



**HAL**  
open science

## Suivi d'attitude à base d'un modèle flou T-S d'un quadrirotor soumis aux saturations sur les entrées et perturbations externes

Issam Chekakta, Dalel Jabri, Djamel E C Belkhiat, Koffi M D Motchon,  
Kevin Guelton

### ► To cite this version:

Issam Chekakta, Dalel Jabri, Djamel E C Belkhiat, Koffi M D Motchon, Kevin Guelton. Suivi d'attitude à base d'un modèle flou T-S d'un quadrirotor soumis aux saturations sur les entrées et perturbations externes. Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications (LFA), 2022, Toulouse, France. pp.1-8. hal-03831465

**HAL Id: hal-03831465**

**<https://hal.science/hal-03831465v1>**

Submitted on 26 Oct 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Suivi d'attitude à base d'un modèle flou T-S d'un quadrirotor soumis aux saturations sur les entrées et perturbations externes

Issam Chekakta<sup>1</sup> Dalel Jabri<sup>1</sup> Djamel E.C. Belkhiat<sup>1</sup> Koffi M.D. Motchon<sup>2</sup> Kevin Guelton<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire DAC HR, Université Ferhat Abbas Sétif 1, Sétif Algérie.

<sup>2</sup> Université de Reims Champagne Ardenne, CReSTIC EA 3804, 51097 Reims, France.

{issam.chekakta, djamel.belkhiat, dalel.jabri}@univ-setif.dz

{koffi.motchon, kevin.guelton}@univ-reims.fr

## Résumé :

Cet article traite de la synthèse de contrôleurs pour le suivi d'attitude d'un drone quadrirotor soumis à des perturbations externes et dont les actionneurs sont saturés. Un modèle flou de type Takagi-Sugeno (T-S) incertain est proposé pour représenter, sur un compact de l'espace d'état, la dynamique non linéaire en attitude du drone. En utilisant une condition de secteur généralisé pour encapsuler les saturations et une fonction de Lyapunov quadratique, des conditions LMIs pour la synthèse de contrôleurs robustes, minimisant le transfert de la norme  $L_2$  entre les perturbations et les erreurs de suivi d'état, sont établies. En raison des saturations sur les entrées et du domaine de validité du modèle T-S, ces résultats ne sont valables que localement. Une procédure d'optimisation pour l'estimation du domaine d'attraction de suivi en boucle fermée est alors proposée. Des résultats de simulation illustrent l'efficacité de la méthodologie de synthèse de contrôleurs présentée dans cette étude.

## Mots-clés :

Drone quadrirotor, Commande en suivi d'attitude, Modèles flous, Takagi-Sugeno, Saturations, LMIs.

## 1 Introduction

Les quadrirotors sont des drones simples, légers, faciles à manoeuvrer et très populaires dans de nombreux secteurs tels que le domaine militaire ou civil, l'agriculture, le transport, etc. Dans ce contexte, de nombreux travaux ont été consacrés au développement d'outils mathématiques permettant à ces systèmes non linéaires de voler de façon autonome, e.g. [1, 26, 25, 7, 3, 13]. En raison de leur simplicité, des contrôleurs linéaires ont d'abord été utilisés pour ces systèmes. Par exemple, un contrôleur PID robuste a été proposé dans [14] pour stabiliser et suivre la trajectoire de référence tout en optimisant les gains du contrôleur par une technique de recherche coucou (Cuckoo Search). Aussi, dans [5], la synthèse LQR/LQG d'un contrôleur PID MIMO pour le suivi de trajec-

toire d'un quadrirotor a été proposée. Cependant, ces méthodes ne garantissent la stabilité d'un quadrirotor qu'autour d'un point stationnaire. Ainsi, en cas de manoeuvres agressives, des algorithmes de contrôles non linéaires apparaissent plus adaptés pour le suivi d'attitude.

Parmi les approches de contrôle non linéaire, la synthèse de lois de commandes basée sur des modèles flous de type Takagi-Sugeno (T-S) [21] a fait l'objet de plusieurs études récentes en raison des représentations polytopiques convexes des non linéarités que fournissent ces modèles, rendant ainsi possible l'extension au cas non linéaire des résultats existants pour la commande des systèmes linéaires, voir par exemple les références [4, 2, 6, 12, 17, 18, 22, 23]. Dans le cadre particulier des drones quadrirotors, l'approche T-S est utilisée dans [8] pour la stabilisation d'un système mécanique expérimental à trois degrés de liberté (quadrirotor fixe). De même, dans [25] et [19], des contrôleurs flous PDC (Compensation Parallèle Distribuée) ont été synthétisés pour stabilisation en attitude des quadrirotors. Le cas plus complexe des contrôleurs PDC  $\mathcal{D}$ -stabilisants a été traité dans [26] et [3].

Outre la question de leur stabilisation, la synthèse en suivi d'attitude des quadrirotors est d'un grand intérêt, surtout lorsque des manoeuvres agressives dans des environnements complexes sont à considérer. Ainsi, un modèle de référence peut être introduit dans le schéma de commande en boucle fermée de ces systèmes afin d'améliorer leurs performances de suivi malgré la complexité de la trajectoire [12, 18].

Aussi, afin de garantir les performances lors de telles manoeuvres, les phénomènes de saturation des actionneurs ne doivent pas être négligés [15, 24, 20, 11, 10]. Néanmoins, il convient de souligner que les résultats qui précèdent ne sont valides que localement, en raison de ces limitations en entrées, mais aussi en raison du domaine de validité des modèles flous T-S considérés. Toutefois, dans le contexte de la commande T-S saturée en suivi d'attitude des quadrirotors, aucuns travaux antérieurs ne propose l'estimation du domaine d'attraction.

Sur la base des constatations évoquées ci-dessus, cet article est consacré à la synthèse de lois commandes floues T-S pour le suivi d'attitude des drones quadrirotors soumis à des perturbations externes et dont les actionneurs sont saturés. Pour cela, un modèle T-S incertain de ces drones, inspiré des travaux de [1] et [3], est proposé dans la section 2. A partir de ce modèle, des conditions LMIs de synthèse de contrôleurs pour le suivi d'attitude ainsi qu'une procédure d'optimisation de l'estimation du domaine d'attraction sont fournies dans la section 3. Des résultats de simulation illustrant l'efficacité de la méthode de synthèse proposée sont finalement présentés dans la section 4.

*Notations.* Dans une matrice, le symbole  $(*)$  désigne une quantité transposée.  $\mathcal{I}_r = \{1, \dots, r\} \subset \mathbb{N}$ . La  $i^{ieme}$  ligne d'une matrice  $M$  est notée  $M_{(i)}$ . Si  $M$  est carrée,  $\mathcal{H}(M) = M + M^T$  et les sommes convexes de matrices  $M_i$  ( $i \in \mathcal{I}_r$ ), de dimensions appropriées, sont désignées par  $M_h = \sum_{i=1}^r h_i M_i$ , avec des scalaires  $h_i \geq 0$  tels que  $\sum_{i=1}^r h_i = 1$ .  $\Pi(2\pi f t) \in [-1, 1]$  désigne un signal carré de fréquence  $f$ .

## 2 Préliminaires

Considérons la dynamique en attitude d'un quadrirotor représenté par [1] :

$$\begin{cases} \ddot{\phi}(t) = \frac{J_r \dot{\theta}(t)}{I_{xx}} u_g(t) + I_{yz} \dot{\theta}(t) \dot{\psi}(t) + \frac{\text{sat}(u_1(t))}{I_{xx}} + \varphi_1(t) \\ \ddot{\theta}(t) = \frac{-J_r \dot{\phi}(t)}{I_{yy}} u_g(t) + I_{zxy} \dot{\phi}(t) \dot{\psi}(t) + \frac{\text{sat}(u_2(t))}{I_{yy}} + \varphi_2(t) \\ \dot{\psi}(t) = I_{xyz} \dot{\phi}(t) \dot{\theta}(t) + \frac{\text{sat}(u_3(t))}{I_{zz}} + \varphi_3(t) \end{cases} \quad (1)$$

TABLEAU 1 – Paramètres du quadrirotor [7]

| Symbole  | Valeur                 | Unité          | Description   |
|----------|------------------------|----------------|---|
| $l$      | 0.178                  | m              | Distance entre le centre de gravité et les axes des moteurs |
| $I_{xx}$ | $2.23 \cdot 10^{-3}$   | $kg \cdot m^2$ | Moment d'inertie pour l'axe des x                           |
| $I_{yy}$ | $2.98 \cdot 10^{-3}$   | $kg \cdot m^2$ | Moment d'inertie pour les axes y                            |
| $I_{zz}$ | $4.80 \cdot 10^{-3}$   | $kg \cdot m^2$ | Moment d'inertie pour les axes z                            |
| $I_r$    | $2.029 \cdot 10^{-5}$  | $kg \cdot m^2$ | Moment d'inertie de chaque rotor                            |
| $b$      | $1.7231 \cdot 10^{-6}$ | N              | Coefficient de poussée                                      |
| $d$      | $2.2169 \cdot 10^{-7}$ | $N \cdot m$    | Coefficient de traînée                                      |

avec les paramètres listés dans le tableau 1 et où  $\phi(t)$ ,  $\theta(t)$  et  $\psi(t)$  désignent respectivement les angles de roulis, de tangage et de lacet;  $u_g(t) = -w_1(t) + w_2(t) - w_3(t) + w_4(t)$  est l'effet gyroscopique dépendant des vitesses de rotation des moteurs  $w_j$  ( $j \in \mathcal{I}_4$ );  $\varphi_i \in L_2[0, +\infty)$  représentent les perturbations externes;  $I_{yzx} = \frac{I_{yy} - I_{zz}}{I_{xx}}$ ,  $I_{xyz} = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}}$  et  $I_{zxy} = \frac{I_{zz} - I_{xx}}{I_{yy}}$  sont les inerties; les couples d'entrée  $u_i(t)$  sont les commandes sujettes à saturation ( $|u_i(t)| \leq \bar{u}_i$ ) tq :

$$\text{sat}(u_i(t)) = \text{sign}(u_i(t)) \min\{|u_i(t)|, \bar{u}_i\} \quad (2)$$

En supposant la configuration X pour le quadrirotor, les commandes résultent de l'action de quatre forces motrices  $F_j = b\varpi_j^2$  (pour  $j \in \mathcal{I}_4$ ), où  $b$  est une constante de poussée aérodynamique et  $\varpi_j$  sont les commandes *pwm*. On a alors les relations suivantes [7] :

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{bl}{\sqrt{2}} & \frac{-bl}{\sqrt{2}} & \frac{-bl}{\sqrt{2}} & \frac{bl}{\sqrt{2}} \\ \frac{-bl}{\sqrt{2}} & \frac{-bl}{\sqrt{2}} & \frac{bl}{\sqrt{2}} & \frac{bl}{\sqrt{2}} \\ \frac{-d}{b} & \frac{d}{b} & \frac{-d}{b} & \frac{d}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1^2(t) \\ w_2^2(t) \\ w_3^2(t) \\ w_4^2(t) \end{bmatrix}, \quad (3a)$$

$$\varpi_j(t) = \frac{w_j(t) - \kappa_b}{\kappa_a}, \quad (3b)$$

où  $\kappa_a = 3, 71$  et  $\kappa_b = 138, 8 \text{ rad.s}^{-1}$  sont des paramètres liant les vitesses angulaires  $w_j(t)$  aux commandes *pwm*  $\varpi_j(t) \in [0, 100]$  (%) des moteurs,  $l$  est la longueur entre le centre de gravité du drone et les axes des moteurs, et  $d$  est le coefficient de traînée.

Soient  $x(t) = [\phi(t), \theta(t), \psi(t), \dot{\phi}(t), \dot{\theta}(t), \dot{\psi}(t)]^T$  le vecteur d'état du système et  $u(t) = [u_1(t), u_2(t), u_3(t)]^T$  son vecteur d'entrée. La dynamique non linéaire (1) peut être réécrite par l'équation d'état affine en la commande :

$$\dot{x}(t) = A(x(t), u_g(t))x(t) + B\text{sat}(u(t)) + W\varphi(t) \quad (4)$$

$$\text{avec } A(x, u_g) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J_r u_g}{I_{xx}} & I_{yzz} x_5 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{J_r u_g}{I_{yy}} & 0 & I_{zxy} x_4 \\ 0 & 0 & 0 & I_{xyz} x_5 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} \end{bmatrix}, W^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Un modèle T-S équivalent à (4) peut être obtenu sur un compact de l'espace d'état par une décomposition en secteurs non linéaires [22]. Cependant, dans (4), le terme  $u_g(t)$  est une fonction non linéaire des entrées qui doit être écartée des fonctions d'appartenance afin d'éviter les boucles algébriques lors de l'implémentation de la loi de commande. Comme dans [3], pour résoudre ce problème, en considérant que  $|u_g(t)| \leq \bar{u}_g$ , nous pouvons traiter ce terme non linéaire comme une incertitude structurelle. C'est-à-dire en réécrivant  $A(x(t), u_g(t))$  sous la forme :

$$A(x(t), u_g(t)) = \mathcal{A}(x(t)) + \Delta \mathcal{A}(u_g(t)) \quad (5)$$

$$\text{où } \Delta \mathcal{A}(u_g(t)) = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{J_r u_g(t)}{I_{xx}} & 0 & 0 \\ 0_{3 \times 3} & -\frac{J_r u_g(t)}{I_{yy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = H \delta(t) E_a$$

$$\text{avec } H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, E_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{\bar{u}_g J_r}{I_{yy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\bar{u}_g J_r}{I_{xx}} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\delta(t) = \frac{u_g(t)}{\max(u_g(t))} \text{ vérifie } \delta^2(t) \leq 1 \text{ et } A(x(t)) = A(x(t), u_g(t)) - \Delta \mathcal{A}(u_g(t)) = \mathcal{A}(x_4(t), x_5(t)).$$

Dans la suite, afin d'alléger les expressions mathématiques, lorsque cela ne présente pas d'ambiguïté, la dépendance au temps  $t$  sera omise pour les fonctions.

En supposant que  $|x_4| \leq \bar{x}_4$  et  $|x_5| \leq \bar{x}_5$  (définissant les parties finies du sous-espace  $\mathcal{D}_x \subset \mathbb{R}^6$  de l'espace d'état), puis en appliquant une décomposition en secteurs non linéaires [22] sur  $\mathcal{A}(x)$  avec le vecteur de prémisses  $z = [x_4; x_5]^T$ , nous obtenons le modèle T-S incertain suivant, strictement équivalent à (4) sur  $\mathcal{D}_x$ .

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^4 h_i(z) (\mathcal{A}_i + \Delta \mathcal{A}(u_g)) x + B \text{sat}(u) + W \varphi \quad (6)$$

avec les matrices  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}(-\bar{x}_4, -\bar{x}_5)$ ,  $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}(-\bar{x}_4, \bar{x}_5)$ ,  $\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}(\bar{x}_4, -\bar{x}_5)$ ,  $\mathcal{A}_4 = \mathcal{A}(\bar{x}_4, \bar{x}_5)$  et les fonctions d'appartenance  $h_i(z) \in [0, 1]$  satisfaisant la propriété  $\sum_{i=1}^4 h_i(z) = 1$  de somme convexe sont définies par :  $h_1(z) = (\bar{x}_4 - x_4)(\bar{x}_5 - x_5)/4\bar{x}_4\bar{x}_5$ ;  $h_2(z) = (\bar{x}_4 - x_4)(x_5 + \bar{x}_5)/4\bar{x}_4\bar{x}_5$ ;  $h_3(z) = (x_4 + \bar{x}_4)(\bar{x}_5 - x_5)/4\bar{x}_4\bar{x}_5$ ;  $h_4(z) = (x_4 + \bar{x}_4)(x_5 + \bar{x}_5)/4\bar{x}_4\bar{x}_5$ .

Considérons le schéma de contrôle en suivi de trajectoire représenté sur la figure 1 avec le modèle de référence décrit par :

$$\dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + B_r r(t) \quad (7)$$

où  $A_r \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  est une matrice Hurwitz,  $x_r(t) \in \mathbb{R}^6$  est le vecteur d'état de référence et  $r(t) \in \mathbb{R}^m$  ( $m \leq 6$ ) est la trajectoire désirée.

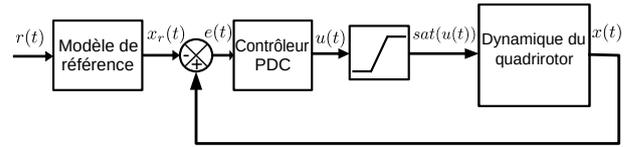


FIGURE 1 – Topologie de contrôle en suivi d'attitude du quadrirotor

Considérons la loi de commande PDC en suivi de trajectoire donnée par :

$$u(t) = \sum_{i=1}^4 h_i(z(t)) K_i (x(t) - x_r(t)) \quad (8)$$

En introduisant le vecteur d'état augmenté  $\tilde{x}(t) = [x^T(t) - x_r^T(t) \quad x_r^T(t)]^T$  et la fonction  $\Psi(u(t)) = \text{sat}(u(t)) - u(t)$ , la dynamique de la boucle fermée s'écrit :

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (\tilde{A}_h + \tilde{B} \tilde{K}_h) \tilde{x}(t) + \tilde{B} \Psi(u(t)) + \tilde{F} \omega(t) \quad (9)$$

$$\text{avec } \tilde{A}_h = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_h + \Delta \mathcal{A} & \mathcal{A}_h - A_r + \Delta \mathcal{A} \\ 0 & A_r \end{bmatrix}, \tilde{K}_h^T = \begin{bmatrix} K_h^T \\ 0 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \text{ and } \tilde{F} = \begin{bmatrix} W & -B_r \\ 0 & B_r \end{bmatrix}.$$

Notons que le domaine de validité du modèle T-S en boucle fermée (9), lié au vecteur d'état étendu  $\tilde{x}(t)$ , est donné par :

$$\mathcal{D}_{\tilde{x}} = \{\tilde{x} \in \mathbb{R}^{12} : |\mathcal{L}\tilde{x}(t)| \leq \mathcal{Q}\} \quad (10)$$



avec :

$$\Gamma_i = \begin{bmatrix} \Gamma_i^{11} & (*) & (*) & (*) & (*) \\ X_2(\mathcal{A}_i^T - A_r^T) & \mathcal{H}(A_r X_2) & (*) & (*) & (*) \\ E_a X_1 & 0 & -\beta I & (*) & (*) \\ 0 & E_a X_2 & 0 & -\alpha I & (*) \\ X_1 & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_i^{11} = \mathcal{H}(X_1 \mathcal{A}_i^T + Y_i^T B^T) + (\alpha + \beta) H H^T.$$

Dans ce cas, les matrices de gain du contrôleur PDC et les matrices de Lyapunov peuvent être déterminées par les changements de variables  $K_i = Y_i X_1^{-1}$  ( $\forall i \in \mathcal{I}_A$ ) et  $\bar{P} = \tilde{X}^{-1}$ . Ainsi, une estimation du domaine d'attraction  $\mathcal{D}_a$  de la dynamique du système en boucle fermée (9) est donnée par l'ensemble  $\mathcal{L}(1) = \{\tilde{x} : \tilde{x}^T \bar{P} \tilde{x} \leq 1\}$ , délimité par l'équipotentielle de Lyapunov définie par la surface  $\tilde{x}^T \bar{P} \tilde{x} = 1$ .

**Preuve 1.** Considérons la fonction de Lyapunov candidate

$$V(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}(t)^T \bar{P} \tilde{x}(t), \quad \bar{P} = \bar{P}^T > 0$$

En utilisant le lemme 1 pour traiter les contraintes de saturation des actionneurs, les conditions i et ii du problème de synthèse sont vérifiées si :

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{x}) + \tilde{x}^T \tilde{Q} \tilde{x} - \gamma^2 \omega^T \omega \\ - 2\Psi^T(u) \Upsilon_h(\Psi(u) - \mathcal{T}_h(x - x_r)) < 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} 2\tilde{x}^T \bar{P} (\tilde{A}_h + \tilde{B} \tilde{K}_h) \tilde{x} + \tilde{x}^T \tilde{Q} \tilde{x} + \tilde{x}^T \bar{P} \tilde{F} \omega + \omega^T \tilde{F}^T \bar{P} \tilde{x} \\ + \tilde{x}^T \bar{P} \tilde{B} \Psi(u) + \Psi(u)^T \tilde{B}^T \bar{P} \tilde{x} - \gamma^2 \omega^T \omega \\ - 2\Psi(u)^T \Upsilon_h(\Psi(u) - \mathcal{T}_h(x - x_r)) < 0, \end{aligned}$$

ou, avec  $\mathcal{T}_h^* = [\mathcal{T}_h \ 0]$  et  $\xi^T = [\tilde{x}^T \ \Psi(u)^T \ \omega^T]$  :

$$\xi^T \begin{bmatrix} \mathcal{H}(\bar{P} \tilde{A}_h + \bar{P} \tilde{B} \tilde{K}_h) + \tilde{Q} & (*) & (*) \\ \tilde{B}^T \bar{P} + \Upsilon_h \mathcal{T}_h^* & -2\Upsilon_h & (*) \\ \tilde{F}^T \bar{P} & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \xi < 0 \quad (16)$$

Soit  $\tilde{X} = \bar{P}^{-1}$ ,  $\tilde{\Upsilon}_h = \Upsilon_h^{-1}$  et  $\mathcal{N}_h = \mathcal{T}_h^* \tilde{X}$ . En multipliant (16) à gauche par  $\text{diag}(\tilde{X}, \tilde{\Upsilon}_h, I)$  et à droite par sa transposée, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}(\tilde{A}_h \tilde{X} + \tilde{B} \tilde{K}_h \tilde{X}) + \tilde{X} \tilde{Q} \tilde{X} & (*) & (*) \\ \tilde{\Upsilon}_h \tilde{B}^T + \mathcal{N}_h & -2\tilde{\Upsilon}_h & (*) \\ \tilde{F}^T & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (17)$$

En détaillant les matrices  $\tilde{A}_h$ ,  $\tilde{B}$ ,  $\tilde{K}_h$ ,  $\tilde{X}$  et  $\tilde{Q}$ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\tilde{A}_h \tilde{X} + \tilde{B} \tilde{K}_h \tilde{X}) + \tilde{X} \tilde{Q} \tilde{X} = \\ \begin{bmatrix} \mathcal{H}(\mathcal{A}_h X_1 + \Delta \mathcal{A} X_1 + B K_h X_1) + X_1 X_1 & (*) \\ X_2 (\mathcal{A}_h^T - A_r^T + \Delta \mathcal{A}^T) & \mathcal{H}(A_r X_2) \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Sachant que  $\Delta \mathcal{A} = H \delta E_a$  et  $\delta^2 \leq 1$ , en appliquant le Lemme 3, avec  $M = \alpha^{-1} I$  et  $N = \beta^{-1} I$  ( $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ ), (17) est satisfaite si :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{H}(\mathcal{A}_h X_1 + B K_h X_1) + \Omega_1 & (*) & (*) \\ X_2 (\mathcal{A}_h^T - A_r^T) & \Omega_2 & (*) \\ \tilde{\Upsilon}_h \tilde{B}^T + \mathcal{N}_h & -2\tilde{\Upsilon}_h & (*) \\ \tilde{F}^T & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

avec  $\Omega_1 = X_1 X_1 + (\alpha + \beta) H H^T + \beta^{-1} X_1 E_a^T E_a X_1$  et  $\Omega_2 = \mathcal{H}(A_r X_2) + \alpha^{-1} X_2 E_a^T E_a X_2$ .

Puis, en appliquant le complément de Schur sur (19), on obtient l'inégalité (15).

Dès lors, pour obtenir une estimation du domaine d'attraction  $\mathcal{D}_a$  de la dynamique en boucle fermée (9), notons tout d'abord que les conditions LMIs (13) et (14) garantissent, respectivement, les inclusions  $\mathcal{D}_a \subseteq \mathcal{D}_u$  et  $\mathcal{D}_a \subseteq \mathcal{D}_{\tilde{x}}$ . En effet, sans perte de généralité, considérons l'ensemble  $\mathcal{L}(1)$  défini, aux instant initiaux, par :

$$\mathcal{L}(1) = \{\tilde{x}(0) : \tilde{x}^T(0) \bar{P} \tilde{x}(0) \leq 1\} \quad (20)$$

En appliquant le complément de Schur sur (13), on obtient :

$$\tilde{X} - \frac{[Y_{i(s)} - \mathcal{N}_{i(s)} \ 0_{1 \times n}]^T [Y_{i(s)} - \mathcal{N}_{i(s)} \ 0_{1 \times n}]}{\bar{u}_{(s)}^2} \geq 0$$

Cette inégalité, multipliée par  $\tilde{x}^T(0) \tilde{X}^{-T}$  et sa transposée, devient :

$$\begin{aligned} \tilde{x}^T(0) \frac{[K_{i(s)} - \mathcal{T}_{i(s)} \ 0_{1 \times n}]^T [K_{i(s)} - \mathcal{T}_{i(s)} \ 0_{1 \times n}]}{\bar{u}_{(s)}^2} \tilde{x}(0) \\ - \tilde{x}^T(0) \bar{P} \tilde{x}(0) \leq 0. \end{aligned}$$

Il en découle que  $|[K_{i(s)} - \mathcal{T}_{i(s)} \ 0_{1 \times n}] \tilde{x}(0)| \leq \bar{u}_{(s)}^2$ , et par conséquent,  $\tilde{x}(0) \in \mathcal{L}(1) \subseteq \mathcal{D}_u$ .

De même, en utilisant la condition LMIs (14) et le complément de Schur, on obtient l'inégalité :

$$\frac{\tilde{X}^T \mathcal{Q}_{(s)}^T \tilde{\mathcal{L}}_{(s)} \tilde{X}}{\mathcal{Q}_{(s)}^2} - \tilde{X} \leq 0 \quad (21)$$

Après congruence par  $\tilde{X}^{-1}\tilde{x}(0)$ , on obtient  $|\mathcal{L}_{(s)}\tilde{x}(0)| \leq \mathcal{Q}_{(s)}$ , donc  $\tilde{x}(0) \in \mathcal{L}(1) \subseteq \mathcal{D}_{\tilde{x}}$ .

Enfin, afin de maximiser  $\mathcal{L}(1)$ , une procédure simple consiste à minimiser la trace de  $\bar{P}$ . Cependant, notre objectif étant d'élargir le domaine d'attraction par rapport à l'erreur de suivi  $e(t)$ , nous pouvons restreindre cette procédure à la maximisation de la trace de  $X_1$ .  $\square$

**Remarque 1.** Afin de résoudre les conditions du Théorème 1, le problème d'optimisation (12) est hiérarchisé tel que  $\gamma > 0$  est minimisé par recherche linéaire avec, à chaque étape de celle-ci, la maximisation de la trace de  $X_1$ .

## 4 Résultats de la simulation

Afin d'illustrer les résultats de synthèse proposés dans la section précédente, considérons un modèle de référence (7) décrit par les matrices  $A_r = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & I_3 \\ -6I_3 & -4I_3 \end{bmatrix}$  et  $B_r = \begin{bmatrix} 0.5I_3 \\ 6I_3 \end{bmatrix}$ . Les limites de saturation des actionneurs sont calculées à partir de (3), en supposant que  $\varpi_j(t) \in [0, 100]$  (%),  $j \in \mathcal{I}_4$ , i.e.  $\bar{u}_1 = 0.102$ ,  $\bar{u}_2 = 0.102$ ,  $\bar{u}_3 = 0.104$  et  $\bar{u}_g = 4\varpi_{max}\kappa_a + \kappa_b = 1615.8$ . Nous supposons aussi que  $\mathcal{D}_x$  (voir (10)) est défini par  $\bar{x}_4 = \bar{x}_5 = \pi$ . Les conditions LMIs du Théorème 1 sont résolues en utilisant Matlab avec la toolbox Yalmip [9] et le solveur SeDuMi. Ainsi sont obtenus,  $\gamma = 0.71$  (taux minimum du transfert  $L_2$ , cf. (11)), les matrices  $K_i$  de gain du contrôleur (8) et  $\bar{P} = \text{diag}(\bar{P}_1, \bar{P}_2)$  de la fonction de Lyapunov :

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.8636 & -0.0006 & -0.0023 & -0.7271 & -0.0005 & -0.0017 \\ 0.0075 & -1.1589 & 0.0049 & 0.0066 & -0.9828 & 0.0035 \\ 0.0496 & -0.0833 & -0.3373 & 0.0436 & -0.0739 & -0.2400 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -0.8636 & 0.0006 & 0.0023 & -0.7271 & 0.0005 & 0.0017 \\ -0.0075 & -1.1589 & 0.0049 & -0.0066 & -0.9828 & 0.0035 \\ -0.0496 & -0.0833 & -0.3373 & -0.0436 & -0.0739 & -0.2400 \end{bmatrix},$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -0.8636 & 0.0006 & -0.0023 & -0.7271 & 0.0005 & -0.0017 \\ -0.0075 & -1.1589 & -0.0049 & -0.0066 & -0.9828 & -0.0035 \\ 0.0496 & 0.0833 & -0.3373 & 0.0436 & 0.0739 & -0.2400 \end{bmatrix},$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} -0.8636 & -0.0006 & 0.0023 & -0.7271 & -0.0005 & 0.0017 \\ 0.0075 & -1.1589 & -0.0049 & 0.0066 & -0.9828 & -0.0035 \\ -0.0496 & 0.0833 & -0.3373 & -0.0436 & 0.0739 & -0.2400 \end{bmatrix},$$

$$\bar{P}_1 = \begin{bmatrix} 2.1900 & -0.0000 & 0.0000 & 0.2063 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & 2.1883 & 0.0000 & 0.0000 & 0.2074 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 1.5130 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0175 \\ 0.2063 & 0.0000 & -0.0000 & 0.1822 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.2074 & -0.0000 & 0.0000 & 0.1842 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0175 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0118 \end{bmatrix},$$

$$\bar{P}_2 = \begin{bmatrix} 0.5701 & -0.0000 & -0.0000 & 0.0062 & 0.0000 & -0.0000 \\ -0.0000 & 0.5690 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0063 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 0.0088 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0041 \\ 0.0062 & 0.0000 & 0.0000 & 0.1017 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0063 & 0.0000 & 0.0000 & 0.1017 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.0000 & 0.0041 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0044 \end{bmatrix}.$$

Les figures 2-4 illustrent l'efficacité de la méthode de commande en suivi d'attitude proposée sous les contraintes de saturation des actionneurs. Pour cette simulation, on considère les conditions initiales  $x(0) = \frac{\pi}{3}[-1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$  et  $x_r(0) = 0_{6 \times 1}$ . Les signaux de perturbation et de référence considérés sont respectivement,  $\varphi(t) = \sin(\pi t + 0,5)$  et  $r(t) = [1.4 \sin(0.6\pi t) \ 1.5 \sin(0.28\pi t) \ 0.8 \Pi(0.2\pi t)]^T$ , lorsque  $t \in [0, 10s]$  et 0 sinon.

La figure 2 montre les positions angulaires de roulis  $\phi(t) = x_1(t)$ , de tangage  $\theta(t) = x_2(t)$  et de lacet  $\psi(t) = x_3(t)$  du quadrirotor par rapport à leurs signaux de référence respectifs  $x_{1,r}(t)$ ,  $x_{2,r}(t)$  et  $x_{3,r}(t)$ . La figure 3 montre les vitesses angulaires  $x_4(t)$ ,  $x_5(t)$ ,  $x_6(t)$  du quadrirotor qui suivent correctement les signaux de référence  $x_{4,r}(t)$ ,  $x_{5,r}(t)$  et  $x_{6,r}(t)$ . Les commandes  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  et  $u_3(t)$  du quadrirotor sont représentées sur la figure 4, qui présentent une saturation pendant le régime transitoire. Ces figures montrent que le contrôleur PDC en suivi d'attitude proposé pour le modèle considéré du quadrirotor, dont les états suivent ceux du modèle de référence, fournit de bons résultats en présence de perturbations non nulles et de contraintes de saturation des actionneurs, puis se stabilise en l'absence de sollicitations externes ( $r(t) = 0$  et  $\omega(t) = 0$ ).

Enfin, rappelons que les résultats établis ne sont valables que localement en raison des contraintes sur les commandes. Comme le système est d'ordre douze, il n'est pas possible de donner une représentation complète du domaine  $\mathcal{D}_a = \mathcal{L}(1)$  d'attraction sur une figure 3D. Cependant, pour illustrer ce résultat d'estimation, les projections de  $\mathcal{L}(1)$  sur les plans d'intérêts  $(x_4, x_5)$ ,  $(x_{4,r}, x_{5,r})$  et  $(e_4, e_5)$  sont représentées sur la figure 5. De plus, sur cette figure, la courbe 3D représentant  $u_s^2 \in [0, 0.012]$

en fonction des erreurs de suivi  $e_4$  et  $e_5$  donne une illustration du domaine  $\mathcal{D}_u$  des contraintes sur les entrées. Il est intéressant de noter que les trajectoires de l'état étendu (tracées en lignes bleues) restent bien à l'intérieur de  $\mathcal{L}(1)$  comme prévu. Ceci confirme également l'efficacité des résultats établis sur l'estimation du domaine d'attraction du système en boucle fermée.

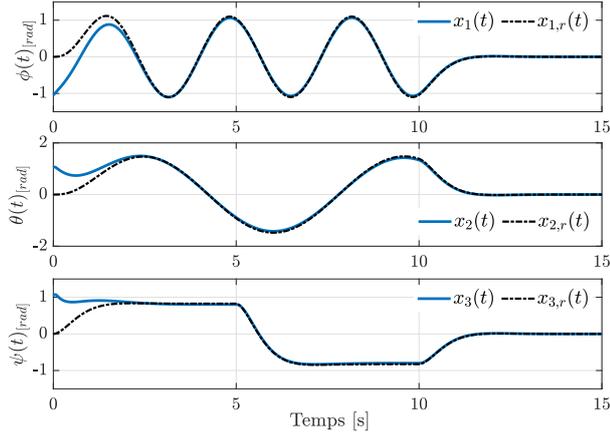


FIGURE 2 – Signaux de référence (lignes noires en pointillés) et positions angulaires du quadrirotor (lignes bleues).

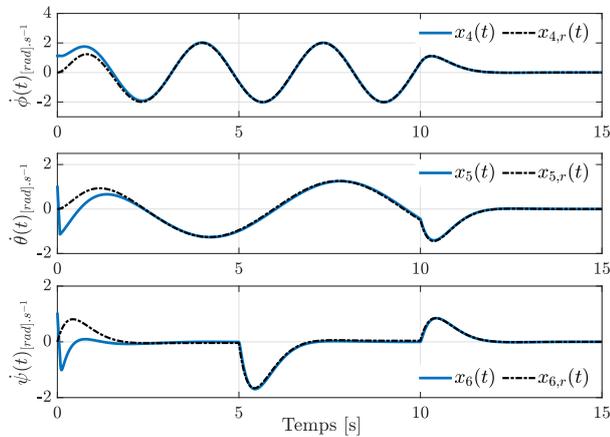


FIGURE 3 – Signaux de référence (lignes noires en pointillés) et vitesses angulaires du quadrirotor (lignes bleues).

## 5 Conclusion

Le problème de synthèse de lois de commandes pour le suivi d'attitude d'un drone quadrirotor, dont les actionneurs sont soumis à des saturations, a été étudié dans cet article. Le modèle

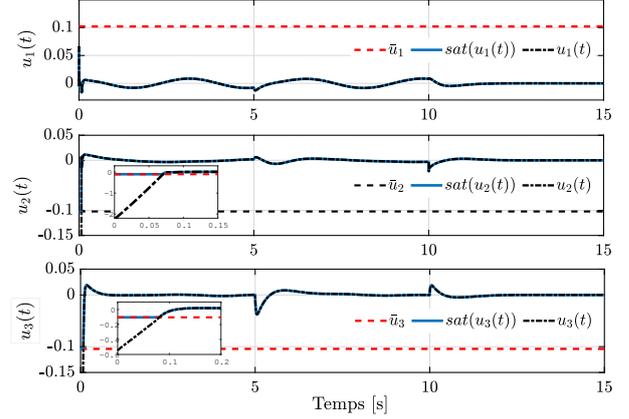


FIGURE 4 – Signaux de commande  $u(t)$  ( $Nm$ ),  $\text{sat}(u(t))$  (lignes bleues) et limites de saturation  $\bar{u}$  (lignes rouges en pointillés)

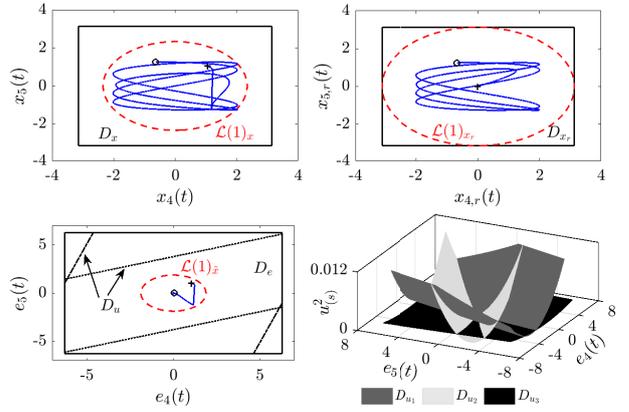


FIGURE 5 – Projection de  $\mathcal{D}_a^* = \mathcal{L}(1)$  (ellipses en pointillés rouges),  $\mathcal{D}_x$ ,  $\mathcal{D}_{\tilde{x}} = \mathcal{D}_e \cup \mathcal{D}_{x_r}$  (lignes extérieures noires) et  $\mathcal{D}_u$  (lignes noires en pointillés) et trajectoires d'état en boucle fermée dans  $\mathcal{L}(1)$  (lignes bleues).

de la dynamique en attitude du quadrirotor a été décrit par un modèle T-S incertain et les contraintes de saturation ont été traitées en utilisant une condition de secteurs généralisées. Des conditions LMIs ont ensuite été établies pour la synthèse d'un contrôleur PDC permettant le suivi de trajectoires de références. Celui-ci satisfait également la minimisation du transfert entre les perturbations et l'erreur de suivi, i.e. de leurs normes  $L_2$ . Une procédure d'estimation du domaine d'attraction de la dynamique du système en boucle fermée a également été proposée. Des résultats de simulation ont montré

l'efficacité de l'approche proposée. Dans nos futurs travaux, pour une poursuite de trajectoires agressives du quadricoptère dans des environnements contraints, l'extension de l'approche proposée, intégrant également le suivi de trajectoires en position, est envisagée.

## Références

- [1] S. Bouabdallah. Design and control of quadrotors with application to autonomous flying. (EPFL, Lausanne, Switzerland, 2007)
- [2] I. Chekakta, D.E.C. Belkhiat, K. Guelton, D. Jabri, N. Manamanni. Asynchronous observer design for switched T–S systems with unmeasurable premises and switching mismatches. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 104 : 104371, 2021.
- [3] A. Cherifi, K. Guelton, L. Arcese. Uncertain T–S model-based robust controller design with D-stability constraints—A simulation study of quadrotor attitude stabilization. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 67 : 419-429, 2018.
- [4] A. Cherifi, K. Guelton, L. Arcese, V.J.S. Leite. Global non-quadratic D-stabilization of Takagi–Sugeno systems with piecewise continuous membership functions. *Applied Mathematics and Computation*, 351 : 23-36, 2019.
- [5] R. Guardoño, M.J. López, V.M. Sánchez. MIMO PID controller tuning method for quadrotor based on LQR/LQG theory. *Robotics*, 8(2), 36, 2019.
- [6] D. Jabri, K. Guelton, D.E. Belkhiat, N. Manamanni. Decentralized static output tracking control of interconnected and disturbed Takagi–Sugeno systems. *International Journal Of Applied Mathematics and Computer Science*, 30 : 225-238, 2020.
- [7] N. Jurgens. Identification and control implementation of an AR. Drone 2.0. (Eindhoven University of Technology, Netherlands, 2017)
- [8] Z. Lendek, A. Sala, R. García, R. Sanchis. Experimental application of Takagi-Sugeno observers and controllers in a nonlinear electromechanical system. *Control Engineering and Applied Informatics*, 15 : 3-14, 2013.
- [9] J. Lofberg. YALMIP : A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. *2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation* : 284-289, 2004.
- [10] A.N.D. Lopes, K. Guelton, L. Arcese, V.J.S. Leite. Local sampled-data controller design for TS fuzzy systems with saturated actuators. *IEEE Control Systems Letters*, 5 : 1169-1174, 2021.
- [11] A.N.D. Lopes, V.J.S. Leite, L.F.P. Silva, K. Guelton. Anti-windup TS fuzzy PI-like control for discrete-time nonlinear systems with saturated actuators. *International Journal of Fuzzy Systems*, 22 : 46-61, 2020.
- [12] B. Mansouri, N. Manamanni, K. Guelton, A. Kruszewski, T.M. Guerra. Output feedback LMI tracking control conditions with  $H_\infty$  criterion for uncertain and disturbed T-S models. *Information Sciences*, 179 : 446-457, 2009.
- [13] K. Maya-Gress, J. Álvarez, R. Villafuerte-Segura, H. Romero-Trejo, M. Bernal. A Novel Family of Exact Nonlinear Cascade Control Design Solutions for a Class of UAV Systems. *Mathematical Problems in Engineering*, 2021 : Article ID 2622571, 15 pages, 2021.
- [14] Miranda-Colorado, R. & Aguilar, L. Robust PID control of quadrotors with power reduction analysis. *ISA Transactions*, 98 : 47-62, 2020.
- [15] A.T. Nguyen, C. Sentouh, J.C. Popieul. Takagi-sugeno model-based steering control for autonomous vehicles with actuator saturation. *IFAC-PapersOnLine*, 49 : 206-211, 2016.
- [16] J.O. Pedro, P.J. Kala. Nonlinear control of quadrotor UAV using Takagi-Sugeno fuzzy logic technique. *10th Asian Control Conference* : 1-6, 2015.
- [17] H. Schulte, K. Guelton. Descriptor modelling towards control of a two link pneumatic robot manipulator : A T–S multimodel approach. *Nonlinear Analysis : Hybrid Systems*, 3 : 124-132, 2009.
- [18] L. Seddiki, K. Guelton, J. Zaytoon. Concept and Takagi–Sugeno descriptor tracking controller design of a closed muscular chain lower-limb rehabilitation device. *IET Control Theory & Applications*, 4 : 1407-1420, 2010.
- [19] S. Sheikhpour, S.B. Shouraki. A model-based fuzzy controller using the parallel distributed compensation method for quadrotor attitude stabilization. *21st Iranian Conference on Electrical Engineering* : 1-6, 2013.
- [20] L.P. Silva, L.J.S. Leite, E.B. Castelan, M. Klug, K. Guelton. Local stabilization of nonlinear discrete-time systems with time-varying delay in the states and saturating actuators. *Information Sciences* 518 : 272-285, 2020.
- [21] T. Takagi, M. Sugeno. Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, SMC-15 : 116-132, 1985.
- [22] K. Tanaka, H.O. Wang. Fuzzy control systems design and analysis : A linear matrix inequality approach. John Wiley & Sons, Inc., 2001.
- [23] T. Taniguchi, K. Tanaka, H.O. Wang. Fuzzy descriptor systems and nonlinear model following control. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8 : 442-452, 2000.
- [24] S. Tarbouriech, G. Garcia, J.M.G. Silva Jr, I. Queinnec. Stability and stabilization of linear systems with saturating actuators. Springer-Verlag, 2011.
- [25] F. Torres, A. Rabhi, D. Lara, G. Romero, C. Pégard. Fuzzy State Feedback for Attitude Stabilization of Quadrotor. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 13 : 1-10, 2016.
- [26] F. Yacef. Takagi-Sugeno Model for Quadrotor Modelling and Control using Nonlinear State Feedback Controller. *International Journal of Control Theory and Computer Modeling*, 2 : 9-24, 2012.
- [27] K. Zhou, P.P. Khargonekar. Robust stabilization of linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty. *Systems Control Letters*, 10 : 17-20, 1988.