



HAL
open science

Drainage dans un capillaire : une description complète approchée de l'interface

Didier Lasseux

► **To cite this version:**

Didier Lasseux. Drainage dans un capillaire : une description complète approchée de l'interface. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série IIb, Mécanique, physique, astronomie, 1995, Mécanique des fluides, II (321), pp.125-131. hal-03827874

HAL Id: hal-03827874

<https://hal.science/hal-03827874v1>

Submitted on 24 Oct 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Mécanique des fluides/*Fluid Mechanics*

Drainage dans un capillaire : une description complète approchée de l'interface

Didier LASSEUX

Résumé – Le problème du drainage gaz-liquide dans un capillaire vertical est résolu de manière semi-analytique approchée et l'interface est obtenue dans son intégralité. En terme d'épaisseur de film, la solution complète et précise celle, classique, de type Landau. Obtenue sur un tube cylindrique à section droite circulaire et en cavité Hele-Shaw, elle coïncide, dans ce dernier cas, avec des résultats numériques de résolution complète de l'écoulement à deux phases ainsi qu'avec des résultats expérimentaux.

Drainage in a capillary: a complete approximated description of the interface

Abstract – A semi-analytical and approximated solution to the gas-liquid drainage problem in vertical capillaries is presented. It provides a precise description of the entire free-boundary and improves Landau's classical solution in terms of film thickness on cylindrical capillary tubes of circular cross-section and Hele-Shaw cells. For this last configuration, the present results are successfully compared with experimental results and data obtained from a direct numerical computation of the two-phase free-surface flow problem.

Abridged English Version – The gas-liquid drainage within a vertical capillary tube of circular cross-section of radius r or between two plane parallel plates distant from $2r$ (Hele-Shaw cell) is characterized by a receding meniscus which leaves a wetting liquid film behind the interface. The objective is to propose a semi-analytical solution providing the complete interface in the two above-mentioned configurations. The present results are compared to experimental data and to those deduced from Landau's approach in terms of film thickness (Landau, 1942; Park, 1984; Lasseux, 1990). They are also compared with numerical data obtained earlier (Lasseux, 1992).

A liquid of density ρ , dynamic viscosity μ , and interfacial tension γ with a gas which is supposed to remain at a constant pressure, flows under a steady-state Stokes regime characterized by a (constant) velocity, V , on the axial point of the interface. Far upstream, a film is left and is assumed to have a constant thickness, e_0 , with no capillary pressure gradient (film region) (hypothesis H1). The liquid flow is supposed to be one-dimensional, vertical, downward (H2). It depends only on the capillary number, Ca , ratio of viscous to capillary forces and the Bond number, Bd , ratio of gravity to capillary forces, respectively defined by $\mu V/\gamma$ and $\rho g r^2/\gamma$.

Assuming that the meniscus is identical to the static one in the corresponding capillary (H3), Landau's solution is developed as follows. First, the flow rate in the intermediate region, between the (static) meniscus and the film region, is matched to that in the film. Provided Ca , $\rho g e_0^2/\mu V$, e/r , and e_0/r are small compared to unity (H4), this leads, for the two configurations under study, to differential equation (1) for the liquid layer thickness e at height z , e tending to e_0 , e_z (i.e. $\partial e/\partial z$) and e_{zz} to zero as z tends to infinity. Secondly, the static meniscus solution is matched, at its solid-liquid-gas contact-point, with the intermediate region by satisfying the capillary pressure (the interface curvature) continuity. If the liquid perfectly wets the solid, $e_z \approx 0$ at the solid-liquid-gas contact-point of the static meniscus (triple point) (H5), and the matching can be performed on e_{zz} . Assuming finally that $e/e_0 \gg 1$ in the intermediate region near the meniscus (H6), and integrating (1) in the limit of infinite values of e , yields the classical film thickness model (2) where α , represented versus Bd in figure 1,

Note présentée par Michel COMBARNOUS.

is $1.338/(\lambda \text{Bd})$ in the Hele-Shaw case and $1.338/(\lambda \text{Bd} - 1)$ in the tube case, λ being the triple point height above the outside free surface in the equilibrium state. For sufficiently small capillary numbers, this model has been confirmed by experimental and numerical data (Quéré, 1989; Lasseux, 1991, 1992; *see also fig. 2a*). However, it can be noted that: (i) the use of a limit for infinite values of e is questionable since, first, e is limited by r and second, e_z has no finite value when (1) is integrated, which is contradictory with H5; (ii) gravity is introduced with the (static) meniscus only; (iii) the complete interface profile cannot be obtained; (iv) for $\text{Ca} > 0.01$, (2) is no longer valid. An asymptotic value of about $0.35r$ is obtained on e_0 for large enough Ca values (Reinelt, 1985; Lasseux, 1990).

The semi-analytical solution presented here makes use of hypotheses H1 and H2 only. First, flow rates Q_1 and Q_2 [equations (3), (4) in the Hele-Shaw case and (5), (6) in the tube case] are expressed in the film region and behind the rest of the interface respectively. Secondly, differential equations (7) in the Hele-Shaw case and (8) in the tube case are obtained from flow rate continuity. In equations (3) to (8) (*and only in these equations*) e , e_0 and z designate dimensionless quantities e/r , e_0/r and z/r while u represents e_z^2 with the same notations. Boundary conditions are: u and u_e tend to zero as e tends to e_0 . These equations are supposed to describe the entire interface in the corresponding capillary (H7). They are integrated between e_0 and r , and e_0 is sought iteratively to satisfy the symmetry condition on the capillary axis: u tends to infinity as e tends to r . Thus, one obtains e_0 and the complete interface since, for each value of e corresponds a value of z given by (9) where z_0 is arbitrary.

Film thickness results obtained from (7) and (8) for $\text{Bd} = 1.2 \times 10^{-4}$, $\text{Bd} = 1.03$ (Hele-Shaw) and $\text{Bd} = 5$ (tube) are represented versus Ca in figures 2a and 2b along with the corresponding relationships derived from (2): $e_0/r \approx 1.338 \text{Ca}^{2/3}$ ($\text{Bd} = 1.2 \times 10^{-4}$), $e_0/r \approx 0.810 \text{Ca}^{2/3}$ ($\text{Bd} = 1.03$) in the Hele-Shaw case and $e_0/r \approx 0.448 \text{Ca}^{2/3}$ ($\text{Bd} = 5$) in the tube case. For capillary numbers small enough, both approaches are identical. They correspond to experimental data obtained elsewhere (Lasseux, 1990) and reported in figure 2a. For $\text{Ca} > 0.01$, semi-analytical film-thicknesses are significantly smaller (in this range, Landau's approach overestimates e_0). From 0.3% at $\text{Ca} = 10^{-5}$, the relative difference increases (according to a power law) to 30% for $\text{Bd} = 1.2 \times 10^{-4}$, 15% for $\text{Bd} = 1.03$ and 10% for $\text{Bd} = 5$ when $\text{Ca} = 0.05$.

Direct numerical simulations of the free boundary problem (Lasseux, 1992), were performed in the Hele-Shaw configuration. Starting from an initial free surface that corresponds to the static meniscus, the Stokes problem was solved and the interface was updated at each time step using a boundary integral element method. Film-thickness data obtained from these simulations are also represented in figure 2a. They are in good agreement with the present results since the relative difference between both approaches is less than 2% for $\text{Ca} < 0.1$. This agreement is confirmed by the comparison, illustrated in figure 3, of interface profiles obtained numerically and from integration of (7) for $\text{Ca} = 6.8 \times 10^{-4}$ and $\text{Bd} = 1.2 \times 10^{-4}$. Moreover, the curvature, C , given by $u_e/2(1+u)^{3/2}$ in the semi-analytical approach, is also perfectly consistent with the numerical result, as shown in figure 4. The last two points validate hypothesis H7.

The solution to the gas-liquid drainage in the two configurations studied here allows the following conclusions: questionable hypotheses used to derive Landau's film-thickness model are avoided; an approximated solution to the complete interface is available; film thicknesses are compatible with experimental results; comparison of film-thickness results, interface profiles and curvatures in Hele-Shaw cells obtained here and from direct numerical simulations shows that these two approaches are in very good agreement; the present solution seems to be valid for $\text{Ca} \leq 0.1$. It is numerically simpler than a direct numerical simulation of the two-phase free-boundary flow.

1. INTRODUCTION. – L'interface qui sépare un liquide mouillant d'un gaz lors du drainage dans un capillaire vertical est caractérisée par un film sur la paroi solide en amont connecté à un ménisque récessif. L'objectif de ce travail est de proposer une technique de résolution semi-analytique approchée de l'écoulement donnant une solution complète sur la forme de l'interface dans deux configurations : entre deux parois planes parallèles distantes de $2r$ (cellule de Hele-Shaw) et dans un tube cylindrique de section droite circulaire de rayon r . Les résultats sont confrontés, d'une part en terme d'épaisseur de film, à ceux obtenus à la fois expérimentalement et par la technique classique de Landau (Landau, 1942; Park, 1984; Lasseux, 1990), et d'autre part à des résultats de simulations numériques directes du problème de l'écoulement à deux phases (Lasseux, 1992).

Un liquide mouillant, de masse volumique ρ , de viscosité dynamique μ , et de tension interfaciale γ avec le gaz supposé à pression constante, s'écoule lentement dans le capillaire, en régime permanent de Stokes, avec une vitesse caractéristique constante, V ; V est la vitesse du point axial de l'interface. Trois types de forces contrôlent le processus : les forces de viscosité, épaississantes pour le film, les forces de gravité et les forces capillaires, toutes deux aminçissantes ; leurs intensités sont comparées grâce à deux nombres sans dimension : le nombre capillaire, $Ca = \mu V / \gamma$, rapport des forces capillaires aux forces visqueuses et le nombre de Bond, $Bd = \rho g r^2 / \gamma$, rapport des forces de gravité aux forces capillaires. On suppose que l'écoulement du liquide est unidirectionnel vertical descendant (hypothèse H1) et que le film, à l'infini amont, a une épaisseur limite constante e_0 (H2) caractérisé par un gradient de pression capillaire nul.

Solution classique de type Landau. – Proposée par Landau (1942) et étendue au cas des nombres de Bond non nuls (Lasseux, 1990), elle suppose que le ménisque, dominé par les forces capillaires et de gravité, reste identique au ménisque statique (H3). Compte tenu de H2 ceci justifie l'existence d'une zone de transition où les trois types de forces sont d'intensité comparable. La mise en place de la solution a lieu en deux étapes :

I) l'écriture de la continuité du débit de liquide, entre les zones du film et de transition, produit une équation différentielle qui définit l'interface (repérée par l'épaisseur, e , de la couche liquide sur la paroi à la cote, z , verticale ascendante) de manière approchée en dehors du ménisque. Moyennant l'hypothèse que Ca , $\rho g e_0^2 / \mu V$, e/r et e_0/r restent petits devant l'unité (H4), cette équation s'écrit, pour les deux configurations étudiées ici :

$$(1) \quad e_{zzz} = -3 Ca (e - e_0) / e^3$$

e tendant vers e_0 , e_z (i.e. $\partial e / \partial z$) et e_{zz} tendant vers 0 quand z tend vers l'infini ;

II) conformément à H3, le ménisque en aval reste identique au ménisque statique, fonction de Bd , dans le capillaire correspondant. La zone de transition est donc raccordée au point de contact solide-liquide-gaz (point triple) du ménisque solution de l'équilibre capillaro-gravitaire en satisfaisant la continuité de la pression capillaire, i.e. de la courbure de l'interface. Si on limite l'étude aux cas des liquides parfaitement mouillants [dans ce cas, $e_z \approx 0$ au point triple du ménisque statique (H5)], il est équivalent de réaliser le raccordement sur e_{zz} . Moyennant l'hypothèse supplémentaire que $e/e_0 \gg 1$ dans la zone de transition à l'approche du ménisque (H6), et compte tenu du comportement limite de e_{zz} en $1,338 Ca^{2/3}/e_0$ obtenu de l'intégration de (1) aux valeurs de e infinies, on aboutit, après raccordement, au modèle d'épaisseur de film :

$$(2) \quad e_0/r = \alpha Ca^{2/3}$$

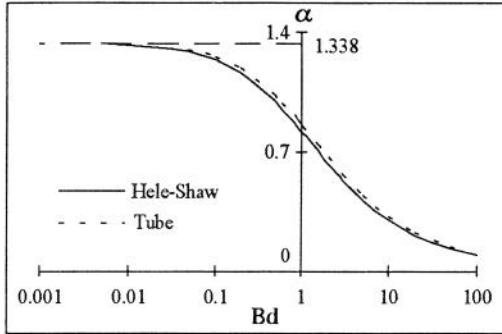


Fig. 1. – Coefficient devant $Ca^{2/3}$ en fonction de Bd dans (2).

Fig. 1. – Coefficient in front of $Ca^{2/3}$ versus Bd in (2).

Si la hauteur du point triple, (rapportée à r), mesurée au-dessus de la surface libre extérieure au capillaire dans la situation de l'équilibre capillaro-gravitaire, est désignée par λ , α , dans (2), vaut $1,338/(\lambda Bd)$ dans le cas Hele-Shaw et $1,338/(\lambda Bd - 1)$ pour le tube (fig. 1).

La relation (2) a été validée par des résultats expérimentaux (Quéré, 1989; Lasseux, 1991, 1992; voir aussi fig. 2a) pour des valeurs de Ca suffisamment faibles. Son obtention souffre cependant de quatre inconvénients majeurs : (i) dans l'étape II, la notion de limite infinie en e est discutable puisque e est bornée par r et H4 suppose $e/r \ll 1$; de plus, dans cette limite, e_z est infinie lorsque l'on intègre (1), ce qui est contradictoire avec H5. Pour y remédier, il pourrait sembler raisonnable de réaliser le raccordement de la zone de transition avec le ménisque en un point tel que e et la courbure soient toutes deux continues; ainsi posé, le problème n'a malheureusement pas de solution; (ii) la gravité est introduite avec le ménisque (statique) et l'écoulement en amont en reste indépendant; (iii) il est impossible de reconstituer le profil complet de l'interface à partir de cette méthode de résolution; (iv) le résultat (2) devient inopérant lorsque Ca est supérieur à 0,01 environ (Lasseux, 1990). Aux valeurs de Ca élevées, l'épaisseur e_0 ne suit plus la loi (2); elle s'infléchit et atteint une valeur asymptotique qui vaut 0,35 r environ. Ce dernier point a été mis en évidence à plusieurs reprises (Reinelt, 1985; Lasseux, 1992).

2. SOLUTION SEMI-ANALYTIQUE. – La solution développée ici retient H1 et H2 et abandonne les hypothèses H3 à H6. Elle consiste, dans un premier temps, à exprimer les débits $Q1$ et $Q2$ (par unité d'extension horizontale dans le cas Hele-Shaw ou de circonférence pour le tube) dans la partie du film à gradient de pression capillaire nul et dans le reste de la phase liquide (ménisque compris) respectivement. On obtient, pour le cas Hele-Shaw :

$$(3) \quad Q1 = \frac{-Bd}{3Ca} e_0^3 + e_0$$

$$(4) \quad Q2 = \frac{\partial [e_{zz}/(1 + e_z^2)^{3/2}]/\partial z - Bd}{3Ca} e^3 + e$$

et dans le cas du tube :

$$(5) \quad Q1 = \frac{Bd}{16Ca} [(1 - e_0)^4 (4 \text{Log}(1 - e_0) - 3) + 4(1 - e_0)^2 - 1] + e_0(2 - e_0)/2$$

$$(6) \quad Q2 = \frac{-\partial [e_{zz}/(1 + e_z^2)^{3/2} + 1/(1 - e)(1 + e_z^2)^{1/2}]/\partial z + Bd}{16Ca} \times [(1 - e)^4 (4 \text{Log}(1 - e) - 3) + 4(1 - e)^2 - 1] + e(2 - e)/2$$

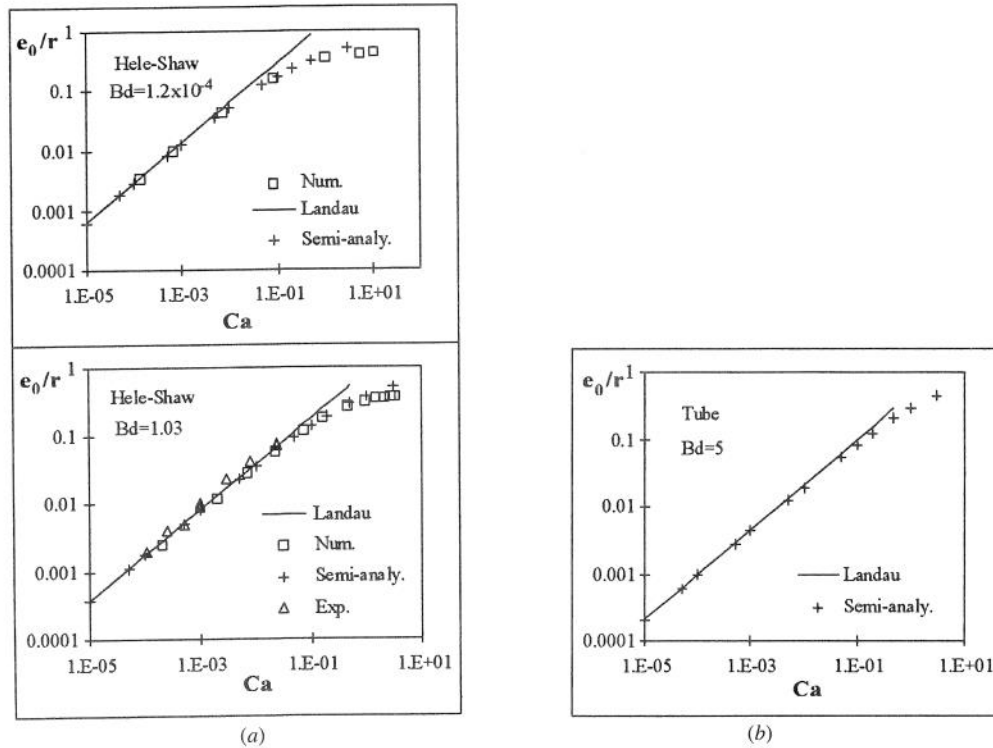


Fig. 2. - a. Épaisseur du film en fonction de Ca : approche classique de Landau, expérimentale, semi-analytique et purement numérique (cas Hele-Shaw). b. Épaisseur du film en fonction de Ca : approche classique de Landau et semi-analytique (cas du tube).

Fig. 2. - a. Film-thickness versus Ca: classical Landau's approach, experimental and semi-analytical results and purely numerical data (Hele-Shaw case). b. Film-thickness versus Ca: classical Landau's approach and semi-analytical results (tube case).

De l'écriture de la continuité du débit dans la phase liquide, on déduit, dans un second temps, une équation différentielle supposée représenter entièrement le profil (hypothèse H7 à vérifier *a posteriori*) qui s'écrit, pour le cas Hele-Shaw :

$$(7) \quad u_{ee} = 6 Ca [e_0 (e_0^2 Bd / (3 Ca) - 1) / e^3 + 1 / e^2 - Bd / (3 Ca)] \frac{(1 + u)^{3/2}}{u^{1/2}} + \frac{3u_e^2}{2(1 + u)}$$

et dans le cas du tube :

$$(8) \quad u_{ee} = \frac{-2(1 + u)^{3/2}}{u^{1/2}} \left\{ Bd \left[1 - \frac{(1 - e_0)^4 (4 \text{Log}(1 - e_0) - 3) + 4(1 - e_0)^2 - 1}{(1 - e)^4 (4 \text{Log}(1 - e) - 3) + 4(1 - e)^2 - 1} \right] + 8 Ca \frac{e(2 - e) - e_0(2 - e_0)}{(1 - e)^4 (4 \text{Log}(1 - e) - 3) + 4(1 - e)^2 - 1} \right\} - \frac{2(1 + u) - (1 - e)u_e}{(1 - e)^2} + \frac{3u_e^2}{2(1 + u)}$$

Dans ces six dernières équations (*et ces équations seulement*), e , e_0 et z désignent les quantités adimensionnelles e/r , e_0/r et z/r tandis que u , avec les mêmes notations, représente e_z^2 . Les deux conditions aux limites associées à (7) et (8) découlent de H2 : u et u_e tendent vers 0 quand e tend vers e_0 .

L'intégration de (7) et (8) est réalisée numériquement pour une épaisseur variant de e_0 à r à l'aide d'un solveur de système différentiel basé sur un schéma aux différences. Elle débute avec une valeur d'essai de e_0 et se termine lorsque cette valeur, ajustée par un processus itératif, satisfait la condition de symétrie sur l'axe du capillaire : u tend vers l'infini quand e tend vers r . On obtient ainsi e_0 et le profil de l'interface sachant qu'à toute valeur de e correspond une valeur de z donnée, à une constante arbitraire z_0 près, par :

$$(9) \quad z = z_0 + \int_{e_0}^e u^{-1/2} de$$

3. RÉSULTATS. VALIDATION. – Les valeurs de e_0 obtenues en fonction de Ca pour $Bd=1,2 \cdot 10^{-4}$, $Bd=1,03$ (cas Hele-Shaw) et $Bd=5$ (cas du tube) sont reportées sur les figures 2a et b où sont également représentées les relations tirées de (2) aux valeurs correspondantes de Bd : $e_0/r \approx 1,338 Ca^{2/3}$ ($Bd=1,2 \cdot 10^{-4}$), $e_0/r \approx 0,810 Ca^{2/3}$ ($Bd=1,03$) dans le cas Hele-Shaw et $e_0/r \approx 0,448 Ca^{2/3}$ ($Bd=5$) dans le cas du tube. Aux faibles valeurs de Ca , les deux approches sont équivalentes. Elles coïncident bien avec des résultats expérimentaux de mesure d'épaisseur de film obtenus selon une technique détaillée ailleurs (Lasseux, 1990) et reportés sur la figure 2a. Lorsque $Ca > 0,01$ (domaine où la solution de Landau surestime e_0), la solution semi-analytique prévoit des épaisseurs significativement plus faibles. De 0,3 % à $Ca=10^{-5}$, l'écart relatif croît (selon une loi puissance) à 30 % pour $Bd=1,2 \cdot 10^{-4}$, 15 % pour $Bd=1,03$ et 10 % pour $Bd=5$ lorsque $Ca=0,05$.

Dans un travail antérieur (Lasseux, 1992), des simulations numériques, basées sur une méthode intégrale couplée à une technique d'éléments de frontière, ont été effectuées en configuration Hele-Shaw. A partir de l'interface initiale de l'équilibre capillaro-gravitaire, ces simulations consistent, pour chaque pas de temps, à résoudre le problème de Stokes à frontière libre puis à déplacer l'interface. Les résultats d'épaisseur de film tirés de ces simulations sont également reportés sur la figure 2a. L'accord entre l'approche semi-analytique développée ici et les résultats purement numérique est bon puisque l'écart relatif sur e_0 ne dépasse par 2 % pour $Ca \leq 0,1$. Par ailleurs, comme l'illustre la figure 3 pour $Ca=6,8 \cdot 10^{-4}$ et $Bd=1,2 \cdot 10^{-4}$, les profils de l'interface, obtenus par voie numérique pure d'une part et à l'aide de (7) d'autre part, coïncident bien, ce qui confirme l'accord

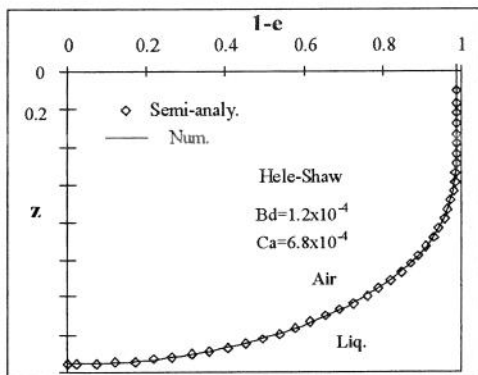


Fig. 3.

Fig. 3. – Profil de l'interface. Résultats d'une simulation numérique et solution obtenue de (7) (cas Hele-Shaw).

Fig. 3. – Interface shape. A numerical simulation result and the solution obtained from (7) (Hele-Shaw case).

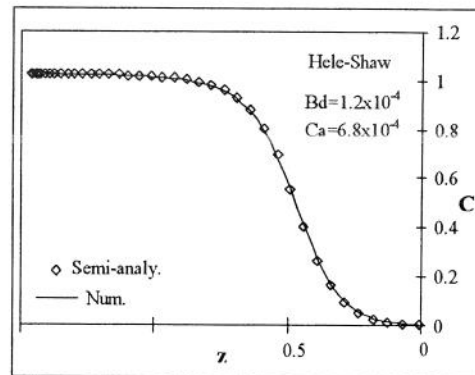


Fig. 4.

Fig. 4. – Courbure des deux interfaces représentées sur la figure 3.

Fig. 4. – Curvature of the two interfaces represented in figure 3.

entre ces deux approches. Un test complémentaire enfin consiste à comparer les pressions capillaires (les courbures) obtenues selon les deux méthodes. Comme l'indique la figure 4 la courbure, C , tirée de la solution semi-analytique et donnée par $u_e/2(1+u)^{3/2}$ et le résultat de la simulation numérique concordent parfaitement, ce qui justifie l'hypothèse H7.

4. CONCLUSION. – La solution semi-analytique approchée proposée ici pour le drainage gaz-liquide dans les deux configurations étudiées est donc tout à fait cohérente. Elle appelle les remarques suivantes :

- elle évite certaines hypothèses discutables nécessaires à l'élaboration du modèle classique d'épaisseur de film de type Landau. Les seules hypothèses retenues sont en effet : l'existence d'un film d'épaisseur constante à l'infini amont du ménisque, une pression constante dans la phase gazeuse et un écoulement unidirectionnel dans le liquide ;
- elle permet la détermination approchée mais complète de l'interface en fonction de Ca et Bd ;
- les épaisseurs de film obtenues sont cohérentes avec des résultats expérimentaux ;
- la comparaison des épaisseurs de film, de la forme et de la courbure des interfaces avec des résultats de simulations numériques directes de l'écoulement à frontière libre en configuration Hele-Shaw indique que ces deux approches sont en bon accord ;
- la solution semi-analytique semble correcte pour $Ca \leq 0,1$, et reste numériquement plus légère que la simulation numérique directe.

Ce travail a bénéficié d'un soutien européen (programme JOUF-CT91-0061), de l'IFP et de l'IDRIS.

Note remise le 12 juin 1995, acceptée le 19 juin 1995.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- L. LANDAU et B. LEVICH, Dragging of a liquid by a moving plate, *Acta Phys.-Chim. URSS*, 17, (42), 1942, p. 355-364.
 D. LASSEUX, Caractérisations expérimentale, analytique et numérique d'un film dynamique lors du drainage d'un capillaire, *Thèse*, Université Bordeaux-I, 1990.
 D. LASSEUX, P. FABRIE et M. QUINTARD, A boundary element method applied to gas-liquid drainage in a capillary cavity, in *Boundary Elements in Fluid Dynamics*, Computational Mechanics Publications, Elsevier, 1992, p. 197-208.
 D. LASSEUX et M. QUINTARD, Épaisseur d'un film dynamique derrière un ménisque récessif, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 313, série II, 1991, p. 1375-1381.
 C. W. PARK et G. M. HOMS, Two-phase displacement in Hele-Shaw cells: Theory, *J. Fluid Mech.*, 139, 1984, p. 291-308.
 D. A. REINELT et P. G. SAFFMAN, The penetration of a finger into a viscous fluid in a channel and tube, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 6, n° 3, 1985, p. 542-561.
 D. QUERE et J. M. DI MEGLIO, Vidange d'un capillaire : étude du film résiduel, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 308, série II, 1989, p. 147-150.

LEPT-ENSAM, URA-CNRS n° 873,
 esplanade des Arts et Métiers, 33405 Talence Cedex, France.
 e-mail: lasseux@lept-ensam.u-bordeaux.fr