



Exercer l'esprit critique en classe de mathématiques : des perspectives réalistes ? Le Bilan de deux études au cycle 3.

Valentin Roussel

► To cite this version:

Valentin Roussel. Exercer l'esprit critique en classe de mathématiques : des perspectives réalistes ? Le Bilan de deux études au cycle 3.. Grand N, Revue de mathématiques, de sciences et technologie pour les maîtres de l'enseignement primaire, 2022, 109, pp.77-102. hal-03819276

HAL Id: hal-03819276

<https://hal.science/hal-03819276>

Submitted on 24 Oct 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

EXERCER L'ESPRIT CRITIQUE EN CLASSE DE MATHÉMATIQUES : DES PERSPECTIVES RÉALISTES ? LE BILAN DE DEUX ÉTUDES AU CYCLE 3

Valentin ROUSSEL¹

Laboratoire S2HEP - EA 4148 - Université Claude Bernard Lyon 1

Résumé. Une attention particulière est désormais portée à l'éducation aux médias et à l'information. Elle répond à une volonté de former les élèves au décryptage du réel et à la construction progressive d'un esprit éclairé, autonome et critique : c'est une « ambition majeure de l'École »². Or, au regard des programmes il apparaît que certaines disciplines semblent naturellement s'imposer comme propices à l'exercice de cet esprit critique : histoire, sciences expérimentales, éducation morale et civique... Mais qu'en est-il des mathématiques ? Le compte-rendu de ces travaux de recherche souhaite apporter des propositions de réponses à cette question. Le bilan de deux études conduites en 2019 et 2021 auprès d'une trentaine d'élèves de cycle 3 est ici présenté. Dans ces études, une situation didactique est expérimentée en classe de mathématiques avec pour objectif de susciter chez les élèves le besoin de mobiliser des raisonnements et arguments rationnels. Les résultats de ces études montrent que des moyens ludiques et à fort potentiel didactique sont envisageables pour permettre le travail de compétences propres à l'esprit critique.

Mots-clés. Esprit critique, mathématiques, ressource, paradoxe, puzzle.

Introduction

Le Ministère de l'Éducation Nationale affiche son ambition pour le développement de l'esprit critique à l'école en ces termes² :

Le développement de l'esprit critique est au centre de la mission assignée au système éducatif français. Présent dans de nombreux programmes d'enseignement, renforcé par l'attention désormais portée à l'éducation aux médias et à l'information, le travail de formation des élèves au décryptage du réel et à la construction, progressive, d'un esprit éclairé, autonome, et critique est une ambition majeure de l'École.

Cette ambition pose deux questions : « quoi ? » et « comment ? »

« *Quoi* », c'est-à-dire : « qu'entendons-nous par *esprit critique* ? » ; « Quelles compétences travailler ? » Et « *comment* », c'est-à-dire : « quelles pratiques mobiliser ? » ; « Quelles disciplines sont concernées ? »

Une première étude présentée durant le séminaire national de l'ARDM³ en novembre 2019 (Roussel, 2020) permet de répondre partiellement à ces questions. Elle montre notamment comment une enquête épistémologique approfondie sur les textes fondateurs de l'esprit critique (Dewey, 1910 ; Russel, 1926 ; Postman & Weingartner, 1969 ; Norris & Ennis, 1991) permet

¹ roussel.pro@protonmail.com

² <https://eduscol.education.fr/1538/former-l-esprit-critique-des-eleves>

³ Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques. <https://ardm.eu>

d'aboutir à une définition du concept en termes de compétences. Cette étude montre par ailleurs que les programmes français focalisent leur intention sur l'éducation aux médias et à l'information, associant systématiquement l'esprit critique à l'observation de faits concrets, d'actualité. Or certaines disciplines expérimentales facilitent l'élaboration de séquences d'enseignement autour de ce type d'informations : c'est le cas par exemple en biologie avec l'étude de la mouvance climatosceptique, ou en physique, où l'on pourrait imaginer une séquence autour du thème « *la rotondité de la terre* ». Mais qu'en est-il des mathématiques ? Doit-on pour autant se résoudre (en particulier au primaire) à un cloisonnement de la discipline à la seule manipulation des nombres et des figures géométriques ? Ainsi, ces travaux ont pour questions de recherche initiales : *Comment combiner le travail des compétences clefs des programmes du cycle 3 avec celui des compétences argumentatives et critiques ? Quels moyens mobiliser pour permettre l'émergence et le travail de l'esprit critique de jeunes élèves en classe de mathématiques ?*

Pour répondre à cette question, les résultats de deux enquêtes complémentaires sont présentés et discutés. La première section s'attache à définir les contours épistémologiques, théoriques et institutionnels, ainsi que les moyens envisageables pour la production et l'étude d'une ingénierie didactique expérimentée au cycle 3. Elle aboutit à la problématique qui servira de fil conducteur à ces deux enquêtes. La seconde section présente l'étude *a priori* et le bilan *a posteriori* de la première expérimentation, menée en 2019. Les résultats de cette première étude permettent par la suite de préciser les choix et révisions mobilisés afin d'optimiser le dispositif initial. La seconde expérimentation, menée en 2021 est présentée dans la troisième section, elle conduit à des résultats qui montrent que les choix et optimisations fixés apportent une valeur ajoutée à l'activité. Dans la quatrième section, finalement, sont présentés le croisement des résultats entre ces deux études et leur bilan.

1. Esprit critique : quels cadres épistémologiques et théoriques ?

1.1. Une enquête épistémologique pour identifier les compétences clefs

Le travail de l'esprit critique en classe pose une question intermédiaire à laquelle il apparaît impératif de répondre au préalable : quelles compétences et aptitudes l'élève doit-il mobiliser lorsqu'il fait preuve d'esprit critique ? Pour y répondre, une revue de littérature historique et épistémologique apparaît nécessaire. Elle permet de remonter depuis les bases fondatrices du *critical thinking* (Dewey, 1910, p. 74) jusqu'à sa définition la plus récente et communément acceptée par la communauté enseignante. L'histoire du concept semble commencer au début du XX^e siècle, l'esprit critique est alors aussi désigné par le terme *thoughtfulness*⁴ (Dewey, 1910, p. 57), Dewey l'explicite en ces termes :

*Dans certains cas, une croyance est acceptée avec peu ou presque aucune tentative pour énoncer les motifs qui la soutiennent. Dans d'autres cas, le fondement ou la base d'une croyance est délibérément recherché et son adéquation pour soutenir la croyance examinée. Ce processus s'appelle la pensée réflexive ; elle seule a une valeur véritablement éducative [...]. La considération active, persistante et attentive de toute croyance ou forme supposée de connaissance à la lumière des motifs qui la soutiennent et des conclusions ultérieures auxquelles elle tend, constitue une pensée réflexive*⁵ (Dewey, 1910, p. 6, traduit).

⁴ L'attention, la prévenance.

⁵ Traduction personnelle.

Deux principes fondateurs émergent chez Dewey : celui d'*enquête* et de *systématisme*. Pour Dewey, le penseur critique est un enquêteur de chaque instant qui possède l'aptitude de juger la portée des connaissances d'autrui sur des préoccupations communes. Cospérec (2017) résume les principaux traits de la pensée critique dans la tradition éducative nord-américaine⁶ :

Pour l'éducation, il s'agit d'apprendre :

- à *investiguer de façon critique, c'est-à-dire selon les normes de l'enquête scientifique,*
- à *formuler clairement ses idées, à les soutenir par des arguments rationnellement recevables, à raisonner de manière impartiale et objective, autant qu'il se peut,*
- à *évaluer de façon critique tous les discours et argumentations,*
- à *délibérer, à prendre des décisions, de façon rationnelle là encore, en se fondant sur les résultats de cette démarche critique* (Cospérec, 2017).

L'importance de la dimension rationnelle traduit déjà une certaine proximité entre *esprit critique* et *esprit scientifique*, deux manières de penser qui se confondent encore davantage dans les écrits de Bertrand Russell (1926). Dans un entretien accordé à la BBC en 1959, il énonce ce qui serait selon lui l'attitude intellectuelle (et résolument critique) que devraient adopter les générations futures :

Lorsque vous étudiez une question ou envisagez une certaine manière de penser, demandez-vous seulement : quels sont les faits et quelle vérité les faits confirment-ils. Ne vous laissez jamais détourner, ni par ce que vous voulez croire, ni parce que vous vous figurez que ce en quoi vous croyez aura des effets sociaux bénéfiques ; mais focalisez-vous seulement et uniquement sur les faits (Russell, 1959, à 36 min 24 s).

La démarche critique se charge d'une dimension factuelle, celle-ci est empruntée à la démarche scientifique. Pour Russell, le penseur critique doit considérer les faits et questionner les observations qui les confirment :

Le tempérament de l'intelligence qui est nécessaire pour faire fonctionner une démocratie est exactement analogue dans la vie pratique à ce que le tempérament scientifique est dans la vie intellectuelle (Russell, 1926).

C'est finalement 50 ans plus tard qu'une formalisation intellectuelle et académique du concept d'esprit critique s'observe, notamment au travers des travaux de Postman et Weingartner. Dans *Teaching as a Subversive Activity* (1969), ils plaident pour la mise en place d'un système éducatif qui encouragerait le questionnement, la recherche, les discussions. Ils y décrivent le portrait idéal d'un élève formé à la méthode critique :

Les bons apprenants, pour la plupart, sont hautement qualifiés dans tous les comportements langagiers qui composent ce que nous appelons « l'enquête ». Par exemple, ils savent comment poser des questions significatives ; ils savent examiner leurs propres hypothèses ; ils utilisent des définitions et des métaphores comme instruments de leur réflexion et sont rarement piégés par leur propre langage ; ils ont tendance à être prudents et précis lorsqu'ils demandent des généralisations, et ils s'engagent continuellement à vérifier ce qu'ils croient ; ils sont des observateurs attentifs et semblent reconnaître que la langue tend à masquer les différences et à contrôler les perceptions (Postman & Weingartner, 1969, p. 30).

C'est donc dans ce contexte de Guerre Froide, de société de consommation en plein essor, de développement de l'industrie culturelle et des médias de masse que le *critical thinking* se structure comme un mouvement intellectuel et pédagogique. C'est également à cette époque que sont formulées les premières propositions pour enseigner la méthode sceptique en classe. Elle aboutit en 1989 avec les travaux de Norris et Ennis et l'ouvrage de référence *Evaluating critical*

⁶ Celle-ci prédomine largement dans les systèmes éducatifs internationaux.

thinking dans lequel les auteurs posent les bases de l'évaluation de l'esprit critique au travers de douze compétences cibles :

- C.1 : se concentrer sur une question,
- C.2 : analyser des arguments,
- C.3 : poser des questions de clarification et savoir y répondre,
- C.4 : juger la crédibilité d'une source,
- C.5 : observer et évaluer des comptes rendus d'observation,
- C.6 : déduire et évaluer des inférences déductives,
- C.7 : induire et évaluer des inférences inductives,
- C.8 : construire et évaluer des jugements de valeur,
- C.9 : construire et évaluer des définitions,
- C.10 : identifier des présupposés,
- C.11 : construire une procédure de décision,
- C.12 : discuter et agir avec les autres.

Ce modèle de pensée est celui retenu dans cette étude pour répondre à la question intermédiaire : quelles compétences et aptitudes l'élève doit-il mobiliser pour exercer son esprit critique ? Ces compétences, synthétisées dans le diagramme ci-dessous, peuvent être regroupées en trois catégories, chacune de ces catégories apparaissant comme l'héritage de l'un des trois courants épistémologiques qui ont structuré la pensée critique au cours du siècle précédent :

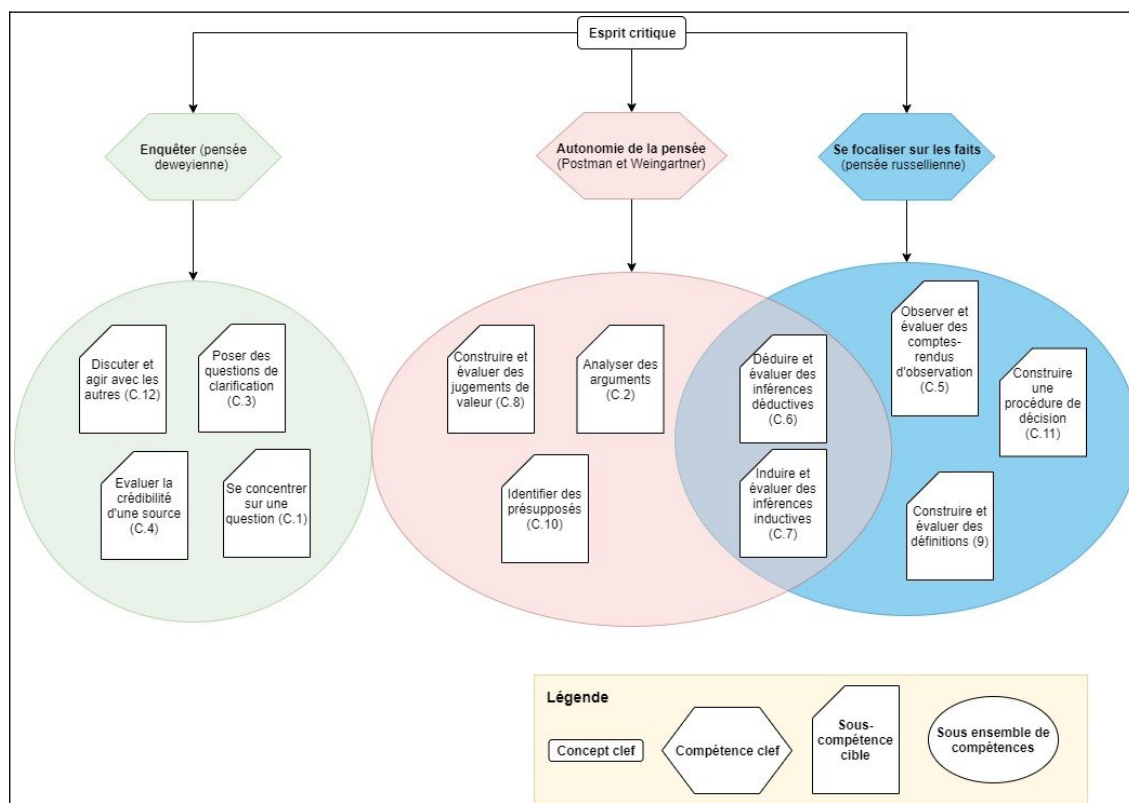


Figure 1 : Les compétences propres à l'esprit critique.

Dès lors se pose la question du genre d'activité qui permettrait de susciter de manière optimale l'emploi de telles compétences par les élèves. Certaines conditions suffisantes d'une telle activité

sont explicitement identifiables :

Compétence(s)	Besoins pour l'activité
C.2, C.3, C.5, C.11, C.12	Travailler en groupe
C.3, C.4, C.1, C.2	Susciter le débat
C.3, C.9, C.11, C.5	Susciter des doutes et des questions
C.6, C.7, C.11	Rendre nécessaire une procédure de raisonnement

Tableau 1 : Concordance entre compétences à travailler et les besoins pour l'activité.

En définitive, l'enquête épistémologique permet d'une part l'identification de compétences clefs, et par conséquent l'identification d'un type d'activités propice au travail de telles compétences. Ceci conduit à une nouvelle question intermédiaire : quels objets mathématiques permettent le croisement entre ces compétences et ces besoins spécifiques ? La section suivante s'emploie à y répondre.

1.2. Les paradoxes mathématiques : un matériau de choix pour façonner l'esprit critique ?

De nombreuses disciplines sont à même de s'emparer des questions socialement vives (Legardez & Simonneaux, 2006) et des controverses scientifiques. Elles apparaissent alors propices au travail de la méthode sceptique et des douze compétences identifiées par Norris et Ennis (1989). Quelques exemples bien connus permettent d'illustrer ce constat : le dérèglement climatique (étudié en biologie) et la mouvance climatosceptique qui remet en cause l'origine humaine du réchauffement global, la rotondité de la terre (étudié en enseignement scientifique) et la mouvance impulsée par la *Flat Earth Society*⁷, ou encore les fake-news (étudiées en éducation aux médias). En mathématiques, l'étude de graphes biaisés ou du mésusage des statistiques peut également être un sujet adéquat pour penser des activités orientées pour le travail de l'esprit critique. Toutefois, l'étude critique de graphes et d'enquêtes statistiques nécessite la mobilisation de connaissances mathématiques qui ne sont pas enseignées avant la fin du collège. De fait : quel type de contenu mathématique aborder avec des élèves plus jeunes, de cycle 3 ? Une première réponse à cette question porte sur les paradoxes mathématiques, en particulier ceux s'appuyant sur des illusions d'optique remarquables et facilement perceptibles, y compris pour de jeunes élèves. Le triangle de Gardner illustre ce genre de paradoxe :

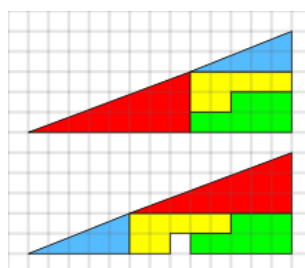


Figure 2 : Illustration du paradoxe du triangle de Gardner⁸.

⁷ La *Flat Earth Society* est une organisation fondée en 1956 par l'Anglais Samuel Shenton et soutenant l'idée que la Terre est plate.

⁸ Si on découpe un triangle selon un quadrillage, de telle sorte que deux reconstructions du triangle soient possibles, on observe alors que pour l'une des constructions, il manque un carré unitaire. Ce constat est paradoxal car l'aire

Outre la dimension ludique et ésotérique d'un tel paradoxe qui suscite aisément la fascination, les mathématiques qu'il sous-tend sont également en adéquation avec les programmes de cycle 3 : dénombrement, notion d'aire, manipulation de figures géométriques connues, notion d'alignement, quadrillage et somme d'aires. De fait, un premier bilan *a priori* semble indiquer que le paradoxe ci-dessus serait un candidat adéquat au travail des douze compétences citées plus haut. D'une part, l'apparente absurdité du phénomène observé, à savoir la disparition d'une partie de la surface du triangle, devrait permettre de susciter des doutes et des questions et, à plus forte raison, de rendre nécessaire une procédure de raisonnement pour arriver à une explication tangible. D'autre part, la construction/déconstruction de figures peut s'envisager comme une activité de groupe, chaque élève du groupe proposant sa propre construction ou validant/invalidant les constructions des autres, ceci permettant de susciter une forme de débat entre les élèves. Mais, plus particulièrement, et ce point est essentiel à la compréhension de ce travail, le paradoxe ci-dessus peut être un vecteur de croyances, d'une connaissance biaisée de la réalité⁹. Autrement dit, il est envisageable qu'un élève qui ne possède pas le « capital mathématique et scientifique » (Vos, Hernandez-Martinez & Frejd, 2020) nécessaire pour saisir l'origine du paradoxe, défende un point de vue irrationnel : pour cet élève, une partie de la surface du triangle disparaîtrait alors *comme par magie*. Or ce dernier point est à double tranchant, car il n'est évidemment pas question d'induire chez un élève une fausse conception. Toutefois, cette fausse croyance peut, si elle ne fait pas l'unanimité au sein du groupe, être justement source de débats, de doutes et de questions, et ainsi rendre nécessaire l'élaboration d'une procédure de raisonnement mutuelle. À ce point, deux besoins supplémentaires doivent donc être adoptés :

1. L'enseignant doit être garant de la rationalité de l'élève. Autrement dit, il doit s'assurer qu'en fin d'activité, aucune fausse croyance n'a été induite de manière persistante chez l'élève.
2. L'activité doit permettre une déconstruction facilitée de cette fausse croyance s'il advenait qu'un élève la défende. Autrement dit, la force et l'évidence des arguments rationnels doivent très nettement surpasser celles des arguments irrationnels : l'élève doit pouvoir prendre conscience rapidement et sans équivoque que le point de vue irrationnel défendu n'est pas soutenable.

La section suivante interroge la pertinence et le potentiel didactique d'une activité reposant sur l'orchestration d'un tel objet mathématique. Deux cadres théoriques sont mobilisés : la théorie des biais cognitifs (Kahneman & Tversky, 1974) d'une part et la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1997, 1998) d'autre part.

1.3. Apports de la psychologie cognitive et de la théorie des situations didactiques

À ce point, 12 compétences et 6 besoins¹⁰ clefs sont donc identifiés pour guider l'élaboration de l'ingénierie didactique souhaitée. Un objet mathématique paradoxal semble convenir pour appuyer le dispositif : cette hypothèse repose cependant sur le postulat que la dimension

du triangle peut être décomposée : c'est la somme des carrés qui le composent — par extension la somme des carrés qui composent les formes de base. La surface manquante n'est en fait que l'espace qui compense l'écart entre la légère convexité et la légère concavité des fausses hypoténuses, à peine visibles à l'œil nu, des prétendus triangles.

⁹ Dans la littérature anglophone, le terme de *misconception* est le plus souvent employé pour traiter de « connaissance biaisée de la réalité ».

¹⁰ Les besoins définis dans le tableau 1 (p. 81) ainsi que les deux besoins supplémentaires adoptés p. 82.

énigmatique du paradoxe inciterait nécessairement la mobilisation des compétences clefs établies par Norris et Ennis. Ceci conduit dès lors à une nouvelle question intermédiaire : comment évaluer la pertinence du paradoxe du carré manquant par rapport à l'effet recherché, à savoir : conduire les élèves à une contradiction et les inciter à mobiliser des compétences clefs ? Pour y répondre, la théorie des biais cognitifs de Kahneman (Kahneman & Tversky, 1974 ; Kahneman, 2012), de même que la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1997, 1998), apparaissent fondamentales.

Les biais cognitifs : des marqueurs d'irrationalité pour évaluer la pertinence de l'activité ?

Avant d'explicitier le concept de *biais cognitif*, il est important de noter qu'il existe un chevauchement entre la notion de *biais cognitif* et celle d'*heuristique*. Ces deux termes sont parfois confondus, leurs usages sont cependant nuancés. Chipman rappelle la nuance et le lien entre ces deux concepts :

La force de l'approche heuristique et des biais est que chacune des démonstrations d'irrationalité a une base de comparaison claire (un modèle normatif ou une description du comportement humain optimal, qui est en soit la maximisation de l'utilité, ou l'optimisation sous d'autres formes, comme un comportement idéal). Les heuristiques sont les « raccourcis » que les humains utilisent pour réduire la complexité des tâches dans le jugement et le choix, et les biais sont les écarts qui en résultent entre le comportement normatif et le comportement déterminé de manière heuristique¹¹ (Chipman, 2017, p. 251, traduit).

Autrement dit, l'heuristique est la cause de l'irrationalité, et le biais cognitif l'effet qui en résulte : une distorsion du traitement de l'information, du jugement, de la rationalité ou de la logique. Un exemple immédiat de biais cognitif peut être éprouvé dans la figure ci-dessous :

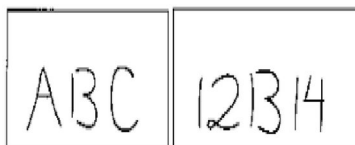


Figure 3 : Une expérience de biais cognitif.

Sur cette figure, le lecteur peut lire « A B C » dans la section de gauche, et « 12 13 14 » dans la section de droite. Et pourtant les éléments centraux de ces sections sont identiques, de telle manière que l'observateur aurait également pu lire : « A 13 C » ou « 12 B 14 ». Une même forme peut être interprétée comme une lettre dans un contexte de lettres et comme un nombre dans le contexte d'une énumération de chiffres, il s'agit d'un *biais de cadrage* : le contexte a une influence sur la perception des éléments qui le composent.

Cette théorie permet ainsi d'interroger les biais auxquels pourraient être exposés les élèves dans le contexte d'une activité de groupe où ils seraient confrontés au paradoxe du carré magique. Elle renseigne sur la nature et l'origine des décisions irrationnelles qu'ils pourraient potentiellement prendre. Certains de ces biais sont facilement identifiables dans l'analyse de discours, et même dans le paradoxe précédemment exposé :

- Le *biais de cadrage*, qui suppose que la manière de présenter un problème ou un sujet n'est pas sans conséquence sur le raisonnement qui en découle. Il désigne l'influence que peut avoir la formulation d'une question ou d'un problème sur la réponse qui y est apportée. C'est principalement sur ce biais que repose l'illusion du carré manquant : les

¹¹ Traduction personnelle.

reconstructions des figures semblent indiquer que leurs hypoténuses sont parfaitement rectilignes, et de même, les figures semblent correspondre à des triangles rectangles. Le cadre imposé (une figure qui est *a priori* un triangle dont l'hypoténuse est parfaitement rectiligne) conduit ainsi à un biais de cadrage.

- Le *bias d'ancrage* désigne la difficulté à se départir de sa première impression. Dans le cas du paradoxe de Gardner, il renforce le biais de cadrage : il est probable en effet que la première impression laissée par la construction initiale soit : *la figure est un triangle rectangle*. Cette impression est toutefois une illusion, mais il est possible d'imaginer un scénario dans lequel un élève ne parvienne pas à abandonner cette première représentation.
- Le *bias de confirmation*, qui consiste à ne rechercher et ne prendre en considération que les informations qui confirment les préjugés et à ignorer celles qui les contredisent. Le constat d'un tel biais pourrait par exemple intervenir dans la situation suivante : un élève qui maintiendrait que le carré disparaît *comme par magie*, en prenant des mesures imaginaires, ou en n'écoutant pas les arguments des autres membres du groupe.
- Le *bias de conformisme*, qui est la tendance à penser et agir comme les autres le font sans plus chercher la contradiction : il pourrait s'agir ici de constater qu'un élève choisit d'adopter la position des autres membres du groupe par facilité, ou également parce qu'il est plus confortable de ne pas rentrer dans une confrontation d'idées. Ce phénomène peut s'observer dans des groupes où les élèves adoptent la position de l'élève qui a la réputation d'être plus compétent en mathématiques.
- L'*effet boomerang*, presque opposable au biais du conformisme, est l'effet observé lorsque les tentatives de persuasion produisent une réaction inverse à celle attendue : les croyances sont renforcées face à des preuves et arguments pourtant contradictoires. Un élève qui tenterait de convaincre les autres membres de son groupe qui choisiraient d'ignorer ou de réfuter systématiquement ses arguments serait un scénario témoignant d'un effet boomerang.
- Le *bias de faux consensus* enfin : ce dernier est un cas similaire au biais du conformisme à certains égards. Dans ce cas, un élève qui serait réellement persuadé de la véracité de ses arguments partirait du principe qu'il est naturellement impossible que les autres membres de son groupe puissent penser différemment. En faisant ainsi, il surestimerait le nombre de personnes qui partagent ses opinions.

La théorie des biais cognitifs apparaît ainsi pertinente :

- d'une part pour valider l'utilisation du paradoxe mathématique évoqué, en émettant l'hypothèse que les biais de cadrage et d'ancrage précédemment identifiés permettront d'obtenir l'effet escompté, à savoir conduire les élèves à une contradiction et susciter chez eux la mobilisation des compétences ciblées ;
- d'autre part, pour définir des *marqueurs d'irrationalité* dans le discours des élèves. Ces marqueurs sont la manifestation des biais précédemment évoqués. Par exemple, la phrase « C'est évident que vous avez raison, je dis comme vous ! » pourrait être un marqueur d'irrationalité chez l'élève qui la prononce. Dans ce cas, le biais cognitif identifié est celui du *conformisme*.

Ce cadre théorique est donc utile non seulement pour penser l'activité, mais également pour évaluer ses effets. Il met à disposition de l'étude des moyens d'analyse et des moyens de production qui sont par la suite détaillés dans la méthodologie.

Théorie de situations didactiques (TSD) : calibrage et évaluation de l'activité d'un point de vue didactique.

La TSD développe un cadre pour l'étude des situations d'enseignement des mathématiques. Bien que les savoirs et compétences ciblés dans le contexte de cette étude ne soient pas spécifiquement mathématiques, ce cadre apparaît cependant utile, à l'instar de la théorie de Kahneman, pour évaluer et produire l'activité souhaitée. Dans son approche de la didactique, la notion de *situation didactique* est fondamentale à Brousseau (1997, 1998). Si le terme « situation » désigne l'ensemble des circonstances dans lesquelles une personne se trouve ainsi que les relations qui l'unissent à son milieu, alors une situation didactique est une situation où se manifeste directement ou indirectement une volonté d'enseigner. Cette *situation didactique* est le plus souvent associée à la notion de *situation a-didactique* : dans cette dernière, l'élève s'approprie la situation proposée par le professeur non pas en faisant son travail d'élève mais plutôt celui d'un « mathématicien en herbe » (Brousseau, 1997) préoccupé par la seule résolution du problème posé. Cette appropriation du problème intervient à l'issue d'un processus de *dévolution*¹², qui est fondamental dans cette conception de l'apprentissage où l'élève participe activement à l'élaboration de ses connaissances. La TSD propose ainsi un cadre analytique et conceptuel pour l'analyse et la production de *situations didactiques* à fort potentiel d'*a-didacticité*. Brousseau propose une typologie des *situations a-didactiques* qui conduisent l'élève à préciser ses connaissances pour résoudre un problème d'ordre mathématique :

- Dans la *situation d'action*, l'élève est confronté à un *milieu* qui interagit avec lui par l'intermédiaire de rétroactions. Agir consiste alors, pour l'élève, à choisir des états du milieu en fonction de ses motivations.
- La *situation de formulation* doit permettre de dépasser l'action, elle s'appuie sur la nécessité pour l'élève de communiquer avec d'autres interlocuteurs. Le succès commun exige que l'un formule la connaissance en question à l'intention des autres, qui en ont besoin pour la convertir en décision efficace sur le milieu.
- Finalement, la *situation d'action* est celle ciblée par cette étude pour répondre au mieux aux besoins de l'activité (travailler en groupe, susciter le débat, etc.). Brousseau la définit comme suit :

Une situation de validation est une situation dont la solution exige que les actants établissent ensemble la validité de la connaissance caractéristique de cette situation. Sa réalisation effective dépend donc aussi de la capacité des protagonistes d'établir ensemble explicitement cette validité. Celle-ci s'appuie sur la reconnaissance par tous d'une conformité à une norme, d'une constructibilité formelle dans un certain répertoire de règles ou de théorèmes connus, d'une pertinence pour décrire des éléments d'une situation, et/ou d'une adéquation vérifiée pour la résoudre. Elle implique que les protagonistes confrontent leurs avis sur l'évolution du milieu et s'accordent selon les règles du débat scientifique (Brousseau, 1998, p. 4).

Une situation didactique répond ainsi à des critères bien spécifiques. Brousseau postule qu'un certain nombre de questions permettent d'identifier une situation didactique :

- (1) Y a-t-il un problème posé aux élèves ?
- (2) Quel est(sont) le(s) savoir(s) visé(s) ?
- (3) Quelles sont les procédures possibles pour résoudre le problème ?
- (4) L'utilisation de la connaissance visée est-elle nécessaire pour parvenir à la solution du

¹² Processus par lequel l'enseignant parvient dans une situation didactique à placer l'élève comme simple actant dans une situation a-didactique (à modèle non didactique) (Brousseau, 1998, p. 5).

problème posé aux élèves ?

- (5) L'élève peut-il comprendre la consigne et s'engager vers une solution sans disposer de cette connaissance entièrement élaborée ?
- (6) Comment évaluer si un élève a réussi ou échoué ?
- (7) L'élève est-il dépendant entièrement de l'enseignant (auquel cas, la situation n'est pas didactique) ou la situation comporte-t-elle des rétroactions ?
- (8) La vérification du résultat peut-elle donner des informations sur la façon de réussir ?

Ces questions feront l'objet de réponses argumentées dans l'analyse *a priori* de la première étude.

Deux concepts de la TSD seront également utiles à l'analyse de l'activité : la notion d'*obstacle* et de *situation d'institutionnalisation*.

Un obstacle est :

[...] un ensemble de difficultés d'un actant (sujet ou institution), liées à « sa » conception d'une notion. Cette conception a été établie par une activité et par une adaptation correctes, mais dans des conditions particulières, qui l'ont déformée ou qui en ont limité la portée (Brousseau, 1998, p. 4).

Autrement dit, un obstacle est l'élément responsable de la résistance d'une conception au détriment de l'apprentissage d'une conception plus correcte. Ces obstacles sont source d'erreurs et de mésinterprétations chez les élèves. Ils peuvent être d'origine :

1. ontologique :

[...] qui surviennent du fait des limitations (neurophysiologiques entre autres) du sujet à un moment de son développement (Brousseau, 1998, p. 4).

2. didactique :

[...] qui semblent ne dépendre que d'un choix ou d'un projet du système éducatif (ibid.).

3. épistémologique :

[...] ceux auxquels on ne peut, ni ne doit échapper, du fait même de leur rôle constitutif dans la connaissance visée. On peut les retrouver dans l'histoire des concepts eux-mêmes (ibid.).

Finalement, la situation d'institutionnalisation d'une connaissance, qui marque un changement dans la nature d'une connaissance :

C'est une situation qui se dénoue par le passage d'une connaissance de son rôle de moyen de résolution d'une situation d'action, de formulation ou de preuve, à un nouveau rôle, celui de référence pour des utilisations futures, personnelles ou collectives. [...] L'institutionnalisation peut consister en une adjonction au répertoire mais aussi en un retrait d'une croyance commune reconnue soudain comme fausse (Brousseau, 1998, pp. 4-5).

Dans l'activité recherchée, la phase d'institutionnalisation devrait ainsi correspondre à l'adoption, par les élèves, des compétences mobilisées pour résoudre le problème soulevé par le paradoxe comme compétences de références pour résoudre des problèmes de nature similaire.

1.4. Problématique

La TSD donne des éléments et des moyens pour penser et analyser une activité qui devrait prendre vie dans le cadre d'une *situation didactique*. Elle sera appuyée par la théorie des biais cognitifs qui devrait permettre, le cas échéant, de produire certains effets chez les élèves ainsi

que d'identifier dans leurs discours des *marqueurs d'irrationalité*. Les deux cadres théoriques présentés apparaissent donc comme utiles non seulement à la conception de l'activité *a priori*, mais également à son analyse *a posteriori*. De plus, l'enquête épistémologique préalablement menée renseigne sur la nature des compétences visées et sur les attentes institutionnelles qui en découlent. En définitive, ces travaux s'attachent ainsi à répondre à la problématique suivante : dans quelles conditions une situation didactique construite autour d'un paradoxe mathématique permet-elle de mobiliser les compétences caractéristiques de l'esprit critique ?

2. Première enquête (2019)

2.1. Conception de l'activité et analyse *a priori*

L'analyse épistémologique et théorique précédemment menée conduit à fixer des variables didactiques¹³ (Brousseau, 1997, 1998) supposées pertinentes par rapport aux compétences et besoins ciblés. De même, les cadres théoriques mobilisés répondent à la nécessité d'enrôlement des apprenants dans une démarche d'introspection individuelle, mais également de réflexion méthodique collective. L'objectif de l'activité est de soulever chez les élèves des croyances puis de les guider, à l'aide de rétroactions du milieu, dans un raisonnement critique leur permettant de déconstruire méthodiquement ces mêmes croyances. L'activité est donc conçue en fonction d'*objectifs spécifiques*, pour répondre à des *besoins identifiés*, afin de susciter la mobilisation de *compétences clefs*.

Bilan des objectifs, besoins et compétences

Les objectifs de l'activité sont les suivants :

- O.1 : répondre aux critères d'une situation didactique (au sens de Brousseau),
- O.2 : être en adéquation avec les compétences mathématiques ciblées au cycle 3.

Pour fixer les besoins, l'activité doit permettre de :

- B.1 : travailler en groupe,
- B.2 : susciter des débats,
- B.3 : susciter des doutes et des questions,
- B.4 : rendre nécessaire une procédure de raisonnement,
- B.5 : soutenir la déconstruction facilitée d'une croyance fausse,
- B.6 : garantir l'intégrité rationnelle des élèves (contrôlée par l'enseignant).

Finalement, le bilan des compétences ciblées est rappelé en page 4.

Conception de l'activité : justification des variables didactiques

L'activité repose sur la résolution de puzzles dont les pièces ont l'*apparence* de figures géométriques bien connues, à savoir deux trapèzes rectangles et deux triangles rectangles :

¹³ Les variables didactiques sont des paramètres qui, lorsqu'on agit sur eux, provoquent des adaptations, des régulations et changements de stratégie. Ces paramètres permettent de simplifier ou de complexifier la tâche et ainsi de faire avancer la « construction » du savoir.

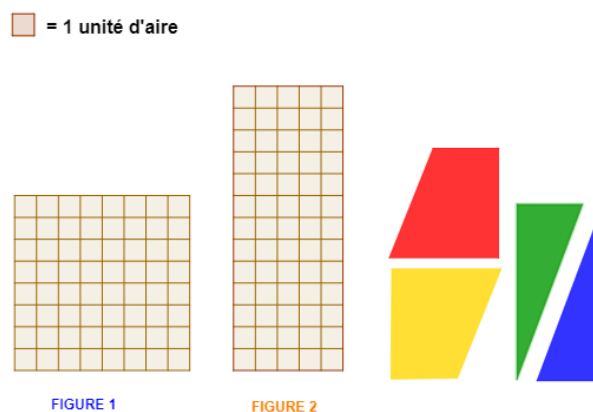


Figure 4 : Plan des puzzles de l'activité.

Les quatre pièces colorées sont amovibles et transparentes : elles permettent des constructions et déconstructions multiples. Les deux autres figures quadrillées sont fixes et leurs aires respectives peuvent être exprimées en un nombre de petits carreaux. Un carreau représente une unité de mesure de surface pour faciliter l'expression des aires par les élèves. En agencant d'une certaine manière les figures colorées sur la figure 1 (64 carreaux), on remarque que celles-ci peuvent la recouvrir entièrement. En tentant une manipulation similaire sur la figure 2 (65 carreaux), on remarque *a priori* un résultat identique : l'aire de l'ensemble des quatre figures colorées semble être exactement égale à celle de la figure 2. Il ne s'agit toutefois que d'une illusion¹⁴.

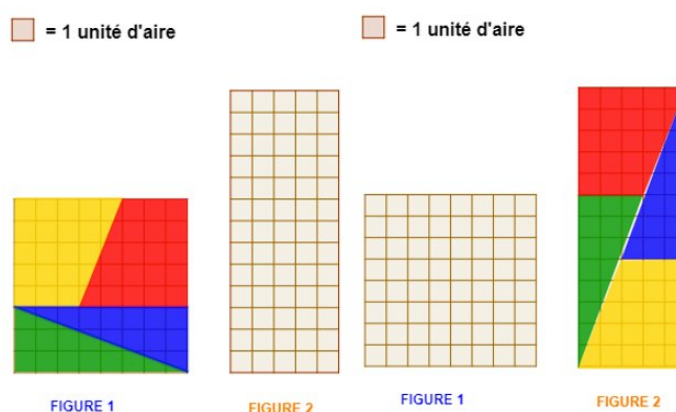


Figure 5 : Recouvrement des figures 1 et 2 avec les pièces amovibles.

Une feuille de questions imprimée au format A3 accompagne les puzzles, elle est destinée aux élèves et doit permettre des rétroactions du milieu. Les questions sont les suivantes, leur ordre est important :

- (1) À l'aide des 4 figures colorées, peut-on recouvrir la figure 1 entièrement ?
- (2) À l'aide des 4 figures colorées, peut-on recouvrir la figure 2 entièrement ?
- (3) D'après vous, quelle figure a la plus grande aire ? La plus petite ? Sont-elles égales ? Justifier la réponse.
- (4) De combien de petits carreaux est composée la figure 1 ?

¹⁴ Il s'agit d'une variante d'un puzzle de Lewis Carroll, dont s'inspire le paradoxe de Gardner. L'explication du paradoxe reste inchangée, elle repose sur une illusion : certains segments apparemment droits sont en réalité courbes.

- (5) De combien de petits carreaux est composée la figure 2 ?
- (6) D'après vous, quelle figure a la plus grande aire ? La plus petite ? Sont-elles égales ? Justifier la réponse.
- (7) Comparez les réponses des questions 3 et 6, que remarquez-vous ?
- (8) Proposez une méthode pour expliquer ce que vous avez remarqué.

Trois outils sont mis à disposition des élèves : une feuille de brouillon, un crayon à papier et une règle graduée. Initialement, la figure 1 est recouverte par les figures colorées avant le début de l'activité. Les élèves travaillent en groupes de trois. Il leur est demandé de suivre les questions de la feuille, dans l'ordre, et d'apporter des réponses consensuelles. L'enseignant a pour consigne de s'assurer avant le début de l'activité que les élèves comprennent les questions et les notions embarquées : surface, figure, recouvrement, etc. Durant l'activité, les élèves travaillent en autonomie, l'enseignant a pour consigne de s'assurer que les élèves ne choisissent pas délibérément et consensuellement de défendre un point de vue irrationnel, il veille également à la sérénité des débats. En fin d'activité, l'enseignant explique clairement l'origine du paradoxe et discute avec ses élèves de l'usage de certaines des douze compétences mentionnées plus haut. Un temps de 45 minutes à 1 heure est laissé à chaque groupe.

Plusieurs éléments permettent d'affirmer qu'il s'agit là d'une situation didactique au sens de Brousseau. Le problème posé aux élèves consiste à expliquer le paradoxe, il est attendu d'eux qu'ils arrivent à la conclusion que la somme des petits espaces entre les segments courbes représente une surface équivalente à une unité d'aire, c'est-à-dire un carreau¹⁵. Le savoir¹⁶ (au sens de Brousseau) visé porte sur la mobilisation des compétences clefs identifiées par Ennis et Norris pour apporter une explication rationnelle à un phénomène apparemment irrationnel. *A priori*, l'élève peut comprendre la consigne et s'engager vers une solution du problème sans disposer de ces connaissances entièrement élaborées. Une procédure possible pour résoudre le problème consiste à remarquer, soit à l'aide de mesures, soit de manière empirique et à l'aide des rétroactions produites par le milieu (les questions guides), l'existence d'espaces entre les figures colorées lorsqu'elles recouvrent la figure 2. La variabilité des scénarios qui peuvent aboutir à une telle procédure de groupe est assez grande et dépend de la durée et de la teneur des échanges entre les élèves. L'évaluation de la réussite de l'élève s'effectue sur la base de deux propositions qui doivent toutes deux être vérifiées :

- Il a compris et peut expliquer clairement l'illusion produite par le paradoxe en avançant des arguments cohérents et rationnels.
- Durant l'activité, il a su interagir avec les autres élèves en s'appuyant sur un discours rationnel. Au minimum, il a : discuté et agi avec les autres, contribué à la construction d'une procédure de décision de groupe.

L'élève a échoué à la résolution du problème si l'une **ou** l'autre des deux propositions n'est pas vérifiée. Finalement, l'enseignant n'intervient pas durant l'activité autrement que pour répondre à des questions d'ordre technique posées par les élèves (comment vérifier un alignement,

¹⁵ Aucune validation technique ou appuyée par des mathématiques n'est attendue. Les élèves doivent formuler, à l'aide d'un raisonnement logique, l'hypothèse qui leur paraît la plus plausible rationnellement. L'enseignant valide alors l'hypothèse et peut la démontrer au tableau blanc interactif grâce à l'appliquette dédiée développée sur GeoGebra : <https://www.geogebra.org/m/w9jwmm67>

¹⁶ Une situation où les connaissances qui ont servi ailleurs comme moyen de **décision**, sont explicitement l'objet d'une action ou d'une étude, d'une **identification**, d'une **classification**, d'une **articulation avec d'autres**, etc. donne alors à ces connaissances une autre fonction : celle d'objets de l'action du sujet. Nous appelons ces nouveaux objets : **savoirs** (Brousseau, 1998, p. 6).

comment calculer une surface, etc.). En fin d'activité, il contribue à la phase d'institutionnalisation des connaissances en expliquant clairement les origines de l'illusion et en mentionnant l'utilité de mobiliser certaines compétences pour parvenir à une telle conclusion.

Finalement, l'originalité de l'exercice et les notions mathématiques qu'il sous-tend semblent *a priori* en accord avec la dimension ludique souhaitée ainsi qu'avec les compétences mathématiques ciblées au cycle 3. Ces différents éléments permettent d'affirmer que l'activité correspond *a priori* de manière adéquate aux objectifs O.1 à O.3 fixés.

Les besoins de l'activité sont quant à eux : soit imposés par les modalités de travail, soit appuyés par les biais cognitifs que devrait *a priori* générer la manipulation du paradoxe mathématique. Ainsi, B.1 et B.6 sont simplement imposés par les consignes « travailler en groupe de 3 » et « en fin d'activité, l'enseignant explique clairement l'origine du paradoxe ». B.5 est assuré par les rétroactions du milieu, en particulier grâce au dispositif des questions guides. Les questions 4, 5, 6, et 7 doivent permettre à l'élève de constater que les aires des figures 1 et 2 ne sont pas égales et qu'il existe, de manière évidente, un écart entre leur intuition première (biaisée) et la réalité des faits. Finalement, les besoins B.2, B.3 et B.4 seront assurés par les biais cognitifs que l'activité devrait *a priori* déclencher chez les élèves. La nature de ces biais et le moment de l'activité où ils devraient apparaître sont détaillés ci-dessous :

Moment 1, questions 1 à 3 : la première situation, à savoir que la figure 1 est recouvrable par les figures colorées, et l'illusion créée par le recouvrement *a priori* possible de la figure 2 devraient conduire à un *biais de cadrage* appuyé par un *biais d'ancrage*. On s'attend à ce que les élèves affirment que la figure 2 est parfaitement recouvrable et que les figures 1 et 2 possèdent des aires égales.

Moment 2, questions 4 à 6 : c'est une phase de déconstruction progressive des croyances. L'objectif des questions est de guider les élèves dans leur réflexion, leur permettre de s'interroger méthodiquement. Cette phase doit permettre une réelle prise de conscience chez les élèves, on s'attend à ce qu'ils montrent des signes d'incompréhension, de nervosité, d'agacement, et cherchent à s'accrocher à leurs croyances initiales. C'est durant cette phase que l'on s'attend aussi à ce que les échanges argumentatifs soient les plus vivants et permettent l'émergence de *biais de confirmation*, de *conformisme*, de *faux consensus* et d'*effet boomerang*.

Ces différents points justifient ainsi le dispositif élaboré pour l'activité et l'adéquation de celle-ci avec les besoins, objectifs et compétences ciblées. Cependant, la question du support matériel pour la production des pièces reste quant à elle en suspens. Le paragraphe suivant met en lumière les raisons qui ont conduit à expérimenter l'activité au travers de trois supports différents.

Déclinaison de l'activité sur trois supports : interroger la pertinence des variables matérielles

La production matérielle des pièces du puzzle pose un certain nombre de questions d'ordre technique, mais également didactique. Par exemple : comment régler l'épaisseur des pièces du puzzle ? Des pièces trop fines se chevaucheraient et rendraient la manipulation et l'évaluation des aires plus difficile, toutefois ces difficultés pourraient inciter davantage les élèves à s'entraider mutuellement. Des pièces plus épaisses rendent le chevauchement contre-intuitif, mais les espaces entre les pièces seraient moins visibles, ce qui constituerait un obstacle technique au déroulement de l'activité. Un portage numérique du puzzle pourrait conduire à des difficultés techniques inhérentes à l'informatique, et de plus, l'usage de la souris obligerait à ce que la manipulation des figures ne soit toujours réservée qu'à un seul élève à la fois. De même : les pièces doivent-elles être parfaitement indéformables ? Des pièces fines en papier plastifié

seraient suffisamment souples pour être pliées et déformées. Ces trois dispositifs possèdent *a priori* des forces et des faiblesses. Afin d'évaluer l'impact et l'efficacité de chacun d'entre eux, il a été décidé de produire une déclinaison de l'activité selon les modalités des trois supports suivants :

- **Numérique** : les puzzles sont entièrement numérisés, la feuille de questions reste en support papier. L'activité est développée sur la plateforme Geogebra¹⁷.
- **Tangible souple** : les pièces colorées sont imprimées, plastifiées et découpées manuellement. Les figures 1 et 2 sont imprimées sur format A4 et plastifiées. La feuille de questions reste en support papier.
- **Tangible rigide** : les pièces colorées sont produites à partir de la découpe laser de feuilles de plexiglas épaisses de 4 mm. Les figures 1 et 2 sont imprimées sur format A4 et plastifiées. La feuille de questions reste en support papier.

Durant une expérimentation en classe, trois groupes d'élèves sont ainsi répartis sur chacun des dispositifs. Les groupes n'échangent pas entre eux et les élèves qui travaillent sur un dispositif n'ont pas connaissance des deux autres.

Analyse a priori

L'analyse *a priori* des trois dispositifs suggère les difficultés et scénarios suivants engendrés par chacun des trois supports :

- Dispositif *numérique* : l'activité est facilitée par le guidage et l'automatisation de certaines manipulations. Les bords des pièces colorées s'attirent et s'accrochent automatiquement. Pour changer l'orientation d'une pièce, il suffit de cliquer dessus, de sorte que chaque pièce ne peut prendre que 4 positions différentes. L'illusion que les segments courbes sont droits est renforcée, cependant les élèves ont la possibilité de zoomer sur les pièces, ce qui, contrairement aux deux autres formes de l'activité, peut permettre de faire apparaître bien plus nettement les espaces. Le guidage, la facilité dans la manipulation des pièces, la qualité de l'illusion et la mise à disposition du zoom semblent indiquer qu'il s'agit de la version de l'activité la plus adaptée pour répondre au problème posé par le paradoxe.
- Dispositif *tangible souple* : la fragilité des pièces (pliables), les difficultés de manipulation qu'elles peuvent engendrer (elles restent souvent collées aux doigts), et leur découpage nettement moins précis (car manuel), laissent penser que de trop nombreux obstacles viendront parasiter le bon déroulement de l'activité. Tous ces points semblent indiquer qu'*a priori* cette version de l'activité est la moins adaptée pour le travail des compétences ciblées.
- Dispositif *tangible robuste* : la découpe des pièces est extrêmement précise, leur superposition est contre-intuitive, mais les espaces sont difficilement visibles. Toutefois, contrairement au dispositif *souple*, les pièces sont faciles à manipuler : elles ne collent pas aux doigts et sont indéformables. Le faible nombre d'obstacles et la qualité de l'illusion semblent indiquer que ce dispositif est également assez adapté.

L'analyse des résultats sera réalisée à l'aide d'une grille de lecture qui évaluera qualitativement : le degré d'autonomie des élèves, les échanges entre les élèves, les échanges entre les élèves et l'enseignant, la gestuelle des élèves, et finalement les réponses des élèves aux questions de la

¹⁷ Elle est consultable à cette adresse : <https://www.geogebra.org/m/w9jwmm67>

feuille¹⁸.

2.2. Analyse *a posteriori*

Pour cette première étude, deux expérimentations ont été menées au sein de deux classes de CM2. Les résultats sont très encourageants pour le dispositif *tangible souple* (85 % des élèves engagés dans l'activité l'ont réussi), mitigés pour le dispositif *numérique* (50 % des élèves l'ont réussi), et peu encourageants, voire contre-productifs pour le dispositif *tangible robuste* (50 % des élèves l'ont réussi, mais avec une aide importante de l'enseignant). En ce qui concerne le dispositif *robuste*, dans les deux expérimentations les échanges entre les élèves du groupe étaient faiblement productifs. La gestuelle des élèves, c'est-à-dire la fréquence et la mutualisation des manipulations, est également faible dans ces groupes. Le dispositif *robuste* n'a donc pas permis de susciter un travail de groupe ou l'émergence de débats, deux besoins pourtant essentiels à l'activité. Ce constat est de fait rédhibitoire : le dispositif *tangible robuste* n'a pas permis le travail des compétences ciblées, et par ailleurs, seul un des deux groupes amenés à travailler sur ce dispositif a pu trouver la solution au paradoxe avec l'aide de l'enseignant.

En revanche, les deux autres dispositifs font état de résultats plus encourageants, particulièrement en ce qui concerne le dispositif *tangible souple* qui, contrairement à ce que l'analyse *a priori* suggérait, a été le plus efficace. Dans ce dernier, les élèves ont systématiquement fait preuve d'une autonomie importante, les échanges ont été productifs et ont permis d'arriver à la solution du problème posé dans les deux groupes. L'analyse de la gestuelle démontre une implication mutuelle des élèves, et l'analyse des réponses montre l'effet positif des rétroactions du milieu sur les prises de décision. Par ailleurs, dans les deux groupes amenés à travailler sur ce dispositif, les élèves ont fait preuve d'un grand investissement.

Le dispositif *numérique* fait état de résultats plus mitigés : seul un groupe sur les deux a réussi à résoudre le problème. Bien que les réponses apportées soient très bonnes, la qualité des échanges et la gestuelle des élèves laissent à désirer. Le partage de la souris entre les élèves a été une source de conflits tout au long de l'activité au sein des deux groupes. Le dispositif ne semble pas donc en faveur d'un travail de groupe et peu propice à la production d'échanges richement argumentés.

Les mécanismes psychologiques qui visaient à biaiser les attitudes et les réflexions des élèves pour permettre leur engagement dans l'activité ont bien été observés. Les *biais de cadrage* et *d'ancrage* ont particulièrement bien fonctionné : la totalité des groupes a pensé, dans un premier temps, que la figure 2 était parfaitement recouvrable par les figures colorées. De même, 2 des 6 groupes ont pensé que les figures 1 et 2 possédaient des aires égales sans même chercher à dénombrer les carreaux de chacune d'elles. À l'exception des 2 activités *tangibles robustes*, on note également que l'activité semble avoir permis une production importante d'échanges entre les élèves, ce qui était l'un des principaux besoins. Toutefois, les arguments échangés entre les élèves sont peu recherchés. Cependant, ce niveau d'argumentation doit être relativisé au regard de l'âge et du niveau des élèves. De même, la lecture des *verbatim* révèle, dans de nombreux passages, l'existence de marqueurs d'irrationalité dans le discours des élèves. Deux extraits peuvent illustrer ce fait :

E1 : [relit la question 3] *Comment on peut répondre ?*

E2 : [construit la figure 2 avec beaucoup d'application].

E1 : *Oh ! Je te jure ! C'est pas logique !*

¹⁸ Les données captées portent donc sur les échanges oraux, les photographies des mains et les réponses des élèves.

E3 : *Mais si c'est logique...*
 E1 : *Non ! Parce qu'il manque un carreau !*
 E2 : *Bah... il est plus grand !*
 E1 : *Non, il a disparu !* [Il passe à la question 4]. 64 !
 E2 : *Oui. La figure 1, 64 !*
 E3 : *Le carreau... il a disparu.*
 E1 : *C'est bizarre... vous êtes sûrs qu'on a bien compté ?*
 E3 : *Oui... 8 fois 8... 64 !*

Extrait 1 du verbatim de l'expérience 1, groupe tangible souple.

E1 : *Oui ! Oui c'est vrai.*
 E1 et E2 : [travaillent ensemble et cherchent à reconstruire la figure 2].
 E1 : *Pffffff...*
 E3 : [se met à travailler avec E1 et E2].
 E1 : *Mais ça marche pas, sinon c'est pas logique !*
 E3 : *Mais vous ne savez pas compter !*
 E1 : *Mais peut-être qu'elle est de la même taille... mais encore plus petite !*
 E2 : *Mais ça recouvre tout...*
 E1, à E2 : *Mais toi déjà de base tu es pas logique donc...*

Extrait 2 du verbatim de l'expérience 1, groupe tangible souple.

Dans les deux expérimentations, l'activité *tangible souple* se démarque nettement des deux autres : les échanges des deux groupes ont été productifs et ont permis à chaque fois d'arriver à une explication rationnelle et correcte du paradoxe. L'analyse de la gestuelle des élèves permet de constater que ce dispositif semble avoir incité les élèves aux manipulations et aux actions collectives, comme le montre la figure 6 :

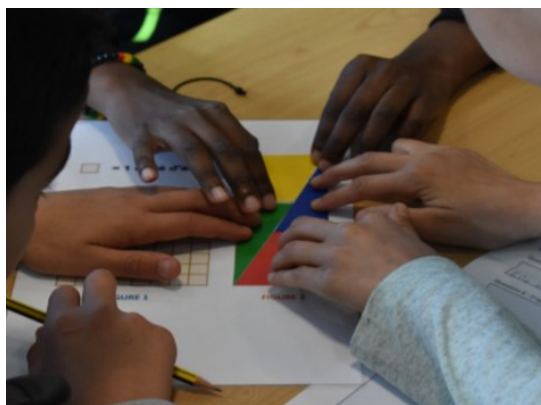


Figure 6 : *Expérience 1 - atelier tangible souple - fin d'activité.*

Ce résultat peut s'expliquer par les difficultés supplémentaires, dans les manipulations, engendrées par le matériau (pièces qui collent aux doigts et se chevauchent) et nécessitant des gestes plus précis et plus nombreux ainsi qu'une collaboration et une communication plus importante entre les élèves.

Dans le dispositif *numérique*, la souris (seul outil permettant la manipulation des figures) a été une source de frustration. De plus, les difficultés techniques ont également eu tendance à engendrer une frustration, voire un stress chez les élèves manipulant. Ce stress a participé à un

désintérêt progressif de certains élèves pour l'activité. La plupart des élèves n'ont pas eu le réflexe attendu de zoomer sur l'appliquette numérique pour mieux observer les espaces. De plus, le fait de zoomer a parfois engendré des difficultés techniques supplémentaires, nécessitant l'intervention de l'enseignant.

L'échec du dispositif *tangible robuste* peut s'expliquer par la difficulté que les élèves ont eu à se départir de leur première impression. Comme les pièces étaient plus épaisses et leur découpe d'une très grande précision, cela a rendu les espaces d'autant moins observables. Le *biais de cadrage* recherché était vraisemblablement trop fort, ce qui a par la suite constitué un *obstacle* à la poursuite de l'activité. De même, les pièces de ce dispositif, plus faciles à manipuler, n'ont pas engendré suffisamment de difficultés pour susciter la collaboration des élèves. Ce manque de collaboration a pu avoir pour effet un manque d'échanges entre les élèves, ne permettant pas l'émergence d'une procédure de résolution collective ni le travail des compétences ciblées.

2.3. Conclusion de la première étude et perspectives pour la seconde

Cette première étude permet de conclure à la pertinence de l'ingénierie didactique déployée (en particulier sa version *tangible souple*) pour permettre l'émergence et le travail de l'esprit critique des élèves en classe de mathématiques. Elle montre également qu'il est possible de combiner le travail des compétences clefs des programmes avec celui des compétences argumentatives et critiques. Ces résultats encouragent ainsi à une reproduction des expériences de manière à éprouver plus spécifiquement le dispositif qui semble être le plus prometteur, à savoir la déclinaison *tangible souple* de l'activité. Ces travaux montrent également qu'il existe des ponts théoriques entre la didactique et la psychologie cognitive : ils interrogent la pertinence d'un regard croisé entre deux domaines de la recherche qui auraient beaucoup à gagner en se nourrissant mutuellement. De même, l'étude démontre une nouvelle fois toute la pertinence de la théorie des situations pour produire une ingénierie didactique et analyser l'appropriation d'un savoir visé. Enfin, la possibilité qu'un tel dispositif, produit à l'aide de simples feuilles de papier plastifiées, puisse convenir au travail de la méthode critique en classe de mathématiques, offre des perspectives réjouissantes quant à la possibilité de proposer aux enseignants un outil de travail peu coûteux et facilement reproductible.

3. Seconde enquête (2021)

3.1. Choix du nouveau dispositif et analyse *a priori*

Choix de dispositif

Cette seconde étude présente et discute des résultats obtenus à la suite de la reproduction d'une partie spécifique de l'expérimentation menée en 2019. Dans cette première étude, les résultats concluaient à l'efficacité nettement supérieure du dispositif *tangible souple* par rapport à deux autres dispositifs qui avaient également été testés. Deux critères avaient alors été fixés pour évaluer la réussite de l'élève et l'efficacité du dispositif :

- L'élève a compris et explique clairement l'illusion produite par le paradoxe en avançant des arguments cohérents et rationnels.
- Durant l'activité, l'élève a su interagir avec les autres membres du groupe en s'appuyant sur un discours rationnel. Au minimum, il a discuté et agi avec les autres et contribué à la construction d'une procédure de décision de groupe.

Dans les expérimentations de la première étude, pour le dispositif tangible souple : 6 des 7 élèves ont ainsi réussi l'activité (chez le septième élève, seul le premier critère est validé). Ces résultats encourageants ont motivé le déploiement d'une nouvelle expérimentation, au sein d'une classe de CM2, en 2021¹⁹.

Pour cette expérimentation, 3 groupes constitués de 3 élèves se confrontent à la déclinaison *tangible souple* de l'activité présentée dans la première étude. Les groupes sont formés en fonction des affinités de travail des élèves au jugé de l'enseignant. Les trois groupes sont répartis sur des îlots de travail séparés les uns des autres : des élèves de groupes différents ne peuvent pas interagir entre eux. L'enseignant reçoit les mêmes consignes que lors de la première expérimentation : il s'assure que les élèves ont compris les questions et maîtrisent les notions mathématiques abordées (alignement, aire, somme des aires, recouvrement, etc.), il répartit les élèves dans les groupes, puis contrôle régulièrement l'avancement des groupes dans l'activité. L'expérimentateur n'intervient à aucun moment auprès des élèves. À chaque groupe sont distribués : une feuille des questions guide imprimée en format A3, une feuille de brouillon, les puzzles fabriqués selon les modalités de la déclinaison *tangible souple*. Chaque groupe est identifié par une couleur : rose, vert, bleu. Chacun des objets distribués aux groupes est identifié par la couleur de référence du groupe. Il est demandé aux élèves de se munir d'un stylo par personne et d'une règle par groupe. Enfin, l'enseignant reçoit la consigne qu'un temps indicatif de 45 minutes devrait être suffisant pour permettre aux élèves de réaliser l'activité demandée. La nature des données captées et leur analyse à l'aide d'une grille de lecture ne changent pas par rapport aux expérimentations de la première étude.

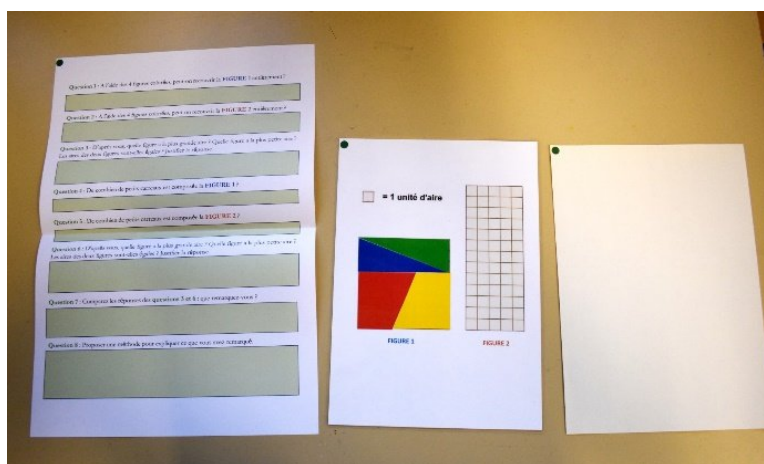


Figure 7 : Dispositif mis à disposition du groupe vert.

Analyse a priori

L'analyse *a priori* suggère que les trois groupes pourraient produire des résultats similaires à ceux observés dans les groupes de la première enquête, qui avaient été engagés sur le dispositif *tangible souple*. On peut s'attendre à observer des échanges argumentés dans les groupes, ainsi que des *marqueurs d'irrationalité* dans le discours des élèves ; toutefois, les groupes devraient parvenir à produire des procédures de décisions mutualisées leur permettant de formuler l'hypothèse attendue pour expliquer le paradoxe, à savoir : *la somme des espaces entre les*

¹⁹ L'expérimentation, initialement prévue au semestre de printemps 2020, a dû être reportée en conséquence de la crise sanitaire liée à la pandémie de COVID 19. Elle a été rendue possible en 2021 grâce à la participation de l'école primaire Lamartine de Lyon, et à l'implication de Jean-Luc Martinez, professeur des écoles dans l'établissement : <http://eductice.ens-lyon.fr/EducTice/equipe/membres/permanents/jean-luc-martinez>

figures amovibles représente l'équivalent d'une unité d'aire. Le carré ne « disparaît » donc pas, il est « éclaté » et plus petits espaces. La résistance aux manipulations induite par la texture et la forme des pièces (collantes et très fines) devraient susciter le besoin d'agir collectivement. Finalement, on peut s'attendre à observer une bonne autonomie des élèves, peu d'interventions de l'enseignant, et une rétroaction efficace des questions sur les prises de décision des élèves.

Analyse a posteriori

L'analyse des résultats permet de déterminer que deux groupes (rose et vert) sur trois sont parvenus à résoudre le problème posé par le paradoxe. Dans ces groupes, tous les élèves valident les deux critères de réussite. L'autonomie des élèves est totale du début à la fin de l'activité, l'enseignant n'a pas eu à intervenir pour réorienter les échanges ou contrer une difficulté technique. Les échanges entre les élèves sont globalement assez productifs et permettent systématiquement d'aboutir à une procédure de décision mutualisée. L'analyse de la gestuelle semble également montrer une participation efficace et mutualisée de tous les élèves dans les deux groupes. Enfin, les réponses suggèrent que les rétroactions du milieu ont bien permis l'effet escompté sur les procédures de décision des élèves.

Les résultats du groupe bleu contrastent très nettement avec ceux des groupes rose et vert. Ce groupe est passé à côté de l'activité et a été très peu productif. Dès le début de l'activité les échanges sont désordonnés, peu nombreux et les élèves ne partagent que très peu d'arguments. De nombreuses fois, le groupe se détache de l'activité au profit de discussions hors-sujet. À partir du milieu de l'activité, les élèves semblent avoir perdu le fil de leur travail, ils réécrivent plusieurs fois les mêmes réponses qu'ils reformulent inlassablement une dizaine de fois. Ils perdent totalement en autonomie dès le milieu de l'activité et par la suite, malgré l'intervention de l'enseignant une dizaine de minutes avant la fin du temps imparti, les élèves ne parviennent pas à se concentrer à nouveau.

Ce contraste est particulièrement marqué dans l'exploration des *verbatim*. Au sein des groupes rose et vert, des marqueurs d'irrationalité indiquent que les effets des biais cognitifs suscités par l'activité sont bien présents, les deux extraits suivants illustrent ce constat :

- E1 : *Attends, je peux regarder ?* [Il commence à lire la question 2 à haute voix].
E2 : *Mais non !*
E1 : [s'adresse à E2]. *Mais attends ! tu es relou ! Je teste !*
[Les élèves rigolent. E1 essaie de recouvrir la figure 2 avec les pièces colorées].
E2 : [semble se moquer de E1]. *Il tremble !*
E1 : [s'adresse à E2]. *Tu es un peu relou là.*
E3 : [s'adresse à E1]. *Mais non, c'est négatif, regarde !*
E1 : *Attends ! Je veux finir !*
E2 : *De toute façon, ça, ça ne va pas servir du tout hein.*
E1 : *Regarde, tu mets ça... comme ça... là.*
E3 : *Ouais mais non... il y a plein de trous... il y a plein de trous !!*
E1 : *Mais oui ! Mais parce que comment tu veux qu'on fasse tout ? ! Comment tu veux ? !*
E3 : *Bah il faut qu'il soit un peu plus gros...*
E2 : *Voilà !*
E3 : *Non, on ne peut pas !*

Extrait du verbatim du groupe rose.

E1 : *Bah là il n'y a qu'un carreau de plus...*
 E3 : *Ouais voilà.*
 E1 : *Ah non !! Mais non, ça ne se peut pas !! Parce qu'ils sont tous là... la même... regarde ! Là ça remplit tout ici, et là ça remplit tout ici, ça ne se peut pas !*
 [E1 qui jusque-là semblait suivre les remarques de E2 et E3, finit par proposer sa vision des choses]. *S'il y a un carreau de plus ici, alors...*
 E2 : *Ah mais oui !! Mais oui ça tient pas, ça ne se peut pas !*
 [...]

 E2 : *Mais c'est bon, on a bien compris ! Mais alors... Mais alors comment on peut remplir les deux figures s'il y en a un de plus ?...*
 E1 : *Mais oui ! C'est bizarre ! Mais oui ! C'est... imaginaire.*
 E1 : [s'adresse à E3]. *Mais on a bien compté !*
 E3 : *Non mais il faut recompter on sait jamais.*

Extrait du verbatim du groupe vert.

Dans ces extraits, les élèves partagent leurs doutes, confrontent leurs méthodes et leurs points de vue, des termes comme « imaginaire », « bizarre » relèvent du registre de l'étrange, de l'irrationnel. Rien de tel n'apparaît dans les discussions du groupe bleu, celles-ci sont superficielles, les élèves se contentent de lire et relire plusieurs fois les questions, de reformuler les réponses à y apporter, et d'énumérer et recompter plusieurs fois les carreaux des figures 1 et 2. La pauvreté argumentative des échanges du groupe bleu est symptomatique d'un groupe qui n'a pas réussi à coopérer et produire une procédure de décision méthodique. C'est par ailleurs la raison pour laquelle aucun des élèves du groupe bleu ne vérifie l'un ou l'autre des critères de réussite précédemment établis.

Le verbatim du groupe bleu révèle l'absence d'un paramètre qui apparaît fondamental : la prise de conscience du paradoxe et du problème qu'il soulève. Les élèves ne saisissent pas que leurs réponses ne sont pas cohérentes au regard de leurs observations : à la question 1, le groupe répond : « Oui nous pouvons recouvrir la figure 1 à l'aide des 4 figures colorées entièrement ». À la question 2 : « Oui, nous pouvons recouvrir la figure 2 à l'aide des 4 figures colorées ». Et pourtant, à la question 3, les élèves répondent : « La plus grande figure est la figure 2 car son aire est plus grande que l'aire de la figure 1. La plus petite aire est celle de la figure 1, elle a 64 carreaux et la figure 2 en a 65. Elles sont pas égales »²⁰. Des résultats et réponses similaires ont été observés avec le groupe *tangible robuste* de l'expérimentation 1: l'étude du verbatim avait également révélé que les élèves n'avaient pas établi le paradoxe et l'incohérence entre leurs réponses et leurs observations. Pour ces deux groupes, aucun des élèves ne valide l'un ou l'autre des deux critères de réussite.

Sans surprise, ne pas constater qu'il y a un écart paradoxal entre les observations et les réponses est un obstacle rédhibitoire à la bonne conduite de l'activité : comme le problème n'apparaît pas, l'activité ne permet logiquement pas le travail des compétences qui devraient être mobilisées. Chez les élèves présentant des difficultés sur ce point, l'intervention de l'enseignant est déterminante : lors de la troisième expérimentation, l'enseignant est intervenu trop tardivement (quelques minutes avant la fin de l'activité), alors que la perte d'investissement des élèves a commencé dès le début du milieu de l'activité. Par ailleurs, dans la seconde expérimentation, sans l'intervention anticipée de l'enseignant, les élèves de groupe *tangible robuste* auraient probablement eu des résultats similaires.

²⁰ Voir annexe 1.

En revanche, les groupes rose et vert ont produit des résultats qui s'inscrivent dans le prolongement de ceux observés dans les deux premières expérimentations : le dispositif *tangible souple* a bien permis d'atteindre les *objectifs* fixés en répondant à des *besoins* spécifiques afin de susciter la mobilisation de *compétences* clefs.

4. Résultats et discussion

Les deux études présentées ci-dessus avaient pour perspective commune la question de recherche suivante : dans quelles conditions une situation didactique construite autour d'un paradoxe mathématique permet-elle de mobiliser les compétences caractéristiques de l'esprit critique ?

La première étude y répond partiellement, et la seconde plus spécifiquement. Les paradoxes mathématiques, en particulier ceux qui sous-tendent des mathématiques peu élaborées, apparaissent comme des objets prometteurs pour permettre le travail complémentaire de ces compétences. Leur dimension ludique, combinée avec la fascination qu'ils peuvent susciter, en font des candidats de choix. Demeurent cependant les questions du support et d'orchestration didactique de tels objets : la difficulté de résolution du paradoxe est en grande partie dépendante de ces deux aspects. La mobilisation conjointe de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1997) et de la théorie de biais cognitifs (Kahneman, 1974, 2012) permet d'aboutir à une proposition d'activité. La déclinaison de cette même activité en trois supports permet de trancher nettement sur l'efficacité de l'un d'eux : il s'agit du plus simple à produire, car de simples feuilles de papier plastifiées suffisent. La troisième expérimentation conduit justement à des résultats probants en faveur du dispositif qui, dans la première étude, avait montré les résultats les plus encourageants (voir tableau 2).

	Bilan des enquêtes	Enquête	Expérience	Dispositif	Nombre d'élèves	Nombre de réussites	Nombre d'échecs	Taux de réussite	
		1	EXP1	ROBUSTE	3	0	3	0%	
		1	EXP1	SOUPLE	3	3	0	100%	
		1	EXP1	NUMERIQUE	3	2	1	66%	
		1	EXP2	ROBUSTE	3	3	0	100%	
		1	EXP2	SOUPLE	4	3	1	75%	
		1	EXP2	NUMERIQUE	3	0	3	0%	
	Bilan enquête 1	Dispositif tangible robuste : 50% de réussite, <i>a priori</i> inefficace Dispositif numérique : 33% de réussite, <i>a priori</i> inefficace Dispositif tangible souple : 85% de réussite, <i>a priori</i> efficace							
		2	EXP3	SOUPLE	3	3	0	100%	
		2	EXP3	SOUPLE	3	3	0	100%	
		2	EXP3	SOUPLE	3	0	3	0%	
	Bilan enquête 2	Dispositif tangible souple : 66% de réussite, <i>a priori</i> efficace							
	TOTAUX	2	2	3	3	28	17	11	60%

Tableau 2 : Bilan des résultats.

En définitive, sur les 28 élèves participants²¹ : 17 élèves (61 %) valident l'un **et** l'autre des critères de réussite, et 11 élèves (39 %) valident l'un **ou** l'autre (ou aucun) des critères de réussite. Parmi les 11 élèves qui n'ont pas réussi l'activité, 9 d'entre eux (82 %) n'ont pas perçu l'écart paradoxal entre leurs observations et leurs réponses : ceci a systématiquement conduit à l'échec du dispositif. Parmi les 21 élèves qui ont réussi l'activité, 12 d'entre eux (57 %) ont travaillé sur l'activité *tangible souple*. Enfin, parmi les 16 élèves qui ont travaillé sur l'activité *tangible souple*, 12 d'entre eux (75 %) ont réussi l'activité. Dans l'expérimentation 2, après l'intervention de l'enseignant, un groupe est allé au bout de l'activité alors qu'ils n'avaient pas

²¹ 9 élèves durant les expérimentations 1 et 3, 10 élèves durant l'expérimentation 2.

constaté le paradoxe. Dans l'expérimentation 3, l'intervention tardive de l'enseignant auprès du groupe bleu n'a pas permis l'engagement des élèves dans l'activité. L'intervention de l'enseignant au moment propice a ainsi significativement permis d'augmenter de 11 % le taux de réussite des élèves sur les trois expérimentations, et de 19 % sur le seul dispositif *tangible souple*.

Il est toutefois possible de s'interroger sur la représentativité de ces effectifs : pour la première enquête par exemple, est-il raisonnable de penser que les dispositifs *tangible robuste* et *numérique* doivent nécessairement être rejetés car un groupe n'est pas parvenu à résoudre le problème pour chacun d'eux ? Cette décision peut apparaître radicale et précipitée : à juste raison, car le bilan de l'enquête 1 conclut également à une réussite partielle de l'activité via ces dispositifs (33 % pour le dispositif *numérique*, 50 % pour le *tangible robuste*). Rien ne permet d'affirmer que le groupe *tangible robuste* de l'expérimentation 1 n'est pas un cas particulier. Toutefois, et ce point apparaît également important : rien ne permet d'affirmer que le groupe *tangible robuste* qui a très bien réussi l'activité (expérimentation 2) n'est pas également un cas particulier. Et, par ailleurs, il convient de noter que les élèves de ce groupe ont su faire preuve de capacités à s'organiser et à dialoguer remarquables par rapport aux autres groupes des expériences 1 et 3. La qualité des échanges entre les trois élèves de ce groupe a conduit à penser qu'il s'agissait là d'un cas particulier. Malgré cette hypothèse, il apparaît que le dispositif *tangible robuste* nécessiterait certainement d'être à nouveau éprouvé.

Une observation similaire est transposable au dispositif *numérique* : peut-être aurait-il été possible de penser ce dispositif d'une manière plus adaptée, afin de réduire les contraintes inhérentes à la technologie ? Cependant, au regard des résultats significativement positifs du dispositif *tangible souple* : n'est-il pas souhaitable de préférer une activité peu coûteuse matériellement, au détriment d'une technologie plus contraignante et définitivement plus énergivore ?

Enfin, il apparaît que seules la phase de « *confrontation au milieu* » et la pertinence du matériel ont été observées pour évaluer la pertinence des dispositifs. Ce parti pris interroge nécessairement l'utilité de la phase d'institutionnalisation : pourquoi l'efficacité du dispositif d'enseignement n'a-t-il pas été évaluée après cette phase ? Deux éléments de réponse doivent être exposés ici. D'une part, la troisième expérimentation a été menée durant la crise sanitaire de janvier 2021. Cette phase de mise en commun, qui nécessitait également une participation active des élèves (intervention au TBI, échanges de techniques, etc.) n'a pas pu être renouvelée par rapport aux premières expérimentations à cause des mesures de distanciation physique imposées. D'autre part, cette mise en commun n'aurait probablement permis d'agir que sur le premier critère de réussite de l'activité, à savoir : la compréhension et l'explication de l'illusion produite par le paradoxe. Il apparaissait important, et même déterminant, que le second critère d'interaction soit également validé. Or il apparaît discutable que cette phase d'institutionnalisation soit favorable à l'interaction et à la prise de parole de tous les élèves, en particulier de ceux qui présentaient des troubles dysphasiques.

Conclusion

Le bilan de ces études suggère que le dispositif mobilisé est efficace pour permettre le travail de l'esprit critique en classe de mathématiques au cycle 3. Il permet de combiner le travail de compétences mathématiques et de compétences propres à la méthode critique. Toutefois, et ceci conclut le compte-rendu de ces travaux de recherche, deux points essentiels sont à souligner :

1. L'intervention de l'enseignant demeure essentielle dans certains cas, en particulier dès lors que les élèves ne parviennent pas à saisir le paradoxe : autrement dit, l'enseignant doit venir en appui aux rétroactions du milieu lorsque celles-ci ne suffisent pas à évoquer un problème à résoudre chez les élèves.
2. Les 28 élèves qui ont participé à l'expérimentation ne sauraient être un échantillon suffisamment représentatif pour conclure à une opérationnalité du dispositif. En particulier, comme cela a été suggéré, il conviendrait de s'interroger sur la pertinence des dispositifs *tangible robuste* et *numérique* qui ont possiblement été rejetés trop radicalement.

La simplicité de production de l'activité et son apparente efficacité devraient encourager sa reproductibilité, son optimisation et son intégration, non seulement par la recherche, mais également par le corps enseignant. Qui plus est, il existe de nombreuses variantes au paradoxe du carré manquant : des approches matérielles et didactiques différentes sont possibles²². D'autres formes de paradoxes, ne reposant pas nécessairement sur une illusion d'optique, pourraient également faire l'objet d'expérimentations : le problème de Monty Hall²³ serait, par exemple, un candidat possible pour une expérimentation au lycée. Ceci ouvre un champ des possibles qui serait non seulement bénéfique au travail de l'esprit critique, mais également à une approche applicative originale des mathématiques.

Références bibliographiques

- Brousseau, G. (1998). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques*.
http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf
- Brousseau, G. (1997). *Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal*.
- Chipman, S. (2017). *The Oxford Handbook of Cognitive Science*. Oxford University Press.
- Cospérec, S. (2017). *Texte de l'intervention de Serge Cospérec lors de la journée d'étude « Formation à l'esprit critique », 6 décembre 2017, ESPÉ de Créteil*.
<https://www.democratisation-scolaire.fr/spip.php?article286>
- Dewey, J. (1910). *How we think*. Boston: D.C. Heath & Co.
- Kahneman, D. & Tversky, A. (1974). Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases. *Science*, 185(4157), 1124-1131.
<https://www.science.org/doi/10.1126/science.185.4157.1124>
- Kahneman, D. (2012). *Système 1 / Système 2 : les deux vitesses de la pensée*. Paris : Flammarion.
- Legardez, A. & Simonneaux, L. (2006). *L'école à l'épreuve de l'actualité. Enseigner les questions vives*. Paris : ESF.

²² Une variante célèbre du paradoxe consiste à reproduire l'illusion à l'aide d'une tablette de chocolat :
<https://www.youtube.com/watch?v=yWXM65MV8IU>

²³ Le problème de Monty Hall est une énigme probabiliste dont l'énoncé est très simple, mais dont la résolution est souvent non intuitive pour les initiés, raison pour laquelle on parle souvent de « paradoxe » de Monty Hall.

- Norris, S. P. & Ennis, R. H. (1989). *Evaluating critical thinking*. Pacific Grove, CA: Midwest Publications.
- Postman, N. & Weingartener, C. (1969). *Teaching as a Subversive Activity*. New York: Dell Pub. Co.
- Roussel, V. (2020). Exercer l'esprit critique en classe de mathématiques au cycle 3. *Actes du séminaire de didactique des mathématiques, 2019* (pp. 165-166).
- Russell, B. (1926). *Power : A New Social Analysis*. London: Allen and Unwin, 1938 (pp. 312-313).
- Russell, B. (1959). *Interview accordée à la BBC*.
<https://www.youtube.com/watch?v=JXxSowjOxM8>
- Vos, P., Hernandez-Martinez, P. & Frejd, P. (2020). Connections of Science Capital and the Teaching and Learning of Mathematical Modelling: An Introduction. In G Stillman, G Kaiser & C Lampen (éds.), *Mathematical Modelling Education and Sense-making. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*. Cham : Springer.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-37673-4_3

Annexe 1

Réponses aux trois premières questions apportées par le groupe bleu

Question 1 : A l'aide des 4 figures colorées, peut-on recouvrir la **FIGURE 1** entièrement ?

☒ Oui nous pouvons recouvrir la figure 1 à l'aide des 4 figures colorées entièrement.

Question 2 : A l'aide des 4 figures colorées, peut-on recouvrir la **FIGURE 2** entièrement ?

Oui, nous pouvons recouvrir la figure n°2 à l'aide des 4 figures colorées.

Question 3 : D'après vous, quelle figure a la plus grande aire ? Quelle figure a la plus petite aire ? Les aires des deux figures sont-elles égales ? Justifier la réponse.

La plus grande figure est la figure 2 car, son aire est plus grande que l'aire de la figure 1. La plus petite aire est celle de la figure 1 car, elle a 64 carreaux et la figure 2 en a 65. Elles sont pas égales.

Annexe 2

Réponses aux trois premières questions apportées par le groupe tangible robuste de l'expérimentation 1

Question 1 : A l'aide des 4 figures colorées, peut-on recouvrir la **FIGURE 1** entièrement ?

Nous pouvons recouvrir la ~~Figure 1~~ Figure 1

Question 2 : A l'aide des 4 figures colorées, peut-on recouvrir la **FIGURE 2** entièrement ?

La figure 2 est entièrement recouverte.

Question 3 : D'après vous, quelle figure a la plus grande aire ? La plus petite ? Sont-elles égales ? Justifier la réponse.

La figure 1 est plus grande que la figure 2 car la figure 1 qui fait $8 \times 8 = 64$ et la figure 2 qui fait $13 \times 5 = 65$