M-2} . Dans le cas flou, continu, l'utilisation du sup conduit dans ce cas à associer la valeur 1, alors que dans le cas discret de \mathcal{L}_M , l'utilisation du max conduit à une valeur strictement inférieure à τ_{M-1} . \square

En utilisant la représentation parcimonieuse, où seule l'occurrence la plus à gauche de chaque valeur observée est conservée, cette définition est équivalente à celle donnée dans la colonne centrale du tableau 1. Elle conduit à une matrice plus creuse que toutes les t-normes précédentes : elle ne contient que $3(M-1)$ valeurs, dans la première colonne, la dernière ligne et sur la diagonale. De même, la représentation graphique contient bien moins de flèches. En effet, la t-norme drastique n'autorise que les transitions allant vers τ_0 , à l'exception de celles incluant l'élément maximal neutre.

5 Conclusion

Cet article a proposé un théorème de représentation pour toute t-norme dans le cadre de ABOP, proposant de nouveaux arguments quant à l'expressivité de l'opérateur d'agrégation : il peut encoder toute t-norme ainsi que d'autres opérateurs moins contraints. La représentation graphique permet de visualiser les paramètres, ce qui peut être considéré comme permettant d'augmenter l'interprétabilité de ces opérateurs d'agrégation. Cette représentation graphique pourrait encore être enrichie, par exemple à l'aide de couleurs ou d'épaisseurs variables des flèches, afin de fournir plus d'informations sur les coûts de transition associés, κ_α^β .

Les travaux en cours portent sur l'exploration des représentations matricielles et graphiques des t-normes, par exemple afin de définir un degré de sévérité dépendant des paramètres κ_α^β . Il sera intéressant d'examiner dans quelle mesure ces représentations aident à caractériser les

t-normes en fonction de leurs comportements intermédiaires, entre les extrêmes que sont Zadeh et la t-norme drastique. D'autres directions de recherche incluent l'étude des contraintes sur les matrices de paramètres permettant de garantir des propriétés telles que la commutativité, l'associativité ou l'idempotence.

Références

- [1] M. Baczyński and B. Jayaram. *Fuzzy implications*. Springer, 2008.
- [2] T. Calvo, G. Mayor, and R. Mesiar, editors. *Aggregation Operators : New Trends and Applications*, volume 97. Springer, 2002.
- [3] P. Capet and T. Delavallade, editors. *Information Evaluation*. Wiley, 2014.
- [4] S. Gottwald. *A treatise on many-valued logics*, volume 9 of *Studies in logic and computation*. Research Studies Press, 2001.
- [5] M. Grabisch, J. Marichal, R. Mesiar, and E. Pap. *Aggregation Functions*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 2009.
- [6] B. Jayaram and R. Mesiar. On special fuzzy implications. *Fuzzy Sets and Systems*, 160(14) :2063–5285, 2009.
- [7] E. Klement, R. Mesiar, and E. Paps. *Triangular Norms*. Springer, 2000.
- [8] N. Rescher. *Many-valued Logic*. McGraw Hill, 1969.
- [9] A. Revault d'Allonnes and M.-J. Lesot. Formalising information scoring in a multivalued logic framework. In *Proc. of IP-MU'14*, pages 314–323. Springer, 2014.
- [10] A. Revault d'Allonnes and M.-J. Lesot. Study of an abating aggregation operator in many-valued logic. In *Proc. of FuzzyIEEE'19*. IEEE, 2019.
- [11] H. Seridi and H. Akdag. Approximate Reasoning for Processing Uncertainty. *J. of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics*, 5(2) :110–118, 2001.