



HAL
open science

Convexité, pluri-sous-harmonicité et principe du maximum dans les espaces de Banach

Anne-Edgar Wilke

► **To cite this version:**

Anne-Edgar Wilke. Convexité, pluri-sous-harmonicité et principe du maximum dans les espaces de Banach. 2023. hal-03826538v2

HAL Id: hal-03826538

<https://hal.science/hal-03826538v2>

Preprint submitted on 7 Sep 2023 (v2), last revised 7 Sep 2023 (v4)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

Convexité, pluri-sous-harmonicité et principe du maximum dans les espaces de Banach

Anne-Edgar WILKE

RÉSUMÉ. – Dans cet article, je m’efforce tout d’abord de rendre plus précise l’analogie connue entre convexité et pluri-sous-harmonicité. J’introduis ensuite une notion de pluri-sous-harmonicité stricte analogue à la convexité stricte, et je montre l’intérêt de cette notion pour l’étude du principe du maximum dans les espaces de Banach. En guise d’application, je définis une notion d’intégrale directe L^p d’une famille d’espaces de Banach qui comprend à la fois les espaces L^p de Bochner, les sommes directes ℓ^p et les intégrales directes hilbertiennes, et je montre que sous certaines hypothèses, lorsque $p < \infty$, une intégrale directe L^p vérifie le principe du maximum si et seulement si presque tous les membres de la famille vérifient le principe du maximum. Cet énoncé peut être vu comme une reformulation de plusieurs résultats connus, mais la notion de pluri-sous-harmonicité stricte permet d’en donner une nouvelle démonstration, qui a l’avantage d’être courte, éclairante et unifiée.

1 Introduction

1.1 Convexité et pluri-sous-harmonicité

Les fonctions pluri-sous-harmoniques (en abrégé, PSH) ont été introduites indépendamment par Oka [24, p. 40] et Lelong [20, p. 306, déf. 1]. Dès les origines de la théorie, il est apparu qu’il existe une certaine analogie entre fonctions convexes et fonctions PSH ; le terme employé par Oka était d’ailleurs *fonctions pseudoconvexes*. Afin de mettre en évidence cette analogie, Bremermann [4, pp. 34-38] a dressé une liste de propriétés satisfaites par les fonctions convexes, et montré qu’à chacune d’elles correspond une propriété satisfaite par les fonctions PSH.

Voici, à quelques reformulations près, les idées essentielles de Bremermann. Une fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe, ou *sous-linéaire*, si pour tout intervalle compact $I \subset \mathbb{R}$ et pour toute fonction affine $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}$, l’inégalité $f \leq \alpha$ sur le bord de I entraîne la même inégalité sur I . Une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe, ou *pluri-sous-linéaire*, si pour toute application affine $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, la composée $f \circ \gamma$ est convexe.

De la même façon, une fonction semi-continue supérieurement $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est dite sous-harmonique si pour tout compact connexe à bord lisse $K \subset \mathbb{C}$ et pour toute fonction continue $\alpha : K \rightarrow \mathbb{R}$ harmonique sur l’intérieur de K , l’inégalité $f \leq \alpha$ sur le bord de K entraîne la même inégalité sur K . Une fonction semi-continue supérieurement $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est dite pluri-sous-harmonique si pour toute application affine $\gamma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$, la composée $f \circ \gamma$ est sous-harmonique.

Comme le remarque Bremermann, il est possible de définir la convexité et la pluri-sous-harmonicité plus rapidement de la manière suivante. Une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour toute application affine $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$f(\gamma(0)) \leq \frac{f(\gamma(-1)) + f(\gamma(1))}{2}. \quad (1)$$

Cela revient à demander que la valeur de $f \circ \gamma$ au centre de la boule unité de \mathbb{R} soit majorée par sa moyenne sur la sphère. De même, une fonction semi-continue supérieurement $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est PSH si et seulement si pour toute application affine $\gamma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$,

$$f(\gamma(0)) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\gamma(e^{it})) dt, \quad (2)$$

ce qui revient à demander que la valeur de $f \circ \gamma$ au centre de la boule unité de \mathbb{C} soit majorée par sa moyenne sur la sphère.

À partir des données qui précèdent, on est tenté de conclure comme Bremermann que l'analogie entre fonctions convexes et fonctions PSH s'obtient en remplaçant \mathbb{R}^n par \mathbb{C}^n , les applications affines réelles par des applications affines complexes, et les conditions de sous-linéarité par des conditions de sous-harmonicité. De fait, ces idées sont largement présentes dans la littérature sur le sujet ; voir par exemple [16, p. 225]. Pourtant, j'entends montrer que ce dictionnaire passe à côté d'un fait essentiel et n'est donc pas satisfaisant.

En effet, un résultat fondamental, dû à Lelong [20, p. 325, n° 17], affirme que les fonctions PSH sont stables par composition avec une application holomorphe, ce qui permet de définir la notion de fonction PSH sur une variété holomorphe. Ce résultat ne figure pas dans la liste de Bremermann, ce qui est compréhensible, car si l'on adopte son point de vue, alors il n'y a pas de résultat analogue pour les fonctions convexes.

En fait, une fonction convexe est naturellement définie sur un espace affine réel, tandis qu'une fonction PSH est naturellement définie sur une variété holomorphe, ou même sur un espace analytique complexe¹. Par conséquent, les applications affines réelles ne correspondent pas aux applications affines complexes, mais plutôt aux applications holomorphes.

Il est donc préférable de définir la notion de fonction PSH de la manière suivante : si X est une variété holomorphe, une fonction semi-continue supérieurement $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est dite PSH si elle vérifie l'inégalité (2) pour toute application *holomorphe* $\gamma : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow X$, où $\overline{\mathbb{D}} \subset \mathbb{C}$ est le disque unité fermé, étant entendu qu'une application définie sur $\overline{\mathbb{D}}$ est holomorphe si elle est la restriction d'une application holomorphe définie sur un voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$.

Dans le cas où $X = \mathbb{C}^n$, si f vérifie cette inégalité pour toute application *affine* $\gamma : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}^n$, alors f est PSH : c'est le contenu du résultat de Lelong. Mais il vaut mieux voir ce fait, non pas comme une définition, mais plutôt comme une caractérisation, valable dans un cas

1. L'approche utilisée dans cet article permettrait plus généralement de définir la notion de fonction convexe sur n'importe quel espace topologique X , dès lors que l'on fixe une classe d'applications continues $\gamma : [-1; 1] \rightarrow X$ jouant le rôle des applications affines. Un cas important est celui où X est une variété riemannienne, les applications γ étant les segments géodésiques. De même, on pourrait définir la notion de fonction PSH sur n'importe quel espace topologique X muni d'une classe d'applications continues $\gamma : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow X$ jouant le rôle des applications holomorphes.

particulier, et qui est d'ailleurs loin d'être évidente. Nous n'en aurons pas besoin dans cet article.

Au-delà de l'aspect esthétique, le fait de bien comprendre l'analogie entre convexité et pluri-sous-harmonicité permet d'obtenir certains résultats non triviaux concernant les fonctions PSH en adaptant les démonstrations des énoncés correspondants, généralement plus faciles, relatifs aux fonctions convexes. J'espère que les résultats présentés dans cet article permettront d'illustrer ce phénomène.

1.2 Pluri-sous-harmonicité stricte

Une fonction continue $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement convexe si elle vérifie strictement l'inégalité (1) pour toute application affine $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ non constante. Si l'on suit le dictionnaire de Bremermann, cela suggère la définition suivante : une fonction semi-continue supérieurement $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est strictement PSH si elle vérifie strictement l'inégalité (2) pour toute application affine $\gamma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^n$ non constante. C'est effectivement, à la formulation près, la définition proposée par Carmignani [5, pp. 285-286, def. 1.1 et 1.2]². Or cette définition est très insatisfaisante : en effet, nous verrons un exemple qui montre que la classe de fonctions ainsi obtenue n'est pas stable par composition avec un biholomorphisme.

Il est donc préférable, suivant les principes exposés plus haut, de dire qu'une fonction semi-continue supérieurement $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ sur une variété holomorphe X est strictement PSH si elle vérifie strictement l'inégalité (2) pour toute application holomorphe non constante $\gamma : \mathbb{D} \rightarrow X$. Nous verrons plusieurs résultats qui montrent que la pluri-sous-harmonicité stricte, ainsi définie, est une notion naturelle et analogue à la convexité stricte.

Il existe, dans le cas réel, une notion plus forte que la convexité stricte : une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite fortement convexe si elle s'écrit localement comme somme d'une fonction convexe et d'une fonction ε de classe \mathcal{C}^2 telle que $d^2\varepsilon$ soit en tout point une forme bilinéaire symétrique définie positive.

La notion analogue dans le cas complexe est la suivante : une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est dite fortement PSH si elle s'écrit localement comme somme d'une fonction PSH et d'une fonction ε de classe \mathcal{C}^2 telle que $\partial\bar{\partial}\varepsilon$ soit en tout point une forme hermitienne définie positive.

Malheureusement, l'usage est courant dans la littérature d'appeler *strictement PSH* les fonctions fortement PSH. Cette situation est regrettable, car la pluri-sous-harmonicité forte est l'analogue de la convexité forte et non de la convexité stricte.

1.3 Principe du maximum dans les espaces de Banach

Un \mathbb{R} -espace de Banach E est dit strictement convexe si toute application affine $\gamma : [-1; 1] \rightarrow E$ dont l'image est contenue dans la sphère unité est constante.

2. À condition toutefois de modifier la définition 1.1 de Carmignani de sorte que les fonctions strictement sous-harmoniques soient supposées finies sur une partie dense, et de corriger la définition 1.2, qui omet par erreur l'hypothèse $w \neq 0$.

Par analogie, on peut être tenté de dire qu'un \mathbb{C} -espace de Banach E est strictement convexe au sens complexe si toute application affine $\gamma : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow E$ dont l'image est contenue dans la sphère unité est constante. Cette définition, fortement suggérée par Thorp et Whitley [25], est explicitement donnée par Globevnik [14, p. 175, def. 1].

Cependant, l'analogie s'avère plus satisfaisante si l'on demande plutôt que toute application *holomorphe* $\gamma : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow E$ dont l'image est contenue dans la sphère unité soit constante. Si tel est le cas, afin de maintenir une terminologie cohérente, nous dirons que E est strictement PSH.

Le résultat principal de Thorp et Whitley [25, p. 641, th. 3.1], légèrement reformulé, est que les deux définitions sont en réalité équivalentes, c'est-à-dire que E est strictement PSH si et seulement si toute application *affine* $\gamma : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow E$ dont l'image est contenue dans la sphère unité est constante. Mais il est préférable de voir ce fait, non pas comme une définition, mais plutôt comme une caractérisation, du reste non triviale. Nous n'en aurons pas besoin dans cet article.

Au-delà de l'analogie avec les espaces strictement convexes, l'importance des espaces strictement PSH vient du fait qu'un \mathbb{C} -espace de Banach est strictement PSH si et seulement s'il vérifie le principe du maximum, c'est-à-dire si et seulement si toute application holomorphe d'une variété connexe X dans E dont la norme possède un maximum local est constante.

La stricte convexité d'un \mathbb{R} -espace de Banach peut être caractérisée de la manière suivante : $(E, \|\cdot\|)$ est strictement convexe si et seulement si pour toute (ou pour une) application croissante strictement convexe $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, la composée $\psi \circ \|\cdot\|$ est strictement convexe. L'énoncé analogue pour un \mathbb{C} -espace de Banach est le suivant : $(E, \|\cdot\|)$ est strictement PSH si et seulement si pour toute (ou pour une) application strictement convexe $\psi : \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, la composée $\psi \circ \log\|\cdot\|$ est strictement PSH.

Ces deux résultats nous permettront d'obtenir des caractérisations simples de la convexité stricte et de la pluri-sous-harmonicité stricte des intégrales directes L^p , que nous allons maintenant présenter.

1.4 Intégrales directes

La notion d'intégrale directe utilisée dans cet article est assez rudimentaire, mais suffisante pour comprendre à la fois les espaces L^p de Bochner, les sommes directes ℓ^p et les intégrales directes hilbertiennes. On peut consulter [15, pp. 61-62] et [9, pp. 683-686] pour une théorie plus élaborée.

Soient (S, Σ, μ) un espace mesuré, $\mathcal{E} = (E_s)_{s \in S}$ une famille *mesurable* d'espaces de Banach réels ou complexes, en un sens que nous définirons, et $p \in [1; \infty]$. Une section de \mathcal{E} est un élément du produit $\prod_{s \in S} E_s$. Étant donnée une section σ vérifiant une condition de mesurabilité appropriée, on note $\|\sigma\|_p$ la norme p de la fonction $s \mapsto \|\sigma(s)\|_{E_s}$; de manière explicite,

$$\|\sigma\|_p = \begin{cases} \left(\int_S \|\sigma(s)\|_{E_s}^p d\mu(s) \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{s \in S} \|\sigma(s)\|_{E_s} & \text{si } p = \infty. \end{cases} \quad (3)$$

On dit que σ est p -intégrable si $\|\sigma\|_p < \infty$, et on définit l'intégrale directe L^p de la famille \mathcal{E} comme l'espace des sections p -intégrables, modulo égalité presque partout, muni de la norme $\|\cdot\|_p$. C'est un espace de Banach, noté $L^p(\mathcal{E})$.

Si la famille \mathcal{E} est constante, égale à un espace de Banach E , alors $L^p(\mathcal{E})$ est l'espace de Bochner $L^p(S, \Sigma, \mu; E)$. Dans le cas où E est de dimension 1, on retrouve les espaces L^p de Lebesgue.

Lorsque Σ est la tribu discrète, que μ est la mesure de comptage et que les E_s sont deux à deux distincts, $L^p(\mathcal{E})$ est essentiellement la somme directe ℓ^p de la famille \mathcal{E} , notée $\ell^p(\mathcal{E})$; plus précisément, $L^p(\mathcal{E})$ est le sous-espace fermé de $\ell^p(\mathcal{E})$ constitué des sections à support dénombrable, qui coïncide avec $\ell^p(\mathcal{E})$ sauf si $p = \infty$ et que l'ensemble des $s \in S$ tels que E_s soit non nul n'est pas dénombrable.

Enfin, les intégrales directes hilbertiennes correspondent au cas où $p = 2$ et où tous les E_s sont égaux à l'un des espaces ℓ_n^2 , pour $n \in \mathbb{N}$, ou ℓ_∞^2 .

Voici maintenant les résultats annoncés. Par souci de concision, les énoncés sont légèrement moins généraux que ceux qui seront démontrés dans l'article.

Théorème 1. *Supposons que μ soit σ -finie, que \mathcal{E} soit une famille mesurable discrète de \mathbb{R} -espaces de Banach, et que $1 < p < \infty$. L'intégrale directe $L^p(\mathcal{E})$ est strictement convexe si et seulement si presque tous les E_s sont strictement convexes.*

Théorème 2. *Supposons que μ soit σ -finie, que \mathcal{E} soit une famille mesurable discrète de \mathbb{C} -espaces de Banach, et que $1 \leq p < \infty$. L'intégrale directe $L^p(\mathcal{E})$ est strictement PSH si et seulement si presque tous les E_s sont strictement PSH.*

La notion de famille *discrète* qui apparaît dans ces énoncés est, comme nous le verrons, insignifiante en pratique, car lorsque μ est σ -finie, l'existence d'une famille mesurable non discrète n'est pas démontrable dans ZFC.

Même si nous démontrerons les théorèmes 1 et 2 par des méthodes entièrement parallèles, il importe de remarquer que les énoncés eux-mêmes ne sont pas rigoureusement analogues. En effet, la définition (3) pose problème de ce point de vue, car le véritable analogue complexe de $\|\cdot\|_{E_s}$ est $\log\|\cdot\|_{E_s}$, et non $\|\cdot\|_{E_s}$. En examinant les démonstrations, on s'aperçoit que c'est cette dissymétrie qui est à l'origine de la différence entre l'hypothèse $1 < p < \infty$ dans le cas réel et l'hypothèse $1 \leq p < \infty$ dans le cas complexe.

Donnons à présent quelques conséquences immédiates des théorèmes 1 et 2.

Corollaire 3. *Supposons que μ soit non nulle et σ -finie et que $1 < p < \infty$, et soit E un \mathbb{R} -espace de Banach. L'espace de Bochner $L^p(S, \Sigma, \mu; E)$ est strictement convexe si et seulement si E l'est. En particulier, l'espace de Lebesgue $L^p(S, \Sigma, \mu; \mathbb{R})$ est strictement convexe.*

Corollaire 4. *Supposons que μ soit non nulle et σ -finie et que $1 \leq p < \infty$, et soit E un \mathbb{C} -espace de Banach. L'espace de Bochner $L^p(S, \Sigma, \mu; E)$ est strictement PSH si et seulement si E l'est. En particulier, l'espace de Lebesgue $L^p(S, \Sigma, \mu; \mathbb{C})$ est strictement PSH.*

Corollaire 5. *Supposons que S soit dénombrable, que $1 < p < \infty$, et que les E_s soient des \mathbb{R} -espaces de Banach. Alors $\ell^p(\mathcal{E})$ est strictement convexe si et seulement si tous les E_s le sont.*

Corollaire 6. *Supposons que S soit dénombrable, que $1 \leq p < \infty$, et que les E_s soient des \mathbb{C} -espaces de Banach. Alors $\ell^p(\mathcal{E})$ est strictement PSH si et seulement si tous les E_s le sont.*

Il n'est pas difficile de voir que les corollaires 5 et 6 entraînent les mêmes énoncés sans l'hypothèse de dénombrabilité sur S . Si l'on tient compte de cette remarque, il s'avère que le théorème 1 est une conséquence des corollaires 3 et 5, et que le théorème 2 est une conséquence des corollaires 4 et 6 : en effet, nous verrons que les intégrales directes L^p sont en réalité des sommes directes ℓ^p d'espaces L^p de Bochner. On voit ainsi que la notion d'intégrale directe est une manière d'énoncer et de démontrer de manière unifiée des résultats relatifs aux sommes directes ℓ^p et aux espaces de Bochner.

Le corollaire 5 a été démontré par Day [7, p. 314] [8, p. 520, th. 6] par une méthode simple et directe, qui permet également d'obtenir le corollaire 3, comme le remarque l'auteur [8, p. 521]. On peut en fait utiliser cette méthode pour démontrer les théorèmes 1 et 2 dans le cas $1 < p < \infty$, mais probablement pas dans le cas général, comme nous le verrons en appendice.

Le corollaire 6 a été démontré par Jamison, Loomis et Rousseau [19, p. 205, th. 3.15 et p. 208, th. 4.2]. Le cas $1 < p < \infty$ fait appel, suivant une méthode due à V. et I. Istrăţescu [18, p. 424, th. 2.4], aux travaux de Thorp et Whitley et à la théorie des produits semi-scalaires de Lumer. La méthode utilisée pour $p = 1$ s'étend en fait aux autres valeurs de p , mais elle ne permet par contre pas de démontrer le corollaire 4, car elle s'appuie sur une description explicite du dual de $\ell^1(\mathcal{E})$ qui n'est pas valable en général pour les espaces de Bochner [10, p. 98, th. 1].

Enfin, le corollaire 4 a été démontré par Thorp et Whitley lorsque $E = \mathbb{C}$, et par Dilworth [11, p. 499, th. 2.5] dans le cas général, en utilisant les travaux de Thorp et Whitley. C'est essentiellement sa méthode que nous suivrons pour démontrer le théorème 2, mais dans un cadre conceptuel qui rend la preuve plus éclairante, plus courte et moins technique, et évite le recours aux travaux de Thorp et Whitley.

1.5 Organisation de l'article et généralités

Les sous-sections 2.1 et 2.2 contiennent quelques faits élémentaires relatifs aux fonctions convexes et PSH, en insistant sur le parallélisme frappant entre les deux théories, qui concerne à la fois les définitions, les énoncés et les démonstrations.

La sous-section 2.3 démontre une forme de l'inégalité de Jensen qui intervient dans la sous-section suivante. Ce résultat est connu, au moins dans des contextes proches.

La sous-section 2.4, essentiellement indépendante du reste de l'article, contient deux résultats qui ont vocation à montrer que la notion de pluri-sous-harmonicité stricte est naturelle et analogue à la convexité stricte.

La section 3 s'intéresse aux espaces strictement convexes et strictement PSH, en insistant à nouveau sur le parallélisme entre les deux théories, et fait le lien avec le principe du maximum.

La section 4 développe la notion d'intégrale directe et, en guise d'application des concepts introduits dans l'article, démontre les théorèmes 1 et 2. Enfin, l'appendice redémontre les mêmes théorèmes dans le cas $1 < p < \infty$ par la méthode de Day.

Rappelons qu'une application définie sur le disque unité fermé $\overline{\mathbb{D}} \subset \mathbb{C}$ est dite holomorphe si elle est la restriction d'une application holomorphe définie sur un voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$.

Nous utiliserons le fait que dans un espace vectoriel topologique sur un corps valué

non discret, l'origine possède une base de voisinages équilibrés, c'est-à-dire stables par les homothéties dont le rapport est inférieur à 1 en valeur absolue [3, I, p. 7, prop. 4].

Un espace affine topologique est un espace affine E dont la direction \vec{E} est un espace vectoriel topologique. Dans ce cas, il existe une unique topologie sur E telle que pour tout $x \in E$, la bijection $\vec{E} \rightarrow E$ qui à v associe $x + v$ soit un homéomorphisme.

Nous appellerons *espace normable* un espace vectoriel topologique dont la topologie peut être définie par une norme.

Les variétés holomorphes considérées dans cet article sont des ensembles munis d'un atlas holomorphe dont les cartes ont pour espace d'arrivée un ouvert dans un \mathbb{C} -espace normable complet. On peut consulter [1] ou [12, pp. 7-16] au sujet de ces variétés.

Pour la théorie de l'intégration de Bochner et les espaces L^p de Bochner, on peut consulter le texte introductif [6, pp. 397-404] et les exposés plus détaillés [10, pp. 41-52] et [17, pp. 1-30]. Remarquons que la théorie de Bochner permet, en toute généralité, d'intégrer des fonctions définies sur un espace mesuré et à valeurs dans un espace *normable* complet.

REMERCIEMENTS. – Je suis très reconnaissant envers Karim Belabas pour son accompagnement tout au long de la préparation de ce travail, et envers l'INRIA pour son soutien financier. Merci également à Sébastien Boucksom pour ses commentaires sur une version préliminaire de cet article, et au rapporteur pour ses suggestions.

2 Fonctions

2.1 Fonctions convexes

Définition. Soient E un \mathbb{R} -espace affine topologique, $X \subset E$ une partie convexe et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que f est convexe si pour toute application affine $\gamma : [-1; 1] \rightarrow E$ d'image contenue dans X ,

$$f(\gamma(0)) \leq \frac{f(\gamma(-1)) + f(\gamma(1))}{2}. \quad (4)$$

On dit que f est strictement convexe si l'inégalité (4) est stricte dès que γ est non constante.

Proposition 7. Soient E_1 et E_2 deux \mathbb{R} -espaces affines topologiques, $X_1 \subset E_1$ et $X_2 \subset E_2$ des parties convexes, $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$ une application affine continue telle que $\varphi(X_1) \subset X_2$, et $f : X_2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. La composée $f \circ \varphi$ est convexe. Si φ est injective et que f est strictement convexe, alors $f \circ \varphi$ est strictement convexe.

Démonstration. C'est immédiat. □

Proposition 8 (Principe du maximum). Soient E un \mathbb{R} -espace affine topologique et $X \subset E$ un ouvert convexe. Toute fonction convexe $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ayant un maximum global est constante.

Démonstration. En effet, soit alors M le maximum de f et soit $U = \{x \in X \mid f(x) = M\}$. C'est un fermé non vide ; si l'on montre que c'est également un ouvert, on conclura que $U = X$ par connexité.

Soit donc $x \in U$ et soit V un voisinage équilibré de l'origine dans \vec{E} tel que $x + V$ soit inclus dans X . Soit $y \in x + V$, et soit $\gamma : [-1; 1] \rightarrow E$ donnée par $\gamma(t) = x + t(y - x)$; c'est une application affine d'image contenue dans X telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Comme f est convexe,

$$f(\gamma(0)) \leq \frac{f(\gamma(-1)) + f(\gamma(1))}{2}.$$

Or le membre de gauche de cette inégalité est M , et le membre de droite est majoré par M , puisque $f(\gamma(-1))$ et $f(\gamma(1))$ le sont. Il y a donc égalité; par conséquent, $f(\gamma(-1)) = f(\gamma(1)) = M$, donc $f(y) = M$, de sorte que $y \in U$ et finalement $x + V \subset U$. \square

2.2 Fonctions pluri-sous-harmoniques

Définition. Soient X une variété holomorphe et $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ une fonction semi-continue supérieurement. On dit que f est PSH si pour toute application holomorphe $\gamma : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow X$,

$$f(\gamma(0)) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\gamma(e^{it})) dt. \quad (5)$$

On dit que f est strictement PSH si l'inégalité (5) est stricte dès que γ est non constante.

Remarque. L'intégrale est un élément bien défini de $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, car f est majorée sur tout compact par semi-continuité.

Remarque. Dans le cas où X est un ouvert dans un \mathbb{C} -espace normable complet E , si f vérifie l'inégalité (5) pour toute application affine $\gamma : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow E$ d'image contenue dans X , alors f est PSH : voir [20, p. 325, n° 17] lorsque E est de dimension finie, et [21, p. 172, th. 4.3] dans le cas général. En revanche, il arrive que l'inégalité (5) soit stricte pour toute application affine non constante sans que f soit strictement PSH, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ une fonction strictement PSH, et soit $\pi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ la projection sur le second facteur. La composée $f \circ \pi$ est PSH d'après la proposition 9, mais pas strictement PSH, car sa composée avec l'application affine $\gamma : z \mapsto (z, 0)$ est constante. Soit $\varphi : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ le biholomorphisme donné par $\varphi(z_1, z_2) = (z_1, z_1^2 + z_2)$. D'après ce qui précède, la composée $f \circ \pi \circ \varphi$ est PSH, mais pas strictement PSH. Pourtant, si $\gamma : z \mapsto (az + b, cz + d)$ est une application affine telle que

$$(f \circ \pi \circ \varphi)(\gamma(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f \circ \pi \circ \varphi)(\gamma(e^{it})) dt,$$

alors $\pi \circ \varphi \circ \gamma$ est constante, puisque f est strictement PSH. L'application $z \mapsto (az + b)^2 + cz + d$ est donc constante. Cela entraîne $a = c = 0$, de sorte que γ est constante.

Proposition 9. Soient X_1 et X_2 deux variétés holomorphes, $\varphi : X_1 \rightarrow X_2$ une application holomorphe et $f : X_2 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ une fonction PSH. La composée $f \circ \varphi$ est PSH. Si la différentielle de φ est injective hors d'un sous-ensemble discret de X_1 et que f est strictement PSH, alors $f \circ \varphi$ est strictement PSH.

Démonstration. La première assertion est immédiate. Supposons donc que $d\varphi$ soit injective hors d'un ensemble discret $D \subset X_1$ et que f soit strictement PSH, et soit $\gamma : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow X_1$ une application holomorphe telle que

$$(f \circ \varphi)(\gamma(0)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f \circ \varphi)(\gamma(e^{it})) dt.$$

Comme f est strictement PSH, $\varphi \circ \gamma$ est constante, donc pour tout $z \in \mathbb{D}$, $(\varphi \circ \gamma)'(z) = d\varphi(z)(\gamma'(z)) = 0$. Ainsi, la restriction de γ à l'ouvert $U = \{z \in \mathbb{D} \mid \gamma'(z) \neq 0\}$ est à valeurs dans D , qui est discret; par conséquent, γ est constante sur chaque composante connexe de U , donc sa dérivée γ' est nulle, de sorte que $U = \emptyset$ et que γ est constante sur \mathbb{D} , et donc sur $\overline{\mathbb{D}}$ par continuité. \square

Proposition 10 (Principe du maximum). *Soit X une variété holomorphe connexe. Toute fonction PSH $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ayant un maximum global est constante.*

Démonstration. En effet, soit alors M le maximum de f et soit $U = \{x \in X \mid f(x) = M\}$. C'est un ensemble non vide, qui est fermé puisque f est semi-continue supérieurement et que la condition $f(x) = M$ est équivalente à $f(x) \geq M$. Nous allons voir que U est ouvert, ce qui permettra de conclure que $U = X$ par connexité.

Soit donc $x \in U$, et soient V un voisinage ouvert équilibré de l'origine dans un \mathbb{C} -espace normable complet et φ un biholomorphisme entre V et un voisinage ouvert de x , vérifiant $\varphi(0) = x$. Soit $y \in \varphi(V)$, et soit $\gamma : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow X$ donnée par $\gamma(z) = \varphi(z \cdot \varphi^{-1}(y))$; c'est une application holomorphe telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Comme f est PSH,

$$f(\gamma(0)) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\gamma(e^{it})) dt.$$

Or le membre de gauche de cette inégalité est M , et le membre de droite est majoré par M , puisque toutes les valeurs $f(\gamma(e^{it}))$ le sont. Il y a donc égalité; par conséquent, pour presque tout $t \in [0; 2\pi]$, $f(\gamma(e^{it})) = M$. Par semi-continuité, cette relation est en fait vraie pour tout t , donc en particulier $f(y) = M$, de sorte que $y \in U$ et finalement $\varphi(V) \subset U$. \square

2.3 L'inégalité de Jensen

Lemme 11. *Soient E un \mathbb{R} -espace affine topologique et $X \subset E$ un ouvert convexe, et soient $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $x_0 \in X$. Il existe une application affine continue $\alpha : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\alpha \leq f$ et $\alpha(x_0) = f(x_0)$. Si f est strictement convexe, alors α et f ne coïncident qu'en x_0 .*

Démonstration. Posons

$$C = \{(x, t) \in E \times \mathbb{R} \mid x \in X \text{ et } f(x) < t\}.$$

C'est un ouvert convexe de $E \times \mathbb{R}$, qui ne contient pas le point $(x_0, f(x_0))$. D'après le théorème de Hahn-Banach [3, II, p. 39, th. 1], il existe un hyperplan fermé contenant $(x_0, f(x_0))$

et ne rencontrant pas C . Cela revient à dire qu'il existe une application affine continue $\alpha : E \rightarrow \mathbb{R}$ et un réel λ tels que $\alpha(x_0) = \lambda f(x_0)$ et pour tout $(x, t) \in C$, $\alpha(x) < \lambda t$.

On observe alors que $\lambda \neq 0$: en effet, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $(x_0, t) \in C$, donc si λ était nul, on aurait à la fois $\alpha(x_0) = 0$ et $\alpha(x_0) < 0$. En remplaçant α par $\lambda^{-1}\alpha$, on se ramène donc à $\lambda = 1$, auquel cas les deux conditions voulues $\alpha \leq f$ et $\alpha(x_0) = f(x_0)$ sont satisfaites.

Soit $x \in X$ tel que $\alpha(x) = f(x)$, et soit $\gamma : [-1; 1] \rightarrow E$ l'application affine telle que $\gamma(-1) = x_0$ et $\gamma(1) = x$. Son image est contenue dans X . Comme α est affine et que f est convexe,

$$\alpha(\gamma(0)) = \frac{\alpha(\gamma(-1)) + \alpha(\gamma(1))}{2}, \quad f(\gamma(0)) \leq \frac{f(\gamma(-1)) + f(\gamma(1))}{2}. \quad (6)$$

L'inégalité $\alpha(\gamma(0)) \leq f(\gamma(0))$ et les égalités $\alpha(x_0) = f(x_0)$ et $\alpha(x) = f(x)$ montrent que l'inégalité (6) est une égalité. Si f est strictement convexe, γ est donc constante, donc $x = x_0$. \square

Lemme 12 (Inégalité de Jensen). *Soient E un \mathbb{R} -espace normable complet, $X \subset E$ un ouvert convexe, et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soient d'autre part (S, Σ, μ) un espace mesuré de masse 1 et $\eta : S \rightarrow E$ une application intégrable d'image contenue dans X . L'intégrale $\int_S \eta \, d\mu$ appartient à X , et on a*

$$f\left(\int_S \eta \, d\mu\right) \leq \int_S (f \circ \eta) \, d\mu.$$

S'il y a égalité et que f est strictement convexe, alors η est essentiellement constante.

Démonstration. Soit $m = \int_S \eta \, d\mu$. Le fait que m appartienne à X se voit en écrivant X comme intersection de demi-espaces ouverts à l'aide du théorème de Hahn-Banach [3, II, p. 39, th. 1]. D'après le lemme 11, il existe une application affine continue $\alpha : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\alpha \leq f$ et $\alpha(m) = f(m)$. On a

$$\begin{aligned} f\left(\int_S \eta \, d\mu\right) &= \alpha\left(\int_S \eta \, d\mu\right) \\ &= \int_S (\alpha \circ \eta) \, d\mu \\ &\leq \int_S (f \circ \eta) \, d\mu. \end{aligned}$$

S'il y a égalité, alors $\alpha \circ \eta$ et $f \circ \eta$ coïncident presque partout. Dans le cas où f est strictement convexe, le lemme 11 montre alors que η vaut m presque partout. \square

2.4 Relations entre convexité et pluri-sous-harmonicité

Théorème 13. *Soient E un \mathbb{C} -espace normable complet et $X \subset E$ un ouvert convexe, et soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si f est convexe, alors f est PSH, et si f est strictement convexe, alors f est strictement PSH.*

Démonstration. Supposons que f soit convexe et soit $\gamma : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow X$ une application holomorphe. D'après la formule de Cauchy et l'inégalité de Jensen,

$$\begin{aligned} f(\gamma(0)) &= f\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(e^{it}) dt\right) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\gamma(e^{it})) dt. \end{aligned}$$

Cela montre que f est PSH. S'il y a égalité, dans le cas où f est strictement convexe, γ est essentiellement constante sur le cercle, donc constante sur $\overline{\mathbb{D}}$ par prolongement analytique, de sorte que f est strictement PSH. \square

Remarque. Le théorème 13 montre notamment que toute forme linéaire continue réelle $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est PSH. Ce cas particulier est d'ailleurs une conséquence directe de la formule de Cauchy, qui ne nécessite pas l'inégalité de Jensen.

Théorème 14. *Soit E un \mathbb{C} -espace normable complet. Soit σ une involution continue anti-linéaire de E , et soit $E_{\mathbb{R}}$ le sous-espace vectoriel réel de E fixé par σ , de sorte que $E = E_{\mathbb{R}} \oplus iE_{\mathbb{R}}$. Notons $\pi_{\mathbb{R}} : E \rightarrow E_{\mathbb{R}}$ le projecteur sur $E_{\mathbb{R}}$ parallèlement à $iE_{\mathbb{R}}$. Soit $f_{\mathbb{R}} : E_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $f = f_{\mathbb{R}} \circ \pi_{\mathbb{R}}$. Alors $f_{\mathbb{R}}$ est convexe si et seulement si f est PSH, et $f_{\mathbb{R}}$ est strictement convexe si et seulement si f est strictement PSH.*

Démonstration. Supposons que $f_{\mathbb{R}}$ soit convexe et soit $\gamma : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow E$ une application holomorphe. D'après la formule de Cauchy et l'inégalité de Jensen,

$$\begin{aligned} f(\gamma(0)) &= f\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(e^{it}) dt\right) \\ &= f_{\mathbb{R}}\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \pi_{\mathbb{R}}(\gamma(e^{it})) dt\right) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\gamma(e^{it})) dt. \end{aligned}$$

Cela montre que f est PSH. S'il y a égalité, dans le cas où $f_{\mathbb{R}}$ est strictement convexe, $\pi_{\mathbb{R}} \circ \gamma$ est essentiellement constante sur le cercle, donc constante par continuité, et cette constante est $(\pi_{\mathbb{R}} \circ \gamma)(0)$. Si $\lambda : E_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue, les mêmes faits sont valables pour $\lambda \circ \pi_{\mathbb{R}} \circ \gamma$. Donc cette fonction, qui est PSH sur \mathbb{D} , y atteint un maximum; elle est donc constante. On en déduit que $\pi_{\mathbb{R}} \circ \gamma$ est elle-même constante sur \mathbb{D} . Par conséquent, l'image de la différentielle de γ est, en tout point de \mathbb{D} , un sous-espace vectoriel complexe de E contenu dans $iE_{\mathbb{R}}$; or un tel sous-espace est nécessairement nul, donc γ est constante, de sorte que f est strictement PSH.

Supposons réciproquement que f soit PSH et soit $\gamma : [-1; 1] \rightarrow E_{\mathbb{R}}$ une application affine. Soit $\lambda : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ l'application linéaire vérifiant

$$\lambda(1) = \frac{f_{\mathbb{R}}(\gamma(-1)) - f_{\mathbb{R}}(\gamma(1))}{2},$$

et soit $g = f_{\mathbb{R}} \circ \gamma + \lambda$, de sorte que

$$g(0) = f_{\mathbb{R}}(\gamma(0)), \quad g(-1) = g(1) = \frac{f_{\mathbb{R}}(\gamma(-1)) + f_{\mathbb{R}}(\gamma(1))}{2}. \quad (7)$$

Soit $U \subset \mathbb{C}$ l'ouvert défini par la condition $-1 < \Re(z) < 1$, et soit \bar{U} son adhérence. Il existe une unique application affine complexe $\tilde{\gamma} : \bar{U} \rightarrow E$ étendant γ ; de plus, $\pi_{\mathbb{R}} \circ \tilde{\gamma} = \gamma \circ \Re$, de sorte que $f \circ \tilde{\gamma} = f_{\mathbb{R}} \circ \gamma \circ \Re$. La fonction $g \circ \Re = f \circ \tilde{\gamma} + \lambda \circ \Re$ est donc pSH sur U . D'après le principe du maximum, compte tenu des égalités (7),

$$f_{\mathbb{R}}(\gamma(0)) \leq \frac{f_{\mathbb{R}}(\gamma(-1)) + f_{\mathbb{R}}(\gamma(1))}{2}.$$

Cela montre que $f_{\mathbb{R}}$ est convexe. S'il y a égalité, $g \circ \Re$ est constante sur U , donc $f \circ \tilde{\gamma}$ ne peut être strictement pSH; dans le cas où f est strictement pSH, il s'ensuit que $\tilde{\gamma}$ est constante, donc γ également, de sorte que $f_{\mathbb{R}}$ est strictement convexe. \square

Corollaire 15. *Une fonction continue $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ constante sur chaque droite verticale est pSH (resp. strictement pSH) si et seulement si sa restriction à \mathbb{R} est convexe (resp. strictement convexe).*

3 Espaces

3.1 Espaces strictement convexes

Proposition 16. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbb{R} -espace vectoriel normé. La fonction $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de l'inégalité triangulaire. \square

Théorème 17. *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbb{R} -espace vectoriel normé. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Toute application affine $\gamma : [-1; 1] \rightarrow E$ dont l'image est contenue dans la sphère unité est constante.*
2. *Pour toute application croissante strictement convexe $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, la composée $\psi \circ \|\cdot\|$ est strictement convexe.*
3. *Il existe une application croissante strictement convexe $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que la composée $\psi \circ \|\cdot\|$ soit strictement convexe.*

Démonstration. Supposons la condition 1, et soient $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ croissante strictement convexe et $\gamma : [-1; 1] \rightarrow E$ affine. En utilisant successivement la convexité de $\|\cdot\|$, la croissance de ψ et la convexité de ψ , on obtient

$$\begin{aligned} \psi(\|\gamma(0)\|) &\leq \psi\left(\frac{\|\gamma(-1)\| + \|\gamma(1)\|}{2}\right) \\ &\leq \frac{\psi(\|\gamma(-1)\|) + \psi(\|\gamma(1)\|)}{2}. \end{aligned}$$

En cas d'égalité, en utilisant la stricte croissance et la stricte convexité de ψ , on obtient $\|\gamma(0)\| = \|\gamma(-1)\| = \|\gamma(1)\|$. Par conséquent, la fonction $\|\cdot\| \circ \gamma$, qui est convexe, possède un maximum sur l'intérieur de $[-1; 1]$; elle est donc constante. Donc l'image de γ est contenue dans une sphère, donc γ est constante. Cela prouve la condition 2.

La condition 2 implique trivialement la condition 3; supposons cette dernière réalisée et soient $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ croissante strictement convexe telle que $\psi \circ \|\cdot\|$ soit strictement convexe, et $\gamma : [-1; 1] \rightarrow E$ d'image contenue dans la sphère unité de $\|\cdot\|$. La composée $\psi \circ \|\cdot\| \circ \gamma$ est constante, donc γ est constante par stricte convexité de $\psi \circ \|\cdot\|$, d'où la condition 1. \square

Définition. Si les conditions du théorème 17 sont réalisées, on dit que $(E, \|\cdot\|)$ est strictement convexe.

3.2 Espaces strictement pluri-sous-harmoniques

Proposition 18. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbb{C} -espace de Banach. La fonction $\log\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est PSH.

Démonstration. Soit $\gamma : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe, et pour $r \in [0; 1]$, soit $N(r)$ le nombre de zéros de γ de module inférieur à r . D'après la formule de Jensen,

$$\log|\gamma(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|\gamma(e^{it})| dt - \int_0^1 \frac{N(r)}{r} dr.$$

Cela démontre l'énoncé lorsque $E = \mathbb{C}$ et $\|\cdot\| = |\cdot|$; il s'agit maintenant de se ramener à ce cas. Soit $\gamma : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow E$ une application holomorphe. D'après le théorème de Hahn-Banach [3, II, p. 67, cor. 1], il existe une forme linéaire continue $\lambda : E \rightarrow \mathbb{C}$ de norme inférieure à 1 telle que $\lambda(\gamma(0)) = \|\gamma(0)\|$. On a alors

$$\begin{aligned} \log\|\gamma(0)\| &= \log|\lambda(\gamma(0))| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|\lambda(\gamma(e^{it}))| dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\|\gamma(e^{it})\| dt. \end{aligned} \quad \square$$

Définition. Une application $\psi : \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est dite convexe si elle est continue et que sa restriction à \mathbb{R} est finie et convexe. Si de plus $\psi|_{\mathbb{R}}$ est strictement convexe, on dit que ψ est strictement convexe.

Remarque. Toute application convexe (resp. strictement convexe) $\psi : \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est croissante (resp. strictement croissante).

Le résultat suivant est une variante de l'inégalité de Jensen pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Lemme 19. Soient (S, Σ, μ) un espace mesuré de masse 1 et $f : S \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ une fonction mesurable majorée, et soit $\psi : \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ une application convexe. On a

$$\psi\left(\int_S f d\mu\right) \leq \int_S \psi \circ f d\mu.$$

Si de plus ψ est strictement convexe et que les deux membres sont finis et égaux, alors f est essentiellement constante.

Démonstration. Soit $m = \int_S f d\mu \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Une légère extension du lemme 11 montre qu'il existe une application continue $\alpha : \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dont la restriction à \mathbb{R} est affine telle que $\alpha \leq \psi$ et $\alpha(m) = \psi(m)$. On a

$$\begin{aligned} \psi\left(\int_S f d\mu\right) &= \alpha\left(\int_S f d\mu\right) \\ &= \int_S \alpha \circ f d\mu \\ &\leq \int_S \psi \circ f d\mu. \end{aligned}$$

Si les deux membres sont finis et égaux, alors $\alpha \circ f$ et $\psi \circ f$ coïncident presque partout. Supposons ψ strictement convexe. Si m est finie, alors α et ψ ne coïncident qu'en m et éventuellement en $-\infty$; or dans ce cas f est finie presque partout, donc f vaut m presque partout. Si $m = -\infty$, alors $\psi(-\infty) \in \mathbb{R}$ et α est constante égale à $\psi(-\infty)$, donc α et ψ ne coïncident qu'en $-\infty$, de sorte que f vaut $-\infty$ presque partout. \square

Théorème 20. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbb{C} -espace de Banach. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Toute application holomorphe $\gamma : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow E$ dont l'image est contenue dans la sphère unité est constante.
2. Pour toute application strictement convexe $\psi : \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, la composée $\psi \circ \log\|\cdot\|$ est strictement PSH.
3. Il existe une application strictement convexe $\psi : \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ telle que la composée $\psi \circ \log\|\cdot\|$ soit strictement PSH.

Démonstration. Supposons la condition 1, et soient $\psi : \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ strictement convexe et $\gamma : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow E$ holomorphe. En utilisant successivement le fait que $\log\|\cdot\|$ est PSH, la croissance de ψ et le lemme 19, on obtient

$$\begin{aligned} \psi(\log\|\gamma(0)\|) &\leq \psi\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\|\gamma(e^{it})\| dt\right) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\log\|\gamma(e^{it})\|) dt. \end{aligned}$$

En cas d'égalité, d'après le lemme 19, la fonction $\log\|\cdot\| \circ \gamma$ est essentiellement constante sur le cercle, donc constante par continuité; d'autre part, en utilisant la stricte croissance de ψ , on voit que cette constante est $\log\|\gamma(0)\|$. Par conséquent, la fonction $\log\|\cdot\| \circ \gamma$, qui est PSH sur \mathbb{D} , y atteint un maximum; elle est donc constante. Donc l'image de γ est contenue dans une sphère, donc γ est constante. Cela prouve la condition 2.

La condition 2 implique trivialement la condition 3; supposons cette dernière réalisée et soient $\psi : \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ strictement convexe telle que $\psi \circ \log\|\cdot\|$ soit strictement

PSH, et $\gamma : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow E$ d'image contenue dans la sphère unité de $\|\cdot\|$. La composée $\psi \circ \log\|\cdot\| \circ \gamma$ est constante, donc γ est constante puisque $\psi \circ \log\|\cdot\|$ est strictement PSH, d'où la condition 1. \square

Définition. Si les conditions du théorème 20 sont réalisées, on dit que $(E, \|\cdot\|)$ est strictement PSH.

Remarque. Thorp et Whitley [25, p. 641, th. 3.1] ont montré que si la condition 1 du théorème 20 est vérifiée pour toute application affine $\gamma : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow E$, alors $(E, \|\cdot\|)$ est strictement PSH.

Proposition 21. *Un \mathbb{C} -espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ qui est strictement convexe en tant que \mathbb{R} -espace de Banach est strictement PSH.*

Démonstration. En effet, s'il existe une application croissante strictement convexe $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\psi \circ \|\cdot\|$ soit strictement convexe, alors $\psi \circ \|\cdot\| = \psi \circ \exp \circ \log\|\cdot\|$ est strictement PSH d'après le théorème 13 ; le théorème 20 permet alors de conclure, puisque $\psi \circ \exp : \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est strictement convexe. \square

3.3 Pluri-sous-harmonicité et principe du maximum

Définition. On dit qu'un \mathbb{C} -espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ vérifie le principe du maximum si toute application holomorphe η d'une variété holomorphe connexe X dans E telle que $\|\eta\|$ possède un maximum local est constante.

Proposition 22. *Un \mathbb{C} -espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ vérifie le principe du maximum si et seulement s'il est strictement PSH.*

Démonstration. Si $(E, \|\cdot\|)$ vérifie le principe du maximum, il est clair que toute application holomorphe $\gamma : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow E$ dont l'image est contenue dans la sphère unité est constante, donc $(E, \|\cdot\|)$ est strictement PSH.

Réciproquement, supposons $(E, \|\cdot\|)$ strictement PSH, soient X une variété holomorphe connexe et $\eta : X \rightarrow E$ une application holomorphe telle que $\|\eta\|$ atteigne un maximum local en $x \in X$, et montrons que η est constante.

Par prolongement analytique, il suffit de montrer que η est constante au voisinage de x . On peut donc supposer que $\|\eta\|$ atteint un maximum *global* en x , auquel cas cette fonction est constante, puisqu'elle est PSH ; d'autre part, on peut supposer qu'il existe un biholomorphisme φ entre un voisinage ouvert équilibré de l'origine dans un \mathbb{C} -espace normable complet et X , vérifiant $\varphi(0) = x$. Soit alors $y \in X$. L'application holomorphe $\gamma : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow E$ donnée par $\gamma(z) = \eta(\varphi(z \cdot \varphi^{-1}(y)))$ est constante, puisque son image est contenue dans une sphère ; en particulier, $\gamma(0) = \gamma(1)$, c'est-à-dire $\eta(x) = \eta(y)$, ce qui montre que η est constante. \square

4 Intégrales directes

Dans toute cette partie, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

4.1 Mesurabilité

Soient (S, Σ, μ) un espace mesuré et $\mathcal{E} = (E_s)_{s \in S}$ une famille de \mathbb{K} -espaces de Banach, et posons

$$\Phi_{\mathcal{E}} = \{E_s \mid s \in S\}, \quad \Pi_{\mathcal{E}} = \prod_{s \in S} E_s, \quad \Omega_{\mathcal{E}} = \bigsqcup_{E \in \Phi_{\mathcal{E}}} E.$$

Munissons $\Phi_{\mathcal{E}}$ de la tribu discrète, $\Pi_{\mathcal{E}}$ de la topologie produit, et $\Omega_{\mathcal{E}}$ de la topologie union disjointe et de la tribu borélienne associée.

Remarques. $\Pi_{\mathcal{E}}$ s'identifie canoniquement à un fermé de $(\Omega_{\mathcal{E}})^S$. D'autre part, $\Omega_{\mathcal{E}}$ est métrisable, en tant qu'union disjointe d'espaces métrisables [2, IX, p. 16].

Définition. Si \mathcal{E} , vue comme application de S dans $\Phi_{\mathcal{E}}$, est mesurable, on dit que c'est une famille mesurable de \mathbb{K} -espaces de Banach.

Définition. Une section de \mathcal{E} est un élément de $\Pi_{\mathcal{E}}$. Une section mesurable de \mathcal{E} est une section qui, vue comme application de S dans $\Omega_{\mathcal{E}}$, est mesurable.

Définition. Soit σ une section mesurable de \mathcal{E} , et soit $\sigma(S)^* \subset \Omega_{\mathcal{E}}$ l'ensemble de ses valeurs non nulles.

- Si $\sigma(S)^*$ est fini, on dit que σ est simple.
- Si $\sigma(S)^*$ est séparable, on dit que σ est fortement mesurable.

Proposition 23. *Si la famille \mathcal{E} possède une section mesurable, alors elle est mesurable.*

Démonstration. En effet, si σ est une section mesurable de \mathcal{E} , pour tout sous-ensemble $X \subset \Phi_{\mathcal{E}}$, l'image réciproque de l'ouvert $\bigsqcup_{E \in X} E \subset \Omega_{\mathcal{E}}$ par σ est $\mathcal{E}^{-1}(X)$; cet ensemble est donc mesurable, donc \mathcal{E} est mesurable. \square

Proposition 24. *Pour chaque $E \in \Phi_{\mathcal{E}}$, soit v_E un élément de E . Pour toute section mesurable σ de \mathcal{E} , l'application $S \rightarrow \mathbb{R}_+$ donnée par $s \mapsto \|\sigma(s) - v_E\|_{E_s}$ est mesurable.*

Démonstration. Pour tout $E \in \Phi_{\mathcal{E}}$, l'application $\|\cdot - v_E\|_E$ est continue sur E . Les $\|\cdot - v_E\|_E$ induisent une application continue $\Omega_{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbb{R}_+$, qui est donc mesurable. Or si l'on compose cette application avec une section mesurable σ de \mathcal{E} , on obtient l'application définie dans l'énoncé, qui est par conséquent mesurable. \square

Corollaire 25. *Pour toute section mesurable σ de \mathcal{E} , l'application $s \mapsto \|\sigma(s)\|_{E_s}$ est mesurable.*

Proposition 26. *L'ensemble des sections mesurables et l'ensemble des sections fortement mesurables de \mathcal{E} sont séquentiellement fermés dans $\Pi_{\mathcal{E}}$.*

Démonstration. Soit $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente de sections mesurables. Sa limite σ est mesurable, étant limite simple de fonctions mesurables à valeurs dans un espace métrisable [6, p. 245, prop. 8.1.10].

Si de plus les σ_n sont fortement mesurables, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sigma_n(S)^*$ est séparable; la réunion $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \sigma_n(S)^*$ l'est donc aussi, de même que son adhérence; or cette dernière contient $\sigma(S)^*$, qui est donc séparable. Ainsi, σ est fortement mesurable. \square

Notation. Étant donnés $E \in \Phi_{\mathcal{E}}$, $A \in \Sigma$ tel que \mathcal{E} soit constante égale à E sur A , et $v \in E$, nous noterons $\sigma_{A,v}$ la section de \mathcal{E} égale à v sur A et nulle partout ailleurs.

Théorème 27. *Supposons \mathcal{E} mesurable.*

1. *Les sections simples de \mathcal{E} sont les sommes finies de sections de la forme $\sigma_{A,v}$. En particulier, l'ensemble des sections simples est un sous-espace vectoriel de $\Pi_{\mathcal{E}}$.*
2. *Toute section fortement mesurable de \mathcal{E} est limite d'une suite $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sections simples telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $s \in S$, $\|\sigma_n(s)\|_{E_s} \leq \|\sigma(s)\|_{E_s}$.
En particulier, l'ensemble des sections fortement mesurables est l'adhérence séquentielle de l'espace des sections simples ; c'est donc un sous-espace vectoriel de $\Pi_{\mathcal{E}}$.*

Démonstration de l'assertion 1. Pour toute section simple σ ,

$$\sigma = \sum_{v \in \sigma(S)^*} \sigma_{A_v, v},$$

où $A_v = \sigma^{-1}(\{v\})$. Réciproquement, considérons une section de la forme

$$\sigma = \sum_{i \in I} \sigma_{A_i, v_i},$$

où I est un ensemble fini. On peut supposer, quitte à réarranger l'écriture, que les A_i sont non vides et deux à deux disjoints et que les v_i sont non nuls et deux à deux distincts. Notons A la réunion des A_i . Étant donné un sous-ensemble quelconque $Z \subset \Omega_{\mathcal{E}}$, on a

$$\sigma^{-1}(Z) = \left(\bigcup_{v_i \in Z} A_i \right) \cup (\mathcal{E}^{-1}(\{E \in \Phi_{\mathcal{E}} \mid 0_E \in Z\}) \setminus A),$$

ce qui montre que σ est mesurable. De plus, $\sigma(S)^* = \{v_i \mid i \in I\}$ est fini, donc σ est une section simple. \square

Démonstration de l'assertion 2. Soit σ une section fortement mesurable de \mathcal{E} , soit $D \subset \sigma(S)^*$ une partie dénombrable dense, et soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une énumération de l'ensemble $\mathbb{Q}^\times D$ des multiples rationnels non nuls des éléments de D . Pour $n \in \mathbb{N}$ et $s \in S$, posons

$$R_n(s) = \{k \in \llbracket 0; n \rrbracket \mid v_k \in E_s \text{ et } \|v_k\|_{E_s} \leq \|\sigma(s)\|_{E_s}\}.$$

Si $R_n(s) = \emptyset$, posons $\sigma_n(s) = 0_{E_s}$; sinon, soit k le plus petit élément de $R_n(s)$ minimisant la quantité $\|\sigma(s) - v_k\|_{E_s}$, et posons $\sigma_n(s) = v_k$. Alors $\|\sigma_n(s)\|_{E_s} \leq \|\sigma(s)\|_{E_s}$, et la suite $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers σ .

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, l'ensemble $A_{n,k} = \sigma_n^{-1}(\{v_k\})$ est défini par la condition $v_k \in E_s$ et par des inégalités faisant intervenir les quantités $\|\sigma(s)\|_{E_s}$ et $\|\sigma(s) - v_l\|_{E_s}$, pour $l \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Grâce à la proposition 24, il est donc mesurable, donc $\sigma_n = \sum_{k=0}^n \sigma_{A_{n,k}, v_k}$ est une section simple. \square

4.2 Intégrabilité

Supposons désormais \mathcal{E} mesurable, et fixons $p \in [1; \infty]$.

Définition. Soit σ une section mesurable de \mathcal{E} . On note $\|\sigma\|_p$ la norme p de la fonction $s \mapsto \|\sigma(s)\|_{E_s}$. On dit que σ est p -intégrable si $\|\sigma\|_p < \infty$.

Proposition 28. L'ensemble $\mathcal{L}^p(\mathcal{E})$ des sections fortement mesurables p -intégrables de \mathcal{E} est un sous-espace vectoriel de $\Pi_{\mathcal{E}}$, et $\|\cdot\|_p$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(\mathcal{E})$, dont le noyau est l'espace $\mathcal{N}(\mathcal{E})$ des sections fortement mesurables nulles presque partout.

Démonstration. Le fait que la fonction $\|\cdot\|_p$ sur l'espace des sections fortement mesurables soit positive, homogène et vérifie l'inégalité triangulaire découle des propriétés correspondantes pour les normes $\|\cdot\|_{E_s}$ et pour la norme p des fonctions mesurables réelles. Cela montre que $\mathcal{L}^p(\mathcal{E})$ est un sous-espace vectoriel de $\Pi_{\mathcal{E}}$ et que $\|\cdot\|_p$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(\mathcal{E})$. Le fait que le noyau de $\|\cdot\|_p$ soit $\mathcal{N}(\mathcal{E})$ découle à nouveau de la propriété correspondante pour la norme p des fonctions mesurables réelles. \square

Définition. On appelle intégrale directe L^p de la famille \mathcal{E} , et on note $L^p(\mathcal{E})$, le quotient $\mathcal{L}^p(\mathcal{E})/\mathcal{N}(\mathcal{E})$, muni de la norme $\|\cdot\|_p$.

Exemple. Si la famille \mathcal{E} est constante, égale à un espace de Banach E , alors $L^p(\mathcal{E})$ est l'espace de Bochner $L^p(S, \Sigma, \mu; E)$. En particulier, si $E = \mathbb{K}$, alors $L^p(\mathcal{E})$ est l'espace de Lebesgue $L^p(S, \Sigma, \mu; \mathbb{K})$.

Exemple. Supposons que Σ soit discrète, que μ soit la mesure de comptage, et que les E_s soient deux à deux distincts. Alors $L^p(\mathcal{E})$ est le sous-espace fermé $\ell_{\text{dén}}^p(\mathcal{E})$ de $\ell^p(\mathcal{E})$ constitué des sections à support dénombrable. Notons que $\ell_{\text{dén}}^p(\mathcal{E}) = \ell^p(\mathcal{E})$ sauf si $p = \infty$ et que l'ensemble des $s \in S$ tels que E_s soit non nul n'est pas dénombrable.

Exemple. Lorsque tous les E_s sont des espaces de Hilbert, $L^2(\mathcal{E})$ est un espace de Hilbert. On retrouve en particulier la notion d'intégrale directe hilbertienne, telle qu'elle est définie dans [23, pp. 22-27]. En effet, étant donné un champ \mathcal{H} d'espaces de Hilbert muni d'une cohérence α , selon la terminologie de cet ouvrage, on obtient canoniquement une famille \mathcal{E} dont tous les termes sont égaux à l'un des espaces ℓ_n^2 , pour $n \in \mathbb{N}$, ou ℓ_∞^2 . Si \mathcal{H} est borélien, alors \mathcal{E} est mesurable, et $L^2(\mu; \mathcal{H}, \alpha)$ s'identifie à $L^2(\mathcal{E})$.

Le résultat suivant généralise les deux premiers exemples ci-dessus.

Théorème 29. Pour $E \in \Phi_{\mathcal{E}}$, soit $S_E = \mathcal{E}^{-1}(\{E\})$, et notons Σ_E et μ_E les restrictions de Σ et de μ à S_E . Il existe un isomorphisme isométrique canonique

$$L^p(\mathcal{E}) \simeq \ell_{\text{dén}}^p \left((L^p(S_E, \Sigma_E, \mu_E; E))_{E \in \Phi_{\mathcal{E}}} \right).$$

Démonstration. Tout d'abord, pour $\sigma \in \Pi_{\mathcal{E}}$ et $E \in \Phi_{\mathcal{E}}$, notons $\sigma_E : S_E \rightarrow E$ la restriction de σ à S_E . L'application $\sigma \mapsto (\sigma_E)_{E \in \Phi_{\mathcal{E}}}$ est un isomorphisme

$$\Pi_{\mathcal{E}} \simeq \prod_{E \in \Phi_{\mathcal{E}}} E^{S_E}.$$

Ensuite, l'image de l'espace des sections fortement mesurables par cet isomorphisme est l'espace des familles à support dénombrable de sections fortement mesurables.

En effet, si σ est fortement mesurable, alors $(\sigma_E)_{E \in \Phi_{\mathcal{E}}}$ est une famille de sections fortement mesurables, qui est à support dénombrable puisque $\sigma(S)^*$ est séparable. Inversement, si $(\sigma_E)_{E \in \Phi_{\mathcal{E}}}$ est une famille à support dénombrable de sections fortement mesurables, la mesurabilité de \mathcal{E} permet de voir que pour tout $E \in \Phi_{\mathcal{E}}$, la section de \mathcal{E} obtenue en étendant σ_E par zéro est fortement mesurable. Par conséquent, σ est fortement mesurable, étant somme d'une famille dénombrable de sections fortement mesurables.

Enfin, si σ est fortement mesurable, alors

$$\|\sigma\|_p = \left\| \left(\|\sigma_E\|_p \right)_{E \in \Phi_{\mathcal{E}}} \right\|_p.$$

On obtient donc un isomorphisme isométrique

$$\mathcal{L}^p(\mathcal{E}) \simeq \ell_{\text{dén}}^p \left((\mathcal{L}^p(S_E, \Sigma_E, \mu_E; E))_{E \in \Phi_{\mathcal{E}}} \right).$$

Il reste à passer au quotient de chaque côté par le noyau de la semi-norme correspondante pour conclure. \square

Définition. On dit que la famille \mathcal{E} est discrète si la mesure image de μ par \mathcal{E} est concentrée sur l'ensemble de ses atomes, c'est-à-dire si $\mu(\mathcal{E}^{-1}(X)) = 0$, où $X = \{E \in \Phi_{\mathcal{E}} \mid \mu(S_E) = 0\}$.

Remarque. Supposons que μ soit σ -finie et que \mathcal{E} ne soit pas discrète. Alors il existe une partie mesurable de $\mathcal{E}^{-1}(X)$ de mesure finie non nulle. La mesure image par \mathcal{E} de la restriction de μ à cette partie est une mesure finie, non nulle et sans atome sur $\Phi_{\mathcal{E}}$. Cela entraîne que le cardinal de $\Phi_{\mathcal{E}}$ est supérieur à un cardinal inaccessible [13, pp. 58-59]. Par conséquent, lorsque μ est σ -finie, l'existence d'une famille \mathcal{E} mesurable non discrète n'est pas démontrable dans ZFC. En pratique, toutes les familles mesurables sont donc discrètes dans cette situation.

Proposition 30. *Supposons que μ soit σ -finie et que \mathcal{E} soit discrète. Alors pour presque tout $s \in S$, il existe un plongement isométrique $E_s \rightarrow L^p(\mathcal{E})$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que tout $E \in \Phi_{\mathcal{E}}$ tel que $\mu(S_E) > 0$ se plonge dans $L^p(\mathcal{E})$. Or si cette condition est satisfaite, comme μ est σ -finie, il existe une partie mesurable $A \subset S_E$ de mesure finie non nulle, et l'application qui à $v \in E$ associe la classe de $\mu(A)^{-\frac{1}{p}} \sigma_{A,v}$ dans $L^p(\mathcal{E})$ est un plongement isométrique. \square

4.3 Complétude des intégrales directes

Définition. Soit X un espace topologique séparable, et soit $\sigma : X \rightarrow \mathcal{L}^p(\mathcal{E})$ une application telle que $\sigma(\cdot)(s) : X \rightarrow E_s$ soit continue pour tout $s \in S$. On dit que σ est une section à paramètre, et on note $\|\sigma\|_p$ la norme p de la fonction $s \mapsto \sup_{x \in X} \|\sigma(x)(s)\|_{E_s}$.

Remarque. Cette fonction est mesurable, car si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dense de points de X , alors $\sup_{x \in X} \|\sigma(x)(s)\|_{E_s} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\sigma(x_n)(s)\|_{E_s}$.

Théorème 31. Soit $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de sections à paramètre telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \|\sigma_n\|_p < \infty$. Il existe une section à paramètre $\sigma : X \rightarrow \mathcal{L}^p(\mathcal{E})$ telle que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| \sigma - \sum_{n=0}^N \sigma_n \right\|_p = 0.$$

De plus, pour presque tout $s \in S$, la série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n(\cdot)(s) : X \rightarrow E_s$ converge normalement et a pour somme $\sigma(\cdot)(s)$.

Démonstration. Soit $f : S \rightarrow [0; \infty]$ la fonction mesurable définie par

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x \in X} \|\sigma_n(x)(s)\|_{E_s}.$$

On a $\|f\|_p \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|\sigma_n\|_p < \infty$, donc f est finie presque partout. Posons pour $x \in X$ et $s \in S$

$$\sigma(x)(s) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n(x)(s) & \text{si } f(s) < \infty, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $s \in S$ tel que $f(s) < \infty$, on a

$$\sup_{x \in X} \left\| \sigma(x)(s) - \sum_{n=0}^N \sigma_n(x)(s) \right\|_{E_s} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \sup_{x \in X} \|\sigma_n(x)(s)\|_{E_s}.$$

Par conséquent,

$$\left\| \sigma - \sum_{n=0}^N \sigma_n \right\|_p \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|\sigma_n\|_p \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Finalement, σ est une section à paramètre vérifiant toutes les propriétés annoncées. \square

Corollaire 32. $L^p(\mathcal{E})$ est un \mathbb{K} -espace de Banach.

Démonstration. En effet, le théorème 31 appliqué à un espace X réduit à un point montre que toute série absolument convergente d'éléments de $L^p(\mathcal{E})$ est convergente, d'où le résultat d'après [2, IX, p. 37, cor. 2]. \square

4.4 Convexité stricte des intégrales directes

On suppose dans cette section que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Lemme 33. Pour toute application affine $\gamma : [-1; 1] \rightarrow L^p(\mathcal{E})$, il existe une section à paramètre $\tilde{\gamma} : [-1; 1] \rightarrow \mathcal{L}^p(\mathcal{E})$ relevant γ telle que pour tout $s \in S$, l'application $\tilde{\gamma}(\cdot)(s) : [-1; 1] \rightarrow E_s$ soit affine.

Démonstration. Il existe des éléments γ_0 et γ_1 de $L^p(\mathcal{E})$ tels que pour tout $t \in [-1; 1]$,

$$\gamma(t) = \gamma_0 + t\gamma_1.$$

Soient $\tilde{\gamma}_0$ et $\tilde{\gamma}_1$ des éléments de $\mathcal{L}^p(\mathcal{E})$ relevant γ_0 et γ_1 , et posons pour $t \in [-1; 1]$

$$\tilde{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}_0 + t\tilde{\gamma}_1.$$

Alors $\tilde{\gamma}$ est un relèvement de γ satisfaisant les conditions voulues. \square

Théorème 34. *Supposons que $1 < p < \infty$.*

1. *Si E_s est strictement convexe pour presque tout $s \in S$, alors $L^p(\mathcal{E})$ est strictement convexe.*
2. *Supposons que μ soit σ -finie et que \mathcal{E} soit discrète. Si $L^p(\mathcal{E})$ est strictement convexe, alors E_s est strictement convexe pour presque tout $s \in S$.*

Démonstration. Supposons que E_s soit strictement convexe pour presque tout s , et montrons que $L^p(\mathcal{E})$ est strictement convexe. D'après le théorème 17, cela revient à supposer que $\|\cdot\|_{E_s}^p$ est strictement convexe pour presque tout s , et il s'agit de montrer que $\|\cdot\|_p^p$ est strictement convexe.

Soit $\gamma : [-1; 1] \rightarrow L^p(\mathcal{E})$ une application affine, et soit $\tilde{\gamma}$ un relèvement de γ vérifiant l'énoncé du lemme 33. On a

$$\begin{aligned} \|\gamma(0)\|_p^p &= \int_S \|\tilde{\gamma}(0)(s)\|_{E_s}^p d\mu(s) \\ &\leq \int_S \frac{\|\tilde{\gamma}(-1)(s)\|_{E_s}^p + \|\tilde{\gamma}(1)(s)\|_{E_s}^p}{2} d\mu(s) \\ &= \frac{\|\gamma(-1)\|_p^p + \|\gamma(1)\|_p^p}{2}. \end{aligned}$$

S'il y a égalité, alors pour presque tout s ,

$$\|\tilde{\gamma}(0)(s)\|_{E_s}^p = \frac{\|\tilde{\gamma}(-1)(s)\|_{E_s}^p + \|\tilde{\gamma}(1)(s)\|_{E_s}^p}{2},$$

donc $\tilde{\gamma}(\cdot)(s)$ est constante pour presque tout s , donc γ est constante. Cela démontre l'assertion 1. L'assertion 2 découle de la proposition 30. \square

4.5 Pluri-sous-harmonicité stricte des intégrales directes

On suppose dans cette section que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Lemme 35. *Pour toute application holomorphe $\gamma : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow L^p(\mathcal{E})$, il existe une section à paramètre $\tilde{\gamma} : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathcal{L}^p(\mathcal{E})$ relevant γ telle que pour presque tout $s \in S$, l'application $\tilde{\gamma}(\cdot)(s) : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow E_s$ soit holomorphe.*

Démonstration. Il existe une suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $L^p(\mathcal{E})$ et un réel $r > 1$ tels que $\sum_{n=0}^{\infty} r^n \|\gamma_n\|_p < \infty$ et pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$,

$$\gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \gamma_n.$$

Soit $(\tilde{\gamma}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}^p(\mathcal{E})$ relevant $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$. D'après le théorème 31, appliqué à l'espace topologique $r\overline{\mathbb{D}}$ et aux sections à paramètre $z \mapsto z^n \tilde{\gamma}_n$, il existe une section à paramètre $\tilde{\gamma} : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathcal{L}^p(\mathcal{E})$ relevant γ telle que pour presque tout $s \in S$, $\sum_{n=0}^{\infty} r^n \|\tilde{\gamma}_n(s)\|_{E_s} < \infty$, et pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}$,

$$\tilde{\gamma}(z)(s) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \tilde{\gamma}_n(s).$$

Alors $\tilde{\gamma}$ est un relèvement de γ satisfaisant les conditions voulues. \square

Lemme 36 ([22, p. 122, lemma 9.2]). *Soient K un espace métrique compact et Y un espace topologique métrisable, munis de leurs tribus boréliennes $\mathcal{B}(K)$ et $\mathcal{B}(Y)$, et soit $f : K \times S \rightarrow Y$. Supposons que $f(x, \cdot) : S \rightarrow Y$ soit mesurable pour tout $x \in K$ et que $f(\cdot, s) : K \rightarrow Y$ soit continue pour tout $s \in S$. Alors f est mesurable par rapport à la tribu produit $\mathcal{B}(K) \times \Sigma$.*

Démonstration. Pour $n \geq 1$, soit $K = \bigsqcup_{i \in I_n} K_{n,i}$ une partition finie de K en ensembles boréliens de diamètre inférieur à $\frac{1}{n}$, et pour $i \in I_n$, soit $x_{n,i} \in K_{n,i}$. Soit $f_n : K \times S \rightarrow Y$ définie par $f_n(x, s) = f(x_{n,i}, s)$ pour $(x, s) \in K_{n,i} \times S$. Alors f_n est mesurable par rapport à $\mathcal{B}(K) \times \Sigma$, et la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers f , ce qui entraîne le résultat souhaité d'après [6, p. 245, prop. 8.1.10]. \square

Théorème 37. *Supposons que μ soit σ -finie et que $1 \leq p < \infty$.*

1. *Si E_s est strictement PSH pour presque tout $s \in S$, alors $L^p(\mathcal{E})$ est strictement PSH.*
2. *Supposons que \mathcal{E} soit discrète. Si $L^p(\mathcal{E})$ est strictement PSH, alors E_s est strictement PSH pour presque tout $s \in S$.*

Démonstration. Supposons que E_s soit strictement PSH pour presque tout s , et montrons que $L^p(\mathcal{E})$ est strictement PSH. D'après le théorème 20, cela revient à supposer que $\|\cdot\|_{E_s}^p$ est strictement PSH pour presque tout s , et il s'agit de montrer que $\|\cdot\|_p^p$ est strictement PSH.

Soit $\gamma : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow L^p(\mathcal{E})$ une application holomorphe, et soit $\tilde{\gamma}$ un relèvement de γ vérifiant l'énoncé du lemme 35. On a

$$\begin{aligned} \|\gamma(0)\|_p^p &= \int_S \|\tilde{\gamma}(0)(s)\|_{E_s}^p d\mu(s) \\ &\leq \int_S \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|\tilde{\gamma}(e^{it})(s)\|_{E_s}^p dt d\mu(s) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|\gamma(e^{it})\|_p^p dt, \end{aligned}$$

grâce au lemme 36, appliqué à la fonction $(t, s) \rightarrow \|\tilde{\gamma}(e^{it})(s)\|_{E_s}^p$, et au théorème de Fubini. S'il y a égalité, alors pour presque tout s ,

$$\|\tilde{\gamma}(0)(s)\|_{E_s}^p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|\tilde{\gamma}(e^{it})(s)\|_{E_s}^p dt,$$

donc $\tilde{\gamma}(\cdot)(s)$ est constante pour presque tout s , donc γ est constante. Cela démontre l'assertion 1. L'assertion 2 découle de la proposition 30. \square

A La méthode de Day

Cet appendice a pour but de redémontrer les théorèmes 34 et 37, sous l'hypothèse $1 < p < \infty$, par la méthode de Day [8, p. 520, th. 6]. Dans les deux cas, l'assertion 2 étant une conséquence de la proposition 30, il ne sera pas nécessaire d'y revenir.

Démonstration du théorème 34. Commençons par observer qu'un \mathbb{R} -espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est strictement convexe si et seulement si pour toute application affine $\gamma : [-1; 1] \rightarrow E$, les égalités $\|\gamma(0)\| = \|\gamma(-1)\| = \|\gamma(1)\|$ entraînent $\gamma(-1) = \gamma(1)$.

Ceci étant, soit $\gamma : [-1; 1] \rightarrow L^p(\mathcal{E})$ une application affine, soit $\tilde{\gamma}$ un relèvement de γ vérifiant l'énoncé du lemme 33, soit $\tilde{\rho} : [-1; 1] \rightarrow \mathcal{L}^p(S, \Sigma, \mu; \mathbb{R})$ l'application définie par $\tilde{\rho}(t)(s) = \|\tilde{\gamma}(t)(s)\|_{E_s}$, et soit $\rho : [-1; 1] \rightarrow L^p(S, \Sigma, \mu; \mathbb{R})$ la composée de $\tilde{\rho}$ et de l'application quotient. Pour tout $s \in S$, comme $\tilde{\gamma}(\cdot)(s)$ est affine et que $\|\cdot\|_{E_s}$ est convexe,

$$\tilde{\rho}(0)(s) \leq \frac{\tilde{\rho}(-1)(s) + \tilde{\rho}(1)(s)}{2}. \quad (8)$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \|\gamma(0)\|_p &= \|\rho(0)\|_p \\ &\leq \left\| \frac{\rho(-1) + \rho(1)}{2} \right\|_p \\ &\leq \frac{\|\rho(-1)\|_p + \|\rho(1)\|_p}{2} \\ &= \frac{\|\gamma(-1)\|_p + \|\gamma(1)\|_p}{2}. \end{aligned}$$

Si $\|\gamma(0)\|_p = \|\gamma(-1)\|_p = \|\gamma(1)\|_p$, alors il y a égalité, donc l'inégalité (8) est une égalité pour presque tout s , et de plus,

$$\left\| \frac{\rho(-1) + \rho(1)}{2} \right\|_p = \|\rho(-1)\|_p = \|\rho(1)\|_p. \quad (9)$$

Comme $L^p(S, \Sigma, \mu; \mathbb{R})$ est strictement convexe, les égalités (9) entraînent $\rho(-1) = \rho(1)$. Par conséquent, pour presque tout s , $\tilde{\rho}(0)(s) = \tilde{\rho}(-1)(s) = \tilde{\rho}(1)(s)$, c'est-à-dire $\|\tilde{\gamma}(0)(s)\|_{E_s} = \|\tilde{\gamma}(-1)(s)\|_{E_s} = \|\tilde{\gamma}(1)(s)\|_{E_s}$. Si E_s est strictement convexe pour presque tout s , il s'ensuit que $\gamma(-1) = \gamma(1)$, donc $L^p(\mathcal{E})$ est strictement convexe. \square

Lemme 38. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbb{R} -espace de Banach strictement convexe, (S, Σ, μ) un espace mesuré de masse 1, et $\eta : S \rightarrow E$ une application intégrable. On a

$$\left\| \int_S \eta \, d\mu \right\| \leq \int_S \|\eta\| \, d\mu.$$

S'il y a égalité et que $\|\eta\|$ est constante, alors η est essentiellement constante.

Démonstration. L'inégalité est claire. Supposons qu'il y ait égalité et que $\|\eta\|$ soit constante, et soit $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une application croissante strictement convexe. On a

$$\begin{aligned} \psi\left(\left\| \int_S \eta \, d\mu \right\|\right) &= \psi\left(\int_S \|\eta\| \, d\mu\right) \\ &= \int_S \psi(\|\eta\|) \, d\mu. \end{aligned}$$

Le lemme 12 montre alors que η est essentiellement constante, puisque $\psi \circ \|\cdot\|$ est strictement convexe. \square

Démonstration du théorème 37. Commençons par observer qu'un \mathbb{C} -espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ est strictement PSH si et seulement si pour toute application holomorphe $\gamma : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow E$, les égalités $\|\gamma(0)\| = \|\gamma(z)\|$, pour $|z| = 1$, entraînent que γ est constante sur le cercle.

Ceci étant, soit $\gamma : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow L^p(\mathcal{E})$ une application holomorphe, soit $\tilde{\gamma}$ un relèvement de γ vérifiant l'énoncé du lemme 35, soit $\tilde{\rho} : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathcal{L}^p(S, \Sigma, \mu; \mathbb{R})$ l'application définie par $\tilde{\rho}(z)(s) = \|\tilde{\gamma}(z)(s)\|_{E_s}$, et soit $\rho : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow L^p(S, \Sigma, \mu; \mathbb{R})$ la composée de $\tilde{\rho}$ et de l'application quotient. Pour presque tout $s \in S$, comme $\tilde{\gamma}(\cdot)(s)$ est holomorphe et que $\|\cdot\|_{E_s}$ est PSH,

$$\tilde{\rho}(0)(s) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{\rho}(e^{it})(s) \, dt. \quad (10)$$

Par conséquent, grâce au lemme 36, appliqué à la fonction $(t, s) \mapsto \tilde{\rho}(e^{it})(s)$, et au résultat [17, p. 26, prop. 1.2.25] permettant de calculer ponctuellement les intégrales à valeurs dans un espace L^p ,

$$\begin{aligned} \|\gamma(0)\|_p &= \|\rho(0)\|_p \\ &\leq \left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(e^{it}) \, dt \right\|_p \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|\rho(e^{it})\|_p \, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|\gamma(e^{it})\|_p \, dt. \end{aligned}$$

Si $\|\gamma(0)\|_p = \|\gamma(z)\|_p$ pour $|z| = 1$, alors il y a égalité, donc l'inégalité (10) est une égalité pour presque tout s , et de plus, pour $|z| = 1$,

$$\left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho(e^{it}) \, dt \right\|_p = \|\rho(z)\|_p. \quad (11)$$

Comme $L^p(S, \Sigma, \mu; \mathbb{R})$ est strictement convexe, les égalités (11) et le lemme 38 entraînent que ρ est essentiellement constante sur le cercle. Il existe donc une suite dense $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points du cercle telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour presque tout $s \in S$, $\tilde{\rho}(z_n)(s) = \tilde{\rho}(z_0)(s)$. On en déduit que pour presque tout s , pour $n \in \mathbb{N}$, $\tilde{\rho}(z_n)(s) = \tilde{\rho}(z_0)(s)$; et donc, par continuité, pour presque tout s , pour $|z| = 1$, $\tilde{\rho}(0)(s) = \tilde{\rho}(z)(s)$, c'est-à-dire $\|\tilde{\gamma}(0)(s)\|_{E_s} = \|\tilde{\gamma}(z)(s)\|_{E_s}$. Si E_s est strictement PSH pour presque tout s , il s'ensuit que γ est constante sur le cercle, donc $L^p(\mathcal{E})$ est strictement PSH. \square

Remarque. Dans la démonstration du théorème 34, la stricte convexité de $L^p(S, \Sigma, \mu; \mathbb{R})$ et les égalités (9) permettent de conclure que $\rho(-1) = \rho(1)$; la raison en est qu'il existe une application affine $[-1; 1] \rightarrow L^p(S, \Sigma, \mu; \mathbb{R})$ coïncidant avec ρ en -1 et en 1 . S'il existait de même, dans la démonstration du théorème 37, une application holomorphe $\overline{\mathbb{D}} \rightarrow L^p(S, \Sigma, \mu; \mathbb{C})$ coïncidant avec ρ sur le cercle, on pourrait utiliser la stricte pluri-sous-harmonicité de cet espace et les égalités (11) pour conclure que ρ est constante sur le cercle, auquel cas le raisonnement resterait valide pour $p = 1$. Malheureusement, ce n'est pas le cas *a priori*, ce qui laisse penser que la méthode de Day ne permet pas de démontrer le théorème 37 en toute généralité.

Références

- [1] Nicolas BOURBAKI : *Variétés différentielles et analytiques (Fascicule de résultats)*. Paragraphes 1 à 7, volume 1333 de *Actualités Scientifiques et Industrielles*. Hermann, Paris, 1967. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-34397-4>.
- [2] Nicolas BOURBAKI : *Topologie générale. Chapitres 5 à 10*. Hermann, Paris, 1974. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-34486-5>.
- [3] Nicolas BOURBAKI : *Espaces vectoriels topologiques. Chapitres 1 à 5*. Masson, Paris, 1981. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-34498-8>.
- [4] Hans-Joachim BREMERMAN : Complex convexity. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 82:17–51, 1956. <https://doi.org/10.2307/1992976>.
- [5] Robert CARMIGNANI : Strict complex convexity. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 57(2):285–290, 1976. <https://doi.org/10.2307/2041207>.
- [6] Donald L. COHN : *Measure theory*. Birkhäuser Advanced Texts : Basler Lehrbücher. Birkhäuser/Springer, New York, 2013. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6956-8>.
- [7] Mahlon M. DAY : Reflexive Banach spaces not isomorphic to uniformly convex spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 47(4):313–317, 1941. <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1941-07451-3>.
- [8] Mahlon M. DAY : Strict convexity and smoothness of normed spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 78:516–528, 1955. <https://doi.org/10.2307/1993079>.
- [9] Marcel de JEU et Jan ROZENDAAL : Disintegration of positive isometric group representations on L^p -spaces. *Positivity*, 21(2):673–710, 2017. <https://doi.org/10.1007/s11117-017-0499-4>.

- [10] Joseph DIESTEL et John Jerry UHL : *Vector measures*, volume 15 de *Mathematical Surveys*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1977. <https://doi.org/10.1090/surv/015>.
- [11] Stephen J. DILWORTH : Complex convexity and the geometry of Banach spaces. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 99(3):495–506, 1986. <https://doi.org/10.1017/S0305004100064446>.
- [12] Adrien DOUADY : Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 16(1):1–95, 1966. <https://doi.org/10.5802/aif.226>.
- [13] Herbert FEDERER : *Geometric measure theory*, volume 153 de *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, New York, 1969. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-62010-2>.
- [14] Josip GLOBEVNIK : On complex strict and uniform convexity. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 47(1):175–178, 1975. <https://doi.org/10.2307/2040227>.
- [15] Richard G. HAYDON, Mireille F. LEVY et Yves RAYNAUD : *Randomly normed spaces*, volume 41 de *Travaux en Cours*. Hermann, Paris, 1991.
- [16] Lars HÖRMANDER : *Notions of convexity*, volume 127 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser, Boston, MA, 1994. <https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4585-4>.
- [17] Tuomas HYTÖNEN, Jan van NEERVEN, Mark VERAAR et Lutz WEIS : *Analysis in Banach spaces. Vol. I. Martingales and Littlewood-Paley theory*, volume 63 de *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics*. Springer, Cham, 2016. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-48520-1>.
- [18] Vasile I. ISTRĂȚESCU et Ioana ISTRĂȚESCU : On complex strictly convex spaces. I. *J. Math. Anal. Appl.*, 70(2):423–429, 1979. [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(79\)90055-6](https://doi.org/10.1016/0022-247X(79)90055-6).
- [19] James E. JAMISON, Irene H. LOOMIS et Cecil C. ROUSSEAU : Complex strict convexity of certain Banach spaces. *Monatsh. Math.*, 99(3):199–211, 1985. <https://doi.org/10.1007/BF01295154>.
- [20] Pierre LELONG : Les fonctions plurisousharmoniques. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, 62(4):301–338, 1945. <https://doi.org/10.24033/asens.927>.
- [21] Pierre LELONG : Fonctions plurisousharmoniques dans les espaces vectoriels topologiques. In *Séminaire Pierre Lelong (Analyse). Année 1967-1968*, volume 71 de *Lecture Notes in Math.*, pages 167–190. Springer, Berlin, 1968. <https://doi.org/10.1007/BFb0080107>.
- [22] George W. MACKEY : Induced representations of locally compact groups. I. *Ann. of Math. (2)*, 55(1):101–139, 1952. <https://doi.org/10.2307/1969423>.
- [23] Ole A. NIELSEN : *Direct integral theory*, volume 61 de *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker, New York, 1980. <https://doi.org/10.1201/9781003072607>.

- [24] Kiyosi OKA : Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. VI. Domaines pseudoconvexes. *Tôhoku Math. J.*, 49:15–52, 1942. https://www.jstage.jst.go.jp/article/tmj1911/49/0/49_0_15/_article.
- [25] Edward O. THORP et Robert J. WHITLEY : The strong maximum modulus theorem for analytic functions into a Banach space. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 18(4):640–646, 1967. <https://doi.org/10.2307/2035432>.

Anne-Edgar WILKE, Univ. Bordeaux, CNRS, INRIA, Bordeaux INP, IMB, UMR 5251, F-33400 Talence, France