



**HAL**  
open science

## Couplage FEM-PUFEM : vers de meilleures performances de la pufem en présence de détails géométriques

Christophe Langlois, Jean-Daniel Chazot, E. Perrey-Debain

### ► To cite this version:

Christophe Langlois, Jean-Daniel Chazot, E. Perrey-Debain. Couplage FEM-PUFEM : vers de meilleures performances de la pufem en présence de détails géométriques. 16e Congrès Français d'Acoustique de la SFA 2022, Société Française d'Acoustique; Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, Apr 2022, Marseille, France. hal-03821288

**HAL Id: hal-03821288**

**<https://hal.science/hal-03821288>**

Submitted on 19 Oct 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



16<sup>ème</sup> Congrès Français d'Acoustique  
11-15 Avril 2022, Marseille

## Couplage FEM-PUFEM : vers de meilleures performances de la pufem en présence de détails géométriques

C. Langlois<sup>a</sup>, J-D. Chazot<sup>a</sup>, and E. Perrey-Debain<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Université de technologie de Compiègne. Laboratoire Roberval, France



Pour modéliser les phénomènes ondulatoires plusieurs méthodes numériques existent. Les plus connues et plus utilisées sont, sans doutes, la méthode des éléments finis (FEM) et la méthode des éléments de frontières. Mais le coût de ces méthodes croît avec le nombre d'oscillations dans le domaine ce qui les rend, en pratique, inutilisable dans le domaine des moyennes à hautes fréquences. Dans ce domaine fréquentiel la méthode des éléments finis avec partition de l'unité (PUFEM) est une bonne alternative. Elle permet d'obtenir des résultats précis avec de grands éléments et peu de degrés de libertés. Avec cette méthode plus les éléments sont grands plus le gain en terme de temps de calcul et de compression de données est significatif. Mais, en présence de géométries complexes il est nécessaire de raffiner la taille des éléments pour minimiser l'erreur d'interpolation géométrique. Ce qui tend à diminuer significativement l'efficacité de la méthode. Ici, pour palier à ce problème, nous proposons un modèle hybride qui couple la FEM avec la PUFEM. Grâce à cette méthode, les détails géométriques sont pris en compte par la FEM alors que le reste du domaine est occupé par de grands éléments PUFEM. De cette manière nous préservons l'efficacité de la PUFEM en présence de géométries compliquées.

## 1 Introduction

La modélisation numérique de problèmes acoustiques dans le domaine des moyennes fréquences a motivé beaucoup de recherches depuis plusieurs décennies. Il était en effet nécessaire de développer des alternatives aux méthodes dites *basses fréquences* telles que la méthode des éléments finis (FEM) [1] et la méthode des éléments de frontière [2] car le coût de ces méthodes croît avec la fréquence, ce qui les rend en pratique trop onéreuses pour être utilisées dans le domaine des moyennes fréquences. De plus elles souffrent de problèmes de dispersion et de pollution [3].

Cette motivation a donné naissance à de nombreuses méthodes. Une pratique populaire pour atteindre le domaine des moyennes fréquences consiste à tenir compte du caractère ondulatoire de la solution dans les bases d'approximations. Cela a donné lieu aux méthodes dites *de Trefftz* comme la formulation variationnelle ultra faible (UWVF) [4], la méthode à enrichissement discontinu [5] ou la théorie variationnelle des rayons complexes (TVRC) [6]. La popularité de la FEM a motivé le développement de méthodes basées sur cette dernière telles que la méthode des éléments finis à haut ordre [7], la wave-FEM [8] ou encore la méthode des éléments finis avec partition de l'unité (PUFEM) [9]. La PUFEM diffère de la FEM par l'ajout de bases d'enrichissement aux noeuds du maillage. L'ajout de ces bases permet de capturer plusieurs longueurs d'ondes par éléments avec peu de degrés de liberté tout en maintenant une précision accrue. Il a été montré dans le cas de l'acoustique linéaire qu'utiliser des ondes planes solutions de l'équation de Helmholtz homogène comme base d'enrichissement assure les meilleurs convergences [10]. Dans ce cas la méthode se rapproche des méthodes de Trefftz. Le fait que cette méthode soit très similaire à la FEM en fait une méthode très souple et simple à implémenter dans un code FEM existant.

Depuis les années 90 la PUFEM a reçu beaucoup d'attention, particulièrement dans le domaine de l'acoustique où ont été notamment étudié les milieux absorbants [11], les matériaux poreux [12], les milieux avec sauts de célérité [13], les condition de non-réflexions [14, 15]. Pour améliorer les performances de la PUFEM acoustique en termes de temps de calcul un schéma d'intégration analytique a été

développé [16]. Au travers de toutes ces études il apparaît que la PUFEM est une méthode particulièrement efficace pour modéliser des champs hautement oscillants avec peu d'éléments qui s'étendent sur un grand nombre de longueurs d'ondes ce qui se traduit par un faible coût de calcul. En revanche il a été soulevé qu'en présence de détails géométriques la taille des éléments doit être raffiné menant à des éléments qui s'étendent sur une fraction de longueur d'onde ce qui amenuise les performances de la méthode [15].

Dans ce papier le problème des détails géométriques est traité en introduisant une méthode hybride couplant FEM et PUFEM. La FEM est utilisée pour modéliser les détails géométriques et la PUFEM est utilisée pour la propagation des ondes dans le reste du domaine.

## 2 Formulation

Considérons le problème général d'acoustique décrit en figure 1a. Ce problème consiste en un milieu fluide  $\Omega$  dans lequel la pression est régit par l'équation d'Helmholtz qui, avec la convention temporelle  $e^{-i\omega t}$ , s'écrit

$$\Delta p + k^2 p = 0, \quad (1)$$

où  $p$  est la pression acoustique,  $k = \omega/c$  est le nombre d'onde,  $\omega$  est la pulsation et  $c$  est la célérité du son dans  $\Omega$ . Le domaine  $\Omega$  est borné par des frontières et au moins une d'entre elles est de forme irrégulière, ici  $\Gamma$ . Sur ces frontières sont imposées des condition de type Robin

$$Bp = \frac{\partial p}{\partial n} + g. \quad (2)$$

Résoudre ce type de problème dans le domaine des moyennes fréquences est possible en utilisant la PUFEM mais la présence des détails géométriques force les éléments PUFEM à être plus petits que la longueur d'onde ce qui amenuise les performances de la méthode [15]. Pour éviter ce problème, les détails géométriques sont encapsulés dans un petit domaine  $\Omega_S$  dans lequel la pression est approximée en avec des éléments finis classiques. Le reste du domaine  $\Omega_L$  est modélisé en utilisant de grands éléments PUFEM (cf figure 1b). Les deux domaines sont couplés en imposant la continuité des pressions sur l'interface de couplage  $\Gamma_c$

$$p_S = p_L \text{ sur } \Gamma_c. \quad (3)$$

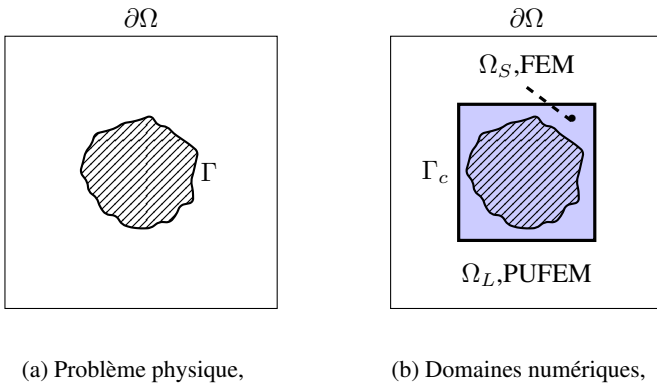


FIGURE 1 – Problème général.

## 2.1 Formulation variationnelle

L'application d'un schéma de résidus pondérés de Galerkin sur l'équation 1 mène à

$$\int_{\Omega_X} \nabla p_X \nabla \delta p_X - k^2 p_X \delta p_X d\Omega = \int_{\partial\Omega_X \cup \Gamma} \frac{\partial p_X}{\partial n_X} \delta p_X d\Gamma, \quad (4)$$

où  $X$  fait référence à  $S$  ou  $L$ . La continuité des pressions est imposée de façon faible en introduisant le multiplicateur de Lagrange défini comme la dérivée normale de la pression sur l'interface de couplage

$$\Lambda = \frac{\partial p_L}{\partial n_L} = -\frac{\partial p_S}{\partial n_S}, \quad (5)$$

ce qui mène au système couplé

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_L} \nabla p_L \nabla \delta p_L - k^2 p_L \delta p_L d\Omega = \\ \dots \int_{\Gamma_c} \Lambda \delta p_L + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p_L}{\partial n} \delta p_L d\Gamma, \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega_S} \nabla p_S \nabla \delta p_S - k^2 p_S \delta p_S d\Omega = \\ \dots - \int_{\Gamma_c} \Lambda \delta p_S + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial p_S}{\partial n} \delta p_S d\Gamma, \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\int_{\Gamma_c} p_L \delta \Lambda d\Gamma - \int_{\Gamma_c} p_S \delta \Lambda d\Gamma = 0. \quad (8)$$

## 2.2 Formulation des éléments

La formulation des éléments PUFEM est aujourd'hui bien établie pour l'acoustique linéaire et il a été montré qu'utiliser des ondes planes solution de l'équation de Helmholtz homogène comme base d'enrichissement donne les meilleurs résultats [10]. Ici, par construction, les bords du domaine PUFEM  $\Omega_L$  sont droits, par conséquent, nous pouvons utiliser des éléments isoparamétriques avec des fonctions de formes linéaire

$$p_L = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^{Q_i} N_i \exp(ik \mathbf{d}_{ij} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)) A_{ij} \quad (9)$$

où  $N_i$  est la fonction de forme linéaire associée au noeud  $i$ , le vecteur  $\mathbf{r}_i$  est le vecteur position du noeud  $i$ , le vecteur  $\mathbf{d}_{ij}$  est la direction de la  $j^{\text{ème}}$  onde plane associée au noeud  $i$  et  $A_{ij}$  est l'amplitude de la  $j^{\text{ème}}$  onde plane associée au noeud  $i$ . Les directions des ondes planes sont équiréparties sur le cercle unité et le nombre d'onde planes par noeuds  $Q_i$  est réglé automatiquement [17]

$$Q_i = \text{round} \left( kh_i + C(kh_i)^{1/3} \right) \quad (10)$$

où  $h_i$  est la longueur de la plus longue arête attachée au noeud  $i$  et  $C$  est un paramètre entier choisi dans l'intervalle  $[2, 20]$  permettant de modifier le nombre d'ondes planes par noeuds.

Pour le domaine FEM nous utilisons des éléments triangulaires quadratiques et isoparamétriques

$$p_S = \sum_{i=1}^6 N_i p_i \quad (11)$$

où  $p_i$  est l'amplitude nodale de la pression au noeud  $i$ .

Les multiplicateurs de Lagrange sont considérés comme des éléments PUFEM 1D et sont générés comme de simples copies des éléments de bords du domaine  $\Omega_L$

$$\Lambda = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{Q_i} N_i \exp(ik \mathbf{d}_{ij} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)) \Lambda_{ij} \quad (12)$$

Les intégrales de couplages sont de la forme générale

$$\int_{\Gamma} \Lambda p_X d\Gamma. \quad (13)$$

Pour calculer ce type d'intégrales avec des maillages incompatibles nous utilisons la méthode développée dans la section 2.4 de [18].

## 3 Résultats

Bien que la méthode soit faite pour modéliser des détails géométriques, la méthode est testée sur un problème simple afin d'avoir une solution de référence analytique. Le problème en question est schématisé en figure 2, il consiste en une cavité acoustique carrée de 1m de côté et sur la frontière  $\Gamma$  est imposé

$$\frac{\partial p}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \cos 2\pi x. \quad (14)$$

Le domaine acoustique est découpé en deux sous domaines :  $\Omega_L$  contenant de grands éléments PUFEM et  $\Omega_S$  (délimité en rouge sur la figure 2) contenant de petits éléments FEM.

Pour exhiber la précision de la méthode une étude de convergence est réalisée. Pour cela il faut un processus de raffinement et un critère de qualité de la solution. Un raffinement en  $h$  dans le domaine  $\Omega_S$  est utilisé pour raffiner le modèle, le maillage PUFEM reste inchangé par ce processus et le domaine PUFEM est maillé de façon à

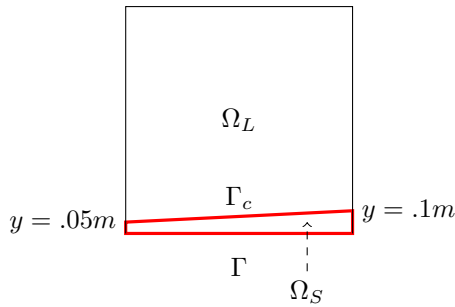


FIGURE 2 – Cas test.

avoir des éléments les plus grands possible. Pour juger de la qualité de la solution nous calculons l'erreur en norme  $\mathcal{L}_2$  en utilisant la solution analytique comme référence.

La courbe de convergence correspondante est présentée en figure 3. Il apparaît que le méthode converge avec des niveaux d'erreur plus que satisfaisants, en l'occurrence  $3 \times 10^{-3}\%$ . En FEM classique il existe une règle de maillage empirique qui préconise qu'il faut au moins 10 éléments par longueurs d'ondes pour obtenir une précision satisfaisante (inférieure à 1% typiquement). En figure 3, le point à partir duquel la règle de maillage est vérifiée apparaît en rouge. Dans cette configuration il y a 13 éléments FEM par longueurs d'ondes ce qui mène à un niveau d'erreur de  $2.5 \times 10^{-2}\%$ .

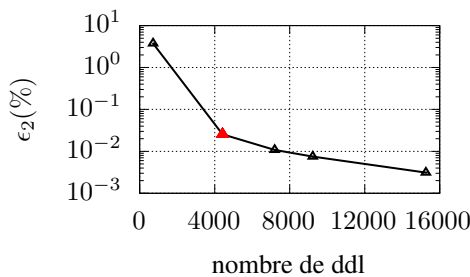


FIGURE 3 – Convergence à 2 500Hz.

La figure 4 représente le champ de pression associé au point rouge de la figure 3. Cette figure met en évidence la capacité de la méthode à capturer un large nombre de longueurs d'ondes avec peu d'éléments PUFEM, en effet ici les éléments PUFEM s'étendent sur au moins 6 longueurs d'ondes.

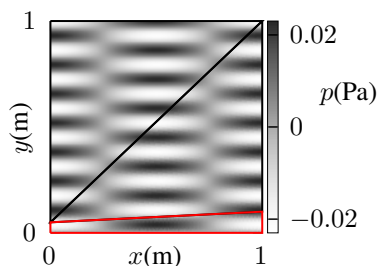


FIGURE 4 – Champ de pression à 2 500Hz. Lignes noires : maillage PUFEM ; Lignes rouges : limite du domaine FEM.

## 4 Conclusion

Dans cet article nous proposons une méthode pour améliorer les performances de la PUFEM en présence de détails géométriques. La méthode est basée sur l'encapsulation des détails géométriques dans de petits domaines FEM couplés à de large domaines PUFEM via des multiplicateurs de Lagrange. En nous basant sur une analyse de convergence nous avons montré la stabilité de la méthode sur un cas simple. De plus, nous avons vérifié que les résultats obtenus en suivant la règle de maillage empirique dans le domaine FEM, qui préconise un minimum de 10 éléments par longueur d'ondes, sont précis avec une erreur de  $10^{-2}\%$  dans le cas présenté. La méthode présentée ici est un point de départ pour d'avantage de recherche, des efforts peuvent être entrepris pour diminuer le nombre de degrés de liberté associés au domaine FEM. La méthode pourrait aussi être étendue à des cas 3D.

## Références

- [1] O.C. Zienkiewicz. *The finite element method*, volume 3. McGraw-hill London, 1977.
- [2] C. A. Brebbia, J. C. F. Telles, and L. C. Wrobel. *Boundary Element Techniques*. Springer Berlin Heidelberg, 1984.
- [3] A. Deraemaeker, I. Babuska, and P. Bouillard. Dispersion and pollution of the fem solution for the helmholtz equation in one, two and three dimensions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(4) :471–499, 1999.
- [4] O. Cessenat and B. Despres. Application of an ultra weak variational formulation of elliptic PDEs to the two-dimensional helmholtz problem. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 35(1) :255–299, feb 1998.
- [5] C. Farhat, I. Harari, and L.P. Franca. The discontinuous enrichment method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(48) :6455–6479, 2001.
- [6] P. Ladevèze. A new computational approach for structure vibrations in the medium frequency range. *Comptes Rendus de L Academie des Sciences Serie II Fascicule B-Mecanique Physique Chimie Astronomie*, 322(12) :849–856, 1996.
- [7] P. Solin, K. Segeth, and I. Dolezel. *Higher-Order Finite Element Methods*. Chapman and Hall/CRC, jul 2003.
- [8] J.-M. Mencik and M.N. Ichchou. Multi-mode propagation and diffusion in structures through finite elements. 24(5) :877–898, sep 2005.
- [9] J.M. Melenk and I. Babuška. The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1-4) :289–314, dec 1996.
- [10] O. Laghrouche, P. Bettess, E. Perrey-Debain, and J. Trevelyan. Plane wave basis finite-elements for wave

- scattering in three dimensions. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 19(9) :715–723, aug 2003.
- [11] J-D. Chazot, B. Nennig, and E. Perrey-Debain. Performances of the partition of unity finite element method for the analysis of two-dimensional interior sound fields with absorbing materials. 332(8) :1918–1929, apr 2013.
- [12] J-D. Chazot, E. Perrey-Debain, and B. Nennig. The partition of unity finite element method for the simulation of waves in air and poroelastic media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 135(2) :724–733, 2014.
- [13] O. Laghrouche, P. Bettess, E. Perrey-Debain, and J. Trevelyan. Wave interpolation finite elements for helmholtz problems with jumps in the wave speed. 194(2-5) :367–381, feb 2005.
- [14] O. Laghrouche, A. El-Kacimi, and J. Trevelyan. A comparison of NRBCs for PUFEM in 2d helmholtz problems at high wave numbers. 234(6) :1670–1677, jul 2010.
- [15] C. Langlois, J-D. Chazot, E. Perrey-Debain, and B. Nennig. Partition of unity finite element method applied to exterior problems with perfectly matched layers. *Acta Acustica*, 4(4) :16, 2020.
- [16] M. Yang, E. Perrey-Debain, B. Nennig, and J.-D. Chazot. Development of 3d PUFEM with linear tetrahedral elements for the simulation of acoustic waves in enclosed cavities. 335 :403–418, jun 2018.
- [17] T. Huttunen, P. Gamallo, and R. J. Astley. Comparison of two wave element methods for the helmholtz problem. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 25(1) :35–52, jan 2009.
- [18] C. Langlois, J-D. Chazot, L. Cheng, and E. Perrey-Debain. Partition of unity finite element method for 2d vibro-acoustic modeling. *Journal of Theoretical and Computational Acoustics*, 29(04), dec 2021.