



**HAL**  
open science

# Janus, le seul modèle qui explique l'accélération de l'expansion cosmique

Jean-Pierre Petit, G d'Agostini

► **To cite this version:**

Jean-Pierre Petit, G d'Agostini. Janus, le seul modèle qui explique l'accélération de l'expansion cosmique. 2022. hal-03831547v1

**HAL Id: hal-03831547**

**<https://hal.science/hal-03831547v1>**

Submitted on 27 Oct 2022 (v1), last revised 17 Feb 2023 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Janus, le seul modèle qui explique l'accélération de l'expansion cosmique.

J.PPetit<sup>1</sup>, G.D'Agostini<sup>2</sup>

**Keywords** : cosmological constant, dark matter, dark energy, bimetric models, runaway, action reaction principle, equivalence principle.

**Abstract** : On montre qu'il est possible d'intégrer des masses négatives dans un modèle cosmologique Janus en décrivant l'univers en tant que variété équipée de deux métriques, se référant l'une aux masses positives et l'autre aux masses négatives, en tant que solutions d'un système de deux équations de champ couplées. L'accélération de l'expansion cosmique résulte alors de la dominance du contenu en énergie négative, avec un bon accord avec les données observationnelles.

### 1 - Introduction :

A la fin des années deux mille commençaient à s'accumuler les données d'observation, tendant à montrer que le mouvement d'expansion, loin de se ralentir comme on l'avait cru jusque là, au contraire s'accélérait. Les données recueillies ayant été comme considérées suffisamment fiables, cette découverte fut récompensée par un prix Nobel en 2011 ([1],[2],[3]). Restait à trouver quelle pouvait être la cause de cette accélération. La seule démarche vers laquelle les spécialistes se tournèrent consista à réintroduire la constante cosmologique dans l'équation servant de base à la relativité générale, l'équation d'Einstein :

$$(1) \quad R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}$$

Jadis, avant que l'italien Torricelli ne découvre la pression atmosphérique on considérait que ce qui faisait monter le mercure dans les baromètres était « l'horreur du vide », que l'on s'appliquait à chiffrer. Mais ça ne constituait pas une véritable explication, s'appuyant sur des bases physiques claires. Comme cela s'imposa par la suite on établit que ce qui faisait monter la colonne de mercure dans le tube n'était autre que la pression résultant des très nombreuses collisions des molécules de l'air sur la surface libre du métal liquide, résultant à laquelle on donna le nom de pression. De la même façon, dire que l'introduction de cette constante cosmologique  $\Lambda$  dans l'équation, traduit « un pouvoir répulsif du vide » ne peut être considérée comme une explication satisfaisante.

La communauté scientifique lui a alors conféré le qualificatif « d'énergie noire », laquelle a alors une valeur négative. Sur le plan dynamique ce nouveau composant inconnu revêt une importance considérable, majoritaire. Les spécialistes sont alors à la recherche d'un composant de la soupe cosmique qui permette d'éclaircir ce problème.

<sup>1</sup> Jean-pierre.petit@manaty.net

<sup>2</sup> gilles.dagostini@manaty.net

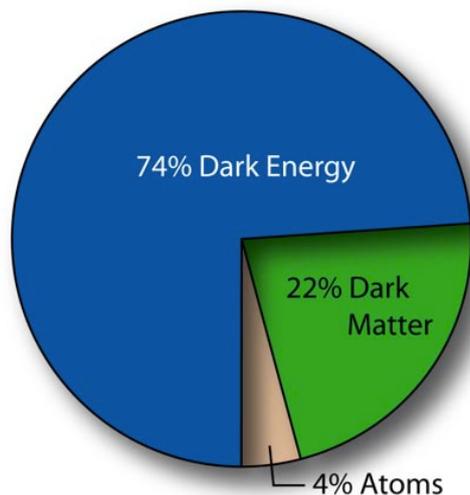


Fig.1 : Composition de la « soupe cosmique » selon le modèle  $\Lambda$ CDM

De nombreuses tentatives de description de l'énergie noire ont été proposées. Mais aucune n'atteint le minimum de crédibilité qui vaille la peine de la mentionner. Nous allons présenter ici une explication qui passe par une introduction de masses négatives dans le modèle cosmologique. Ceci a été tenté de longue date par le cosmologiste Hermann Bondi [4]. Celui-ci conclut que les lois régissant les interactions entre masses positives et masses négatives, dans le cadre de la relativité générale, ne conduisent pas à un véritable modèle, satisfaisant sur le plan physique. Elles violent en particulier les principes fondamentaux d'action-réaction et d'équivalence. Revenons sur ce point.

La relativité générale, considérée depuis 1917 comme une avancée majeure et décisive dans notre compréhension du cosmos, repose sur les points suivants ;

- L'univers, l'espace-temps, est une variété, une hypersurface à quatre dimensions, définie en tout point et à toute époque par son champ métrique  $g_{\mu\nu}$ .
- A partir de cette métrique on peut calculer deux ensembles de géodésiques. Celle de longueur non-nulle sont parcourues par des particules de matière, celle de longueur nulle par des photons.
- Si on se donne la source du champ, les valeurs en tout point des composantes du tenseur du second membre  $T_{\mu\nu}$ , on peut calculer la métrique solution  $g_{\mu\nu}$ .

Si on se concentre sur les géodésiques de longueur non nulle, celle se référant aux masses, pour un champ  $T_{\mu\nu}$  donné, il n'existe qu'une seule famille de géodésiques, le long desquelles circuleront les particules-témoins, que leurs masses soient positives ou négatives.

Pour traiter ce problème avec précision on a recourt aux deux solutions métriques construites par Schwarzschild en 1916 ([5],[6]). Il y a d'abord la solution métrique décrivant l'intérieur d'une masse  $M$ , assimilée à une sphère emplie d'un fluide incompressible de masse volumique constante  $\rho_0$ .

(2)

$$ds^2 = \left[ \frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{8\pi G |\rho_0| r_0^2}{3c^2}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{8\pi G |\rho_0| r^2}{3c^2}} \right]^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{8\pi G |\rho_0| r^2}{3c^2}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

qui se raccorde avec la solution se référant au vide entourant cette masse :

$$(3) \quad ds^2 = \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

A partir de celle-ci les géodésiques de longueur non nulle sont données par cette intégrale.

$$(4) \quad \phi = \phi_0 + \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{c^2 \lambda^2 - 1}{h^2} r^4 + \frac{2GM r^3}{c^2} - r^2 + \frac{2GM r}{c^2}}}$$

Quand cette masse M est positive, les géodésiques sont du genre ellipse, parabole, hyperbole, toutes traduisant une attraction. On en déduit, selon le modèle de la relativité générale que :

- Les masses positives attirent aussi bien leurs semblables que les masses négatives.

Si ce champ est créé par une masse négative, alors pour obtenir les géodésiques il suffit d'un changement de signe dans les deux métriques solution, ces grandeurs M et  $\rho_0$  n'étant que de simples constantes d'intégration.

(5)

$$ds^2 = \left[ \frac{3}{2} \sqrt{1 + \frac{8\pi G |\rho_0| r_0^2}{3c^2}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{8\pi G |\rho_0| r^2}{3c^2}} \right]^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 + \frac{8\pi G |\rho_0| r^2}{3c^2}} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

$$(6) \quad ds^2 = \left( 1 + \frac{2G|M|}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 + \frac{2G|M|}{c^2 r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Les géodésiques se déduisent alors de l'expression :

$$(7) \quad \varphi = \varphi_o + \int_{r_o}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{c^2 \lambda^2 - 1}{h^2} r^4 - \frac{2G|M|r^3}{c^2} - r^2 - \frac{2G|M|r}{c^2}}}$$

Les courbes du genre parabole et ellipse disparaissent. Ne subsistent que des géodésiques du genre hyperbole, évoquant une répulsion :

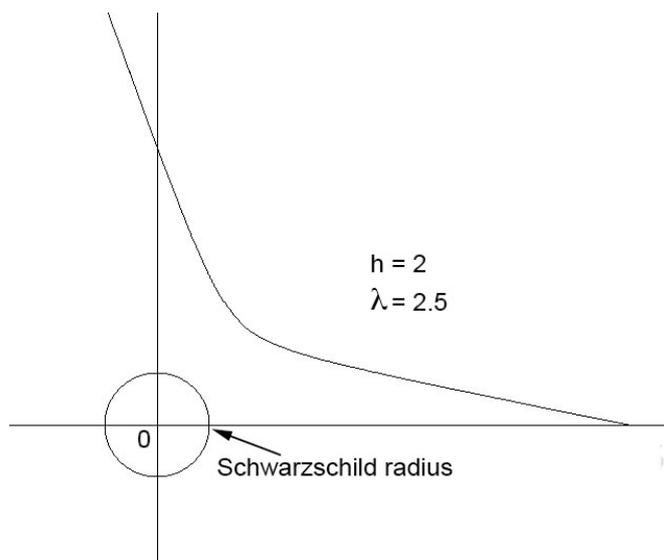


Fig.2 : Géodésiques dans un champ répulsif.

On en déduit que :

- Les masses négatives repoussent aussi bien leurs semblables que les masses positives.

Ainsi, si on met en présence deux masses de signes opposés, la masse positive s'enfuit, poursuivie par la masse négative. Les deux subissent une accélération uniforme sans qu'il y ait apport d'énergie, vu que celle de la masse négative est négative. On a donné le nom de *runaway* à ce phénomène, qui viole à la fois le principe d'action-réaction et le principe d'équivalence.

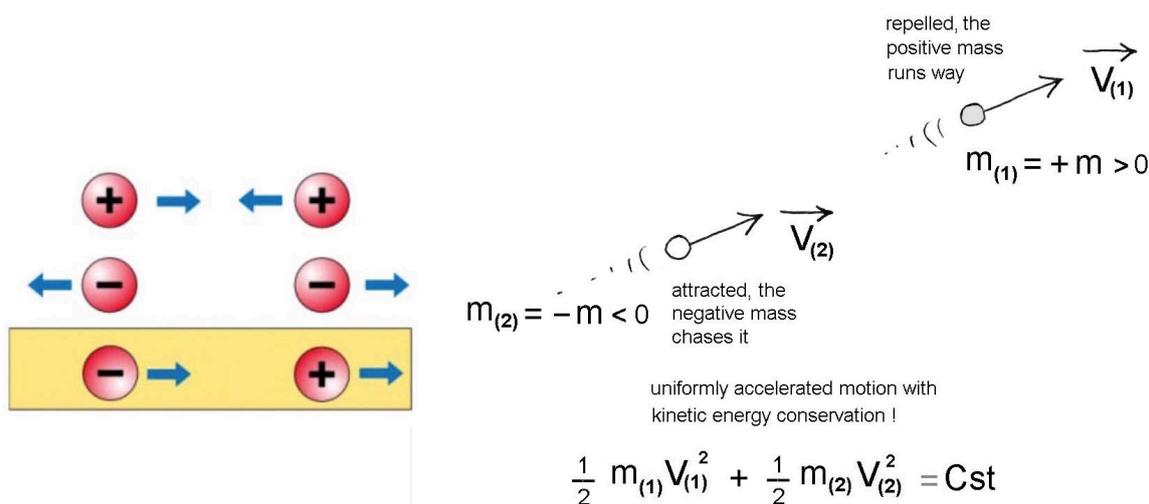


Fig.3 : L'introduction de masses négatives dans la relativité générale se traduit par le phénomène runaway.

## 2 - Une tentative d'introduction des masses négatives satisfaisant aux principes d'action-réaction et d'équivalence.

Dans une démarche purement heuristique on peut envisager des lois d'interaction correspondant à la figure suivante :

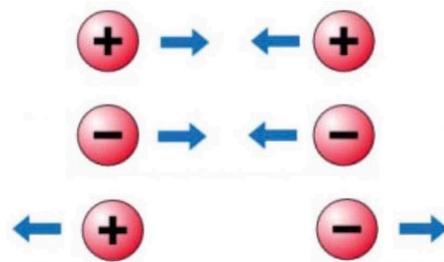


Fig.4 : Des lois d'interaction satisfaisant les principes d'action réaction et d'équivalence.

Ceci fut envisagé dès 1995 ([7],[8]), avec un certain profit, vis à vis d'une tentative d'explication de la structure à grande échelle de l'univers et de la structure spirale des galaxies [8]. Mais on se heurtait alors à un écueil sérieux : ces lois étaient en opposition avec ce qui émergeait du modèle de la relativité générale. En effet elles impliquaient que les masses témoins, positives et négative, se comportent différemment lorsqu'elles étaient plongées dans le même champ gravitationnel. Pour ce faire elles devaient suivre des courbes géodésiques différentes, issues de deux métriques différentes  $g_{\mu\nu}^{(+)}$  et  $g_{\mu\nu}^{(-)}$ .

Celles-ci ne peuvent émerger d'une unique équation de champ. Dans l'équation de la relativité générale, l'équation d'Einstein, le tenseur de Ricci  $R_{\mu\nu}$  et le scalaire de Ricci  $R$  découlent de la métrique solution  $g_{\mu\nu}$ . Or, deux métriques distinctes  $g_{\mu\nu}^{(+)}$  et  $g_{\mu\nu}^{(-)}$

engendrent des tenseurs  $R_{\mu\nu}^{(+)}$  et  $R_{\mu\nu}^{(-)}$  ainsi que des scalaires  $R^{(+)}$  et  $R^{(-)}$  différents. On a donc une sorte de bi-géométrie, de configuration bimétrique.

### 3 – Les premières bi-géométries.

En 2004 T.Damour et I.Kogan ([9],[10]) envisagent l'interaction entre deux entités géométriques, qualifiées de « branes » « droite » et « gauche » ( « right » et « left » ). Une construction à l'aide d'un Lagrangien, s'inspirant de la construction classique les conduit à proposer le système des deux équations de champ couplées suivant :

$$(8) \quad 2 M_R^2 (R_{\mu\nu}(g^R) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^R R(g^R)) + \Lambda_R g_{\mu\nu}^R = T_{\mu\nu}^R + t_{\mu\nu}^R$$

$$2 M_L^2 (R_{\mu\nu}(g^L) - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}^L R(g^L)) + \Lambda_L g_{\mu\nu}^L = T_{\mu\nu}^L + t_{\mu\nu}^L$$

Dans ces équations les tenseurs  $T_{\mu\nu}^R$  et  $T_{\mu\nu}^L$  ont la forme classique, inspirée par la relativité générale. L'interaction repose entièrement sur les « tenseurs d'interaction »  $t_{\mu\nu}^R$  et  $t_{\mu\nu}^L$ . Au fil d'un article atteignant quarante pages, les deux auteurs tentent différentes approches, basées sur différents modèles, sans parvenir au moindre résultat. Ajoutons que le modèle se trouve compliqué par l'hypothèse que les interactions sont censées mettre en jeu des gravitons dotés d'un spectre de masse.

La seconde tentative est celle de l'Allemande Sabine Hossenfelder, en 2008 [11].

$$(9) \quad {}^{(g)}R_{\kappa\nu} - \frac{1}{2} g_{\kappa\nu} {}^{(g)}R = T_{\kappa\nu} - \sqrt{\frac{\hbar}{g}} a_\nu^\kappa a_{\underline{\kappa}}^{\underline{\nu}} T_{\underline{\kappa}\underline{\nu}}$$

$${}^{(h)}R_{\nu\kappa} - \frac{1}{2} g_{\nu\kappa} {}^{(h)}R = T_{\nu\kappa} - \sqrt{\frac{g}{\hbar}} a_\kappa^\nu a_{\underline{\nu}}^{\underline{\kappa}} T_{\underline{\nu}\underline{\kappa}}$$

Les deux entités géométriques en interaction sont alors repérées par les lettres grecques  $\kappa$  et  $\nu$ . La construction des termes d'interaction est alors fondée sur l'introduction d'une relation fonctionnelle, covariante :

$$(10) \quad \delta h_{\kappa\lambda} = - \left[ a^{-1} \right]_\kappa^\mu \left[ a^{-1} \right]_\lambda^\nu \delta g_{\mu\nu}$$

L'auteur se limite alors à une hypothèse systématique et contraignante de symétrie entre les deux entités. Ceci l'amène à construire un schéma d'évolution basé sur deux métriques FRLW, simples copies l'une de l'autre. Les lois d'interaction se déduisent des deux équations, à travers l'approximation newtonienne. Dans ces conditions le schéma conduit une fois encore à une violation du principe d'équivalence, et l'auteur conclut qu'il s'agit là d'une propriété commune à tous les systèmes bimétriques.

#### 4 – Adaptation du système pour une satisfaction des principes d'action-réaction et d'équivalence

C'est inexact. Le système d'équations Janus [12],[13],[14], [15],[16],[17],[18],[19]) peut à ce stade être considéré comme une variante du modèle d'Hossenfelder, au prix d'un simple changement de signe (modulo le mode d'écriture des tenseurs d'interaction) :

$$(11) \quad \begin{aligned} {}^{(g)}R_{\kappa\nu} - \frac{1}{2}g_{\kappa\nu} {}^{(g)}R &= T_{\kappa\nu} - V \sqrt{\frac{h}{g}} a_\nu^\kappa a_\kappa^\nu T_{\underline{\kappa}\underline{\nu}} \\ {}^{(h)}R_{\nu\kappa} - \frac{1}{2}g_{\nu\kappa} {}^{(h)}R &= - \left[ T_{\nu\kappa} - W \sqrt{\frac{g}{h}} a_\kappa^\nu a_\nu^\kappa T_{\nu\kappa} \right] \end{aligned}$$

En reprenant la présentation (11), avec ses conventions de signe, ce système s'écrit :

$$(12) \quad \begin{aligned} R^{(+)\nu}_\mu - \frac{1}{2}R^{(+)}\delta_\mu^\nu &= \chi \left[ T^{(+)\nu}_\mu + \sqrt{\frac{g^{(-)}}{g^{(+)}}} \hat{T}^{(-)\nu}_\mu \right] \\ R^{(-)\nu}_\mu - \frac{1}{2}R^{(-)}\delta_\mu^\nu &= -\chi \left[ \sqrt{\frac{g^{(+)}}{g^{(-)}}} \hat{T}^{(+)\nu}_\mu + T^{(-)\nu}_\mu \right] \end{aligned}$$

Un tel système doit satisfaire aux conditions de Bianchi. Celles-ci sont satisfaites identiquement pour les premiers membres. Les tenseurs  $T^{(+)\nu}_\mu$  et  $T^{(-)\nu}_\mu$  sont :

$$(13) \quad T^{(+)\nu}_\mu = \begin{pmatrix} \rho^{(+)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{p^{(+)}}{c^{(+2)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p^{(+)}}{c^{(+2)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{p^{(+)}}{c^{(+2)}} \end{pmatrix} \quad T^{(-)\nu}_\mu = \begin{pmatrix} \rho^{(-)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{p^{(-)}}{c^{(-2)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p^{(-)}}{c^{(-2)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{p^{(-)}}{c^{(-2)}} \end{pmatrix}$$

En leur appliquant la condition de Bianchi on obtient les relations traduisant, à l'intérieur des masses, l'équilibre entre force de pression et force de gravité. A ce stade, la seule contrainte à laquelle les tenseurs d'interaction doivent obéir est précisément cette condition de Bianchi, qui détermine précisément leur forme (voir le détail des calculs dans l'annexe A). Cette condition se trouve remplie pour de tenseurs d'interaction :

$$(14) \quad \hat{T}_{\mu}^{(+)\nu} = \begin{pmatrix} \rho^{(+)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p^{(+)}}{c^{(+2)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p^{(+)}}{c^{(+2)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p^{(+)}}{c^{(+2)}} \end{pmatrix} \quad \hat{T}_{\mu}^{(-)\nu} = \begin{pmatrix} \rho^{(-)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p^{(-)}}{c^{(-2)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p^{(-)}}{c^{(-2)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p^{(-)}}{c^{(-2)}} \end{pmatrix}$$

Le système d'équations de champ couplées (12) ne vaut que s'il produit des solutions conformes aux observations. Ceci avait été ébauché dans [12]. Alors qu'Hossenfelder s'est toujours située dans une optique de symétrie entre les deux entités, le modèle Janus se fonde au contraire sur une dissymétrie foncière, la dynamique cosmique étant sous le contrôle de la population de masse négative, majoritaire. Cette dissymétrie sera expliquée dans un futur article.

L'exploitation de cette hypothèse de dissymétrie avait connu un début d'exploitation dans [7] à travers des simulations numériques. Dans ces conditions les masses négatives, dont le temps d'accrétion est alors plus faible :

$$(15) \quad t_j^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi G |\rho^{(-)}|}} \ll t_j^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi G \rho^{(+)}}}$$

Les masses négatives forment alors les premières un système régulier de conglomérats sphéroïdaux, en confinant la masse positive dans l'espace interstitiel, conférant ainsi à celle-ci une structure lacunaire. Ceci sera repris et développé dans un futur article.

## 5 – Première application du modèle Janus :

### Explication de l'accélération de l'expansion cosmique.

Avant de faire jouer cette hypothèse de dissymétrie commençons par examiner la compatibilité des équations (12) quand on leur affecte des solutions, homogènes et isotropes, du type FRLW :

$$(16) \quad g_{\mu\nu}^{(+)} = dx^{\circ 2} - \frac{a^{(+2)}}{1 - k^{(+)}} [dr^2 + d\Omega^2]$$

$$g_{\mu\nu}^{(-)} = dx^{\circ 2} - \frac{a^{(-2)}}{1 - k^{(-)}} [dr^2 + d\Omega^2]$$

Ces équations deviennent :

$$(17) \quad R_{\mu}^{(+)\nu} - \frac{1}{2}R^{(+)}\delta_{\mu}^{\nu} = \chi \left[ T_{\mu}^{(+)\nu} + \frac{c^{(-)2} a^{(-)3}}{c^{(+2)} a^{(+3)}} \widehat{T}_{\mu}^{(-)\nu} \right]$$

$$R_{\mu}^{(-)\nu} - \frac{1}{2}R^{(-)}\delta_{\mu}^{\nu} = -\chi \left[ \frac{c^{(+2)} a^{(+3}}{c^{(-)2} a^{(-)3}} \widehat{T}_{\mu}^{(+)\nu} + T_{\mu}^{(-)\nu} \right]$$

Dans le traitement classique de la solution FRLW de l'équation d'Einstein on aboutissait à la conservation de l'énergie :

$$(18) \quad E = \rho c^2 a^3 = \text{Cst}$$

Un traitement similaire (compatibilité entre les deux équations) débouche sur la condition :

$$(19) \quad E = \rho^{(+)} c^{(+2)} a^{(+3)} + \rho^{(-)} c^{(-2)} a^{(-3)} = \text{Cst}$$

Une relation qui satisfera le physicien au sens où elle traduit la conservation de l'énergie globale. En se concentrant sur la phase où ces sont des univers de poussières, où on peut négliger la pression on peut ainsi écrire les équations :

$$(20a) \quad R_{\mu}^{(+)\nu} - \frac{1}{2}R^{(+)}\delta_{\mu}^{\nu} = \frac{\chi E}{c^{(+2)} a^{(+3)}}$$

$$(20b) \quad R_{\mu}^{(-)\nu} - \frac{1}{2}R^{(-)}\delta_{\mu}^{\nu} = -\chi \frac{\chi E}{c^{(-2)} a^{(-3)}}$$

Dans ce système  $\chi$  est la constante d'Einstein, que l'on prend, conformément à la forme retenue pour les tenseurs de champ, égale à :

$$(21) \quad \chi = -\frac{8\pi G}{c^{(+2)}}$$

Elle est négative. Les signes des seconds membres des équations du système (20a et 20b) seront donc opposés. Si l'énergie globale, dominée par le contenu en masse négative est négative, alors l'équation (20b) donnera une évolution du type modèle de Friedman, avec une accélération de cette expansion. La solution de l'équation (20a), avec  $x^0 = c^{(+)}t^{(+)} = c^{(-)}t^{(-)}$  faisant alors état d'une accélération de l'expansion a été étudié par W.Bonnor [21]. Cette solution s'écrit sous la forme paramétrique suivante (on simplifiera en faisant  $t^{(+)} = t$ ):

$$(22) \quad a^{(+)}(u) = \alpha^2 c h^2 u$$

$$(23) \quad t^{(+)}(u) = \frac{\alpha^2}{c^{(+)}} \left( 1 + \frac{1}{2} \text{sh} 2u + u \right)$$

Avec :

$$(24) \quad \alpha^2 = -\frac{8\pi G}{3c^{(+2)}} E > 0$$

Pour simplifier les notations on pose :  $a^{(+)} = a$  ,  $c^{(+)} = c$  .

Le « paramètre de « décélération »  $q$  devient :

$$(25) \quad q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = -\frac{1}{2\text{sh}^2 u} = -\frac{4\pi G}{3} \frac{|E|}{a^3 H^2} < 0$$

La construction de la relation entre la magnitude bolométrique et le redshift est donnée dans l'annexe B. Il vient :

$$(26) \quad m_{\text{bol}} = 5 \log_{10} \left[ z + \frac{z^2 (1 - q_0)}{1 + q_0 z + \sqrt{1 + 2q_0 z}} \right] + \text{cst}$$

où  $q_0 < 0$  et  $1 + 2q_0 z > 0$  . En ajustant les valeurs de  $q_0$  et de la constante de manière à cadrer avec les données observationnelles [1] il vient :

$$(27) \quad q_0 = -0.087 \pm 0.015$$

Les résultats présentés ci-dessous donnent le module de distance normalisé, lié aux paramètres expérimentaux par la relation :

$$(28) \quad q_0 = -m_B^* - M_B + \alpha X_1 - \beta C$$

$$(29) \quad \mu = m_B^* - M_B + \alpha X_1 - \beta C$$

$m_B^*$  ,  $\alpha$  et  $\beta$  sont des paramètres d'erreur conjoints dans l'estimation de la distance. Nous prenons les valeurs données dans la référence [1] (740 supernovae) correspondant au meilleur accord des données avec le modèle  $\Lambda$ CDM .

Au meilleur ajustement nous obtenons :  $\chi^2/\text{d.o.f.} = 657/738$  (740 points et 2 paramètres). Les courbes correspondantes sont représentées dans les figures 5,6,7,8 et démontrent un excellent accord avec les données observationnelles.

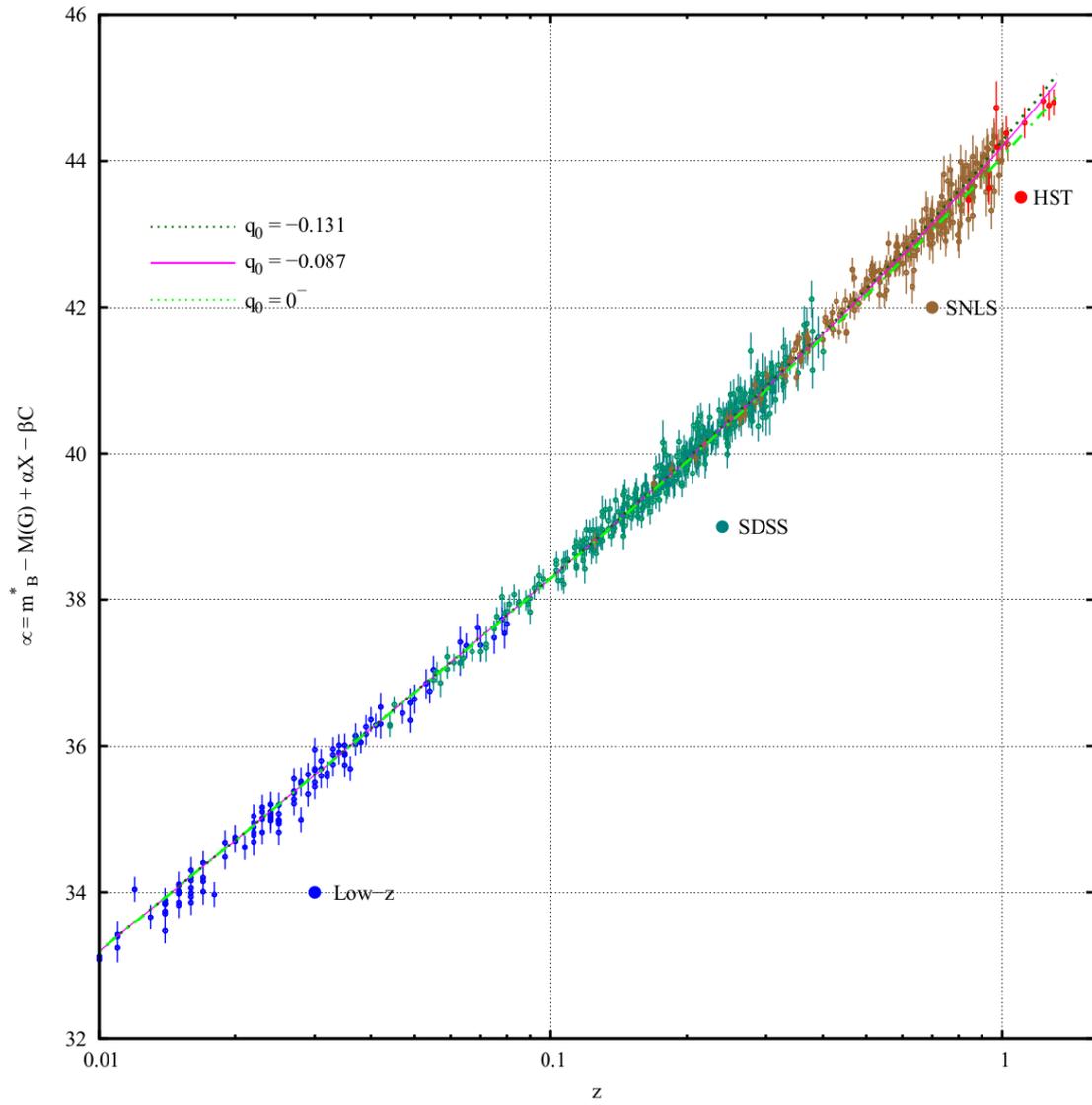


Figure 5: Diagramme de Hubble construit à partir des données (le redshift est en coordonnées logarithmiques)

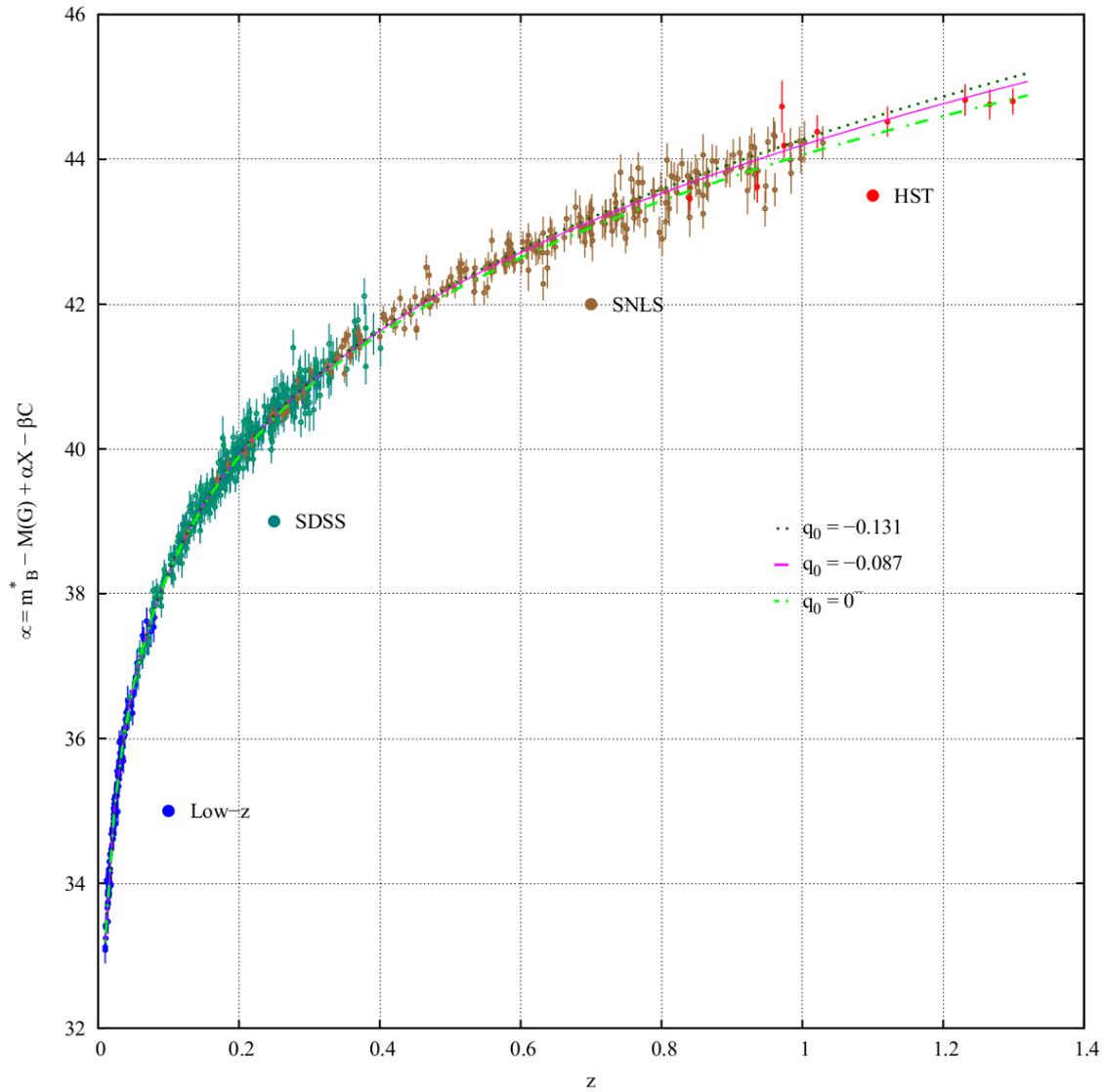


Figure 6: Diagramme de Hubble (le redshift en coordonnées linéaires)

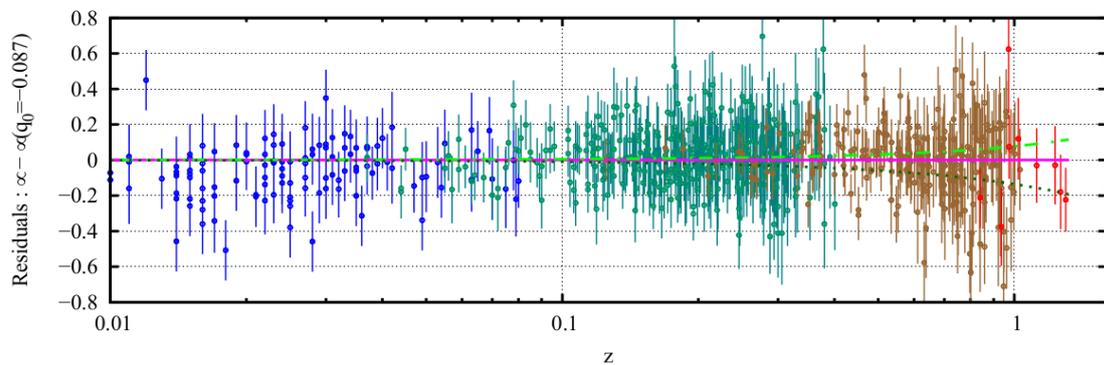


Figure 7: Résidus des échantillons combinés.  
(redshift en coordonnées logarithmiques)

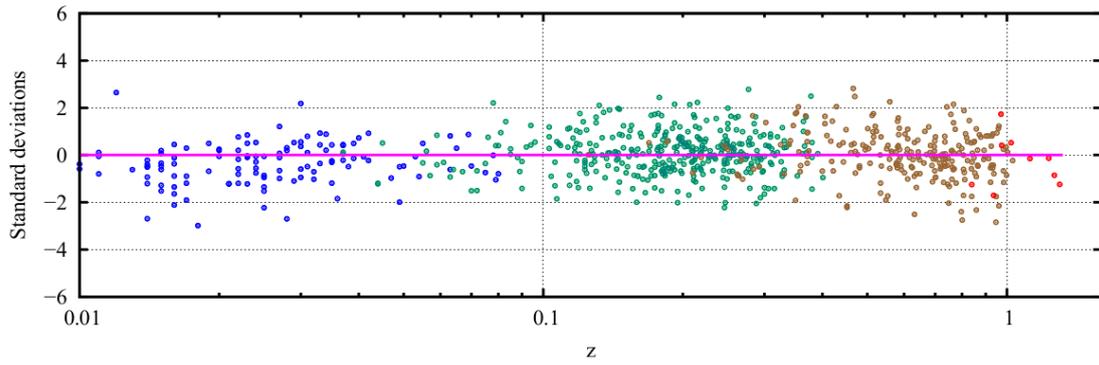


Figure 8: Ecart quadratique moyen des points échantillonnés combinés.  
(redshift en coordonnées logarithmiques)

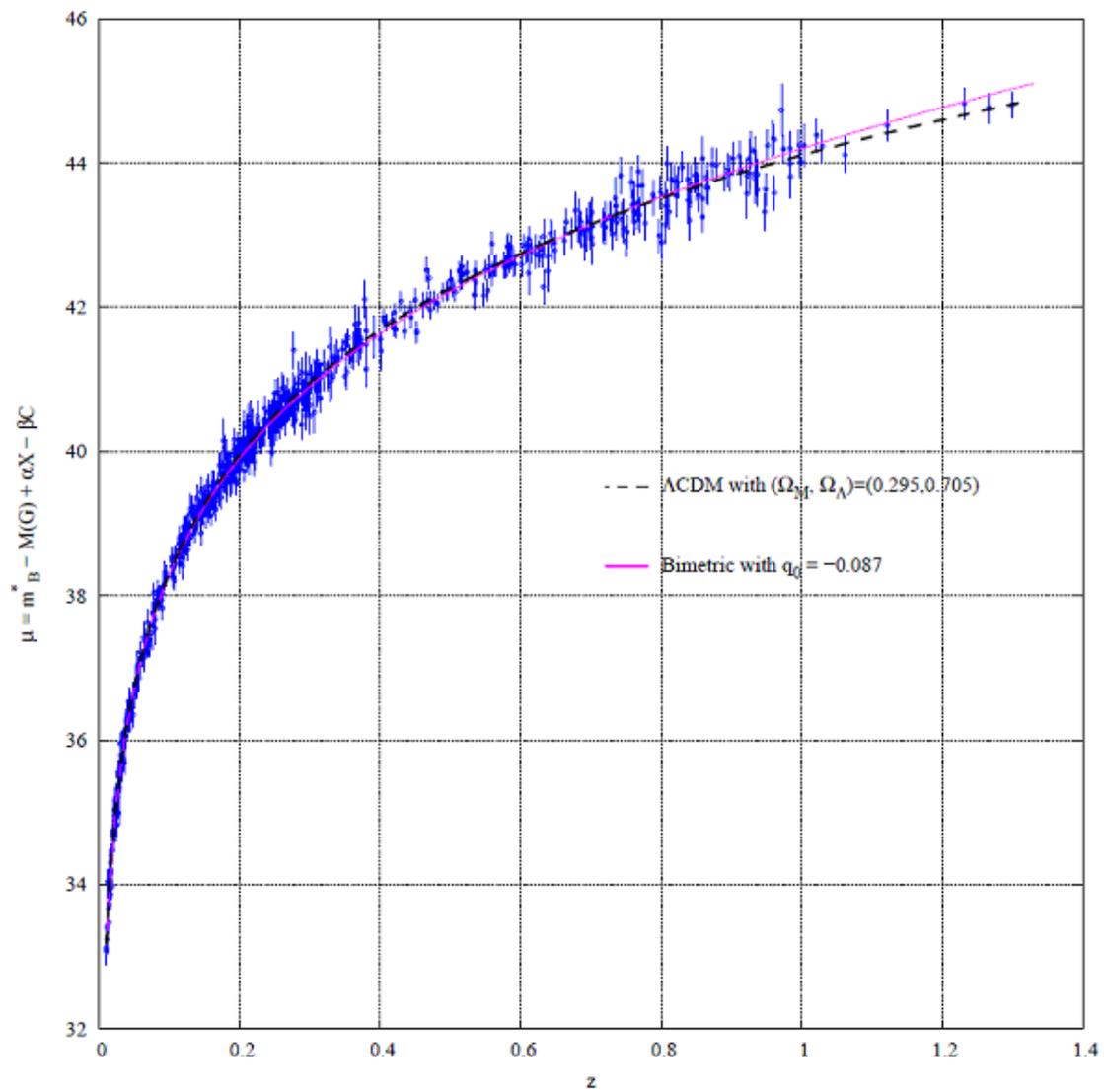


Figure 9: Diagrammes de Hubble des deux modèles  
(redshift linéaire)

Nous pouvons en déduire l'âge de l'univers (voir l'annexe B) par rapport à  $q_0$  et  $H_0$ . Voir la table I pour les valeurs correspondants à différents couples ( $q_0$ ,  $H_0$ ). Le meilleur accord correspond à :

$$(29) \quad T_0 = \frac{1.07}{H_0} = 15.0 \text{ Gyr}$$

T0 (Gyr)		q0					
		0.000	-0.045	-0.087	-0.102	-0.117	-0.132
H0	70	14.0	15.0	15.0	14.9	14.9	14.8
	73	13.4	14.4	14.4	14.3	14.3	14.2

Table 1: Différentes valeurs de l'âge de l'univers  $T_0$  pour des valeurs de  $q_0$  et  $H_0$

Le contenu de l'univers peut alors être révisé. Dans ce modèle Cosmologique Janus matière sombre et énergie noire sont remplacées par un seul et même composant, un contenu en masse négative, qui sera alors parfaitement identifié et dont on verra qu'il rend compte de tous les phénomènes pour lesquels on avait créé ces deux composants, de nature non précisée à ce jour.

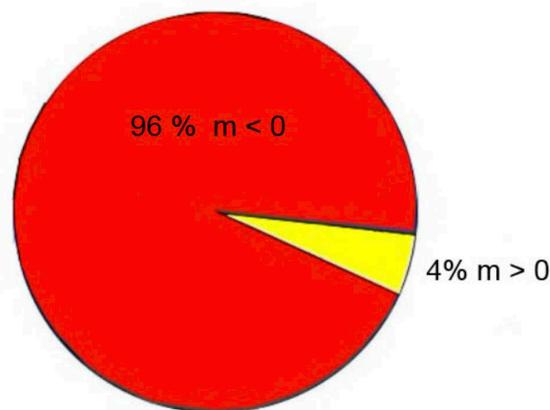


Fig.10 : La composition de l'univers, selon le modèle Janus.

Lorsqu'on tente d'interpréter le phénomène d'accélération de l'expansion en invoquant la constante cosmologique, celle-ci évoque alors la présence d'une énergie négative indépendante du temps, donc indépendante de l'expansion. Dynamiquement, celle-ci prédit une expansion exponentielle en fonction du temps. Dans le modèle Janus les indices de courbure  $k^{(+)}$  et  $k^{(-)}$  sont égaux à  $-1$ . Les géométries sont donc hyperboliques et les facteurs d'échelle  $a^{(+)}$  et  $a^{(-)}$  tendent asymptotiquement vers des croissances linéaires en fonction du temps.

## 5 – Conclusion.

Le modèle présenté représente un profond changement du paradigme cosmologique au sens où on passe d'une description de l'univers en tant que variété équipée d'une unique métrique  $g_{\mu\nu}$ , solution d'une unique équation de champ, l'équation d'Einstein, à une variété équipée de deux métriques  $g_{\mu\nu}^{(+)}$  et  $g_{\mu\nu}^{(-)}$ , se référant respectivement aux masses positives et aux masses négatives, solutions d'un système de deux équations de champ couplées. L'approximation newtonienne fournit alors des lois d'interaction qui, à la différence de ce qui émerge de la tentative d'introduction de masses négatives dans le modèle Einsteinien (phénomène runaway), satisfont les principes d'action-réaction et d'équivalence. Les masses de même signe s'attirent alors selon la loi de Newton, tandis que les masses de signes opposés se repoussent selon « anti-Newton ». Comme cela sera développé dans les articles suivants, l'instabilité gravitationnelle tend à séparer ces deux populations. Dans ces conditions, quand une population domine dans une région de l'univers, l'autre en est pratiquement exclue. Alors la première équation du système proposé s'identifie à l'équation d'Einstein, qui fait alors figure de description limite, dans les régions où le contenu en masse négative peut être négligé. Le modèle s'accorde ainsi avec les classiques vérifications de la relativité générale, de nature locale. Comme cela sera montré dans les articles suivants, ces particules de masse négative sont tout simplement de l'anti-hydrogène et de l'anti-hélium de masse négative. On montrera que le résultat de l'interaction avec les masses positives et les photons d'énergie positive rend compte de tous les phénomènes qu'on attribuait jusqu'ici à la dark matter, qui n'est alors plus nécessaire. L'énergie de cette population de masse négative étant elle-même négative s'identifie alors avec ce qui était qualifié « d'énergie noire ». Ainsi les deux composants du modèle  $\Lambda$ CDM sont ainsi remplacés par un unique composant, assurant ces deux fonctions, parfaitement identifié. Comme les particules de masse négative émettent des photons d'énergie négative, elles échappent à nos observations dans le domaine de l'optique. Au passage, et ceci fera également l'objet d'un autre article, cette antimatière de masse négative s'identifie alors à cette grande absente : l'antimatière primordiale, autre problème pour lequel le modèle cosmologique Janus est le seul à fournir une réponse précise et cohérente. .

Ceci étant, on montre que ce nouveau modèle cosmologique Janus rend parfaitement compte de l'accélération de l'expansion cosmique, en étant au passage le seul à fournir une véritable explication de ce phénomène.

## References :

- [1] Perlmutter, S., et al. 1999, ApJ, 517, 565
  - [2] Riess A. G. 2000, PASP, 112, 1284
  - [3] Schmidt, B. P., et al., 1998, [Astrophys. J. 507, 46.](#)
  - [4] Bondi H. : Negative mass in General Relativity. Rev. of Mod. Phys., Vol 29, N°3, July 1957
  - [5] K. Schwarzschild : Über das Gravitationsfeld Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. Sitzungsberichte der Königlich Preubischen Akademie der Wissenschaften p. 189-196. jan 1916
- English translation by S.Antoci and A.Loinger. On the gravitational field of a mass point according to Einstein theory. arXiv :physics/9912033v1 [physics.hist-ph] 16 dec 1999.

- [6] K. Schwarzschild : Über das Gravitationsfeld einer Kugel Aus incompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie. Sitzung der phys. Math. Klasse v.23 märz 1916. English translation, by S.Antoci. On the gravitational field of a sphere of incompressible fluide according to Einstein theory. arXiv :physics/9905030v1 [physics.hist-ph] 12 may 1999.
- [7] J.P.PETIT, Twin Universe Cosmology, *Astrophys. and Sp. Science*, **226**, 273-307, 1995
- [8] J.P.PETIT, P.MIDY & F.LANDSHEAT : Twin matter against dark matter. Intern. Meet. on Atrophys. and Cosm. "Where is the matter ? ", Marseille 2001 june 25-29
- [9] Damour T. , Kogan I I. Effective Lagrangians and universality classes of nonlinear bigravity *Phys. Rev. D* **66** (2002) 104024. hep-th/0206042.
- [10] Damour T. , Kogan I. I. , Papazoglou A. Non-linear bigravity and cosmic acceleration *Phys. Rev. D* **66** (2002) 104025. hep-th/0206044.
- [11] S. Hossenfelder : A bimetric Theory with Exchange Symmetry. *Phys. Rev. D* **78**, 044015, 2008 and arXiv : 0807.2838v1 (gr-qc)17 july 2008
- [12] J.P.Petit, G.D'Agostini : Negative Mass hypothesis in cosmology and the nature of dark energy. *Astrophysics And Space Science*, *A* **29**, 145-182 (2014)
- [13] J.P.Petit & G.D'Agostini : Lagrangian derivation of the two coupled field equations in the Janus Cosmological Model. *Astrophysics and Space Science* 2015, 357 :67
- [14] G. D'Agostini and J.P.Petit : Constraints on Janus Cosmological model from recent observations of supernovae type Ia, *Astrophysics and Space Science*, (2018), 363:139.<https://doi.org/10.1007/s10509-018-3365-3>
- [15] J.P.Petit, G.D'Agostini : Cosmological Bimetric model with interacting positive and negative masses and two different speeds of light, in agreement with the observed acceleration of the Universe. *Modern Physics Letters A*, Vol.29 ; N° 34, **2014** ; Nov 10th DOI :10.1142/So21773231450182X
- [16] J.P.Petit & G.D'Agostini : Cancellation of the singularity of the Schwarzschild solution with natural mass inversion process. *Mod. Phys. Lett. A* vol. 30 n°9 2015
- [17] J.P.Petit The Janus Cosmological Model and the Fluctuations of CMB. *Progress in Physics* **2018** vol. 14 issue 4
- [18] J.P.Petit, G. D'Agostini, N.Debergh : Physical and mathematical consistency of the Janus Cosmological Model (JCM). *Progress in Physics* 2019 Vol.15 issue 1
- [19] N.Debergh, J.P.Petit and G.D'Agostini : Evidence of negative energies and masses in the Dirac equation through a unitary time-reversal operator. , *J. Phys. Comm.* **2** (2018) 115012
- [21] W.B.Bonnor : Negative mass and general relativity. *General Relativity and Gravitation* Vol.21, N°11, 1989
- [22] R.Tolman : Static solutions of Einstein's field equation for a sphere of fluid. *Phys. Rev.* n°55 (15 feb. 1939)
- [23] R.Oppenheimer and G.M.Volkoff : On massive neutron cores. *Phys. Rev.* N° 55 ( 15 feb.1939)
- [24] R.Adler, M.Bazin M.Shiffer. Introduction to general relativity. Mc Graw Hill Book, 1967. Chapitre 14.
- [25] J.P.Petit & G.D'Agostini : Lagrangian derivation of the two coupled field equations in the Janus Cosmological Model. *Astrophysics and Space Science* 2015, 357 :67

[26] J.P.Petit, G.D'Agostini : Negative Mass hypothesis in cosmology and the nature of dark energy. *Astrophysics And Space Science*,. *A* **29**, 145-182 (2014)

[27] T.Damour : Sur le « modèle Janus » de J.P.Petit (4 janvier 2019). Sur le site de l'IHES  
<https://www.ihes.fr/-damour/publications/JanusJanvier2019-1.pdf>

[28] J.P.Petit, G. D'Agostini, N.Debergh : Physical and mathematical consistency of the Janus Cosmological Model (JCM). *Progress in Physics* 2019 Vol.15 issue 1 (jan. 1st, 2019).

## Annexe A

Ecrivons le système d'équations Janus sous la forme :

$$(1) \quad G_{\mu\nu}^{(+)} = R_{\mu\nu}^{(+)} - \frac{1}{2} R^{(+)} g_{\mu\nu}^{(+)} = \chi \left[ T_{\mu\nu}^{(+)} + \sqrt{\frac{g^{(-)}}{g^{(+)}}} \hat{T}_{\mu\nu}^{(-)} \right]$$

$$(2) \quad G_{\mu\nu}^{(-)} = R_{\mu\nu}^{(-)} - \frac{1}{2} R^{(-)} g_{\mu\nu}^{(-)} = -\chi \left[ \sqrt{\frac{g^{(+)}}{g^{(-)}}} \hat{T}_{\mu\nu}^{(+)} + T_{\mu\nu}^{(-)} \right]$$

Par construction :

$$(3) \quad \nabla_{(+)}^{\nu} G_{\mu\nu}^{(+)} = \nabla_{(-)}^{\nu} G_{\mu\nu}^{(-)} = 0$$

On a également, ce qui correspond aux relations de conservation :

$$(4) \quad \nabla_{(+)}^{\nu} T_{\mu\nu}^{(+)} = \nabla_{(-)}^{\nu} T_{\mu\nu}^{(-)} = 0$$

Il est donc nécessaire, pour que soit assurée la cohérence mathématique et physique de ce système que les termes d'interaction satisfassent également ces relations. Remarquons d'abord que l'équation d'Einstein, servant de colonne vertébrale à la relativité générale, ne fournit que deux types de solutions :

- Univers uniforme et isotrope, solution instationnaire : modèles de Friedman.
- Solutions stationnaires se référant, soit à des régions vides, soit à des masses assimilées à des volumes emplis d'un fluide incompressible de masse volumique constante.

Les conditions de Bianchi se résument, dans le premier cas à la conservation de l'énergie et de la masse. Dans le second cas on voit émerger, à l'intérieur des masses, la relation traduisant l'équilibre entre la force de gravité et la force de pression. Ceci s'analyse alors en considérant la métrique intérieure de Schwarzschild. Le problème avait ainsi été complètement traité par Karl Schwarzschild dans son second article de 1916 [6] où celui-ci est même allé jusqu'à expliciter la loi  $p(r)$ . Cette analyse fut par la suite reprise par Tolman [22], Oppenheimer et Volkoff [23] et les spécialistes connaissent alors cette relation sous sa forme différentielle, dite « équation d'état de Tolman-Oppenheimer-Volkoff » ou « équation TOV ». On trouve par exemple tout le détail d'un tel calcul dans la référence [22], au chapitre 14.

Si on passe maintenant au système des deux équations de champ couplées, quand on considère les solutions instationnaires, décrivant des milieux homogènes et isotropes et qu'on se contente des « phases de poussières », où les pressions  $p^{(+)}$  et  $p^{(-)}$  peuvent être négligées, un calcul très simple, en tous points analogue à ce qui se fait avec une seule espèce, en relativité générale, conduit à la relation de compatibilité suivante, traduisant une conservation généralisée de l'énergie :

$$(5) \quad \rho^{(+)} c^{(+2)} a^{(+3)} + \rho^{(-)} c^{(-2)} a^{(-3)} = \text{cst}$$

En stationnaire, la condition de Bianchi est évidemment satisfaite de manière triviale dans le vide. Le problème se pose quand on considère une région de l'espace où se trouve de la matière. Considérons par exemple une partie de l'espace correspondant à une sphère emplie d'une masse positive, assimilée à un fluide incompressible, de masse volumique constante. Le système s'écrit :

$$(6) \quad G_{\mu\nu}^{(+)} = R_{\mu\nu}^{(+)} - \frac{1}{2}R^{(+)}g_{\mu\nu}^{(+)} = \chi T_{\mu\nu}^{(+)}$$

$$(7) \quad G_{\mu\nu}^{(-)} = R_{\mu\nu}^{(-)} - \frac{1}{2}R^{(-)}g_{\mu\nu}^{(-)} = -\chi \sqrt{\frac{g^{(+)}}{g^{(-)}}} \hat{T}_{\mu\nu}^{(+)}$$

En reprenant la démarche du chapitre 14 de [22] on donne aux métriques les formes :

$$(8) \quad ds^{(+2)} = e^{\nu} dx^{\circ 2} - e^{\lambda} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

$$(9) \quad ds^{(-2)} = e^{\nu} dx^{\circ 2} - e^{\lambda} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

A partir desquelles nous pouvons calculer les composantes des tenseurs de Ricci  $R_{\mu}^{(+)\nu}$  et  $R_{\mu}^{(-)\nu}$ . Voir [24], chapitre 14. Le tenseur de la masse positive est :

$$(10) \quad T_{\mu}^{(+)\nu} = \begin{pmatrix} \rho^{(+)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{p^{(+)}}{c^{(+2)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p^{(+)}}{c^{(+2)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{p^{(+)}}{c^{(+2)}} \end{pmatrix}$$

Pour simplifier l'écriture on posera  $c^{(+)} = c$  ;  $p^{(+)} = p$  ;  $\rho^{(+)} = \rho$ . L'équation (6) conduit au système d'équations :

$$(11) \quad e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = \chi \rho$$

$$(12) \quad e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{\nu'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = -\chi \frac{p}{c^2}$$

$$(13) \quad e^{-\lambda} \left[ \frac{\nu''}{2} - \frac{\nu' \lambda'}{4} + \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\nu' - \lambda'}{2r} \right] = -\chi \frac{p}{c^2}$$

On sait qu'en posant alors :

$$(14) \quad e^{-\lambda} \equiv 1 - \frac{2m(r)}{r}$$

On obtient l'équation dite de Tolman[22] -Oppenheimer-Volkoff [23]

$$(15) \quad \frac{p'}{c^2} = - \frac{m + 4\pi G p r^3 / c^4}{r(r-2m)} \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right)$$

Passons à l'approximation Newtonienne :

$$(16) \quad p \ll \rho c^2 ; r \gg 2m$$

Cette relation s'identifie alors à la relation d'Euler :

$$(17) \quad p' = - \frac{\rho m_{(r)} c^2}{r^2} = - \frac{G M_{(r)} \rho}{r^2}$$

$M_{(r)}$  étant la masse contenue dans une sphère de rayon  $r$ . Cette relation exprime l'équilibre entre la force de pression et la force de gravité.

En passant à l'équation (7) et en nous plaçant encore dans l'approximation Newtonienne, pour qu'il y ait compatibilité entre les deux équations de champ nous devons retrouver la même relation. Donnons au tenseur  $\hat{T}_{\mu}^{(+)\nu}$  d'interaction la forme :

$$(18) \quad \hat{T}_{\mu}^{(+)\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p}{c^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p}{c^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p}{c^2} \end{pmatrix}$$

C'est le tenseur  $T_{\mu}^{(+)\nu}$ , avec inversion du signe des termes de pression. A ce stade, précisons que le choix de ce tenseur est totalement libre, sa seule contrainte étant de faire en sorte que les équations (6) et (7) soient compatibles, dans les conditions de l'approximation Newtonienne.

On a :

$$(19) \quad \frac{\sqrt{-g^{(+)}}}{\sqrt{-g^{(-)}}} = \frac{\sqrt{e^{\nu} e^{\lambda} r^4 \sin^2 \theta}}{\sqrt{e^{\bar{\nu}} e^{\bar{\lambda}} r^4 \sin^2 \theta}} = e^{\frac{\nu}{2}} e^{\frac{\lambda}{2}} e^{-\frac{\bar{\nu}}{2}} e^{-\frac{\bar{\lambda}}{2}} = K_{(r)}$$

En calculant les composantes du tenseur de Ricci  $R^{(-)\nu}_{\mu}$  on débouche alors sur le système d'équations.

$$(20) \quad e^{-\bar{\lambda}} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{\bar{v}'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = -\chi K \frac{p}{c^2}$$

$$(21) \quad e^{-\bar{\lambda}} \left[ \frac{\bar{v}''}{2} - \frac{\bar{v}'\bar{\lambda}'}{4} + \frac{\bar{v}'^2}{4} + \frac{\bar{v}' - \bar{\lambda}'}{2r} \right] = -\chi K \frac{p}{c^2}$$

$$(22) \quad -\frac{\bar{v}' + \bar{\lambda}'}{r} e^{-\bar{\lambda}} = -\chi K \left( \rho - \frac{p}{c^2} \right)$$

En faisant jouer l'approximation Newtonienne en amont de ce calcul nous pouvons faire  $K \approx 1$ . Comme dans ce qui précède on posera :

$$(23) \quad e^{-\bar{\lambda}} \equiv 1 - \frac{2\bar{m}}{r}$$

On poursuit le calcul de manière similaire à ce qui a été fait plus haut et on obtient le résultat :

$$(24) \quad \frac{p'}{c^2} = -\frac{m - 4\pi G p r^3 / c^4}{r(r + 2m)} \left( \rho - \frac{p}{c^2} \right)$$

Ceci diffère de l'équation (15). Mais ces deux équations se rejoignent lors qu'on applique l'approximation Newtonienne. Il y a donc compatibilité, modulo cette condition. On en conclura que le système des équations (1) + (2) ne se prête qu'à la description de l'univers que dans les conditions correspondant à l'approximation Newtonienne.

### Remarque :

La construction de la forme du tenseur d'interaction  $\widehat{T}_{\mu}^{(+)\nu}$  ne s'est pas faite en un jour. La présence du terme  $\frac{\sqrt{-g^{(+)}}}{\sqrt{-g^{(-)}}}$  provient de la construction Lagrangienne ([11], [25]) du système d'équations de champ couplées, qui fait intervenir les volumes

$$(25) \quad \sqrt{-g^{(+)}} d^4x \quad \text{et} \quad \sqrt{-g^{(-)}} d^4x$$

Dans une première approche, heuristique, on avait opté pour le choix

$$(26) \quad \widehat{T}_{\mu}^{(+)\nu} = T_{\mu}^{(+)\nu} \quad \widehat{T}_{\mu}^{(-)\nu} = T_{\mu}^{(-)\nu} \quad \text{et} \quad \widehat{T}_{\mu}^{(-)\nu}$$

Ceci ne posait pas de problème dans la construction de la solution instationnaire, où la question de l'équilibre entre les forces de pression et la force de gravité disparaît de manière triviale, du fait de l'hypothèse d'homogénéité et d'isotropie, ce qui permet une première construction de la solution instationnaire exacte [26]. Dans ce cas le système des équations de champ se réduisait à :

$$(27) \quad R_{\mu\nu}^{(+)} - \frac{1}{2} R^{(+)} g_{\mu\nu}^{(+)} = \chi \left[ T_{\mu\nu}^{(+)} + \frac{c^{(-)2} a^{(-)3}}{c^{(+2} a^{(+3)}} T_{\mu\nu}^{(-)} \right]$$

$$(28) \quad R_{\mu\nu}^{(-)} - \frac{1}{2} R^{(-)} g_{\mu\nu}^{(-)} = -\chi \left[ \frac{c^{(+2} a^{(+3)}}{c^{(-)2} a^{(-)3}} T_{\mu\nu}^{(+)} + T_{\mu\nu}^{(-)} \right]$$

A ce stade l'application de l'approximation Newtonienne fournissait au passage les lois d'interaction, introduites dans un premier temps heuristiquement, aux fins de satisfaire les principes d'action-réaction et d'équivalence. Il restait à modifier la forme des tenseurs d'interaction de manière à ce qu'ils satisfassent, dans des conditions non homogènes aux conditions de Bianchi, de manière à ce que la bi-géométrie, à l'intérieur des masses, ne conduise pas à une contradiction. En effet, dans l'hypothèse (26) l'analyse présentée plus haut conduit :

- A partir de la métrique des masses positives, à l'équation :

$$(29) \quad \frac{p'}{c^2} = -\frac{m + 4\pi G p r^3 / c^4}{r(r-2m)} \left( \rho + \frac{p}{c^2} \right)$$

- A partir de la métrique des masses négatives à, l'équation :

$$(30) \quad \frac{p'}{c^2} = +\frac{m - 4\pi G p r^3 / c^4}{r(r+2m)} \left( \rho - \frac{p}{c^2} \right)$$

Dans ce cas, l'approximation Newtonienne conduit aux équations, contradictoires

$$(31) \quad p' = -\frac{G M_{(r)} \rho}{r^2} \quad p' = +\frac{G M_{(r)} \rho}{r^2}$$

Une incohérence signalée en janvier 2019 par T.Damour dans un article [27] mis en place dans sa page de l'Institut des Hautes Etudes de Bures sur Yvette, sans savoir qu'au même moment le problème venait d'être résolu [28].

## Annexe B

## Calcul de la magnitude bolométrique

Nous avons :

$$(1) \quad (1 - 2q) = \frac{c^2}{a^2 H^2}$$

Par rapport au temps  $t$  utilisé dans l'expression de la métrique, la lumière émise par l'objet  $G_e$  au temps  $t_e$  est captée par l'observateur au temps  $t_0$  ( $t_e > t_0$ ) et la distance  $l$  parcourue par les photons ( $ds^2 = 0$ ) est liée au laps de temps  $t$  et au paramètre  $u$  par la relation :

$$(2) \quad l = \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{u_e}^{u_0} \frac{(1 + ch(2u))}{ch^2(u)} du = 2u_0 - 2u_e$$

Nous pouvons également lier la distance  $l$  au marqueur d'espace  $r$ , en utilisant la métrique FRLW avec  $k = -1$  :

$$(3) \quad l = \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1+r'^2}} = \text{argsh}(r)$$

Ce qui donne :

$$(4) \quad r = sh(2u_0 - 2u_e) = 2sh(u_0 - u_e)ch(u_0 - u_e)$$

Nous pouvons alors lier  $u_e$  et  $u_0$  aux quantités observables  $q_0, H_0, z$  et nous obtenons :

$$(5) \quad u = \text{argch} \left( \sqrt{\frac{a}{\alpha^2}} \right)$$

Nous obtenons la classique expression du redshift :

$$(6) \quad a_e = \frac{a_0}{1+z}$$

En utilisant la solution de Bonnor (équations (22),(23),(24) du corps de l'article) nous obtenons :

$$(7) \quad u_0 = \text{argch} \sqrt{\frac{2q_0 - 1}{2q_0}} = \text{argsh} \sqrt{-\frac{1}{2q_0}}$$

En combinant ces équations nous obtenons en outre :

$$(8) \quad u_e = \operatorname{argch} \sqrt{\frac{2q_0 - 1}{2q_0(1+z)}} = \operatorname{argsh} \sqrt{-\frac{1+2q_0z}{2q_0(1+z)}}$$

Après quelques manipulations, considérant en outre la contrainte  $1+2q_0z > 0$ , nous obtenons :

$$(9) \quad r = \frac{c}{a_0 H_0} \frac{q_0 z + (1-q_0) \left(1 - \sqrt{1+2q_0z}\right)}{q_0^2 (1+z)}$$

Une expression qui se rapproche de l'expression obtenue par Mattig, à partir de la classique solution de Friedman ou  $q_0 > 0$ . Ici nous avons au contraire  $q_0 < 0$ .

L'énergie totale, reçue par unité de surface et par unité de temps, mesurée par les bolomètres, correspond à la luminosité :

$$(10) \quad E_{bol} = \frac{L}{4\pi a_0^2 r^2 (1+z)^2}$$

L'expression de la magnitude bolométrique devient donc

$$(11) \quad m_{bol} = 5 \operatorname{Log}_{10} \left( \frac{q_0 z + (1-q_0) \left(1 - \sqrt{1+2q_0z}\right)}{q_0^2} \right) + cst$$

L'âge de l'univers est défini par :

$$(12) \quad T_0 = \frac{\alpha^2}{c} \left( \frac{\operatorname{sh}(2u_0)}{2} + u_0 \right)$$

Alors :

$$(13) \quad \frac{\alpha^2}{c} = -\frac{2q}{H} (1-2q)^{-\frac{3}{2}} = \frac{2q_0}{H_0} (1-2q_0)^{-\frac{3}{2}}$$

On obtient ainsi :

$$(14) \quad T_0 = -2q_0 (1-2q_0)^{-\frac{3}{2}} \left( \frac{\operatorname{sh}(2u_0)}{2} + u_0 \right) \frac{1}{H_0}$$

Et, finalement :

$$(15) \quad T_0 \cdot H_0 = 2q_0 (1-2q_0)^{-\frac{3}{2}} \left( \operatorname{argsh} \sqrt{\frac{-1}{2q_0}} - \frac{\sqrt{1-2q_0}}{2q_0} \right)$$

Ce qui correspond à la figure ci-après.

