



HAL
open science

Modèle paramétrique pour estimer la dégradation de la fiabilité de démarrage d'une turbine à gaz à partir de données d'essais

Artashes Asoyan, Eric Bondivenne, Nicolas Couellan, Sophie Humbert,
Thierry Klein

► To cite this version:

Artashes Asoyan, Eric Bondivenne, Nicolas Couellan, Sophie Humbert, Thierry Klein. Modèle paramétrique pour estimer la dégradation de la fiabilité de démarrage d'une turbine à gaz à partir de données d'essais. 23ème Congrès Lambda-Mu 23 de maîtrise des risques et de sûreté de fonctionnement (2022), Oct 2022, Paris Saclay, France. pp.1-6. hal-03820777

HAL Id: hal-03820777

<https://hal.science/hal-03820777>

Submitted on 19 Oct 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Modèle paramétrique pour estimer la dégradation de la fiabilité de démarrage d'une turbine à gaz à partir de données d'essais

Artashes ASOYAN

Ecole Nationale de l'Aviation Civile
Safran Helicopter Engines
Bordes, France
artashes.asoyan@outlook.com

Eric BONDIVENNE

Safran Helicopter Engines
Bordes, France
eric.bondivenne@safrangroup.com

Nicolas COUELLAN

Ecole Nationale de l'Aviation Civile
Institut de Mathématiques de Toulouse
Toulouse, France
nicolas.couellan@recherche.enac.fr

Sophie HUMBERT

Safran Helicopter Engines
Bordes, France
sophie.humbert@safrangroup.com

Thierry KLEIN

Ecole Nationale de l'Aviation Civile
Institut de Mathématiques de Toulouse
Toulouse, France
thierry01.klein@enac.fr

Résumé—L'objectif de cette étude est d'estimer la probabilité de démarrage d'un turbomoteur en tout point de l'espace des facteurs jugés influents. En l'absence de modèle physique du démarrage et de nombre limité de données, une méthode générale d'estimation de la probabilité de démarrage à travers un modèle de dégradation paramétrique est proposée. Le modèle est régi par la distance à un point où la probabilité de démarrage est 1. La sélection du modèle revient à estimer la matrice définissant la distance dans l'espace des facteurs influents. Cette matrice est estimée par maximum de vraisemblance. Une application industrielle à partir des données d'essais de turbomoteur d'hélicoptère est présentée. Les résultats numériques sont prometteurs mais ont montré qu'il est nécessaire de considérer une classe plus générique de modèle. Enfin à travers une étude de robustesse, le modèle a aussi montré une stabilité à des faibles perturbations des données d'essais.

Mots clés—Fiabilité, modèle paramétrique de dégradation, robustesse, maximum de vraisemblance, données d'essais, probit.

I. INTRODUCTION

Dans cet article on s'intéresse à la probabilité de succès de démarrage des turbomoteurs afin de déterminer une zone fiable de démarrage. La fiabilité est définie ici comme la probabilité de succès en un point ou une zone de l'espace, et non pas en fonction du temps comme cela se fait usuellement dans le domaine de la sûreté de fonctionnement. Le succès d'un démarrage est influencé par plusieurs facteurs (ex: la température, l'altitude, le débit d'air, le débit de carburant, la pollution d'air). Plusieurs essais de caractérisation sont effectués afin d'étudier au mieux l'influence de ces facteurs sur le démarrage. Ces essais font évoluer chaque facteur dans son domaine de variation. Ils ont pour but d'observer si un démarrage est réussi ou non dans l'espace multidimensionnel des paramètres. Cependant le nombre d'essais effectués n'est pas suffisant pour estimer une zone fiable avec des méthodes d'estimation de statistiques classiques

(comme la théorie des événements rares [1], [2], [3], [4], approches Bayésienne, apprentissage statistique [5], etc...). D'autre part, bien qu'il existe des travaux sur la physique impliquée dans le fonctionnement des turbomoteurs [6], [7], [8], [9], très peu de travaux décrivent les modèles physiques régissant le fonctionnement d'un turbomoteur dans la phase de démarrage. Nous ne disposons pas non plus de modèles physiques décrivant l'influence de chaque facteur individuellement sur le démarrage ainsi on ne peut pas compléter les données d'essais avec des points simulés. Dans [10], une modélisation du démarrage est proposée à partir d'un certain nombre de facteurs influents internes au turbomoteur. Mais ici on s'intéresse également aux facteurs externes impliqués (ex: la pollution de l'air, la température atmosphérique, la pression atmosphérique) auquel cas le modèle n'est pas applicable. D'autre part, il existe également des travaux traitant la fiabilité [11], [12], [13], [14], [15] mais bien souvent la notion de fiabilité est associée aux défaillances potentielles au cours du temps [16] et elle n'est pas calculée en un point ou une zone de l'espace, plus adaptée à la problématique étudiée ici.

En l'absence de modèle physique de démarrage et de données suffisantes en nombre, une méthode générale d'estimation de la probabilité de démarrage à travers un modèle de dégradation paramétrique est proposée ici. Notre approche, inspirée du modèle *probit* [17], consiste à définir une fonction de dégradation théorique à partir d'un point ou d'une zone supposée parfaite où la probabilité de succès de démarrage est 1 et la probabilité est supposée se dégrader autour de ce point à une certaine vitesse. Il est important de noter qu'ici la fonction de dégradation est indépendante du temps, elle représente une dégradation spatiale des performances de

démarrage. En effet elle ne décrit pas le vieillissement du turbomoteur mais elle a pour but d'évaluer la performance d'une conception particulière dans un environnement physique donné. Cet environnement est défini par plusieurs facteurs influents, par exemple la robustesse de démarrage est influencée par la variation de la température, altitude *etc...* Idéalement la fonction de dégradation doit être choisie de façon à représenter au mieux le phénomène étudié. Ici, on se limitera à la configuration d'un seul point parfait et la dégradation est choisie exponentielle en l'absence de connaissance a priori des phénomènes. Le point parfait est estimé en pratique à partir des données d'essais. Les paramètres de la dégradation exponentielle sont estimés à partir des données d'essais par maximum de vraisemblance à l'aide d'un algorithme d'optimisation numérique. La sélection des paramètres du modèle permet ensuite d'identifier les zones où la probabilité de démarrage est supérieure à un certain seuil.

L'article comporte quatre sections et est organisé comme suit. La section II est dédiée à la description du modèle de dégradation ainsi qu'à l'estimation par maximum de vraisemblance des paramètres du modèle. La section III propose une application numérique aux données industrielles et discute de la validité du modèle choisi. En section IV, la robustesse du modèle via des petites perturbations des données d'essais est analysée. La section V conclut l'article.

II. MODÈLE DE DÉGRADATION

Soit $x = (x_1, \dots, x_d) \in E \subset \mathbb{R}^d$ les facteurs influents du modèle où E représente la zone de variation des facteurs influents. L'objectif est d'estimer la fonction $F : E \rightarrow [0, 1]$ où $F(x)$ est la probabilité de démarrage du turbomoteur au point x de E .

Le nombre très restreint de points d'essais (environ 1200 en dimension 5, ce qui est comparable à 4 points en dimension 1), ne permet pas d'estimer de façon précise F sans hypothèse de forme a priori.

Définition 2.1: On appelle fonction de dégradation, toute application décroissante $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ telle que $g(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$.

Les hypothèses suivantes sont utilisées par la suite :

Hypothèses 2.1:

- 1) $\exists! \mu \in E$ tel que $F(\mu) = 1$ (ce point est appelé par la suite *point parfait*).
- 2) Il existe une norme $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}^d et une fonction de dégradation g telles que $F(x) = g(\|x - \mu\|)$.

Le modèle est inspiré du modèle *probit* [17] où la fonction F désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Dans ce travail, la norme est supposée associée à un produit scalaire $x^T A y$ pour $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ où A est une matrice symétrique positive.

Le problème d'estimation de la probabilité $F(x)$ pour tout $x \in E$ se réduit à l'estimation de la matrice A et de la fonction g . A ce stade, l'étude s'intéresse à l'estimation de A pour la fonction $g_1(x)$ où pour $q > 0$, g_q est définie par

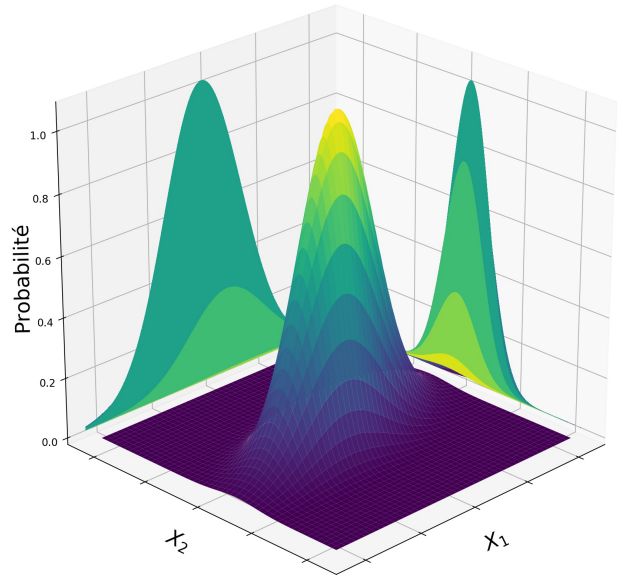


Figure 1: Exemple d'une forme de dégradation exponentielle fonction de deux facteurs influents X_1, X_2 .

$g_q(x) = \exp(-x^q)$. Le choix de q combiné à l'estimation de A permet de représenter un grand nombre de formes de dégradation spatiale, où la vitesse de décroissance peut être considérée très lente ou très rapide.

Remarque 2.2: Ici, l'étude se limite à $q = 2$ mais la méthode proposée s'étend naturellement à des choix de q généraux.

Les Figures 1 et 2 représentent respectivement la fonction F et ses lignes de niveaux pour $d = 2$, $\mu = 0$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -0.7 \\ -0.7 & 4 \end{pmatrix}$. Les lignes de niveaux représentent l'ensemble des points où le turbomoteur a la même probabilité de démarrage. Ainsi une ligne de niveau délimite la zone où la probabilité de démarrage est supérieure à un p donné. Cette zone est appelée *zone fiable* à un niveau de probabilité p donné.

A. Estimation de la matrice A

On dispose de N couples (x_i, Y_i) où $x_i \in E$ et $Y_i \in \{0, 1\}$ est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $p_i = F(x_i)$ représentant le résultat de l'essai i (succès ou échec de démarrage) (notée $\mathcal{B}(p_i)$). On se propose d'estimer la matrice symétrique A par maximum de vraisemblance :

$$\begin{aligned} \max_{A \in \mathbb{R}^{d \times d}} L(A) \\ \text{s.c. } A \succ 0 \end{aligned} \quad (1)$$

avec

$$L(A) = \prod_{i=1}^N \left(e^{-X_i^T A X_i} \right)^{Y_i} \left(1 - e^{-X_i^T A X_i} \right)^{(1-Y_i)}$$

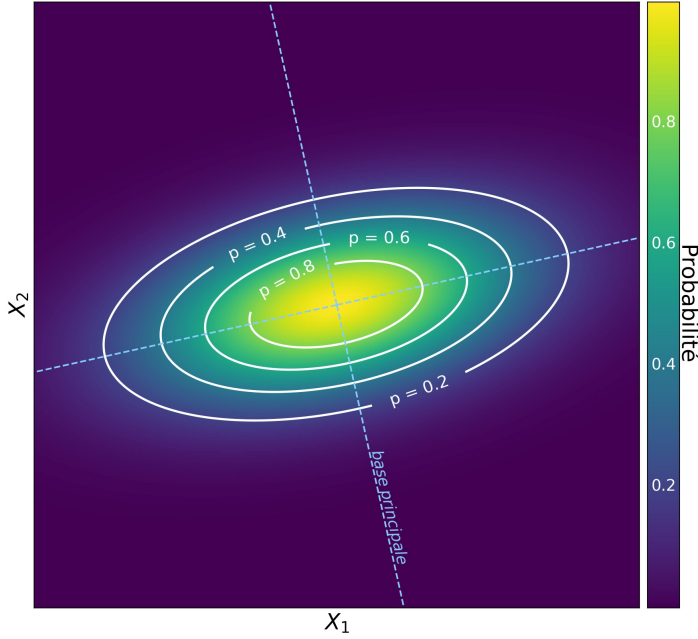


Figure 2: Représentation des zones fiables à un niveau de probabilité p pour deux facteurs influents X_1, X_2 .

où $X_i = x_i - \mu_i$. De façon équivalente, il suffit de minimiser l'opposé de la log-vraisemblance $-\log L(A)$ qui peut s'exprimer comme

$$\sum_{i=1}^N l_i(A) := \sum_{i=1}^N \left(Y_i X_i^T A X_i - (1 - Y_i) \log(1 - e^{-X_i^T A X_i}) \right)$$

Proposition 2.3: L'application $A \mapsto \sum_{i=1}^N l_i(A)$ est convexe.

Preuve 2.4: Évidente en dissociant les cas $Y_i = 1$ et $Y_i = 0$.

Remarque 2.5: S'il existe i et j tels que $Y_i = 0$ et $Y_j = 1$ alors $-\log L(A)$ est strictement convexe.

Bien que la fonction $-\log L(A)$ soit convexe, il n'existe pas de solution explicite au problème (1) qui reste difficile à résoudre compte tenu de la géométrie de l'espace des contraintes sur la matrice A . Par contre, il existe une base orthonormée appelée *base principale* de l'espace de \mathbb{R}^d dans laquelle la matrice A peut s'écrire comme une matrice diagonale. En supposant cette base connue, le problème peut s'écrire de façon équivalente

$$\begin{aligned} \min_{\substack{A \in \mathbb{R}^{d \times d} \\ a_{ij} = 0, \forall i \neq j}} & -\log L(A) \\ \text{s.c.} & a_{ii} > 0 \end{aligned}$$

Ce problème est un problème d'optimisation convexe sous contrainte de bornes. Il peut se résoudre à l'aide de techniques standards telles que la méthode de Newton ou une de ses variantes. Ces méthodes sont basées sur le calcul de gradient

et matrices Hessiennes de la fonction objectif, leurs expressions analytiques sont les suivantes :

$$-\frac{\partial \log L(B)}{\partial b_{nm}} = \sum_{c=1}^N \left(2Y_c \sum_{i=1}^M x_{cm} b_{ni} x_{ci} \exp(-X_c^T B^T B X_c) 2 \sum_{i=1}^M x_{cm} b_{ni} x_{ci} - (1 - Y_c) \frac{2 \sum_{i=1}^M x_{cm} b_{ni} x_{ci}}{1 - \exp(-X_c^T B^T B X_c)} \right)$$

où B est telle que $A = B^T B$. Les éléments de la matrice Hessienne sont donnés en dérivant une seconde fois $-\log L(B)$ par rapport à b_{nm}

$$-\frac{\partial^2 \log L(B)}{\partial (b_{nm})^2} = \sum_{c=1}^N \left(2Y_c x_{cm}^2 + (1 - Y_c) \frac{(W - U)V^2 + 2x_{cm}^2 W U}{W^2} \right)$$

avec

$$U = \exp(-X_c^T B^T B X_c)$$

$$V = 2 \sum_{i=1}^M x_{cm} b_{ni} x_{ci}$$

$$W = 1 - \exp(-X_c^T B^T B X_c).$$

B. Approximation de la base principale

Dans la section précédente, il a été vu que si les données x_i peuvent s'exprimer dans une *base principale* où la matrice A est diagonale alors la recherche du maximum de vraisemblance du modèle peut se ramener à un problème d'optimisation dont la solution peut être approchée aisément par une méthode d'optimisation classique. Un choix naturel de la *base principale* est de considérer des axes principaux où la variance des données est maximale. C'est pourquoi l'utilisation d'une Analyse en Composantes Principales (ACP) [18] est proposée. L'ACP permet de calculer de façon numérique les axes principaux des données x_i à l'aide d'une décomposition en valeurs singulières (SVD) de la matrice de variance-covariance des données. Dans la Figure 2 la *base principale* est donnée par les axes principaux de l'ellipse.

Dans cette section, l'ACP est réalisée sur les données d'essais $x_s = (x_i)_{i=1, \dots, N_s}$ composées uniquement de succès. La matrice des axes principaux est noté $P \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. Dans la suite de cette étude on fait l'hypothèse suivante :

Hypothèses 2.6: La matrice A est supposée être diagonale lorsque les données x sont exprimées dans la base formée par les lignes de P .

Remarque 2.7: Les coordonnées d'un point x dans la *base principale* sont données par x_P , exprimé par $x_P = x^T P^{-1}$.

C. Estimation de la probabilité de démarrage pour tout point de l'ensemble E

Soit $z \in E$ (ou $z - \mu \in E$ si les données ne sont pas centrées), la probabilité de démarrage du turbomoteur est estimée par

$$P_z = \exp(-zP^{-1}\hat{A}Pz^T)$$

où \hat{A} est la matrice estimée par la méthode de maximum de vraisemblance. Soit $p \in (0, 1]$, alors l'ellipsoïde

$$\mathcal{E}(p) := \{z \in E, P_z = p\}$$

représente l'ensemble des points de E où la probabilité de démarrage du turbomoteur est p .

Remarque 2.8: L'intérieur de $\mathcal{E}(p)$, noté $\mathring{\mathcal{E}}(p)$, contient tous les points de E pour lesquels la probabilité de démarrage du turbomoteur étudié est supérieure à p .

III. RÉSULTATS NUMÉRIQUES SUR LES DONNÉES DES TURBOMOTEURS

Dans cette section le modèle est appliqué à un jeu de données réel issu de résultats de bancs d'essais. Ces essais comportent 5 facteurs influents et pour chaque essai, l'information de succès ou d'échec de démarrage est connue. Toutes les expériences numériques sont réalisées à l'aide de Python 3.10 [19]. L'ensemble E contient environ 1200 points d'essais ($d = 5$). Les données sont centrées et réduites. Parmi ces points, ~ 500 correspondent aux succès de démarrage et ~ 700 aux échecs. Le *point parfait* μ est choisi comme le point d'essai qui est le plus proche de la moyenne des points de x_s . La matrice P est calculée à l'aide de la fonction `PCA` du package `sklearn.decomposition` de la librairie `scikit-learn` [20], [21]. L'estimation par maximum de vraisemblance de la matrice A est réalisée à l'aide du solveur `SLSQP` de la librairie `scipy` [22]. L'algorithme est stoppé lorsque $|\nabla_A \log L(A)| \leq 10^{-7}$. Des contraintes de bornes $a_{ii} \geq \varepsilon$ ont été ajoutées afin d'éviter des solutions numériquement dégénérées, où l'un des a_{ii} devient nul. Les quantités $|\nabla_A \log L(A)|$ et $|\nabla_A^2 \log L(A)|$ ont été calculées explicitement et implémentées afin d'améliorer la précision numérique. La performance est évaluée selon un critère qui compare la probabilité estimée à partir des points d'essais et p .

$$\Delta_p := \frac{N_s(p)}{N_s(p) + N_e(p)} - p$$

où $N_s(p)$ est le nombre de points de succès qui sont dans $\mathring{\mathcal{E}}(p)$ et $N_e(p)$ est le nombre de points de d'échecs qui sont dans $\mathring{\mathcal{E}}(p)$. Le premier terme de Δ_p est une estimation de la probabilité de succès de démarrage dans $\mathring{\mathcal{E}}(p)$. Le deuxième terme, p , représente le niveau de probabilité sur l'hypersurface d'ellipsoïde $\mathcal{E}(p)$. Si le modèle est fidèle alors on s'attend à ce que $\Delta_p > 0$ et $\lim_{p \rightarrow 1} \Delta_p = 0$ car la probabilité de succès est plus élevée à l'intérieur de $\mathcal{E}(p)$ que sur sa frontière. La *Figure 3* représente Δ_p pour $p \in [0.1, 1]$.

Une façon de valider les choix de modélisation est de comparer le graphique de la *Figure 3* avec *Figure 4* issue d'un modèle analogue simulé comme suit : on considère N vecteurs aléatoires $(Z_i, Y(Z_i))$ où les variables Z_i sont uniformément distribuées à l'intérieur de $\mathcal{E}(p)$ et $Y(Z_i) \sim \mathcal{B}(e^{-Z_i^T \hat{A} Z_i})$. Le

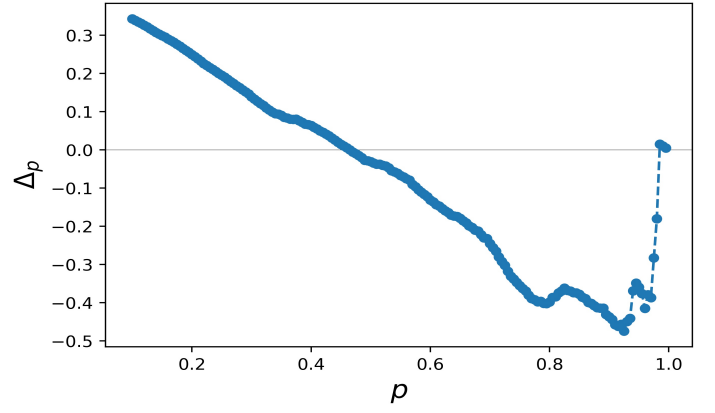


Figure 3: Δ_p basé sur les données d'essais.

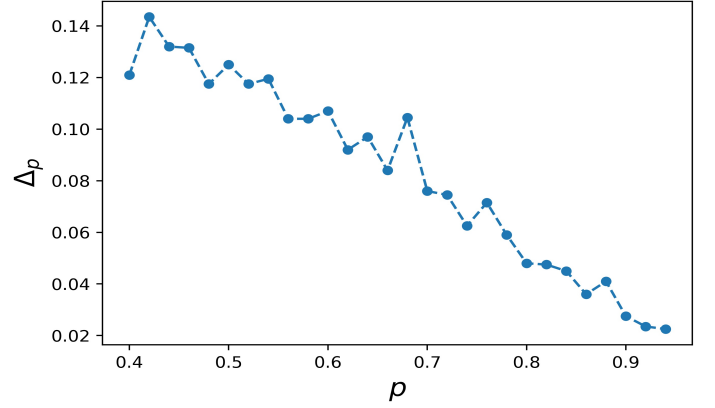


Figure 4: Δ_p basé sur des données simulées.

paramètre $e^{-Z_i^T \hat{A} Z_i} \in [p, 1]$, il est d'autant plus proche de 1 que x_i est proche du centre de $\mathcal{E}(p)$. C'est-à-dire les points Z_i sont des points générés de telle sorte que la fonction $e^{-Z_i^T \hat{A} Z_i}$ donne la probabilité de succès exacte. On peut observer sur la *Figure 3* que Δ_p atteint des valeurs négatives, ce qui laisse à penser que la vitesse de décroissance dans le modèle de dégradation est trop importante. Une façon simple de ralentir la décroissance, tout en conservant la même estimation \hat{A} , est de considérer que la probabilité de démarrage au point x_i est maintenant donnée par

$$g_q(x) = e^{-(x_i^T \hat{A} x_i)^q}$$

avec $q \in [0, 1]$. La *Figure 5* représente les courbes Δ_p pour différentes valeurs de q . On constate que pour des grandes valeurs de p , le modèle avec $q = 0.2$ se rapproche le plus de la *Figure 4* et correspond certainement à un meilleur choix de modélisation.

IV. ANALYSE DE ROBUSTESSE

Dans cette section la robustesse du modèle au sens mathématique est analysée. On quantifie la propagation des incertitudes sur la position des points x_i dans le calcul de l'estimation de $\mathcal{E}(p)$, pour $p \geq 0.5$. Pour ce faire, chaque point x_i est perturbé de la manière suivante : $\tilde{x}_i = x_i + \delta_i$ où \tilde{x}_i est le point perturbé et $\delta_i \sim \mathcal{U}([- \lambda, \lambda]^5)$ avec $\lambda > 0$. On répète

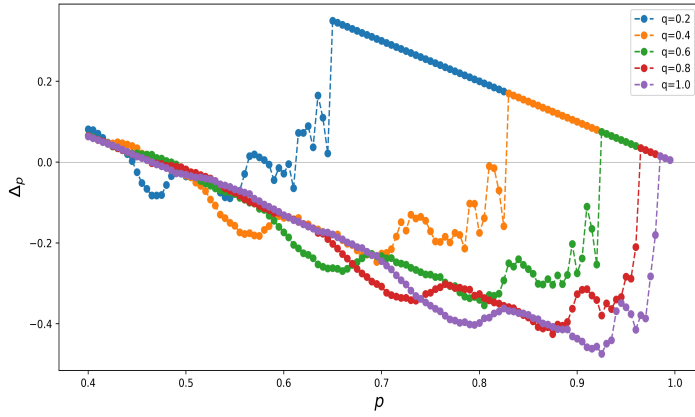


Figure 5: Évolution de la différence de probabilité Δ_p à partir des données d'essais en fonction de p pour différentes valeurs de q .

l'opération de perturbation M fois, ce qui donne M ellipsoïdes $\mathcal{E}_j(p, \lambda)$ pour $1 \leq j \leq M$.

L'effet de la perturbation sur le modèle est quantifié par le critère suivant

$$Q(\lambda, M, p) := \frac{\text{Vol} \left[\mathcal{E}_0(p) \cap \bigcap_{j=1}^M \mathcal{E}_j(p, \lambda) \right]}{\text{Vol}[\mathcal{E}_0(p)]}$$

Pour un modèle de dégradation parfaitement robuste on s'attend à ce que la valeur de Q soit 1, car les M ellipsoïdes $\mathcal{E}_j(p, \lambda)$ doivent être identiques à $\mathcal{E}_0(p)$. Cette quantité est utilisée comme mesure de robustesse car elle caractérise le volume de la zone centrale formée par l'intersection des ellipsoïdes $\mathcal{E}_j(p, \lambda)$ qui reste intacte relativement aux perturbations.

Une simulation de Monte-Carlo est utilisée pour approcher Q par \hat{Q} . L'approximation \hat{Q} est calculée comme suit

$$\hat{Q} = \frac{\sum_{i=1}^{N_{MC}} \mathbb{1} \left[X_i \in \left(\mathcal{E}_0(p) \cap \bigcap_{j=1}^M \mathcal{E}_j(\lambda, p) \right) \right]}{\sum_{i=1}^{N_{MC}} \mathbb{1} [X_i \in \mathcal{E}_0(p)]}$$

où N_{MC} est la taille de l'échantillon de Monte-Carlo, et $\mathbb{1}[s \in S]$ est la fonction indicatrice qui vaut 1 si $s \in S$ et 0 sinon. Les résultats de la simulation sont donnés en Figure 6. Ces figures donnent les évolutions de \hat{Q} en fonction du niveau de perturbation λ pour $M \in \{1, 5, 10\}$ et $p \in \{0.5, 0.8, 0.9\}$.

Pour $M = 1$ on observe que l'estimation de Q reste proche de 1 pour de faibles perturbations $\lambda \in [0, 0.02]$. En répétant l'opération de perturbation des points ($M = 5, 10$) on note que le phénomène se dégrade mais Q reste à des valeurs raisonnables pour $\lambda \in [0, 0.01]$, ce qui confirme une certaine robustesse du modèle aux faibles perturbations.

V. CONCLUSION

Dans cette étude le but est d'estimer une zone de démarrage à un niveau de fiabilité donné à partir des données d'essais d'un turbomoteur. La difficulté majeure réside dans le fait

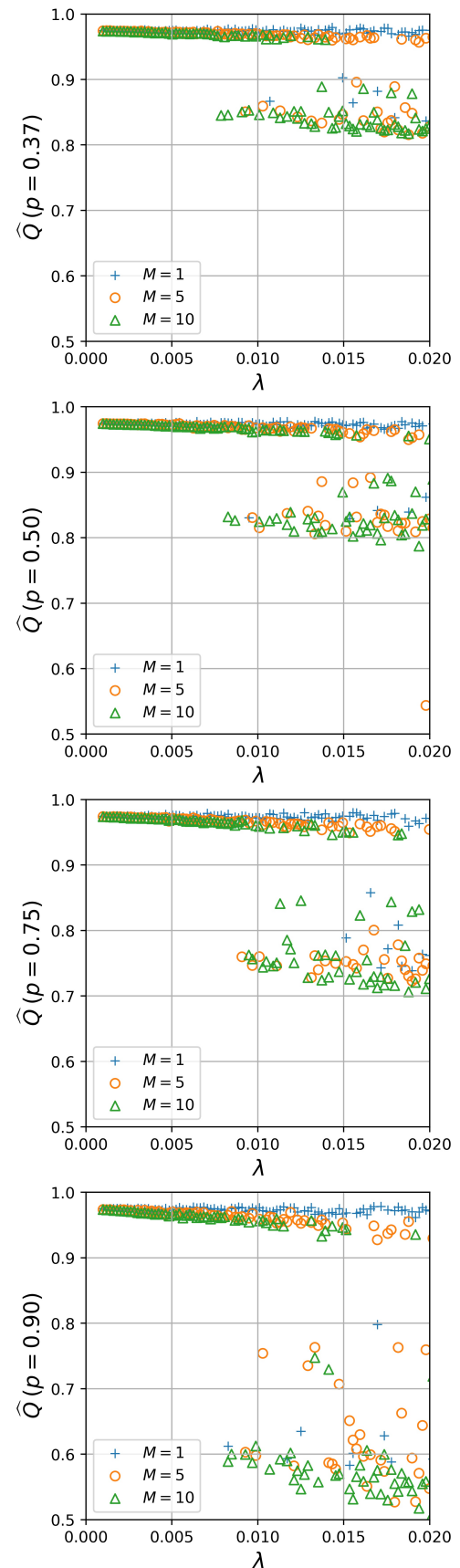


Figure 6: L'évolution de \hat{Q} en fonction de λ (paramètre de perturbation) pour différentes valeurs de p et de M .

qu'il n'y ait pas de modèle général physique de démarrage des turbomoteurs, et que les données d'essais disponibles sont très limitées en nombre. Dans ce contexte, un modèle préliminaire d'estimation de la probabilité de démarrage est proposé. Il s'agit d'un modèle de dégradation paramétrique dont les paramètres sont estimés par maximum vraisemblance. Les expériences numériques ont montré qu'il est nécessaire de considérer une classe plus générique de modèles permettant d'adapter la vitesse de dégradation de la probabilité de démarrage. A travers une étude de robustesse, le modèle a aussi montré une stabilité à des faibles perturbations des données d'essais.

REFERENCES

- [1] J. Morio and M. Balesdent, "1 - introduction to rare event probability estimation," in *Estimation of Rare Event Probabilities in Complex Aerospace and Other Systems*, J. Morio and M. Balesdent, Eds. Woodhead Publishing, 2016, pp. 1–2.
- [2] J. Morio, M. Balesdent, D. Jacquemart, and C. Vergé, "A survey of rare event simulation methods for static input-output models," *Simulation Modelling Practice and Theory*, vol. 49, pp. 287–304, Dec. 2014.
- [3] L. B. Mathieu Balesdent, Jérôme Morio, "Rare event probability estimation in the presence of epistemic uncertainty on input probability distribution parameters," *Methodology and Computing in Applied Probability*, vol. 18, p. 197–216, 2016.
- [4] K. Feng, Z. Lu, C. Ling, and W. Yun, "An innovative estimation of failure probability function based on conditional probability of parameter interval and augmented failure probability," *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 123, pp. 606–625, 05 2019.
- [5] T. Hastie, R. Tibshirani, J. H. Friedman, and J. H. Friedman, *The elements of statistical learning: data mining, inference, and prediction*. Springer, 2009, vol. 2.
- [6] P. P. Walsh and P. Fletcher, *Gas turbine performance*. John Wiley & Sons, 2004.
- [7] G. T.Csanady, *Theory of turbomachines*. New York, N.Y. : McGraw-Hill, 1964.
- [8] J. H. Horlock, *Advanced gas turbine cycles*. Elsevier, 2013.
- [9] M. P. Boyce, *Gas turbine engineering handbook*. Elsevier, 2011.
- [10] A. Ferrand, "Modélisation du démarrage et de la réactivation rapide d'une turbine d'hélicoptère," Ph.D. dissertation, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique, 2019, iSAE-ENSM.
- [11] X.-S. Si and D. Zhou, "A generalized result for degradation model-based reliability estimation," *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, vol. 11, no. 2, pp. 632–637, 2014.
- [12] J. Sun, L. Li, and L. Xi, "Modified two-stage degradation model for dynamic maintenance threshold calculation considering uncertainty," *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, vol. 9, no. 1, pp. 209–212, 2012.
- [13] V. Chabridon, M. Balesdent, J.-M. Bourinet, J. Morio, and N. Gayton, "Evaluation of failure probability under parameter epistemic uncertainty: application to aerospace system reliability assessment," *Aerospace Science and Technology*, vol. 69, pp. 526–537, 2017.
- [14] G. Cates, "Space shuttle launch probability analysis: Understanding history so we can predict the future," in *2014 IEEE Aerospace Conference*, 2014, pp. 1–17.
- [15] S. D. Guikema and M. E. Paté-Cornell, "Probability of infancy problems for space launch vehicles," *Reliability Engineering & System Safety*, vol. 87, no. 3, pp. 303–314, 2005.
- [16] A. Billon, "Modélisation de la fiabilité de composants d'un moteur aéronautique basée sur les données des dégradations en fonction de la maintenance programmée," Ph.D. dissertation, L'Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2012.
- [17] J. H. Aldrich and F. D. Nelson, *Linear probability, logit, and probit models*. Sage, 1984, no. 45.
- [18] I. T. Jolliffe, *Principal Component Analysis*. Springer Verlag, 1986.
- [19] J. M. Zelle, *Python programming: an introduction to computer science*. Franklin, Beedle & Associates, Inc., 2017.
- [20] F. Pedregosa, G. Varoquaux, A. Gramfort, V. Michel, B. Thirion, O. Grisel, M. Blondel, P. Prettenhofer, R. Weiss, V. Dubourg, J. Vanderplas, A. Passos, D. Cournapeau, M. Brucher, M. Perrot, and E. Duchesnay, "Scikit-learn: Machine learning in Python," *Journal of Machine Learning Research*, vol. 12, pp. 2825–2830, 2011.
- [21] L. Buitinck, G. Louppe, M. Blondel, F. Pedregosa, A. Mueller, O. Grisel, V. Niculae, P. Prettenhofer, A. Gramfort, J. Grobler, R. Layton, J. VanderPlas, A. Joly, B. Holt, and G. Varoquaux, "API design for machine learning software: experiences from the scikit-learn project," in *ECML PKDD Workshop: Languages for Data Mining and Machine Learning*, 2013, pp. 108–122.
- [22] D. Kraft, *A software package for sequential quadratic programming*, ser. Deutsche Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt Köln: Forschungsbericht. Wiss. Berichtswesen d. DFVLR, 1988.