HAL open science

Petites mathématiques et grandes espérances

Jenny Boucard, Catherine Goldstein

To cite this version:

Jenny Boucard, Catherine Goldstein. Petites mathématiques et grandes espérances. Jenny Boucard; Christophe Eckes. Arranger, disposer, combiner : Théories de l'ordre dans les sciences, les arts d'ornement et la philosophie (1770-1910), Hermann, pp.235-284, 2024. hal-03815292

HAL Id: hal-03815292

https://hal.science/hal-03815292v1

Submitted on 14 Oct 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

I

Petites mathématiques et grandes espérances

Jenny Boucard & Catherine Goldstein

Commentant les récents développements des mathématiques de son époque, Theodore Merz conclut en 1903 (Merz, 1896-1914, II, p. 736) :

> In all these, and in many similar investigations, a conception has gradually emerged which was foreign to older mathematics, but which plays a great and useful part in modern mathematical thought. Older mathematics, ever since the introduction of general arithmetic or algebra, centred in the conception of equality and in the solution of equations. Everything was reduced to magnitude. But there are other relations besides those of magnitude, of more or less. Often in practical pursuits, if we cannot find a counterpart or write down an exact numerical equation, we can gain information by a correspondence. This conception of correspondence plays a great part in modern mathematics. It is the fundamental notion in the science of order as distinguished from the science of magnitude. If older mathematics were mostly dominated by the needs of mensuration, modern mathematics are dominated by the conception of order and arrangement.

L'intérêt de développer des mathématiques abandonnant les considérations numériques sur les grandeurs traverse de nombreux domaines au XIXe siècle : on peut mentionner en particulier la géométrie projective, les recherches de nature combinatoire en algèbre et les débuts de la topologie. Dans les années 1830, William Rowan Hamilton considère ainsi l'algèbre comme la « science de l'ordre » (Hendry, 1984 ;

Øhrstrøm, 1985). En 1847, Johann Benedikt Listing introduit la topologie comme l'étude des « lois de la relation, de la position mutuelle et de la succession »[1] des éléments géométrique, notant encore quelques années plus tard que les propriétés topologiques relèvent de l'ordre (*Anordnung*) et de la situation (*Lage*) (Listing, 1862, p. 13).

En France, Louis Poinsot conçoit la notion d'ordre, comprise comme « la disposition mutuelle qu'on peut observer actuellement entre plusieurs objets » (Poinsot, 1820, p. 402), comme une catégorie fondamentale des mathématiques. Inspiré au départ par le réarrangement des racines de l'unité qui permet à Carl-Friedrich Gauss de résoudre en 1801 l'ancien problème de l'inscriptibilité à la règle et au compas des polygones réguliers dans un cercle, Poinsot, au fil de ses travaux, fait dépendre d'une théorie de l'ordre l'algèbre, la théorie des nombres et la géométrie (Boucard, 2011 ; Boucard et Eckes, 2015). Après lui, cependant, peu de mathématiciens de premier plan, même engagés dans des recherches où ils considèrent la situation plutôt que la grandeur, se réfèrent directement à une théorie de l'ordre ou à la mouvance de Poinsot. Une exception est Camille Jordan, qui y rattache sa thèse dès 1860 et y ancre ses recherches en algèbre, en théorie des nombres, en géométrie, en analyse et en mécanique (Sinaceur, 1991a, Brechenmacher, 2015b), grâce à une commune « méthode de réduction des représentations analytiques » des substitutions (Brechenmacher, 2015b). Dans la synthèse de ses travaux qu'il propose en 1881, pour une candidature à l'Académie des sciences, Jordan souligne encore :

> Ces réflexions de Poinsot, qui ont servi d'épigraphe à mes premiers essais, caractérisent assez nettement la tendance générale de mes recherches. Elles ont eu presque constamment pour but d'approfondir *la théorie de l'ordre* au double

1. « [von] den Gesetzen des Zusammenhangs, der gegenseitigen Lage und der Aufeinanderfolge » (Listing, 1847, p. 6). Sur la topologie de Listing, voir notamment (Flament, 2016 ; Pont, 1974), ainsi que Chap. Géométrie de situation & art ornemental.

> point de vue de la Géométrie pure et de l'Analyse. (Jordan, 1881, p. 8)

Antoine-Augustin Cournot fait aussi de l'ordre une pièce maîtresse dans sa classification du savoir (Chap. Philo 1 et 2). Plus éloigné des cercles mathématiques, mais bien informé néanmoins du programme de Poinsot, l'ornemaniste Jules Bourgoin s'inspire de la théorie de l'ordre dans ses projets artistiques (Boucard et Eckes, 2015, Chap. Géométrie de situation & art ornemental). Par ailleurs, la théorie de l'ordre de Poinsot fait l'objet de mentions ponctuelles tout au long du XIXe siècle, par exemple dans des manuels (Rouché, 1857, p. 127 ; Lecointe, 1859, p. x ; Comberousse, 1890, p. 619, 666), dans des rapports (Darboux, 1894, p. 1026) ou dans des synthèses historico-bibliographiques (Galdeano, 1899, p. 8 ; Guimarães, 1900, p. 7 ; Netto et Vogt, 1904, p. 63) [2].

Confrontées à ces références ponctuelles et disparates, nous avons cherché à mieux comprendre sous quelle forme, tant matérielle qu'intellectuelle et dans quels cadres thématiques l'idée d'une théorie de l'ordre (en particulier inspirée de celle de Poinsot) avait circulé en mathématiques au cours du XIXe siècle. Notre première tentative a été d'utiliser les bases de données et répertoires bibliographiques, comme le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* ou le *Catalogue of Scientific Papers*. La théorie de l'ordre n'y figure pas comme rubrique spécifique et la recherche du seul mot « ordre » est inutilisable pour notre propos, car ce mot, le plus souvent accompagné d'un adjectif ordinal, intervient dans de nombreuses classifications [3]. La requête « théorie de l'ordre » dans l'ensemble des champs de la base du *Jahrbuch* (sur la

2. La plupart de ces références explicites à la théorie de l'ordre de Poinsot sont issues de publications francophones, mais notons que les ouvrages de Lecointe et de Rodolphe Guimarães sont publiés à Bruxelles et au Portugal, respectivement, et que la synthèse de Galdeano concerne l'Espagne.

3. Par exemple, « courbe algébrique du 3e ordre », « équations aux dérivées partielles du second ordre » etc. On trouve aussi bien sûr « groupe d'ordre fini' ». Comme nous le verrons, certains auteurs

période 1868-1900), consulté sur https://zbmath.org/ n'a rien donné [4], « science de l'ordre » a fourni une seule référence, sur laquelle nous reviendrons. Nous avons donc choisi d'étendre notre recherche en utilisant le site Gallica de la Bibliothèque nationale de France, en y cherchant « théorie de l'ordre » et « science de l'ordre », et en nous restreignant au XIXe siècle. Nous avons obtenu 233 et 234 références respectivement, avec de nombreux recoupements [5]. La majeure partie de ces références concerne le droit, les études sociales ou la théologie, quelques-unes l'administration ou l'art militaire. Les références à la « théorie de l'ordre naturel » des physiocrates, à une « théorie de l'ordre social » d'Auguste Comte (lui-même auteur de cette liste), ou inspirée par eux, abondent. Pour donner quelques exemples de la variété des auteurs, mentionnons l'intendant militaire Auguste Jullien (1779-1845), qui a consacré à l'ordre plusieurs brochures, incluant des modèles pratiques sur fiches pour différents domaines, et écrit en 1818 :

---

promouvant une théorie de l'ordre, dont Poinsot, n'hésitent d'ailleurs pas à utiliser le mot « seul » comme une rubrique de leurs classifications, comme « classe », « genre » ou « espèce ».

4. Dans une autre langue que le français, nous avons seulement obtenu la mention d'une communication de Edward T. Dixon le 2 mai 1898 à la Cambridge Philosophical Society, qui concerne la géométrie projective et le rapport anharmonique, sans détail, ni référence à Poinsot.

5. Ces chiffres datant de juin 2022 sont instables : un premier essai en juin 2015 pour « théorie de l'ordre », restreint aussi au XIXe siècle, avait fourni 134 références. Il y a eu bien sûr de nouvelles numérisations, mais les différences viennent aussi de doublons ou d'erreurs typographiques. Il ne s'agit donc pas de mener ainsi un bilan quantitatif solide sur ces expressions, mais de repérer des auteurs et éventuellement des textes. De fait, tous les auteurs liés aux mathématiques (et la plupart des autres) apparaissaient déjà dans la consultation de 2015, sauf un pour une mention en passant. Remarquons aussi qu'aucun nouvel auteur mathématique n'apparaît avec la requête « algèbre de l'ordre », un seul avec « géométrie de l'ordre ». Nous n'en avons pas trouvé d'autres en interrogeant google scholar. L'enquête nous paraît donc assez complète de ce point de vue.

> Il doit y avoir une science de l'Ordre. Elle comprend l'art de disposer les hommes et les choses, l'organisation et la méthode. L'organisation peut être étudiée dans diverses parties du corps social, et s'appliquer jusqu'à un certain point aux sciences. La méthode comprend le classement et le langage. (Jullien, 1818, p. 133)

Ou le philosophe Théodore Jouffroy (1796-1842), proche de Victor Cousin, pour qui « C'est l'idée et le sentiment de l'ordre qui expliquent toutes les tendances de notre nature, toutes nos aspirations, toutes nos grandeurs » et qui défend donc une théorie de l'ordre universel (Caro, 1865, p. 374). Ou encore l'avocat et politicien belge Édouard Descamps, à la toute fin du siècle, qui énonce dans sa « Science de l'Ordre. Essai d'harmologie » que l'idée d'ordre exprime « par excellence un rapport de convenance entre éléments multiples. Convenance dans la disposition ou dans la liaison de ces éléments » (Descamps, 1898, p. 36). La science de l'ordre elle-même peut d'ailleurs désigner tout aussi bien, selon les textes, la musique, la comptabilité, ou la logique [6]. Comme ces exemples le montrent, en dehors des travaux de Poinsot ou même en dehors des mathématiques, la question de la bonne organisation en tant que disposition correcte des choses du monde, naturelles ou humaines, est au cœur de nombreuses réflexions tout au long du siècle.

En mathématiques même, sans référence à Poinsot, c'est à la science du désordre (la science traditionnelle) que Josef Hoëné-Wronski oppose une science de l'ordre qu'il dit utiliser pour proposer de nouvelles équations de la mécanique céleste [7]. À part lui, la poignée d'auteurs fournis par notre

6. Les occurrences sont multiples. Par exemple, (Villoteau, 1807, p. 186 ; Godin, 1880, p. 219 ; Renooz, 1897, p. 44) respectivement.

7. (Hoëné-Wronski, 1847, p. 163). Les équations sont reprises par Antoine Yvon-Villarceau (1882), le cadre épistémologique proposé par Wronski pour cette science de l'ordre étant remplacé par une philosophie « du bon sens » ; le texte d'Yvon-Villarceau est d'ailleurs l'unique article obtenu par notre enquête dans le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*.

enquête et intégrant les mathématiques se réfère d'une façon ou d'une autre à Poinsot. Nous avons retrouvé les auteurs déjà connus, Poinsot lui-même, Jordan, Cournot, Bourgoin, etc. De plus, trois autres auteurs s'inscrivent spécifiquement dans la poursuite d'une théorie de l'ordre inspirée de Poinsot : Joseph Bourdat, François Vallès et Théodore Despeyrous. C'est à eux que la première partie de ce qui suit est consacrée. Dans un deuxième temps, nous utilisons les courtes allusions à une théorie ou une science de l'ordre contenues dans les autres ouvrages repérés pour reconstituer la place ambivalente de la réflexion sur l'ordre dans deux thématiques, celle des polygones et polyèdres d'une part, la théorie des nombres entiers de l'autre.

I. Réflexions sur les imaginaires : le cas de François Vallès

François Vallès est né le 4 juillet 1805 à Perpignan et mort le 11 septembre 1887, à Cros, dans le Gard [8]. Polytechnicien de la promotion 1823, et parfois décrit comme appartenant à la mouvance de Charles Fourier (Ford, 2016, p. 78-80), il devient ingénieur des Ponts et Chaussées et membre correspondant de plusieurs académies, tant en France qu'à l'étranger. En 1834, il donne un cours de mécanique à Saint-Méry dans le cadre de l'Association polytechnique qui réunit d'anciens polytechniciens impliqués dans des projets d'instruction populaire (Vatin, 2007, p. 267). Mais il est surtout actif à la fin de sa vie comme conférencier spirite dans le Midi de la France et délégué de la société scientifique du spiritisme : dans un contexte où la scientificité de manifestations de l'au-delà semblait à certains convaincante, il a d'ailleurs présidé la Société d'études psychologiques qui s'intéressait

8. Actes d'état civil de Cros (1863-1902), Décès 1887, vue 3, n° 10. L'acte de décès indique qu'il était officier de la Légion d'honneur (il a de fait été nommé le 16 août 1863). Son nom exact est François de Paule François-Xavier Hégésippe Vallès.

alors à l'œuvre d'Allan Kardec (Malgras, 1906, p. 22-23), (Vallès, 1883).

Outre de nombreux textes directement liés à son travail d'ingénieur, sur les chaussées, les inondations ou l'aliénation des forêts par exemple, Vallès a publié également des ouvrages sur les logarithmes, sur la philosophie du calcul et sur divers sujets d'actualité, du suffrage universel à la propagation de l'espèce. En mathématiques, son principal centre d'intérêt concerne les nombres imaginaires. Dès 1840, il en développe sa propre interprétation, destinée à corriger celles de François Français et de Jean-Robert Argand [9], et la présente à l'Académie des sciences, apparemment sans en obtenir de rapport (Vallès, 1847 ; 1869, p. vii). C'est alors qu'il se décide à publier ses recherches sous forme d'un livre, intitulé « Études philosophiques sur la science du calcul » (1841a).

Dans cet ouvrage, Vallès promeut une approche *philosophique* des mathématiques et se place, dès l'introduction et encore plus abondamment dans la suite, sous l'égide de Poinsot. Il se propose en effet :

> de solidement appuy[er] sur sa base, et [d'être] en mesure de suivre dans ses développements, cette théorie entrevue et signalée par M. Poinsot, il y a vingt-trois ans, cette théorie de l'ordre et de la situation des choses, sans aucune considération de la grandeur.(Vallès, 1841a, p. 181)

Son traité témoigne d'une connaissance approfondie des différents écrits où Poinsot développe ses réflexions sur la notion d'ordre. Vallès explicite même sa relation à Poinsot dans *La Phalange*, journal fouriériste des sciences sociales, dès le 9 juin de la même année, alors que son ouvrage est sous presse. Il réagit alors à une « Revue scientifique sur la théorie des nombres » du 2 juin, vraisemblablement rédigée par le

9. Sur l'histoire usuelle des nombres complexes, en particulier les travaux de Gauss, d'Argand et de Français, voir (Flament, 2003). La place de Vallès dans cette histoire y est également mentionnée (p. 78 et 419-420).

polytechnicien et rédacteur de la revue Victor Considérant [10] suite à une intervention de Poinsot à l'Académie des sciences le 10 mai 1841. Considérant prend position contre l'analyse pure et critique notamment les approches de la mécanique céleste par les géomètres qui « se sont contentés de regarder les éléments astronomiques comme des *constantes arbitraires*, au lieu de chercher la loi qui régissait et leur nombre et leur situation respective et leur distribution dans l'espace » (Considérant, 1841, p. 230). Il félicite Poinsot, « seul représentant à l'Institut de la synthèse mathématique » pour sa vision d'ensemble, fondée sur la théorie des nombres, tout en lui reprochant de donner trop d'importance à cette dernière. Considérant propose en particulier de compléter la définition de la notion d'ordre de Poinsot :

> Nous acceptons de grand cœur cette définition ; nous ajouterons seulement que, par ce mot *ordre*, il ne suffit pas d'entendre simplement la manière dont les choses se trouvent distribuées mais qu'il faut de plus entendre le mot *ordre* comme exprimant une distribution régulière, hiérarchique et providentielle, qui coordonne d'une manière harmonique toutes les parties de l'univers, qui les relie entre elles et les rende solidaires les unes des autres. (Considérant, 1841, p. 230)

La pensée fouriériste transparaît ici à travers les notions d'ordre hiérarchique devant conduire à une harmonie universelle (Vergnioux, 2002). Considérant conclut d'ailleurs par une mention de la « Loi de l'Attraction Passionnelle » et par les deux grandes Lois qui auraient été révélées par Fourier : « La Série distribue les Harmonies ; Les Attractions sont proportionnelles aux Destinées » (Considérant, 1841, p. 231). Vallès, dans sa réponse, ne se réfère pas à la théorie fouriériste mais se focalise sur la théorie des nombres et sur l'algèbre. Tout en acclamant lui aussi l'approche synthétique de Poinsot

10. Sur l'évolution du journal *La Phalange* dans les années 1840 et le rôle de Considérant, voir notamment (Bouchet, 2015).

à travers la notion d'ordre, et, plus particulièrement, l'analogie qu'il a dressée entre racines primitives imaginaires de l'équation binôme et racines primitives entières des nombres premiers [11], Vallès souligne lui aussi les limites de la notion d'ordre de son prédécesseur, car elle ne tenait pas compte de l'idée de direction (Vallès, 1841b, p. 276-277). Comme nous le verrons, Poinsot, avec sa théorie de l'ordre, apparaît donc pour Vallès comme une référence centrale, qu'il est néanmoins nécessaire de dépasser.

1 Nombre, calcul et imaginaires

C'est d'ailleurs à Poinsot lui-même que Vallès attribue son premier principe : « on doit soigneusement éviter de confondre le nombre qui est employé comme indice de l'opération de compter, avec le nombre qui sert de signe représentatif de la grandeur des quantités » (Vallès, 1841a, p. x). Selon Vallès, cette distinction est nécessaire pour sortir des contradictions nées de l'algèbre usuelle. En témoignerait un résultat, qualifié d'étrange : la recherche du côté d'un carré de surface donnée peut donner algébriquement deux solutions réelles, alors que celle d'un cube de volume donné n'en donne qu'une [12]. Mais s'il a bien identifié cette distinction, Poinsot en aurait laissé sans solution convaincante la réalisation pratique. Vallès propose donc une loi générale, « simple comme toutes les lois naturelles » :

> Toutes les fois que dans une question de la science du calcul vous n'aurez pas l'intelligence d'une opération à faire sur une quantité, ne perdez pas de vue que l'expression d'une quantité doit se composer de deux choses ; un nombre d'abord, et puis une autre quantité de même espèce qu'elle

11. Sur cette analogie et son rôle dans le développement de la théorie de l'ordre de Poinsot, voir (Boucard, 2011).

12. Vallès vise ici le caractère réel ou non des racines de l'unité qui jouent un rôle important dans ses réflexions comme dans celles de Poinsot. Le problème de l'interprétation géométrique du signe, qui apparaît dans le cas du carré, fait l'objet d'une discussion séparée.

> qu'on prend pour terme de comparaison. Cela posé, recherchez si l'opération dont vous ne comprenez pas le sens sur le nombre, ne pourrait pas être parfaitement comprise et pratiquée sur cette quantité que vous avez prise pour terme de comparaison, et qui, pour être sous-entendue, n'en est pas moins subsistante dans l'expression de la quantité. (Vallès, 1841a, p. 5-6)

Ce que Vallès considère comme un nombre (abstrait) correspond pour lui à « un nombre de fois », et donc ne peut être qu'un entier. Du même coup, diviser 1 par 12, par exemple, n'a pas de sens concret intelligible. Mais, pour reprendre le cas des anciennes unités de longueur, diviser un pied par 12 a un sens clair, le terme de comparaison « pied » étant 12 fois celui associé à « pouce » (Vallès, 1841a, p. 100). Souhaitant éviter cependant les confusions auxquelles risquerait de conduire le choix du mot « unité » pour désigner le terme de comparaison, Vallès appelle ce dernier « module d'une espèce de quantités » [13]. Si μ représente un tel module et a, b des nombres (entiers), on attribue à $\frac{a}{b} \cdot \mu$ la signification $a \cdot \frac{\mu}{b}$ (si μ est un module tel une longueur dont la division par b se conçoit clairement). La fraction $\frac{a}{b}$ n'est pas un nombre, mais une abstraction algébrique qui ne prend sens qu'attaché à un module.

Les signes attachés d'ordinaire aux nombres, que ce soit le signe $+$ ou le signe $-$, sous-entendent une relation, c'est-à-dire une opération à effectuer : cela peut être le fait de parcourir une distance dans un sens ou un autre, ou encore d'utiliser une poulie pour faire monter ou descendre des poids. Un nombre abstrait n'est pas positif (ni bien sûr négatif), les

13. Cette terminologie semble héritée de l'arithmétique modulaire, qui joue un rôle clé dans l'étude des racines de l'unité que faisait Gauss, et à sa suite Poinsot. Elle est évidemment assez maladroite pour ce qui intéresse Vallès, puisque « module » a un autre sens dans le cadre des nombres complexes. Dans un ouvrage ultérieur, Vallès proposera d'ailleurs de modifier la terminologie usuelle et de remplacer les descripteurs « module, argument » par « continu, directif » (Vallès, 1869, p. 198).

signes-opérations n'ont pour Vallès de signification qu'exprimée sur les modules. Fractions ou signes s'expriment donc ainsi par des modifications des modules. « Les opérations du calcul doivent être les représentants des lois des relations physiques » (Vallès, 1841a, p. 147).

Il est loisible, par cette expression algébrique, de transférer ces modifications sur la partie « nombre abstrait », en tant qu'opérations, et « de faire abstraitement les calculs en se conformant aux règles » de l'algèbre (Vallès, 1841a, p. 19). Mais on ne doit pas chercher à y attribuer de sens à ce stade, ni à voir le résultat de ces opérations comme un nombre. Une fois ces opérations effectuées, le résultat final doit alors être interprété par un transfert au module, et prend un sens en tant que transformation adéquate du module [14]. Les *calculs* peuvent donc être en quelque sorte faits abstraitement, mais c'est seulement l'interprétation finale (sur le module) qui donne une signification véritable et intellectuellement satisfaisante au résultat [15]. La confusion qui semble à Vallès régner en mathématiques viendrait de ce que les nombres abstraits (entiers) servant à compter les quantités y sont devenus aussi « le signe représentatif de la grandeur des quantités » (Vallès, 1841a, p. 32). Vallès passe donc en revue les quatre opérations courantes, l'élévation à des puissances et l'extraction de racines, pour élucider à la lumière de la distinction entre nombre et module tout ce qui lui semble des apories dans la présentation traditionnelle. Par exemple il explique pourquoi, si $N \times 1$ est bien égal à $1 \times N$, « il ne s'ensuit pas que les opérations qu'il faut faire pour les réaliser l'une et l'autre [opérations] sont semblables » (Vallès, 1841a, p. 66).

---

14. Dans un traité ultérieur, Vallès soulignera que l'algèbre enseigne justement comment changer le problème pour obtenir une réponse, si par exemple la première formulation a une solution négative (Vallès, 1873, p. 26). Voir sur cette question (Schubring, 2006).

15. On retrouve ici des réflexions parallèles à celles qui conduisent à l'algèbre symbolique développée à la même époque en Angleterre (Durand-Richard, 1996).

Vallès dit avoir longtemps hésité sur la validité de son point de vue « dans le silence absolu qu'ont gardé tous ces auteurs sur la distinction qu'il me semblait si nécessaire d'établir entre le nombre servant à compter et le nombre destiné à représenter les quantités, entre le nombre qui compte l'ordre et la situation des choses et le nombre qui mesure les grandeurs », avant de trouver que son point de vue est proche de celui soutenu par Poinsot dont il cite longuement les passages sur l'ordre (Vallès, 1841a, p. 37-38). Il se réfère en particulier à la requête de Poinsot de « considérer le nombre en lui-même, l'ordre et la situation des choses, sans aucune idée de leurs rapports, ni des distances plus ou moins grandes qui les séparent ».

L'objectif des recherches de Vallès était à l'origine d'élucider le sens à donner aux nombres imaginaires. L'ingénieur commence par $\sqrt{-1}$, « opération algébrique qui n'est autre que la représentation dans le calcul de l'opération qui consiste en géométrie à élever une perpendiculaire sur une ligne » (Vallès, 1841a, p. 164). Si λ est le module de la longueur sur une droite initiale, $\lambda\sqrt{-1}$ sera celui sur une perpendiculaire (correctement orientée). Vallès étudie ensuite plus largement les « logarithmes circulaires », définis par lui comme les angles associés à des directions dans le plan (Vallès, 1841a, p. 168-170). Il s'en sert en particulier pour décrire toutes les racines de l'unité. Plus précisément, il répartit les a restes des entiers modulo un nombre a sur un cercle (qui déterminent les différentes racines a-ièmes de l'unité), et les identifie à des directions à partir du centre de la circonférence (l'inspiration venue de Poinsot, non seulement pour sa théorie des nombres (Poinsot, 1818), mais aussi pour sa théorie des sections angulaires (Poinsot, 1825), est ici nette). Si les nombres $1, 2, \cdots, p, \cdots$ permettent de désigner toutes les longueurs (en négligeant la question du module), toutes les directions peuvent ainsi être désignées par une des expressions $\cos 1 + \sqrt{-1}\sin 1, \cos 2 + \sqrt{-1}\sin 2, \cos 3 + \sqrt{-1}\sin 3, \cdots, \cos p + \sqrt{-1}\sin p, \cdots$. Vallès conclut que l'algèbre a besoin de deux systèmes de numérotation, celui des entiers qu'il appelle « système de numération

quantitative » permettant de représenter les grandeurs et celui des $\cos p + \sqrt{-1}\sin p$, le « système de numération ordinale » pour « représenter leur ordre, leur situation, leurs différents modes d'existence ou d'action » [16].

Si nous sommes habitués à prendre au sérieux les essais ou commentaires philosophiques de la fin du siècle, que ce soit ceux de Leopold Kronecker ou de Henri Poincaré, il est utile de les replacer dans cette histoire plus longue, déjà intimement liée aux questions de fondements [17]. Vallès se réfère d'ailleurs à Joseph-Diez Gergonne, qui lie la philosophie mathématique à la nécessité de réflexion d'un bon enseignant (Gergonne, 1830-1831).

Son livre n'ayant pas la réception escomptée, et constatant que des Académiciens publient sur le même sujet, Vallès écrit en 1847 une lettre, reproduite dans *La Phalange* la même année, au secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences, François Arago. Il y résume et illustre sa vision des imaginaires ; il suggère d'ailleurs que tant Cauchy que Poinsot lui-même ont emprunté plusieurs idées à son mémoire de 1840 et attire l'attention sur les problèmes posés par des expressions du type $(a + b\sqrt{-1})^{(a'+b'\sqrt{-1})}$. Et dans les années 1870, il consacre trois volumes à expliquer à nouveau en détail son point de vue et les applications qu'il en tire. Il s'agit toujours pour lui de :

> constituer une algèbre qui n'a plus pour objet une espèce en particulier, ... mais dont le rôle plus général, tout à fait universel, consiste à rechercher et à déterminer les rapports de pluralité de mesure et d'ordre qui peuvent convenir ou

16. (Vallès, 1841a, p. 180-181). L'ajustement des modules de ces systèmes n'est pas discuté. En 1869, Vallès choisira les expressions $\cos p\frac{\alpha}{n} + \sqrt{-1}\sin p\frac{\alpha}{n}$ pour incarner son système ordinal, suggérant un emploi simultané de plusieurs modules.

17. Vallès évoque aussi Josef Hoëné-Wronski. Le remplacement d'un nombre par un couple (nombre, direction) et ses généralisations rattachent aussi l'approche de Vallès, en particulier ses applications géométriques, aux travaux contemporains de Giusto Bellavitis et de Hermann Grassmann, étudiés notamment dans (Schubring, 1996).

> ne pas convenir à une espèce quelle qu'elle soit, suivant les propriétés... dont la nature l'a douée et qui constituent les conditions mêmes de son existence. (Vallès, 1869, p. ix-x)

Et Vallès répète l'importance de distinguer en algèbre ses deux systèmes de numération, renvoyant une nouvelle fois à la théorie de l'ordre de Poinsot (Vallès, 1869, p. 201-202).

2 Application à la résolution des équations algébriques (1869-1873)

Parmi les conséquences explorées dans les deux volumes suivants [18], figurent un examen de la résolution des équations algébriques de bas degré, ainsi que des résultats de géométrie. Nous présentons son approche des équations algébriques à cause de ses intrigantes résonances avec les propositions contemporaines bien plus connues pour résoudre les équations de degré 5. Après avoir ramené l'équation générale du troisième degré à la forme $x^3+px+q=0$ $(*)$, avec des coefficients réels p et q, Vallès s'appuie sur la relation algébrique

$$(\sqrt[3]{g}+\sqrt[3]{l})^3-3\sqrt[3]{gl}(\sqrt[3]{g}+\sqrt[3]{l})-(g+l)=0 \qquad \text{(I.1)}$$

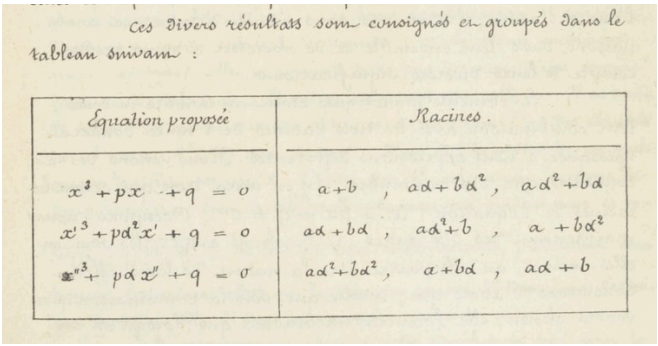
vérifiée par toutes quantités g et l, pour exprimer une solution x de l'équation cubique sous la forme d'une somme de deux termes $x=\sqrt[3]{g}+\sqrt[3]{l}$ (il baptise les deux termes, $a=\sqrt[3]{g}$ et $b=\sqrt[3]{l}$, les « éléments des racines »). Par identification entre les équations $*$ et I.1, il obtient [19] :

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

18. Contrairement aux volumes 1 et 3, composés en caractères d'imprimerie, le volume 2 est, à part l'introduction, lithographié à partir d'une version manuscrite.

19. Voir (Vallès, 1873, p. 88). Nous avons corrigé cette formule, le 3 des racines cubiques $\sqrt[3]{}$ ayant été oublié dans l'original.

Vallès examine ensuite longuement les symétries de cette formule lorsqu'on multiple les deux éléments des racines a et b par des racines cubiques de l'unité, puis plus généralement par des grandeurs quelconques. Par identification, encore une fois, il montre que seules certaines combinaisons des racines de l'unité fournissent encore des racines de la même équation cubique, les autres combinaisons donnant les racines d'autres équations cubiques, ce qu'il résume dans un tableau, voir Fig.1.



Ces divers résultats sont consignés en groupés dans le tableau suivant :

Equation proposée	Racines.
$x^3 + px + q = 0$	$a+b$, $a\alpha + b\alpha^2$, $a\alpha^2 + b\alpha$
$x'^3 + p\alpha^2 x' + q = 0$	$a\alpha + b\alpha$, $a\alpha^2 + b$, $a + b\alpha^2$
$x''^3 + p\alpha x'' + q = 0$	$a\alpha^2 + b\alpha^2$, $a + b\alpha$, $a\alpha + b$

FIGURE 1 – (Vallès, 1873, p. 90). Vallès résume ici la manière dont les diverses combinaisons des éléments a et b (exprimés par des racines cubiques et carrées à partir des coefficients p et q) et des racines cubiques de l'unité (1, α, α^2) donnent les solutions des trois équations cubiques de la colonne de gauche.

> Il ne s'agit donc pas ici de cette symétrie qu'on peut appeler simple, et en vertu de laquelle une fonction considérée isolément reste la même lorsqu'on y permute entre elles deux des quantités dont elle dépend, mais d'une symétrie complexe qui embrasse à la fois la considération de trois expressions, lesquelles se transforment les unes dans les autres, de manière à rester toujours elles-mêmes dans leur ensemble, lorsqu'on permute simultanément dans toutes trois deux quantités qui y figurent (Vallès, 1873, p. 100).

La partie théorique est ainsi complétée, le rôle des racines de l'unité une fois encore mise en valeur pour analyser les

principales propriétés des solutions d'équations algébriques. Vallès décrit les combinaisons décrites plus haut comme des résolvantes : leur constitution « présente donc tout le degré de symétrie que comporte la nature individuelle des racines cubiques de l'unité » (Vallès, 1873, p. 150). Pourtant, l'étude ne s'arrête pas là. Comme il est bien connu, dans le cas dit irréductible, celui où $4p^3+27q^2$ est négatif, l'équation cubique a trois racines réelles, mais leur expression par les combinaisons de la figure 1 fait appel nécessairement à des nombres imaginaires. Cette obligation de passer par le domaine complexe alors que le résultat doit être réel a, on le sait bien, perturbé des générations de mathématiciens. La proposition de Vallès est de ne plus se limiter à la considération de fonctions algébriques, ici les racines carrées et cubiques, mais de mobiliser aussi les fonctions circulaires :

> Puisqu'en nous renfermant pour la forme des racines dans le cercle exclusif des fonctions algébriques proprement dites, nous sommes condamnés à l'impuissance, il est naturel d'avoir recours à d'autres fonctions et de rechercher si nous ne serions pas plus favorisé en faisant appel à celles que les considérations concrètes nous ont conduit à étudier. [...] Mais nous allons voir qu'en faisant appel aux fonctions circulaires, ainsi que la forme imaginaire nous y convie si naturellement, nous parviendrons par des moyens simples, faciles et directs, à la connaissance de la forme générale des racines de l'équation du troisième degré lorsqu'elles sont réelles (Vallès, 1873, p. 118).

En exprimant les trois racines sous la forme

$$2r\cos\theta, \quad -r(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta), \quad -r(\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta), \quad \text{(I.2)}$$

Vallès obtient à l'aide des relations entre racines et coefficients de l'équation

$$r=\sqrt{\frac{p}{3}}, \qquad \cos^3\theta-3\sin^2\theta\cos\theta=-\frac{\frac{q}{3}}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}.$$

Notant que $\cos^3\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta$ est aussi $\cos 3\theta$, Vallès détermine donc r et θ à partir des coefficients p et q, ce qui lui donne les trois racines de l'équation cubique sous forme réelle grâce aux formules I.2 (Vallès, 1873, p. 119-120).

L'utilisation de fonctions circulaires permet aussi d'éviter plusieurs étapes *a priori* artificielles dans la recherche des solutions : l'élimination du terme en x^2 de l'équation cubique générale pour se ramener à la forme $x^3+px+q=0$, la décomposition préalable en une somme de deux termes. Défendant leur introduction face aux géomètres qui voudraient se limiter aux fonctions algébriques, Vallès argue que :

> ces fonctions ne sont autre chose que l'expression de certains rapports et qu'il ne saurait par conséquent y avoir rien d'antipathique à ce qu'elles viennent figurer dans une science qui, envisagée à son point de vue le plus général, est précisément celles des rapports de mesure et *d'ordre* qui existent entre les quantités. (Vallès, 1873, p. 141) (nos italiques)

Un chapitre supplémentaire de son ouvrage est consacré à construire géométriquement les racines des équations cubiques, avant de passer aux équations de degré 4, traitées de manière analogue, puis à certaines équations de degré 5 (en particulier celles correspondant à l'équation de degré 5 associée au développement de $\cos 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$).

Ses réflexions élémentaires sur les équations algébriques, et son attention à l'ordre, associé aux angles, dans la représentation des opérations faisant intervenir des nombres complexes conduisent ainsi Vallès à une démarche duale : un premier temps est concentré sur les symétries des racines, les racines de l'unité étant à la fois un outil et un paradigme ; un deuxième temps fait appel à des fonctions uniformes, ici trigonométriques, qui éliminent le recours aux imaginaires dans l'expression des racines et favorisent leur calcul pratique. Or, cette double démarche se retrouve dans les travaux contemporains sur les équations quintiques de Francesco Brioschi, Charles Hermite ou Leopold Kronecker ; dans leur cas,

l'inspiration pour étudier les symétries entre racines est liée aux travaux de Galois, les fonctions uniformes utilisées pour le cinquième degré étant des fonctions elliptiques[20].

II. Joseph Bourdat : la « science résumée en trois mots »

Nous savons peu de choses sur la formation scientifique de Joseph M. Bourdat, qui n'est ni ancien élève d'une des Grandes Écoles, ni agrégé, ni docteur[21]. Il apparait principalement comme membre de sociétés savantes, principalement de l'Académie delphinale où il occupe le fauteuil 44 à partir de 1844 et est identifié comme *professeur de mathématiques à Grenoble*[22]. Il est possible que Bourdat ait rencontré Cournot

20. Voir sur ces travaux (Goldstein, 2011 ; Houzel, 2002 ; Petri et Schappacher, 2004). Rappelons les points communs entre Poinsot et Galois soulignés dans (Boucard, 2011). Vallès a transmis certains résultats de son approche pour les équations de degré 4 à Hermite qui les a fait paraître dans les comptes rendus des l'Académie des sciences en 1858 (Vallès, 1858). C'est exactement le moment où Hermite lui-même écrit sur ces questions, non seulement à propos des équations quintiques, mais aussi de celles de degrés 3 et 4. Vallès ne cite aucun de ces travaux dans son traité et réciproquement, nous ignorons l'étendue de ce qu'il a communiqué à Hermite dans les années 1850. Sa note à l'Académie présentée par Hermite ne contient que l'expression algébrique des racines et de leurs symétries, et pas l'usage des fonctions circulaires.

21. Les éléments biographiques ont été d'autant plus difficiles à trouver que le nom de Bourdat est très répandu dans la région grenobloise et que plusieurs enseignants le portent. Nous pensons qu'il est né le 15 novembre 1809 à Viriville et qu'il est mort le 19 février 1886 à Grenoble (Archives départementales de l'Isère, 9NUM/5E186/24/306, Décès 1886, n. 242). Marié tardivement, en 1859, il se serait retiré à Saint-Clair-sur-Galaure, où son épouse, Rosalie Gilloz, était propriétaire (Archives départementales de l'Isère, Collection communale, 9NUM2/AC379/5, Saint-Clair-sur-Galaure, Mariages 1841-1896, acte n. 1 de 1859).

22. Il semble avoir enseigné les mathématiques à l'Institution du Bois-Rolland, à Grenoble, une institution catholique sous le régime de l'association fondée en 1844, voir *L'Institut catholique*, vol. 5 (1844), p. 504.

pendant son séjour à Grenoble, ou ait eu accès à ses ouvrages, puisque Cournot a été recteur de l'Académie de Grenoble quelques années plus tôt, de 1836 à 1838, et vice-président de l'Académie delphinale. Bourdat représente l'Académie à la 8e session du colloque scientifique italien à Gênes en 1846 et fait plusieurs communications, souvent sur des découvertes astronomiques, mais aussi sur le thème « Travail et progrès ». Répondant à l'abbé Genevey, curé de Saint-Louis de Grenoble et alors président de l'Académie, il souligne qu'il ne faut pas limiter le progrès à l'« acheminement direct de l'homme vers ses destinées immortelles », mais aussi reconnaître un progrès qui est « le développement des facultés humaines, quelqu'en soit le principe ou le motif, et généralement toute amélioration des conditions sociales et individuelles » [23]. Une Société de statistiques locale ayant été fondée en 1838, par scission de l'Académie, Bourdat est aussi accueilli comme membre titulaire de cette autre société lors de la séance du 20 février 1846 (en même temps que l'abbé Nicolas, chef de l'institution du Bois-Rolland) : il y fait des communications sur les tables de mortalité. Outre ces interventions liées à une sociabilité savante locale, Bourdat, de manière d'ailleurs assez banale chez les mathématiciens amateurs de cette époque (Goldstein, 2020), propose parallèlement des notes à l'Académie des sciences de Paris, sur un cadran-boussole en 1839 ou sur les fractions continues en 1847. Bourdat quitte Grenoble et donc l'Académie à la fin des années 1850, mais y réapparaît dès 1861 comme membre correspondant.

En 1850, Bourdat présente à l'Académie delphinale des « considérations générales sur l'objet scientifique ». La « science résumée en trois mots » résonne bien sûr avec la Genèse, mentionnée explicitement, mais Bourdat remplace le triplet biblique, « mesure, nombre et poids », par le plus moderne « mesure, nombre et attraction ». Après avoir discuté de la manière dont les différentes disciplines scientifiques

23. Séance du 6 février 1852, *Bulletin de l'Académie delphinale* vol.4 (1856), p. 478.

s'ajuste à ces mots, Bourdat souligne que l'astronomie est le domaine qui les embrasse tous les trois, « avec tout l'éclat et le grandiose qu'ils peuvent comporter [...] C'est même dans l'astronomie que ce principe général et unique d'ordre et d'arrangement matériel a d'abord été découvert » [24] Mais pour que toutes les sciences exactes se résument aussi dans ces trois termes, il lui fait modifier légèrement l'acception du troisième. Attraction se réfèrera donc pour Bourdat à

> un ensemble de faits ou de phénomènes qui tiennent à *l'arrangement*, à *l'ordre*, à *la situation* des choses, et qui peuvent être comparés, discutés et calculés.

Comme le poids de la Bible, selon Bourdat, l'attraction désigne donc un arrangement entre corps. Outre cette association des notions d'arrangement, d'ordre et de situation chère à Poinsot, Bourdat cite explicitement le géomètre, pour appuyer sa conviction qu'il faut réviser la définition usuelle des mathématiques comme science de la grandeur ou des rapports, car ceux-ci n'en constituent qu'une facette. Bourdat propose alors une division par sous-disciplines qui se réclameraient de ces trois mots : l'arithmétique conduit au nombre, mais considéré en lui-même, le nombre ayant des propriétés indépendantes des systèmes de numération, qui « dérivent d'un certain *ordre* d'arrangements, de combinaisons et de lois diverses des quantités numériques ». À l'instar de Poinsot, Bourdat défend l'utilité sociale de la théorie des nombres, à cause de ses applications aux récréations et jeux, mais aussi aux calculs de calendriers (Bourdat, 1850, p. 40). L'algèbre elle aussi peut se séparer en trois parties distinctes et Bourdat reprend textuellement les propos de Poinsot pour la définition de la partie supérieure de l'algèbre :

24. (Bourdat, 1850, p. 32). Nous ne savons pas s'il faut y voir une référence aux remarques de Considérant ou une allusion aux travaux de Wronski mentionnées plus haut. L'attraction joue aussi un rôle important dans la théorie sociale de Charles Fourier.

> Mais il y a une algèbre supérieure qui repose tout entière sur la théorie de l'ordre et des combinaisons, qui s'occupe de la nature et de la composition des formules considérées en elles-mêmes comme de purs symboles, et sans aucune idée de valeur ou de quantité. C'est à cette partie qu'on doit rapporter la théorie profonde des équations, celle des expressions imaginaires et tout l'art des transformations algébriques. (Bourdat, 1850, p. 35, identique à Poinsot, 1845, p. 4)

Il cite ensuite la géométrie de situation, en lien avec les jeux, les polygones et polyèdres (toujours selon Poinsot), et la géométrie de position de Carnot [25]. Entrant ensuite dans le détail pour certains sujets, Bourdat expose la construction de la division du cercle de Gauss, qu'il complète encore une fois par une très longue citation de Poinsot. Il se tourne ensuite vers ses propres résultats, qui concernent les sommes de carrés, découverts, dit-il, parallèlement et indépendamment par Poinsot [26]. Les théorèmes en question sont tous du même type, dont voici un exemple. Lorsque la puissance quatrième d'un nombre est égal à la somme des carrés de deux autres, ces trois nombres admettent nécessairement dans leur composition les facteurs, 5, 7 et 24, que ce soit réunis dans un seul des nombres, ou répartis dans deux d'entre eux ou dans tous les trois ; par exemple $5^4 + 7^2 + 24^2$ ou $29^4 = 5^2 \cdot 7^2 \cdot 24^2 + 41^2$ (Bourdat, 1850, p. 42).

III. Théodore Despeyrous : théorie de l'ordre, permutations et quantités composées

Né en 1815 à Beaumont-de-Lomagne, Théodore Despeyrous fait ses études secondaires à Lectoure puis à Toulouse. Il

25. Cette dernière est cependant clairement écartée par Poinsot (1810, p. 17–18, note 1).

26. Ces résultats sont également discutés à l'Académie des sciences en 1849 par Jacques Binet et Joseph Liouville.

obtient sa licence puis sa thèse *ès* sciences mathématiques[27] respectivement en 1840 et en 1841 à la Faculté des sciences de Toulouse. Il part ensuite pour Paris, où il suit les enseignements de Gugielmo Libri[28] et rencontre aussi Poinsot et Sturm (Hermann, 1884). C'est à la même période qu'il aurait fait la connaissance de Victor Considérant, intégré les réseaux saint-simoniens et collaboré pendant quelques années à *La Phalange* (Tillol, 1885). Notons que le mouvement saint-simonien était important dans la région toulousaine (à Sorrèze dans le Tarn en particulier) (Cazals, 2001) et qu'il est possible que Despeyrous ait intégré les réseaux saint-simonien et fouriériste parisiens par l'intermédiaire de connaissances toulousaines. S'il n'y a pas de traces d'écrits politiques de sa part, ni même de contributions à *La Phalange* (Desmars, 2012), sa bibliothèque personnelle et ses archives témoignent au moins de son positionnement libéral, à travers des ouvrages de philosophie politique et des notes de lecture portant sur le saint-simonisme, certains économistes anglais libéraux et l'éducation populaire[29]. De 1844 à 1847, Despeyrous est professeur suppléant de Libri à la Sorbonne pour le calcul des probabilités (Huguet et Noguès, 2011 ; Tillol, 1885). Candidat à plusieurs chaires dans les Facultés des sciences, et soutenu en 1848 par Poncelet, Sturm et Cournot, il est choisi pour occuper la position vacante à la Faculté des sciences de Dijon. Il y enseigne les mathématiques pures jusqu'en 1865 avant d'obtenir, après plusieurs demandes, une chaire à la Faculté

27. Les deux thèses présentées portent sur une méthode de détermination des orbites des comètes et sur la théorie de la variation des constantes arbitraires.

28. Dans les archives de Despeyrous sont conservées des notes d'un cours donné par Libri en 1842 sur la théorie des fonctions discontinues. Elles sont suivies de notes sur la théorie des nombres, qui sont peut-être aussi issues de leçons de Libri.

29. Il financera à Beaumont-de-Lomagne une bibliothèque populaire contenant notamment une collection d'ouvrages d'auteurs libéraux (Desmars, 2012). Sa radicalité politique lui sera d'ailleurs reprochée dans les années 1870 dans un rapport d'inspection (AN F/17/20595 Dossier de carrière de Despeyrous).

des sciences de Toulouse, d'abord en astronomie, puis en mathématiques appliquées à partir de 1872, année où il devient également directeur de l'observatoire municipal de Toulouse. Il meurt dans un accident de voiture en 1883 à Faudoas, dans le Tarn-et-Garonne.

Comme Jordan, c'est vers 1860 que Despeyrous mobilise une première fois la théorie de l'ordre de Poinsot dans ses publications [30]. L'occasion, pour les deux, semble être le Grand prix des sciences mathématiques proposé par l'Académie des sciences de Paris, qui porte cette fois sur le nombre de valeurs que peut prendre une fonction de n lettres quand on permute ces lettres, un problème intimement lié alors à la résolution des équations algébriques (Ehrhardt, 2007, p. 400, 408).

Une partie des archives de Despeyrous, conservées à la mairie de Beaumont-de-Lomagne, confirme la connaissance et l'intérêt de Despeyrous pour la théorie de l'ordre [31]. Un manuscrit d'une centaine de pages est par exemple intitulé « Géométrie de position discontinue relative à des choses ou objets ou théorie de l'ordre d'où théorie des nombres », et reprend les notations et plusieurs résultats de (Poinsot, 1845), ainsi que des extraits de recherches de Jacobi sur les sommes de Gauss. Despeyrous intègre aussi la théorie de l'ordre dans ses réflexions sur les fondements des mathématiques, comme l'illustre son manuscrit intitulé « Géométrie de position d'où théorie des nombres » :

> Théorie de l'ordre — Principes fondamentaux.
> Dans les sciences appliquées on doit toujours considérer la grandeur en mode composé parce que telle elle s'y pré-

30. Les deux premiers mémoires de Despeyrous sont issus des enseignements qu'il a dispensés à la Sorbonne et portent sur l'astronomie et les fonctions elliptiques. Il n'y mentionne pas la théorie de l'ordre, mais évoque les résultats de Poinsot sur la rotation des corps solides (Despeyrous, 1849, p. 80).

31. Archives municipales de Beaumont-de-Lomagne (Tarn et Garonne), Fonds Théodore Despeyrous. Ces archives, composées de carnets de notes, brouillons de manuscrits et notes de cours, ne sont actuellement pas classées.

> sente. Mais rien n'empêche de considérer la quantité en mode simple, du moins en théorie ; De là l'arithmétique proprement dite quand on ne considère que la grandeur de la quantité ; et de là aussi la théorie des nombres lorsque l'on ne considère que la situation de la quantité, c'est-à-dire l'ordre des choses, c'est-à-dire de plusieurs objets quelconques mais considérés sous un même point de vue. Or la considération de la situation seule des objets n'est que la géométrie de position [...] mais cette géométrie de position a aussi des rapports avec le 2e partie de l'algèbre, la théorie des équations, puisque la théorie des équations, et généralement toute l'algèbre, n'est autre chose que la théorie de l'ordre du moins tant qu'on ne considère que la composition et décomposition des formules indépendamment de toute grandeur attribuée aux lettres de ces formules.

Théorie des équations et grandeurs composées constituent justement les deux thématiques pour lesquelles Despeyrous développe des réflexions sur la notion d'ordre dans les années 1860.

1 Permutations et théorie générale des équations (1861-1866)

Despeyrous publie quatre mémoires dans le *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Joseph Liouville[32], entre 1861 et 1866, sur la théorie des permutations et des équations. Il s'y positionne explicitement dans la continuité directe de la théorie de l'ordre de Poinsot, et ce, dès l'introduction de son premier mémoire, intitulé « Mémoire sur la théorie générale des permutations » :

> Les phénomènes périodiques étant les plus nombreux dans la nature, il doit être intéressant d'étudier l'*ordre périodique indépendamment de toute considération de grandeur* [...[33]]

32. Despeyrous échange d'ailleurs à ce sujet avec Liouville par lettres, ce dernier lui conseillant des lectures mathématiques (Verdier, 2009).

33. Suit ici une citation extraite de (Poinsot, 1818).

> La théorie de l'ordre périodique est une géométrie spéciale qui ne considère que la situation des choses, la disposition des lieux dans l'espace et fait partie de la *géométrie de position* entrevue par Leibniz.
> Cette théorie fait retrouver les polygones étoilés de Poinsot et fournit une méthode très directe pour partager toutes les permutations d'un nombre quelconque de lettres en plusieurs groupes de permutations associées entre elles de telle manière, que, malgré tous les échanges qu'on voudrait faire de ces lettres, les permutations d'un même groupe ne puissent jamais se séparer [...].
> La même méthode partage les racines de toute *équation abélienne* en plusieurs groupes de racines *inséparables*, quel que soit l'échange que l'on considère, associe ces groupes eux-mêmes en de nouveaux groupes de racines également inséparables. (Despeyrous, 1861, p. 417-418)

Cette citation illustre la perception synthétique qu'a Despeyrous, comme d'ailleurs Vallès, des différents travaux de Poinsot qui touchent à la théorie de l'ordre, que ce soit sur les groupes de « permutations associées entre elles » ou sur leur visualisation par les polygones étoilés. Il reprend d'ailleurs pratiquement mot pour mot les expressions de Poinsot(1818) concernant les groupes de permutations. Lui-même conçoit une théorie de l'ordre transverse, qu'il souhaite appliquer à « plusieurs théories importantes » [34]. Sa mention de l'« ordre périodique » laisse penser qu'il a aussi connaissance des travaux de Cournot, qu'il connaît personnellement [35]. En effet,

34. Un de ses carnets contient trois sujets de recherche explicitement liés à la théorie de l'ordre : « La détermination du nombre de valeurs que prend une fonction de N lettres, par suite de l'échange de ces lettres, n'est-elle pas liée à la théorie de l'ordre ? » ; « Examiner si la théorie de l'ordre ne serait pas utile dans la détermination des fonctions rationnelles et symétriques de m racines de $f(x) = 0$ donnée » ; « Examiner si cette théorie de l'ordre ne serait pas utile dans l'intégration des équations linéaires aux différentielles partielles ».

35. Comme nous l'avons dit, Cournot a soutenu professionnellement Despeyrous dès les années 1840. À cause de son positionnement jugé trop libéral, Cournot a de plus été muté en 1854 dans l'Académie de

Cournot utilise cette expression lorsqu'il reprend la théorie de l'ordre de Poinsot et introduit la notion de « suite périodique » $abc\ldots kabc\ldots k\ldots$, utilisée par Despeyrous. En revanche, Despeyrous n'a pas recours aux systèmes de substitutions conjuguées de Cauchy, entrées dans l'orthodoxie algébrique notamment grâce aux éditions multiples du *Cours d'algèbre supérieure* de Serret (Ehrhardt, 2012, p. 153-157), ni aux écrits de Galois, republiés par Liouville en 1846 [36].

L'objectif de Despeyrous est de construire différentes classifications des permutations afin d'obtenir des démonstrations plus simples des résultats de Gauss sur les équations binômes (ou cyclotomiques) et d'Abel sur les équations dites abéliennes [37].

À partir d'une suite périodique infinie composée d'une période de n lettres, Despeyrous cherche quelles suites périodiques, dérivées de la première en la parcourant par intervalles de longueur p, ont les mêmes n éléments, mais dans un ordre différent. Par exemple, si $n = 4$ et si la suite de départ est la suite $\ldots abcdabcd\ldots abcd\ldots$, la suite obtenue par intervalles de longueur 3 donne $\ldots adcbadcb\ldots adcb\ldots$, donc est une suite du type cherché ; mais la suite obtenue par intervalles de longueur 2 est $\ldots acacac\ldots acac\ldots$, donc ne contient que 2 lettres (a et c) sur les 4 et ne convient pas. Despeyrous démontre que le nombre de suites adéquates distinctes est

---

Dijon, comme recteur, et a donc eu à nouveau l'opportunité de côtoyer Despeyrous.

36. Il ne mentionne Cauchy que pour s'en démarquer et n'évoque Galois que dans son dernier mémoire, publié de manière posthume en 1887. Cette omission, si elle est loin d'être générale, comme en témoignent Serret, Hermite ou Jordan, n'est cependant pas inhabituelle à l'époque. Dans les années 1860, Émile Mathieu, qui s'intéresse aussi au nombre de valeurs d'une fonction dont on permute les variables, ne se réfère par exemple à Galois qu'une seule fois (Ehrhardt, 2012, p. 162-163).

37. Une équation est dite à l'époque abélienne si ses racines s'obtiennent à partir d'une seule en appliquant récursivement la même fonction rationnelle. Cette propriété généralise celle de l'équation binôme $x^p - 1 = 0$, qui a pour racines les racines p-ièmes de l'unité.

égal au nombre ν d'entiers inférieurs et premiers à n (il note ces entiers p_i, où $1 < i < \nu$). Il établit ensuite une correspondance géométrique entre les périodes de ces suites et les polygones étoilés de Poinsot à n côtés, en disposant sur une circonférence des points associés aux lettres de la période de la suite de départ $abc\ldots$ et en les joignant selon l'ordre des lettres dans chaque suite dérivée, ce qui lui permet de retrouver un résultat de Poinsot (Despeyrous, 1861, p. 423-424). Si n a des racines primitives (autrement dit, si les nombres premiers à n s'expriment comme une puissance de l'un d'eux), par exemple si n est une puissance d'un nombre premier impair, ou le double d'une telle puissance, Despeyrous présente une classification en ν groupes des permutations de n objets, indexés à l'aide d'une racine primitive ρ de n (fig. 2).

THÉORÈME IV. — *Si ρ est une des racines primitives du nombre entier n, et si p_i est un des ν nombres inférieurs et premiers à n, les ν permutations produites par les ν polygones de Poinsot des n choses x, x_{p_i}, x_{2p_i}, x_{3p_i}, ..., $x_{(n-1)p_i}$ considérées dans cet ordre, sont*

$$\begin{array}{lllll}
x & x_{p_i} & x_{2p_i} & x_{3p_i}\cdots & x_{(n-1)p_i}, \\
x & x_{p_i\rho} & x_{2p_i\rho} & x_{3p_i\rho}\cdots & x_{(n-1)p_i\rho}, \\
x & x_{p_i\rho^2} & x_{2p_i\rho^2} & x_{3p_i\rho^2}\cdots & x_{(n-1)p_i\rho^2}, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
x & x_{p_i\rho^{\nu-1}} & x_{2p_i\rho^{\nu-1}} & \cdots & x_{(n-1)p_i\rho^{\nu-1}},
\end{array}$$

les indices de x étant pris suivant le module n.

FIGURE 2 – (Despeyrous, 1861, p. 425)

Il en déduit deux classifications des permutations de n lettres a, b, c, ..., k, l, sous forme de tableaux. La première classification est construite à partir des polygones de Poinsot : les permutations sont engendrées en prenant les lettres de p_i en p_i, où les différents p_i sont les facteurs premiers à n. À partir d'un premier choix ordonné de lettres, commençant par exemple par a, on obtient ainsi ν permutations, qui forment

un premier groupe[38] ; les autres groupes de la première classe sont construits en effectuant les mêmes opérations à partir d'une permutation commençant aussi par a mais qui ne fait pas partie des groupes déjà obtenus. La première classe contient ainsi toutes les permutations commençant par a, distribuées en $\frac{(n-1)!}{\nu}$ regroupements de ν permutations. Les classes suivantes s'obtiennent en décalant la lecture des permutations de la première classe pour commencer par b, puis par c, ... ; il y a en tout n classes. La seconde classification réunit les $n\nu$ groupes situés à la même place dans chaque classe de la première classification ; elle est donc constituée de $\frac{(n-1)!}{\nu}$ regroupements (que Despeyrous appelle « ordre » et qui correspondent bien à la lecture des lettres dans un certain ordre, avec un point de départ et des pas quelconques). Despeyrous illustre ces deux classifications à partir des cas $n = 4$ et $n = 5$ (voir Fig. 3 pour le cas $n = 5$).

Despeyrous fait ensuite appel à la théorie de l'ordre sur les polygones étoilés pour démontrer des « propriétés générales des groupes et des classes des deux tableaux précédents ». En particulier, il prouve que les permutations d'un même groupe du premier tableau, ou d'une classe du premier tableau, ou d'un groupe du second tableau, ne peuvent être séparées par un quelconque échange de lettres (Despeyrous, 1861, p. 433). Autrement dit, si un changement de lettres transforme une permutation d'un groupe en une autre du même groupe, les transformées de toutes les permutations de ce groupe resteront dans le même groupe, et s'il transforme une permutation d'un groupe en une permutation d'un autre groupe, les transformées de toutes les permutations du premier groupe seront dans le deuxième ; les groupes ne seront pas séparés. C'est cette propriété cruciale, et ces méthodes de classification, que Despeyrous souhaite appliquer ensuite au cas particulier où les n lettres sont exprimées sous la forme x,

38. Comme très souvent au XIXe siècle, le mot « groupe » désigne ici simplement un regroupement, pas un groupe mathématique au sens actuel.

θx, $\theta^2 x$, …, $\theta^{n-1} x$ (la fonction θx étant telle que $\theta^n x = x$), afin d'aborder les équations binômes et abéliennes.

CLASSE.	ORDRE.	PERMUTATIONS.
1	1	*abcde, acebd, adbec, aedcb,*
	2	*abced, acdbe, aebdc, adecb,*
	3	*abecd, aedbc, acbde, adceb,*
	4	*aebcd, abdec, acedb, adcbe,*
	5	*abdce, adebc, acbed, aecdb,*
	6	*adbce, abedc, acdeb, aecbd,*
2	7	*bcdea, bdace, becad, baedc,*
	8	*bceda, beacd, bdcae, badec,*
	..	.....
3	13	*cdeab, cebda, cadbe, cbaed,*
	...	.....
4	19	*deabc, daceb, dbeca, dcbae,*
	...	.....
5	25	*eabcd, ebdac, ecadb, edcba,*
	...	.....

ORDRE.	PERMUTATIONS.
1	1, 7, 13, 19, 25
2	2, 8, 14, 20, 26
3	3, 9, 15, 21, 27
4	4, 10, 16, 22, 28
5	5, 11, 17, 23, 29
6	6, 12, 18, 24, 30

FIGURE 3 – Premier et second tableaux regroupant les permutations des cinq lettres a, b, c, d, e selon les deux lois de classification exposées par Despeyrous (Despeyrous, 1861, p. 432). La première ligne du tableau de gauche est obtenue à partir de *abcde* successivement par des pas de 2, puis de 3, puis de 4 ; on remarque d'ailleurs qu'elle est stable par toutes ses transformations. Les différentes classes s'obtiennent par permutations circulaires de la première classe.

Revenant ensuite sur la question proposée pour sujet du Grand prix de l'Académie de 1860, Despeyrous annonce que les principes dont il se sert « se rattachent à une ordre d'idées entièrement nouveau, à la *théorie de l'ordre*, créée par Poinsot » (Despeyrous, 1865b, p. 56) : il établit une correspondance entre le nombre de valeurs que peut prendre une fonction de m lettres dont on permute les variables et les classifications des permutations. C'est notamment l'objet du dernier théorème de (Despeyrous, 1865b) :

> Pour avoir tous les nombres de valeurs distinctes que prennent les fonctions quand on y permute les m lettres qu'elles

> renferment, il faut et il suffit que l'on considère toutes les manières possibles de partager les μ permutations qu'offrent ces lettres en s groupes composés chacun de q permutations ($\mu = sq$), associées de telle manière que, malgré tous les échanges qu'on voudrait faire de ces lettres, les permutations d'un même groupe ne puissent jamais se séparer.

À la condition d'inséparabilité des permutations d'un « groupe » correspond le fait que la fonction considérée garde la même valeur quand on applique aux variables les permutations de ce groupe ; elle en change quand on utilise une permutation d'un autre groupe. Le nombre des valeurs distinctes prises par la fonction est alors s.

Despeyrous présente ensuite sept partitions — ou classifications, dans sa terminologie — distinctes des permutations de m lettres en « groupes de permutations inséparables » (dont celles obtenues en 1861), en s'appuyant toujours sur la théorie de l'ordre *via* les polygones étoilés de Poinsot (Despeyrous, 1865a), et pour chacune des partitions, il fournit des exemples de fonctions de m variables prenant le nombre s correspondant de valeurs. Il applique ensuite ces résultats à la théorie des équations algébriques, prouvant le théorème suivant :

> Pour qu'une équation algébrique et de degré premier n supérieur à 3 soit résoluble algébriquement [c'est-à-dire par radicaux], il faut et il suffit : 1 ° qu'elle soit abélienne ; 2 ° ou qu'entre trois quelconques de ses racines, il y ait la relation $x_{a+p\rho} = \theta(x_{a+p}, x_a)$, dans laquelle les indices de x sont pris suivant le module n ; θ désignant une fonction rationnelle, ρ une des racines primitives du degré n, a un des nombres $0, 1, 2, \ldots, n-1$ et p un des nombres $1, 2, 3, \ldots, n-1$. (Despeyrous, 1866b, p. 10–11, 29)

Un corollaire est l'impossibilité de résoudre par radicaux les équations générales de degré premier supérieur à 3. Despeyrous présente ainsi une approche alternative, « à la Poinsot », aux résultats fondamentaux sur les équations algébriques de ses prédécesseurs, en particulier d'Abel et de

Galois. Notons d'ailleurs que cette approche repose comme la leur sur l'étude des permutations des racines et de leurs partitions. Une partie de son travail est déposée à l'Académie des sciences le 7 juillet 1862 et confiée à Joseph Bertrand et Serret, mais à notre connaissance, il n'en reçoit pas de rapport officiel ; en revanche, son exposé à la réunion des sociétés savantes tenue à la Sorbonne en avril 1863 bénéficie d'une présentation détaillée et très positive dans la *Revue des sociétés savantes*[39].

2 Réflexions sur les quantités et les figures, entre grandeur et situation (1866-1870)

Ayant obtenu une chaire à Toulouse, c'est à l'Académie des sciences, inscriptions et belles-lettres de cette ville que Despeyrous présente ses travaux ultérieurs sur les « quantités composées ». Son diagnostic est proche de celui de Vallès : il présente l'introduction historique des nombres comme quantités d'abord considérées « sous le rapport seulement de la grandeur » (Despeyrous, 1866a, p. 255), loue l'interprétation par Decartes des racines négatives grâce à la notion de position, et soulève la difficulté d'interpréter les quantités imaginaires (Despeyrous, 1866a, p. 257). Sa solution pour résoudre ce problème est d'introduire le « mode composé », « en considérant la quantité sous le double rapport de la grandeur et de la position » (Despeyrous, 1866a, p. 258). La « quantité considérée sous le point de vue de la position » le ramène à la « théorie de l'ordre », Despeyrous renvoyant alors aux réflexions de Poinsot et à celles qui accompagnent ses

39. *Revue des sociétés savantes : sciences mathématiques, physiques et naturelles*, vol. 3 (1863), p. 328-330. La présentation mentionne un accueil favorable de Serret à ses travaux sur les permutations de 1860-1861 et souligne que sa preuve récente de l'impossibilité de résoudre par radicaux les équations générales de degré 5 ou plus est directe, contrairement à celle d'Abel. Il est aussi indiqué que Despeyrous espère obtenir des conditions générales de résolubilité dans le cas où n n'est plus premier, mais n'a pas encore réussi. Despeyrous reçoit aussi une médaille d'argent des Sociétés savantes (*Revue des sociétés savantes de la France et de l'étranger* 3e s., vol. 1 (1863), p. 497).

propres résultats sur les équations algébriques (Despeyrous, 1866a, p. 252).

Sa définition de la quantité composée, cependant, s'inscrit dans la continuité de Cauchy [40], dont Despeyrous reprend aussi les notations et le vocabulaire :

> Soient, sur un plan, r la grandeur d'une droite issue d'un point fixe, et p l'angle qu'elle fait avec une droite fixe passant par ce point ; la quantité composée r_p contenant la double notion de grandeur et de direction détermine la position d'un point sur le plan, et elle n'est autre que celle qui a été étudiée par Cauchy et désignée sous le nom de l'*affixe* du point qu'elle détermine, mais dont cet illustre géomètre n'avait pas fait connaître l'origine ; r porte le nom de module de la quantité, et p celui de son argument. (Despeyrous, 1866a, p. 261)

Les modules se composent comme des nombres et les arguments comme des logarithmes, et sont réels. Despeyrous revient ensuite sur la correspondance entre « la quantité composée et *réelle* r_p » et « la quantité imaginaire $a + b\sqrt{-1}$ » ou son expression exponentielle re^{ip}, où i, ou $\sqrt{-1}$, est là encore « le signe de la perpendicularité » (Despeyrous, 1866a, p. 261). Le négatif réel est par exemple, comme on s'y attend, exprimé par $p = \pi$. Ainsi, « La théorie de la quantité composée explique d'une manière simple et naturelle celles des quantités négatives et imaginaires. » (Despeyrous, 1866a, p. 263).

La suite est plus originale : avec une référence au « calcul des *quaternions* de M. Hamilton » (Despeyrous, 1866a, p. 264), Despeyrous introduit la quantité $r_{p,q}$, « composée et

40. Entre 1847 et 1849, Cauchy a publié une série de mémoires sur les « quantités géométriques », parallèlement à sa théorie symbolique des imaginaires, fondée quant à elle sur les « équivalences algébriques ». Il caractérisait les quantités géométriques par leur « grandeur » et leur « direction » (Cauchy, 1847, p. 158–159). Sur Cauchy et la représentation géométrique des quantités complexes, voir (Flament, 2003, p. 292-302, 306-316 ; Dahan Dalmedico, 1997, p. 41-43).

relative aux trois dimensions » (Despeyrous, 1866a, p. 263) : r est la longueur d'une droite issue d'un point fixe, p et q sont deux angles permettant de « déterminer la direction de cette droite par rapport à trois plans fixes passant par ce point » (Despeyrous, 1866a, p. 263). En désignant par j le « signe de la perpendicularité à un plan », $r_{p,q}$ peut être exprimé par une exponentielle, $r_{p,q} = r \cdot e^{ip+jq}$. Un point de coordonnées (x, y, z) dans le repère choisi a pour affixe $r_{p,q} = x + iy + jze^{ip}$, p étant l'arc dont la tangente est $\frac{y}{x}$ (Despeyrous, 1866a, p. 264). Les détails des calculs sur ces quantités sont développés dans des mémoires suivants, en dimension 2 (Despeyrous, 1868) et en dimension 3 (Despeyrous, 1869).

Despeyrous promet beaucoup d'applications de cette théorie des quantités composées : non seulement « elle rend compte d'une manière admirable des périodes des fonctions elliptiques et des fonctions abéliennes » (Despeyrous, 1866a, p. 263), mais elle peut être utilisée pour la théorie des projections, les trigonométries, tant rectiligne que sphérique, la géométrie analytique (y compris des résultats de la « géométrie supérieure de Poncelet »), pour la « théorie des lignes » (c'est-à-dire la détermination de la forme d'une courbe, de sa longueur et des aires associées) (Despeyrous, 1869) et peut-être pour la mécanique. Il s'en sert aussi pour donner une nouvelle version de théorèmes classiques sur les équations algébriques, par exemple une version du théorème de Sturm sur le nombre de racines réelles positives d'une équation, et ses variantes dans le plan et l'espace (Despeyrous, 1870).

Despeyrous reprend donc la théorie de l'ordre de Poinsot sous deux formes différentes, même si l'algèbre est centrale dans les deux cas. D'une part, il utilise les méthodes de Poinsot sur les groupes de permutations, et la correspondance avec les polygones, pour démontrer, d'une manière qu'il juge plus simple et plus directe, des théorèmes fondamentaux de la théorie algébrique des équations. La théorie de l'ordre y est systématiquement et explicitement mise à contribution, comme un leitmotiv. D'autre part, s'il continue à l'évoquer

au début de ses recherches sur les grandeurs composées, c'est ponctuellement, pour justifier l'importance de prendre en compte la position, mais c'est plutôt sur la notion de grandeur géométrique introduite par Cauchy qu'il s'appuie ensuite. La continuité est d'ailleurs au cœur des résultats qu'il vise[41] et la notion d'ordre n'est plus mentionnée dans ses mémoires ultérieurs. Ce sont alors les notions de position (Despeyrous, 1868, p. 175 ; 1869, p. 174), de situation (1868, p. 175 ; 1869, p. 179) ou de direction (1869, p. 176) qui complètent la notion de grandeur ; dans ses applications à la géométrie, Despeyrous explique comment les notions de grandeur et de position sont liées respectivement aux propriétés métriques et descriptives, ajoutant que la « méthode des projections » permet de « ramener la notion de position à celle de grandeur » (1875, p. 259).

IV. Situations I : Polyèdres

Comme le montrent les textes faisant référence à la théorie de l'ordre de Poinsot ou inspirés par elle que nous avons collectés, certains objets y interviennent de manière récurrente. Nous avons choisi de revenir sur deux d'entre eux, les polygones et polyèdres d'une part, les nombres entiers d'autre part pour situer plus précisément l'effet du programme de Poinsot sur les recherches qui les concernent. Contrairement à l'expression « théorie de l'ordre », les travaux mathématiques sur ces objets sont quant à eux plus facilement repérables dans les rubriques des catalogues mathématiques du XIXe siècle.

Le *Catalogue of Scientific Papers*, par exemple, recense environ 150 articles consacrés aux polygones et 210 aux poly-

41. Soulignons à ce propos que sa preuve du théorème de Sturm suit la preuve originale, qui repose sur le théorème des valeurs intermédiaires, et non les versions purement algébriques proposées ensuite, en particulier par Hermite (Sinaceur, 1991b).

èdres généraux, dont environ le quart sont publiés dans des journaux et par des auteurs français[42]. Dans les premières décennies du siècle, à de rares exceptions (dont fait bien sûr partie Poinsot lui-même), les travaux recensés concernent surtout les polygones ou la « polyédrométrie » (c'est-à-dire les calculs de volume des polyèdres)[43].

Les polygones, en particulier les polygones réguliers associés aux racines de l'unité et aux résidus modulo des entiers, jouent un rôle crucial, comme nous l'avons déjà indiqué, dans l'élaboration chez Poinsot d'une théorie de l'ordre (Boucard, 2011). Mais dans l'introduction de son mémoire sur les polygones et les polyèdres, présenté à l'Institut le 24 juillet 1809, c'est dans le cadre de ce qui est encore une « géométrie de situation » que Poinsot place son travail,

> parce qu'on y considère moins la grandeur et la proportion des figures que l'ordre et la situation des divers éléments qui les composent. Cette espèce de géométrie, qui ne regarde que les lieux dans l'étendue, est à peu près, à la géométrie ordinaire, ce que la science des propriétés des nombres est à l'algèbre, qui est la science des grandeurs. (Poinsot, 1810, p. 16)

Poinsot retrace brièvement la chronologie des rares manifestations de cette géométrie, depuis Leibniz, et, dans la suite

42. Les textes circulent bien sûr à cette époque, soit directement, soit par des traductions. Mais les références mobilisées suggèrent souvent une certaine étanchéité des points de vue ou des méthodes. Par exemple, si Ampère, Bravais et Jordan s'intéressent tous aux symétries polyédriques, avec la cristallographie en point de mire, c'est à Hermann Grassmann que se réfère August Ferdinand Möbius quand il les étudie, toujours en lien avec les cristaux (Möbius, 1852). Un autre exemple est celui de la « tactique » à la fin du siècle, un terme principalement utilisé par les auteurs britanniques, même si les thématiques et les objets sont étroitement liés à ceux de la théorie de l'ordre (Ehrhardt, 2015).

43. C'est dans cette rubrique de stéréométrie que le *Catalogue* classe par exemple un article d'Ampère sur l'égalité des polyèdres symétriques, qu'il utilisera quelques années plus tard pour proposer une théorie cristallo-chimique fondée sur les différentes combinaisons possibles de polyèdres élémentaires Voir chap. Cristal 2.

de son mémoire, vise avant tout une classification. Les polygones sont pour lui de même *ordre* s'ils ont le même nombre de sommets et de même *espèce* si la somme de leurs angles est la même (ce qui est lié aux différentes façons de joindre les sommets). Poinsot montre par exemple que dans l'ordre des polygones à m côtés, il y a autant d'espèces différentes qu'il y a de nombres, compris entre 1 et $\frac{m-1}{2}$, premiers à m (Poinsot, 1810, p. 21). Il utilise ensuite ses résultats sur les polygones pour construire des polyèdres. En plus des 5 polyèdres convexes réguliers bien connus, il met en évidence 4 autres polyèdres réguliers, c'est-à-dire dont les faces sont des polygones identiques équilatéraux et équiangles : les polyèdres réguliers étoilés (dont deux avaient déjà été repérés par Johannes Kepler). Cauchy prouvera quelques années plus tard que ce sont bien les seuls de ce type.

Le lien entre polygones et géométrie de situation n'est pas propre à Poinsot à cette époque. Joseph-François Français, fin 1806, dans le contexte des discussions sur la représentation géométrique des imaginaires, illustre son espoir que la géométrie de situation voit enfin le jour par des propositions sur les polygones réguliers (Français, 1814-1815). Un autre acteur important de l'histoire des nombres imaginaires, Jean-Robert Argand, résout par l'analyse indéterminée un « problème de situation » concernant les polygones, posé dans les *Annales de mathématiques pures et appliquées* de Gergonne : des nombres entiers étant affectés dans n'importe quel ordre aux points divisant une circonférence en N parties égales, formant ainsi « un nombre déterminé de polygones inscrits, parmi lesquels plusieurs ne différeront les uns des autres que par leur situation », trouver le nombre de polygones réellement différents (Argand, 1814-1815, p. 189–190).

Cette orientation des recherches sur les polygones vers des questions qui relèvent moins de géométrie élémentaire que de théorie des nombres et de combinatoire mobilise de nombreux mathématiciens dans les années 1840-1860, autour de questions spécifiques — une tendance favorisée par la publication de nouveaux journaux mathématiques dont les

auteurs-lecteurs se répondent. Un exemple est le problème de déterminer le nombre de triangles déterminés par les diagonales en lesquels un polygone peut être partagé, problème abordé par Joseph Liouville, Eugène Catalan, Jacques Binet, Olinde Rodrigues, Emile Brassinne, et d'autres, en particulier dans les pages du *Journal de mathématiques pures et appliquées* (Laurentin, 2009). Ce courant est complété par les constructions effectives de polygones réguliers, en lien avec les résultats de Gauss sur l'équation cyclotomique de la dernière section des *Disquisitiones arithmeticae* (Lebesgue, 1846 ; Mathet, 1875 ; Serret, 1848). Olry Terquem commente d'ailleurs, pour le public enseignant de sa revue, les *Nouvelles annales de mathématiques*, la liaison entre théorie des nombres et polygones, comme le montre cette note à un article de Vachette sur les polygones réguliers :

> On voit donc que la possibilité de diviser la circonférence en parties égales tient encore à ce qu'on peut toujours satisfaire en nombres entiers à l'équation $ax - by = 1$, lorsque a et b sont premiers entre eux ; il existe une liaison singulière qu'on rencontre partout, entre les propriétés des nombres premiers et celles de la circonférence. (Vachette, 1845, p. 177)

Par ailleurs, une vague d'articles sur les polyèdres se partage entre notes aux *Comptes rendus* de l'Académie des sciences, accompagnant quelques mémoires plus longs dans les journaux des recherche, contributions orientées vers des propriétés utilisables dans l'enseignement dans les journaux appropriés, et travaux, en petit nombre, présentés à des sociétés savantes provinciales.

Exposant, après ceux de Gauss, les résultats de Poinsot et Cauchy, Terquem, après avoir expliqué le calcul du nombre de polygones ayant un nombre premier de sommets donnés, termine son article par le double ancrage qui devient la norme pour ces problèmes sur les polygones et les polyèdres : les jeux, ici « le jeu du domino [qui] présente une question de ce genre : de combien de manières peut-on placer sur une

seule ligne tous les dominos, en observant la loi du jeu ? » (Terquem, 1849, p. 74), et les sciences naturelles :

> Est-il donc impossible que la nature ait employé les polyèdres étoilés dans la formation intégrante des cristaux ? Qui répond que des phénomènes de réfraction ne se rattachent pas à cette organisation ? En tout cas, il serait utile que ces nouveaux corps réguliers fussent construits et placés dans les cabinets d'histoire naturelle des collèges avec les autres polyèdres, pour aider aux démonstrations cristallographiques. (Terquem, 1849, p. 132)

Le sujet a de fait été relancé à l'Académie des sciences de Paris par Cauchy et Poinsot eux-mêmes, puis Joseph Bertrand. En mai 1848, Cauchy présente par exemple plusieurs théorèmes qui mettent l'accent sur les invariances par rotation, par exemple :

> Si dans un plan on prend pour origine des coordonnées le centre d'un polygone régulier de n côtés et si l'on substitue les coordonnées rectilignes d'un sommet de ce polygone dans une fonction entière de ces coordonnées, d'un degré inférieur à n, la moyenne arithmétique entre les valeurs de cette fonction correspondantes aux divers sommets reste invariable, tandis qu'on fera tourner le polygone autour de son centre, en laissant immobiles les axes coordonnés. (Cauchy, 1848, p. 490)

Il donne des énoncés analogues pour les polyèdres et discute aussi de l'inscriptibilité et de la circonscriptibilité d'un polyèdre par rapport à une sphère, ce qui inspirera ensuite des communications de Jacques Babinet et la représentation graphique de ces solides pour la géométrie et la cristallographie (Babinet, 1848) [44]. Dix ans plus tard, à propos de

44. Il est difficile de déterminer précisément ce qui a occasionné ce renouveau d'intérêt. Outre les questions liées à la cristallographie (voir le chapitre sur Bravais dans cet ouvrage), l'ingénieur des Ponts-et-Chaussées Paul Breton (de Champ) signale qu'il a envoyé en 1844 et 1845 des mémoires sur ce sujet à l'Académie, qui n'a pas fait de

la classification des polyèdres, en particulier du nombre de polyèdres qu'on peut construire à partir des mêmes points sommets, Poinsot souligne à nouveau dans son texte que « ce qui rend cette théorie des polyèdres très difficile, c'est qu'elle tient essentiellement à une science, presque encore neuve, que l'on peut nommer *géométrie de situation*, parce qu'elle a principalement pour objet, non pas la grandeur ou la proportion des figures, mais l'ordre et la situation des éléments qui les composent » (Poinsot, 1858, p. 70). Mais c'est sans doute à l'initiative de Joseph Bertrand — qui fait construire les polyèdres étoilés de Poinsot pour le Collège de France [45] et donne en 1858 une nouvelle preuve, plus simple, de ce que la liste des 9 polyèdres réguliers de Poinsot et Cauchy est complète (Bertrand, 1858) — que le Grand Prix des sciences mathématiques de l'Académie des sciences de 1861, remis au concours en 1863 et finalement non attribué, porte sur la théorie géométrique des polyèdres (Brechenmacher, 2015b) (voir Fig. 4).

L'Académie reçut à ce propos 8 mémoires, dont celui de Catalan, qui faillit recevoir le prix et fut publié ultérieurement dans le journal de l'École polytechnique [46]. Si Catalan ne se réfère pas à une théorie de l'ordre spécifiquement, et n'abandonne pas du tout dans son mémoire les questions re-

---

rapport... (*Comptes rendus des séances hebdomadaires de l'Académie des science* 26 (1848), p. 644, commentant la note de Cauchy du 8 mai 1848 sur les polygones et polyèdres.) Notons également qu'en 1847-1848, Babinet fait partie des rapporteurs des travaux présentés à l'Académie par Bravais, Louis Pasteur et Alexandre Baudrimont, et plus tard de Jacques Pierre Valat. Cauchy est membre des commissions évaluant des travaux de Bravais et d'Auguste Laurent.

45. Comme le suggère la citation précédente de Terquem, des modèles de polyèdres sont construits au moins depuis la fin du XVIIIe siècle pour l'enseignement de la cristallographie (Voir Chap. Cristal 1). Sur l'utilisation des modèles pour l'enseignement de la géométrie en France au XIXe siècle, voir (Brechenmacher, 2022).

46. Sur l'histoire polémique de ce prix et les recherches de Catalan, voir (Dupas et Verdier, 2015). Catalan lui-même consacra une brochure acerbe à l'histoire du prix ....

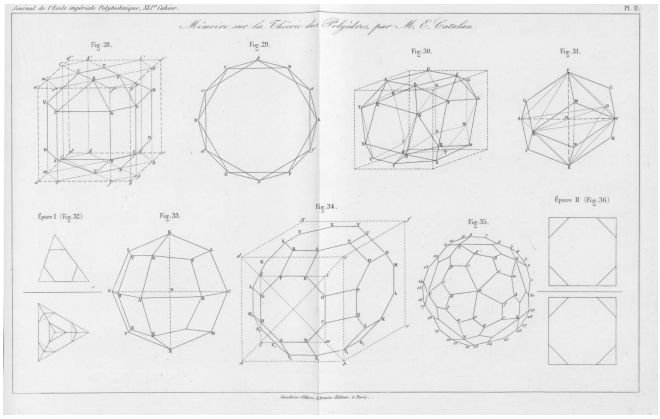


FIGURE 4 – Planche II du mémoire de Catalan sur les polyèdres (Catalan, 1865)

latives à la grandeur, que ce soit pour les arêtes ou les angles, il évoque néanmoins spécifiquement « les conditions d'ordre ou d'arrangement » auxquelles sont assujettis les divers éléments des polyèdres, sommets, arêtes ou faces, et imagine « une figure symbolique, une sorte de notation algébrique, au moyen de laquelle on puisse (jusqu'à un certain point), non seulement reconnaître si un polyèdre dont les éléments sont donnés est possible, mais encore l'ordre dans lequel ils doivent se grouper » (voir Fig. 5). Ceci lui permet de ramener à des équations en nombres entiers la recherche et l'identification de polyèdres soumis à certaines conditions de régularité et donc de réduire « la théorie de la possibilité des polyèdres à l'analyse indéterminée du premier degré et à un problème analogue à celui du Cavalier, etc., c'est-à-dire appartenant à la géométrie de situation » (Catalan, 1865).

Le prix de l'Académie relança manifestement des recherches variées sur les polyèdres, qu'elles soulignent de nouvelles propriétés par analogie avec les polygones (Lalanne, 1872 ; Prouhet, 1860), découvrent de nouveaux polyèdres (Valat, 1867, voir Fig. 6), ou formulent de nouvelles classifications (Badoureau, 1881 ; Breton, 1860 ; Catalan, 1865).

	3	3	3	3	3	3	3	3	
	A	B	C	D	E	F	G	H	
3	0	0	1	1	1	1	1	1	6
4	2	2	1	1	0	1	0	1	8
5	1	1	1	1	2	1	2	1	10

FIGURE 5 – Table à double entrée représentant l'hexaèdre ABCDEFGH. À chaque sommet (2 ème ligne de la table) aboutissent ici 3 arêtes (1ère ligne de la table). Les autres lignes (ici 3, 4, 5) contiennent le nombre de faces, du nombre de côtés correspondant, auxquelles appartient un sommet. Par exemple A appartient à 2 faces carrés et 1 face pentagonale (Catalan, 1865)

Fig. 27.

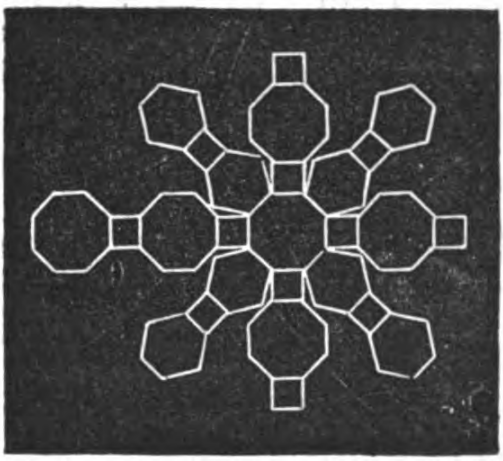


FIGURE 6 – Déploiement de l'icosihexaèdre, formé de 12 faces carrées, 8 faces hexagonales et 6 faces octogonales (Valat, 1867, p. 360)

C'est d'ailleurs le cas de celles de Jordan qui consacre plusieurs notes et longs mémoires à ces objets (Brechenmacher, 2015a). Si une grande partie des auteurs citent les résultats des recherches de Poinsot mais sans mentionner la théorie de l'ordre, Jordan quant à lui s'inscrit complètement dans le cadre dessiné par ce dernier : il s'intéresse à l'enchaînement des arêtes et des faces, vu d'un observateur placé à un sommet à l'intérieur ou à l'extérieur d'un polyèdre, ce qu'il nomme « aspect », respectivement rétrograde et direct [47]. Il remarque qu'un polyèdre quelconque de A arêtes possède en principe 4A aspects (2A rétrogrades et 2A directs), « mais plusieurs de ces aspects peuvent être semblables entre eux. C'est là un genre nouveau de symétrie, dépendant de la théorie de l'ordre et dont l'étude fait l'objet de ce mémoire » (Jordan, 1865, p. 400). Numérotant les éléments constitutifs du polyèdre, sommets, arêtes, etc, Jordan discute les cas où le polyèdre est symétrique par retournement autour d'une arête ou par rotation d'ordre k autour d'un élément, ce qui correspond au fait qu'un élément porte le même numéro sous k aspects différents. Ceci lui permet de partager les polyèdres généraux en classes, puis d'examiner les polyèdres inverses l'un de l'autre (c'est-à-dire pour lesquels les aspects directs de l'un correspondent exactement aux aspects rétrogrades de l'autre). Mais dans la suite de ses recherches, Jordan généralise les polyèdres historiques, à faces planes, pour appliquer ses résultats aux surfaces quelconques « d'espèces (m, n) », c'est-à-dire limitées par un certain nombre m de contours fermés et telles qu'on peut y tracer n contours fermés ne se coupant pas eux-mêmes, ni entre eux, sans la partager en deux régions distinctes (une étude que Jordan relie aux travaux de Riemann) ; la formule d'Euler liant le nombre F de faces, le nombre A d'arêtes et le nombre S de sommets des polyèdres, $F-A+S=2$, devient alors $F+S=A+2-m-2n$ et de nouveaux cas de symétrie apparaissent. Jordan montre

47. On retrouve sous un autre nom le « point de vue » de Despeyrous.

en particulier que les cas $m = 0$, $n = 0$ ou 1 sont les seuls où l'on peut construire des polyèdres pareils à eux-mêmes sous un nombre d'aspects aussi grand que voulu (Jordan, 1866). Aspects et régions sont discutés à la Société mathématique de France une quinzaine d'années plus tard, par les polytechniciens Georges Henri Halphen, Charles-Ange Laisant et Raoul Perrin (Auvinet, 2011, p. 309-313), sans référence explicite à Jordan ni à la théorie de l'ordre : c'est simplement à la géométrie de situation que Laisant rattache la théorie des régions et des aspects (Laisant, 1882a, p. 52). La généralisation du théorème d'Euler fait ensuite l'objet de plusieurs articles à la fin du siècle (Jonquières, 1890 ; Poincaré, 1893).

La thématique des polyèdres entretient donc un rapport ambigu avec la théorie de l'ordre : c'est plutôt la géométrie de situation en général qui semble fédérer les auteurs multiples qui s'intéressent à ces objets, que ce soit pour l'enseignement, pour leurs liens avec les sciences de la nature ou pour l'intérêt, voire la beauté, de leurs constructions pratiques effectives [48]. Au contraire, elle oriente ou récupère les recherches que quelques mathématiciens, comme Jordan, rattachent alors à la théorie de l'ordre vers d'autres domaines qui émergent à part entière au tournant du XXe siècle, que ce soit la combinatoire ou la topologie. Cette évolution est bien illustrée par les recherches de Georges Brunel, professeur à l'université de Bordeaux, à la toute fin du siècle (Duhem, 1902 ; Ehrhardt, 2015 ; Gropp, 2004) : celui-ci s'intéresse à ces domaines en général (il établit par exemple des propriétés de la droite qui relève de topologie, sans notion de distance). Quand il se tourne plus particulièrement vers les polyèdres, il les représente comme « réseaux » (nous dirions plutôt « graphes ») non rigides, dé-

48. La notion d'ordre au sens de disposition apparaît d'ailleurs ponctuellement dans des travaux classés dans la catégorie « géométrie de situation » du *Répertoire bibliographique des sciences mathématiques* (RBSM) à la fin du XIXe siècle.

terminés par des points-sommets et des lignes les joignant [49] ; il en calcule les nombres de parcours possibles, incarnant sa réponse dans les groupements possibles de dominos ou des déplacements sur des cartes (Brunel, 1894 ; 1894-1895). Il étudie aussi les polyèdres de différents types (par exemple des configurations à faces pentagonales seulement) traçables sur des surfaces de genre donné. Ainsi il montre l'existence de 25 configurations régulières — c'est-à-dire bornées par le même nombre m d'arêtes et dont les sommets appartiennent à un même nombre n d'arêtes — effectives sur les surfaces de genre 2, déterminant également celles qui sont symétriques (Brunel, 1891) ; les dessins en sont présentés en 1895 au public de l'exposition universelle de Bordeaux (Duhem, 1902). Brunel, qui relie son travail tant à celui de Jordan qu'aux questions d'isomérie de la chimie organique, témoigne bien des nouvelles relations nouées à la fin du siècle entre les jeux combinatoires, l'*analysis situs* ou topologie, les sciences naturelles et des objets mathématiques classiques, déterminants, équations, polygones et polyèdres, ou plus récents, comme les réseaux et les graphes.

V. Situations II : Théorie des nombres entiers

Parmi les travaux dans lesquels Poinsot mobilise explicitement la notion d'ordre, c'est de ceux portant sur la théorie des nombres, en particulier (Poinsot, 1845), que proviennent la plupart des citations et des références à la théorie de l'ordre dans le second XIXe siècle. Comme nous l'avons expliqué, l'application des congruences au réordonnancement des racines de l'unité, proposée par Gauss en 1801 pour résoudre une équation algébrique et apporter en même temps une réponse à un antique problème sur les polygones, a joué un rôle décisif dans la pensée de Poinsot. L'influence de l'ouvrage de Gauss

49. Au milieu du siècle, c'est dans le sens inverse que procédait Bravais, interprétant comme polyèdre la maille élémentaire des réseaux cristallographiques, voir le chapitre sur Bravais dans cet ouvrage.

a été très importante tout au long du XIXe siècle, avec des ramifications multiples aboutissant à plusieurs sous-disciplines de la théorie des nombres à la fin du siècle (Goldstein et al., 2007). Néanmoins, les références à la notion d'ordre de Poinsot ou à une théorie de l'ordre sont exceptionnelles.

Un seul auteur associé à la théorie des nombres dans la deuxième moitié du siècle était déjà apparu lors de notre recherche initiale : c'est Édouard Lucas, qui mentionne la « géométrie de l'ordre et de la situation » dans une récréation mathématique, qui porte sur « le jeu des traversées en bateau », d'après Claude-Gaspard Bachet de Méziriac (Lucas, 1881, p. 408 ; 1891a, p. 3) — il s'agit de faire passer une rivière à un groupe de personnes ou de choses, avec des contraintes sur le nombre de passagers possible à chaque traversée et des incompatibilités sur les objets ou personnes laissés en présence sur l'une des rives. Mais Lucas, qui accompagne ses écrits de nombreux commentaires historiques, ne se réfère pas ici à Poinsot ; il place ces récréations sous la double égide de l'arithmétique et de la géométrie de situation. Poinsot lui-même est mentionné pour ses travaux sur les polyèdres dans une autre récréation, le jeu d'Hamilton (du nom de l'inventeur des quaternions qui y a illustré des calculs de cette théorie), dans lequel il s'agit de parcourir une et une seule fois toutes les arêtes d'un polyèdre donné (Lucas, 1891b, p. 207), ainsi que dans une liste de références en conclusion du chapitre « Géométrie de situation » du traité de Lucas sur la théorie des nombres (Lucas, 1891c, p. 119). Cette insertion témoigne d'un lien alors bien établi entre géométrie de situation (ici discrète), et questions sur les entiers. À la suite de Vandermonde notamment, Lucas attribue des notations adaptées aux objets traités permettant de ramener l'analyse de leurs positions relatives à la manipulation de symboles et de formules et au dénombrement des différentes solutions possibles. Il utilise aussi des représentations graphiques de problèmes sur les entiers. La notion d'ordre, en lien avec Poinsot, n'est en revanche citée par Lucas que dans l'introduction de sa *Théorie des nombres* (1891c) : il y appuie les propos de

Poinsot selon lesquels « les principes généraux de l'Analyse mathématique ont leur source naturelle dans la simple considération de l'ordre ou de la disposition mutuelle qu'on peut observer actuellement entre plusieurs objets » (Poinsot, 1845, p. 2).

Les démonstrations géométriques, « tirées de la considération de l'ordre » de plusieurs résultats arithmétiques que Poinsot (1845, p. 45) propose, et qu'il rattache à la géométrie de situation, sont régulièrement mentionnées pour promouvoir une approche visuelle de la théorie des nombres, sans nécessairement faire référence à une théorie de l'ordre. Pour évaluer l'influence de la pensée de Poinsot sur l'arithmétique graphique nous avons, d'une part, utilisé la rubrique « géométrie de situation » du RBSM mentionnée précédemment et, d'autre part, dépouillé et analysé plusieurs périodiques [50].

À partir des années 1870, géométries discrètes, théorie des nombres entiers, combinatoire et récréations mathématiques se retrouvent étroitement imbriquées, en particulier au sein de l' Association française pour l'avancement des sciences (Voir chap. art ornemental & géométrie de situation) [51]. S'appuyant comme Lucas sur une approche visuelle

50. Nous avons ainsi sondé les*Nouvelles annales de mathématiques*, le *Bulletin de la Société mathématique de France*, les comptes rendus de l'Association française pour l'avancement des sciences, la *Revue scientifique générale* et *Sphinx-Œdipe*. Nous avons complété avec les autres travaux des auteurs repérés. Notons que les travaux sur les mathématiques discrètes mentionnés ici ont pour la plupart déjà été étudiés par ailleurs. Nous renvoyons aux travaux d'Anne-Marie Décaillot (1999 ; 2002 ; 2007) sur Lucas et sur les mathématiques discrètes à l'AFAS, à ceux de Jérôme Auvinet (2011 ; 2017) sur Charles-Laisant, à ceux d'Évelyne Barbin (2017) sur Gaston Tarry. Plus généralement, la thématique des récréations mathématiques à la fin du XIXe siècle a fait l'objet de plusieurs travaux ces dernières années (Auvinet, 2016 ; Barbin et Guitart, 2016 ; Chemla, 2014 ; Wate-Mizuno, 2013) parmi d'autres.

51. D'autres géométrisations de la théorie des nombres sont bien sûr développées à la même époque, comme la géométrie des nombres de Hermann Minkowski ou d'autres interprétations géométriques des formes quadratiques ou des équations diophantiennes, voir (Gauthier, 2009 ; Gray, 2013 ; Schappacher, 1991).

de mathématiques discrètes, les auteurs ont souvent recours à des tableaux, des échiquiers ou des réseaux pour résoudre leurs questions (Auvinet, 2011, part. III). Le problème du cavalier, qui consiste à déterminer les manières dont un cavalier peut parcourir toutes les cases d'un échiquier une et une seule fois, fait par exemple l'objet d'une littérature abondante, et est régulièrement rattaché à la géométrie de situation. Les carrés magiques sont un autre exemple d'énoncés inscrits alors dans le cadre de la géométrie de situation, qui peuvent faire l'objet de réflexions sur l'ordre et la situation (Frolow, 1886, p. 6, par exemple). Mais le programme d'une théorie de l'ordre n'y est en général pas repris.

Camille de Polignac publie par exemple en 1878 un mémoire sur la « Représentation graphique de la résolution en nombres entiers de l'équation indéterminée $ax + by = c$ », un problème que Poinsot avait abordé en 1845. Au lieu de l'image de points disposés en cercle privilégié par ce dernier, de Polignac appuie ses raisonnements sur un échiquier infini formé de rectangles de côtés horizontal a et vertical b. Plus généralement, des travaux de géométrie discrète basés sur des échiquiers infinis à cases polygonales et sur des réseaux de points se réclament alors d'une « géométrie des quinconces » qui fait l'objet de plusieurs articles publiés dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* entre 1878 et 1882 [52] (Polignac, 1878, p. 158).

De même, l'inspecteur des contributions Gaston Tarry, connu pour avoir résolu le problème des 36 officiers à partir de l'étude des permutations, appuyée sur des échanges de lignes et de colonnes dans un tableau de nombres (Barbin, 2017), utilise souvent l'échiquier comme outil de résolution de problèmes. Il a consacré plusieurs publications aux carrés magiques et a publié un mémoire sur les « lignes arithmétiques », une figuration de l'ordre des résidus obtenus à partir de la division par un nombre entier n des termes d'une série arith-

52. Pour des analyses de ce réseau de textes, voir notamment (Auvinet, 2011 ; Décaillot, 1999 ; Goldstein, 1999).

métique de la forme c, $c + a$, ..., $c + (n - 1)a$ (Tarry, 1899). S'il mentionne lui aussi ponctuellement la notion d'ordre au tournant du siècle, se référant à une « méthode d'ordre » dans (Tarry, 1901) ou encore à une « étude des propriétés d'ordre » (Tarry, 1907, p. 182), la théorie de l'ordre de Poinsot n'est pas citée.

C'est d'ailleurs surtout lors de réflexions générales sur les mathématiques ou leur philosophie qu'apparaissent dans ce milieu des allusions à l'ordre, le plus souvent marginales. Dans son *Arithmétique graphique* (1894), Gabriel Arnoux, ancien officier de marine devenu agronome, présente une philosophie du raisonnement et de la méthode d'invention, s'appuyant sur un corpus d'écrits mathématiques et philosophiques, dont ceux de Cournot, de Poinsot et de Vallès, sans néanmoins évoquer spécifiquement leurs réflexions sur l'ordre. Dans ses mathématiques même, où il interprète par exemple graphiquement des congruences à partir des « lignes » et « espaces arithmétiques », la seule mention de l'ordre comme notion importante que nous avons retrouvée est une citation sur les carrés magiques qu'Arnoux reprend de (Frolow, 1886) : « Ce problème (ainsi que celui du cavalier aux échecs) n'appartient nullement à la théorie des équations, qui ne s'occupe que de la grandeur des quantités, mais non pas de l'ordre de leur disposition relative [...] » (Arnoux, 1894, p. 5). Laisant, dont certains thèmes semblent pourtant propices à des réflexions sur l'ordre, que ce soit les fractions périodiques, les résidus numériques avec Étienne Beaujeux (Laisant et Beaujeux, 1870), les calculs géométriques — équipollences et quaternions — ou les procédés visuels pour les mathématiques discrètes (Auvinet, 2011, part. III), n'y fait lui non plus presque pas allusion. Dans son ouvrage *La mathématique. Philosophie-enseignement*, il la mentionne à côté de celles de mesure, de grandeur, de nombre dans une réflexion sur la définition des sciences mathématiques. Passant en revue plusieurs de ces définitions, il critique celle de Comte (« la Mathématique est caractérisée par la mesure indirecte des grandeurs »), car « elle ne comprend pas, en premier lieu,

la notion d'ordre, qui est inhérente à l'esprit mathématique au même degré que la mesure » (Laisant, 1898, 17–18). Laisant est toutefois conscient que certaines de ses recherches se rattachent à des mathématiques traitant de l'ordre et de la situation, comme le suggère cet extrait de mémoire :

> Il nous semble seulement utile, en terminant, de faire remarquer la nature particulière des questions que nous avons traitées dans cette étude et qui se distinguent de celles dont on s'occupe le plus souvent, en ce sens que la notion de *place* ou de *classification* y domine absolument la notion de grandeur ou de rapport.
>
> En les développant, nous avions à l'esprit cette pensée si juste de Poinsot, exprimée dans ses *Réflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres* et qu'on ne saurait que trop méditer :
>
> « Les mathématiques ne sont pas seulement la science des rapports, je veux dire que l'esprit n'y a pas uniquement en vue la proportion ou la mesure ; il peut encore considérer le nombre en lui-même, l'ordre et la situation des choses, sans aucune idée de leurs rapports, ni des distances plus ou moins grandes qui les séparent. » (Laisant, 1882b, p. 108, cité dans Auvinet, 2011, p. 340).

Une rare exception, au tout début du XXe siècle, est l'amateur Auguste Aubry, promoteur d'une théorie des nombres graphique et des récréations mathématiques et auteur de nombreuses synthèses sur les travaux discutés plus haut. Il les publie dans l'*Enseignement mathématique* et dans *Sphinx-Œdipe*, une revue nancéienne principalement consacrée à la théorie des nombres élémentaire [53]. Correspondant régulier de Gaston Tarry et de l'éditeur de *Sphinx-Œdipe*, André Gérardin, Aubry se réfère à plusieurs reprises aux travaux de Poinsot et reprend sa méthode de résolution graphique des équations indéterminées (Aubry, 1912). Il œuvre de plus à la diffusion des travaux de Poinsot : il aurait par exemple transmis à Gérardin le mémoire (Poinsot, 1820) et il évoque

53. Sur cette revue, voir (Boucard, À paraître).

la théorie de l'ordre de Poinsot dans sa correspondance avec Tarry à plusieurs reprises[54]. Le 28 septembre 1911, il souligne par exemple l'existence de « deux sortes de math., celle de la quantité et celle de l'ordre », cherche de nouvelles démonstrations graphiques « par la méthode de Poinsot » et le 4 décembre de la même année, adressant à Tarry une brochure qu'il a rédigée résumant partiellement (Poinsot, 1845), il encourage son correspondant à pousser ses recherches dans ce cadre :

> Il y aurait bien des choses à dire et encore plus à étudier sur cette *algèbre de l'ordre*, notamment comment il se fait que les opérations de l'algèbre se dessinent pour ainsi dire aux yeux, non plus par des considérations métriques comme la géométrie analytique de Descartes, ni même comme la géométrie projective de Poncelet, où il est bien question d'ordre, mais non de points ayant des qualités, des coefficients différents. Votre géom. générale serait une initiation à cette algèbre de l'ordre annoncée par Poinsot, qui en a du reste fourni un joli chapitre que j'ai reproduit dans mes *Premiers Principes de la sc. des n.* [...]

Tant pour Aubry que Tarry, cependant, ce projet de développement d'une algèbre de l'ordre restera lettre morte.

VI. Ordre et théorie

> On voit par là que ce qui rend cette matière difficile. Dans la théorie des polyèdres, comme dans celle des nombres, il n'y a souvent rien à conclure d'un cas particulier à un autre : la plupart des propriétés y sont individuelles et ne suivent point de lois. (Poinsot, 1810, p. 45)

Parcourir les mémoires mis à jour dans notre enquête nous a souvent donné un sentiment analogue. L'idée d'une

54. Cette correspondance est partiellement conservée à l'Institut Henri Poincaré à Paris sous la forme d'un ensemble de 40 lettres d'Aubry à Tarry pour la période Septembre 1911 – Décembre 1912.

théorie ou d'une science de l'ordre y est apparue plus large que la version spécifique promue par Poinsot, interférant avec d'autres projets qui visent une autre sorte de science de l'ordre, comme celui de Wronski, ou qui sont réunis sous une autre bannière, comme celle de la géométrie de situation. Dans la première moitié du siècle, au moins, le ralliement au projet spécifique de Poinsot paraît d'ailleurs, connecté à la fréquentation de cercles particuliers, autour du fouriérisme, de l'École polytechnique, ou à des lectures complémentaires, dont celle de Cournot. Mais, même à l'échelle restreinte de notre thématique, la variété professionnelle des mathématiciens impliqués — enseignants, Académiciens, ingénieurs, fonctionnaires, universitaires de toute la France, notables locaux — reflète celle de la communauté mathématique française de l'époque, ainsi que ses modes d'incitation, de diffusion et de communication (Gispert, 2002 ; 2015 ; Goldstein, 2020).

Les mémoires de Poinsot lui-même, en particulier sur les polyèdres ou sur la théorie des nombres, sont mentionnés et parfois approfondis, tant en France comme nous l'avons vu, qu'à l'étranger [55]. Poinsot et ses successeurs ont contribué au développement de mathématiques centrées sur la disposition des choses, en nombre fini ou non, discrètes ou continues. Comme nous l'avons vu, outre les objets au centre des réflexions de Poinsot, polygones, équations algébriques, congruences, permutations, d'autres objets entrent dans les mathématiques au cours du siècle, échiquiers, tableaux, che-

55. Bien que notre enquête n'ait pas été systématique hors du cas français, notons que les démonstrations graphiques de Poinsot sont reprises dans plusieurs présentations générales de théorie des nombres, en allemand, anglais et portugais (Bachmann, 1892 ; Grünert, 1846a,b ; Guim, 1854 ; Smith, 1859). Johann August Grünert souligne au passage l'importance de l'ordre dans ces preuves et l'intérêt d'une visualisation géométrique et de la considération de l'ordre (*Anordnung*) des résidus de puissances de racines n-èmes est utilisé plus tard par Fritz Hoffman (1882), qui s'inspire de Poinsot. Par ailleurs, la théorie de l'ordre est mentionnée dans des écrits à vocation historique (Guimarães, 1900 ; Günther, 1876 ; Merz, 1896-1914) ou philosophiques (Rey y Heredia, 1865) (qui cite non seulement Poinsot, mais aussi Vallès et Cournot.

mins sur des surfaces, réseaux et la réception de Poinsot croise, au moins fugitivement, les questions fondamentales des mathématiques du XIXe siècle, comme les insuffisances de la géométrie euclidienne ou l'interprétation des nombres imaginaires.

Il n'existe toutefois pas de ligne continue reliant tous ces travaux. Le thème de l'ordre, en tant que principe organisateur global, n'est que marginalement repris. Sans concept central et sans ensemble cohérent de résultats et de problèmes[56], la théorie de l'ordre ne s'établit jamais comme une discipline à part entière, comme cela a pu être le cas pour la théorie des corps de nombres algébriques ou la topologie[57]. Les publications qui l'évoquent ou s'y réfèrent à la fin du XIXe siècle sont rangées dans des rubriques séparées des classifications, en théorie des groupes, en géométrie finie, en combinatoire ou en topologie, autant de domaines de recherche qui commencent à s'établir alors de manière autonome, appuyés par des ouvrages de référence et, le plus souvent, par les travaux de personnalités influentes. Ainsi éparpillée dans ses méthodes et ses objets, la théorie mathématique de l'ordre reste indisciplinée à la fin du XIXe siècle.

56. Sur la définition d'une discipline, voir (Goldstein et al., 2007, p. 53-57 ; Gauthier, 2009).

57. Il est possible qu'outre la multiplicité des usages du mot « ordre », déjà mentionnée, la concurrence de recherches sur l'« ordre linéaire », c'est-à-dire la relation « entre », qui devient très importante en géométrie et dans les travaux anglophones, ait joué un rôle dans ce processus (voir Chap. Couturat). mais le rapprochement avec l'exemple, proche, de la tactique (Ehrhardt, 2015) suggère des phénomènes historiographiques et historiques plus larges.

Références

Sources primaires

ARGAND Jean-Robert (1814-1815), « Questions résolues : Solution du problème de situation proposé à la page 231 du 3.me volume des Annales », *Annales de mathématiques pures et appliquées*, vol. 5, p. 189-196.

ARNOUX Gabriel (1894), *Arithmétique graphique. Les espaces arithmétiques hypermagiques*, Paris, Gauthier-Villars.

BABINET Jacques (1848), « Note sur les polyèdres réguliers et semi-réguliers », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, vol. 26, p. 530-531.

BACHMANN Paul (1892), *Die Elemente der Zahlentheorie*, Leipzig, Teubner.

BADOUREAU Albert (1881), « Mémoire sur les figures isoscèles », *Journal de l'École polytechnique*, vol. 30, cahier 49, p. 47-172.

BERTRAND Joseph (1858), « Note sur la théorie des polyèdres réguliers », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, vol. 46, p. 79-82.

BOURDAT Joseph (1850), « Considérations générales sur l'objet scientifique », *Bulletin de l'Académie delphinale*, p. 30-46.

BRETON Philippe (1860), « Notes sur la classification des polyèdres », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, vol. 51, p. 722-724.

BRUNEL Georges (1891), « Sur les configurations régulières tracées sur une surface quelconque », *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 4e sér., vol. 2, p. xxii-xxiv.

— (1894), « Sur un polyèdre de Kirkman », *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 4e sér., vol. 3, p. xxix-xxxi.

Brunel Georges (1894-1895), « Polymérisation du carbone », *Procès-verbaux des séances de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, p. 8-10.

Caro Elme (1865), « Thierry Joufrroy et ses œuvres », *Revue des deux mondes*, vol. 56, p. 333-376.

Catalan Eugène (1865), « Mémoires sur la théorie des polyèdres », *Journal de l'École polytechnique*, vol. 24, 41e cahier, 1-71 + planches.

Cauchy Augustin-Louis (1847), « Mémoire sur les quantités géométriques », *Exercices d'analyse et de physique mathématique*, vol. 4, p. 157-180.

— (1848), « Sur quelques théorèmes de géométrie analytique relatifs aux polygones et aux polyèdres réguliers », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, vol. 26, p. 489-494.

Comberousse Charles de (1890), *Cours de mathématiques à l'usage des candidats à l'École polytechnique, à l'École normale supérieure, à École centrale des arts et manufactures.* Tome quatrième *: Algèbre supérieure. Seconde partie*, Paris, Gauthier-Villars.

Considérant Victor (1841), « Revue scientifique sur la théorie des nombres », *La Phalange*, 3e sér., vol. 3 (mai-août), p. 229-231.

Darboux Gaston (1894), « Analyse mathématique – Rapport sur le Mémoire sur le triangle des séquences, présenté à l'Académie dans la séance du 12 mars 1894, par M. Désiré André », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, vol. 118, p. 1026-1028.

Despeyrous Théodore (1849), « Premier mémoire sur les fonctions elliptiques », *Mémoire de l'Académie des sciences, arts et belles-lettres de Dijon*, p. 41-80.

— (1861), « Mémoire sur la théorie générale des permutations », *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 2e sér., vol. 6, p. 417-439.

— (1865a), « Classifications des permutations d'un nombre quelconque de lettres en groupes de permutations insépa-

rables », *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 2e sér., vol. 10, p. 177-202.

— (1865b), « Sur la détermination des nombres de valeurs que prennent les fonctions par les permutations des lettres qu'elles renferment », *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 2e sér., vol. 10, p. 55-64.

— (1866a), « Mémoire sur la quantité composée et sur ses applications », *Mémoires de l'Académie impériale des sciences, inscriptions et belles-lettres de Toulouse*, 6e sér., vol. 4, p. 255-268.

— (1866b), « Mémoire sur les équations de degré premier résolubles algébriquement », *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 2e sér., vol. 11, p. 9-38.

— (1868), « Des six opérations fondamentales des mathématiques sur la quantité composée relative à deux dimensions, règle des signes, diverses expressions de la quantité composée », *Mémoires de l'Académie impériale des sciences, inscriptions et belles-lettres de Toulouse*, 6e sér., vol. 6, p. 159-180.

— (1869), « Des six opérations fondamentales des mathématiques sur la quantité composée relative à trois dimensions, Applications », *Mémoires de l'Académie impériale des sciences, inscriptions et belles-lettres de Toulouse*, 7e sér., vol. 1, p. 174-196.

— (1870), « Application de la théorie de la quantité composée à la résolution des équations algébriques », *Mémoires de l'Académie des sciences, inscriptions et belles-lettres de Toulouse*, 7e sér., vol. 2, p. 274-294.

— (1875), « Géométrie analytique généralisée », *Mémoires de l'Académie des sciences, inscriptions et belles-lettres de Toulouse*, 7e sér., vol. 7, p. 259-284.

Duhem Pierre (1902), *Le mixte et la combinaison chimique : Essai sur l'évolution d'une idée*, Paris, C. Naud.

Français Jean François (1814-1815), « Théorèmes relatifs aux polygones réguliers », *Annales de mathématiques pures et appliquées*, vol. 5, p. 341-350.

FROLOW M. (1886), *Les carrés magiques. Nouvelle étude*, Paris, Gauthier-Villars.

GALDEANO Zoel García de (1899), « Les mathématiques en Espagne », *L'Enseignement mathématique*, vol. 1, p. 6-21.

GERGONNE Joseph Diez (1830-1831), « Philosophie mathématique : préliminaires d'un cours de mathématiques pures », *Annales de mathématiques pures et appliquées*, vol. 21, p. 305-326.

GODIN Jean-Baptiste (1880), *Mutualité sociale et association du capital et du travail*, Paris, Guillaumin.

GRÜNERT Johann August (1846a), « Ueber Poinsot's neue Beweise einiger Hauptsätze der Zahlenlehre », *Archiv der Mathematik und Physik*, vol. 7, p. 168-203.

— (1846b), « Ueber zwei Sätze aus der Algebra und aus der Zahlenlehre », *Archiv der Mathematik und Physik*, vol. 7, p. 367-386.

GUIM Daniel A. da (1854), « Propriedades geraes e resolução directa das congruencias binomias : Introdução ao estudo da theoria dos numeros », *Memorias da Academia real das sciencias de Lisboa*, vol. 1, n° 1, p. 1-163.

GUIMARÃES Rodolphe (1900), *Les mathématiques en Portugal*, Coimbre, Imprimerie de l'Université.

GÜNTHER Siegmund (1876), *Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften*, Leipzig, Teubner.

HOFMANN Fritz (1882), « Neue Beweismethoden für einen Doppelsatz der Theorie der Potenzreste, sowie über die Erweiterung des Congruenzbegriffes », *Mathematische Annalen*, vol. 20, p. 471-487.

JONQUIÈRES Ernest de Faulque de (1890), « Note sur le théorème d'Euler dans la théorie des polyèdres », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, vol. 110, p. 169-173.

JORDAN Camille (1865), « Recherches sur les polyèdres », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, vol. 60, p. 400-403.

— (1866), « Recherches sur les polyèdres », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, vol. 62, p. 1339-1341.

— (1881), *Notice sur les travaux de M. Camille Jordan, ingénieur des Mines, professeur à l'École polytechnique, à l'appui de sa candidature à l'Académie des sciences (section de géométrie)*, Paris, Gauthier-Villars.

Laisant Charles-Ange (1882a), « Remarques sur la théorie des régions et des aspects », *Bulletin de la Société mathématique de France*, vol. 10, p. 52-55.

— (1882b), « Sur le développement de certains produits algébriques », *Association française pour l'avancement des sciences. Compte rendu de la 10e session. Alger 1881*, Paris, Masson, p. 84-108.

— (1898), *La mathématique : philosophie-enseignement*, Paris, G. Carré et C. Naud ; Edition utilisée : 2e, 1907.

Laisant Charles-Ange et Beaujeux Étienne (1870), « Mémoire sur certaines propriétés des résidus numériques », *Nouvelles annales de mathématiques*, 2e sér., vol. 9, p. 221-229, 271-281, 302-307, 354-360.

Lalanne Léon (1872), « Note sur quelques relations entre les quantités angulaires des polyèdres convexes », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, vol. 74, p. 602-603.

Lebesgue Victor-Amédée (1846), « Sur l'inscription des polygones réguliers de 15 et de 17 côtés », *Nouvelles annales de mathématiques*, vol. 5, p. 683-689.

Lecointe Léon (1859), *Cours d'algèbre élémentaire*, Bruxelles, Flatau.

Listing Johann Benedict (1847), *Vorstudien zur Topologie, Göttingen Studien*, Göttingen, Vandenhoeck und Ruprecht.

— (1862), *Census räumlicher Complexe, oder Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von den Polyederen*, Göttingen, Dieterichsche Buchhandlung.

Lucas Édouard (1881), « Récréations scientifiques sur l'arithmétique et sur la géométrie de situation. Cinquième ré-

création sur le jeu des traversées en bateau », *Revue scientifique générale*, 3e sér., vol. 1, nº 1, p. 408-412.

LUCAS Édouard (1891a), *Récréations mathématiques*, vol. 1, Paris, Gauthier-Villars ; 2 e édition.

— (1891b), *Récréations mathématiques*, vol. 2, Paris, Gauthier-Villars.

— (1891c), *Théorie des Nombres :* Tome premier, Paris, Gauthier-Villars.

MATHET Gabriel (1875), « Sur les polygones réguliers », *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 2e sér., vol. 4, p. 303-310.

MERZ John Theodore (1896-1914), *A History of European Thought in the Nineteenth Century*, 4 tomes, Edinburg & London, Blackwood.

MÖBIUS August Ferdinand (1852), « Ueber das Gesetz der Symmetrie der Krystalle und die Anwendung dieses Gesetzes auf die Eintheilung der Krystalle in Systeme », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 43, p. 365-374.

NETTO Eugen et VOGT Henri (1904), « Analyse combinatoire et théorie des déterminants », in Franz MEYER et Jules MOLK (éd.), *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, vol. I. 1, Paris, Gauthier-Villars, p. 63-132.

POINCARÉ Henri (1893), « Sur la généralisation d'un théorème d'Euler relatif aux polyèdres », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, vol. 117, p. 144-145.

POINSOT Louis (1810), « Mémoire sur les polygones et les polyèdres », *Journal de l'École polytechnique*, vol. 4, 10e cahier, p. 16-49.

— (1818), « Extrait de quelques recherches nouvelles sur l'algèbre et la théorie des nombres », *Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France, Années 1813, 1814, 1815*, vol. 14, p. 381-392.

— (1820), « Mémoire sur l'application de l'algèbre à la théorie des nombres », *Journal de l'École polytechnique*, vol. 11,

p. 342-410 ; Lu à l'Académie des sciences de Paris le 27 avril 1818 et reproduit dans les *Mémoires de l'Académie royale des sciences de l'Institut de France*, Tome IV (Années 1819 et 1820), Paris, Imprimerie Firmin Didot, 1824.

— (1825), *Recherches sur l'analyse des sections angulaires*, Paris, Bachelier.

— (1845), « Réflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres », *Journal de mathématiques pures et appliquées*, vol. 10, p. 1-101.

— (1858), « Note sur la théorie des polyèdres », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, vol. 46, p. 65-79.

Polignac Camille de (1878), « Représentation graphique de la résolution en nombres entiers de l'équation indéterminée $ax + by = c$ », *Bulletin de la Société mahématique de France*, vol. 6, p. 158-163.

Prouhet Eugène (1860), « Remarques sur un passage des œuvres inédites de Descartes », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, vol. 50, p. 779-782.

Renooz Céline (1897), *Psychologie comparée de l'homme et de la femme*, Paris, Bibliothèque de la Nouvelle Encyclopédie.

Rouché Eugène (1857), *Éléments d'algèbre à l'usage des candidats au baccalauréat ès sciences et aux écoles spéciales*, Paris, Mallet-Bachelier.

Serret Paul (1848), « Démonstration d'un théorème de M. Gauss sur le pentagone », *Nouvelles annales de mathématiques*, vol. 7, p. 28-29.

Smith Henry J. S. (1859), « Report on the Theory of Numbers », *Report of the British Association for the Advancement of Science*, Oxford Clarendon Press ; 1859, p. 228-267 ; 1860, p. 120-169 ; 1861, p. 292-340 ; 1862, p. 503-526 ; 1863, p. 768-786 ; 1865, p. 322-37. Repr. in *The collected mathematical papers*, éd. J.W.L. Glaisher, vol. 1, Oxford : Clarendon Press, 1894, p. 38-364.

Tarry Gaston (1899), « Les lignes arithmétiques », *Nouvelles annales de mathématiques*, 3e sér., vol. 18, p. 149-155.

— (1901), « Le problème des 36 officiers », *Association française pour l'avancement des sciences, Compte rendu de la 29e session, Paris, 1900. 2e partie*, Paris, Masson, p. 170-203.

— (1907), « La magie arithmétique dévoilée », *Bulletin de la Société philomatique de Paris*, 9e sér., vol. 9, p. 182-195.

Terquem Olry (1849), « Sur les polygones et les polyèdres étoilés, polygones funiculaires, d'après M. Poinsot », *Nouvelles annales de mathématiques*, vol. 8, p. 68-74.

Vachette Adolphe (1845), « Note sur les polygones réguliers inscriptibles », *Nouvelles annales de mathématiques*, vol. 4, p. 175-177.

Valat Jacques Pierre (1867), « Des polyèdres semi-réguliers dits Solides d'Archimède », *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, vol. 5, p. 319-369.

Vallès François (1841a), *Etudes philosophiques sur la science du calcul*, Paris, Carilian-Goeury & Victor Dalmont.

— (1841b), « Lettre sur la théorie des nombres », *La Phalange*, 3e sér., vol. 3 (mai-août), p. 274-277.

— (1847), « Sur la théorie des imaginaires, lettre adressée à M. Arago, secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences », *La Phalange*, vol. 6, p. 194-202.

— (1858), « Note sur le double système de valeurs qu'on obtient en résolvant l'équation du quatrième degré, et sur l'usage qu'il en faut faire dans les applications », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, vol. 47, p. 30-32.

— (1869), *Des formes imaginaires en algèbre : I, leur interprétation en abstrait et en concret*, Paris, Gauthier-Villars.

— (1873), *Des formes imaginaires en algèbre : II, Intervention de ces formes dans les équations des cinq premiers degrés*, Paris, Gauthier-Villars.

— (1883), *Les conférences spirites de l'année 1882*, Paris, Librairie [des Sciences Psychologiques].

VILLOTEAU Guillaume-André (1807), *Recherches sur l'analogie de la musique avec les arts qui ont pour objet l'imitation du langage*, Paris, Imprimerie impériale.

Sources secondaires

AUVINET Jérôme (2011), *Charles-Ange Laisant. Itinéraires et engagements d'un mathématicien, d'un siècle à l'autre (1841-1920)*, Thèse de doctorat, Université de Nantes.

— (2016), « Récréations mathématiques, géométrie de situation... De nouveaux outils pour enseigner les mathématiques à la fin du XIXe siècle », in Luis RADFORD, Fulvia FURINGHETTI et Thomas HAUSBERGER (éd.), *International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics. Proceedings of the 2016 HPM Conference*, Montpellier, IREM de Montpellier, p. 263-276.

— (2017), « Charles-Ange Laisant, un acteur pour les mathématiques discrètes et leur communauté à la fin du XIXe siècle », in Évelyne BARBIN, Catherine GOLDSTEIN, Marc MOYON, Sylviane R. SCHWER et Stéphane VINATIER (éd.), *Les Travaux combinatoires en France (1870-1914) et leur actualité*, Limoges, Presses universitaires de Limoges, p. 43-68.

BARBIN Évelyne (2017), « Gaston Tarry et la doctrine des combinaisons », in Évelyne BARBIN, Catherine GOLDSTEIN, Marc MOYON, Sylviane R. SCHWER et Stéphane VINATIER (éd.), *Les Travaux combinatoires en France (1870-1914) et leur actualité*, Limoges, Presses universitaires de Limoges, p. 119-144.

BARBIN Évelyne et GUITART René (2016), « Des récréations pour enseigner les mathématiques avec Lucas, Fourrey, Laisant », in Luis RADFORD, Fulvia FURINGHETTI et Thomas HAUSBERGER (éd.), *International Study Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics. Proceedings of the 2016 HPM Conference*, Montpellier, IREM de Montpellier, p. 277-288.

Boucard Jenny (2011), « Louis Poinsot et la théorie de l'ordre : un chaînon manquant entre Gauss et Galois ? », *Revue d'histoire des mathématiques*, vol. 17, n° 1, p. 41-138.

— (À paraître), « Habiter les marges mathématiques : André Gérardin et Sphinx-Œdipe à Nancy (1906-1928) », in Hélène Gispert, Philippe Nabonnand et Jeanne Peiffer (éd.), *Circulations mathématiques dans et par les journaux : histoire, territoires et publics*, Londres, ISTE Éditions.

Boucard Jenny et Eckes Christophe (2015), « La Théorie de l'ordre de Poinsot à Bourgoin : Mathématiques, philosophie, art ornemental », *Revue de Synthèse*, vol. 136, n° 3 (Le vif de l'histoire), p. 403-447.

Bouchet Thomas (2015), « Les mues de l'organe sociétaire : *La Phalange* de Considérant », in Thomas Bouchet, Vincent Bourdeau, Edward Castleton, Ludovic Frobert et François Jarrige (éd.), *Quand les socialistes inventaient l'avenir*, Paris, La Découverte, p. 181-189.

Brechenmacher Frédéric (2015a), « Algebraic Writings as Models : The Theory of Order in the 19th Century », *Oberwolfach Reports*, vol. 12, n° 4, p. 2808-2811.

— (2015b), « Camille Jordan et la théorie de l'ordre : pistes institutionnelles », Exposé donné dans le cadre des journées d'étude « La transversalité de la notion d'ordre au XIXe siècle : Sciences, philosophie et art », Centre François Viète, Université de Nantes, 16-18 juin 2015.

— (2022), « Knowing by Drawing: Geometric Material Models in Nineteenth Century France », in Michael Friedman et Karin Krauthausen (éd.), *Model and Mathematics: From the 19th to the 21st Century*, Cham, Springer International Publishing, p. 53-143.

Cazals Rémy (2001), *École de Sorrèze et mouvement saint-simonien*, https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00139485.

Chemla Karine (2014), « Explorations in the History of Mathematical Recreations: An Introduction », *Historia Mathematica*, vol. 41, p. 367-376.

Dahan Dalmedico Amy (1997), « L'étoile "imaginaire" a-t-elle immuablement brillé ? Le nombre complexes et ses différentes interprétations dans l'œuvre de Cauchy », in Dominique Flament (éd.), *Le nombre, une hydre à* n *visages*, Paris, Maison des Sciences de l'Homme, p. 29-50.

Décaillot Anne-Marie (1999), *Édouard Lucas (1842-1891) : le parcours original d'un scientifique français dans la deuxième moitié du* XIXe *siècle*, Thèse de doctorat, Université René Descartes, Paris V.

— (2002), « Géométrie des tissus. Mosaïques. Échiquiers. Mathématiques curieuses et utiles », *Revue d'histoire des mathématiques*, vol. 8, p. 145-206.

— (2007), « Number Theory at the *Association française pour l'avancement des sciences* », in Catherine Goldstein, Norbert Schappacher et Joachim Schwermer (éd.), *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's* Disquisitiones Arithmeticae, Berlin, Springer, p. 411-427.

Desmars Bernard (2012), « Despeyrous (ou Despeyroux), Théodore », in Thomas Bouchet, Bernard Desmars et Jean-Claude Sosnowski (éd.), *Dictionnaire biographique du fouriérisme*, Édition numérique, charlesfourier.fr.

Dupas Jean-Jacques et Verdier Norbert (2015), « Catalan et ses polyèdres », *Bulletin de la Sabix*, n° 57, p. 57-64.

Durand-Richard Marie-José (1996), « L'École algébrique anglaise : les conditions conceptuelles et institutionnelles d'un calcul symbolique comme fondement de la connaissance », in Catherine Goldstein, Jeremy Gray et Jim Ritter (éd.), *L'Europe mathématique*, Paris, Éditions de la Maison des sciences del'homme, p. 445-477.

Ehrhardt Caroline (2007), *Évariste Galois et la théorie des groupes. Fortune et réélaborations (1811-1910)*, Thèse de doctorat, EHESS, Paris.

Ehrhardt Caroline (2012), *Itinéraire d'un texte mathématique : Les réélaborations des écrits d'Evariste Galois au XIXe siècle*, Paris, Hermann.

— (2015), « Tactics: In Search of a Long-Term Mathematical Project (1844–1896) », *Historia Mathematica*, vol. 42, nº 4, p. 436-467.

Flament Dominique (2003), *Histoire des nombres complexes. Entre algèbre et géométrie.* Paris, Éditions du CNRS.

— (2016), « La *Topologie* de Johann Benedict Listing (1808-1882). Résonances dans quelques œuvres de contemporains », *Khronos. Revista de História da Ciência*, vol. 3, p. 123-180.

Ford Caroline (2016), *Natural Interests : The Contest over Environment in Modern France*, Cambridge, Harvard University Press.

Gauthier Sébastien (2009), « La géométrie dans la géométrie des nombres : histoire de discipline ou histoire de pratiques à partir des exemples de Minkowski, Mordell et Davenport », *Revue d'histoire des mathématiques*, vol. 15, nº 2, p. 183-230.

Gispert Hélène (éd.), *« Par la science, pour la patrie ». L'Association française pour l'avancement des sciences (1872-1914)*, Rennes, Presses universitaires de Rennes.

— (2015), *La France mathématique de la IIIe République avant la Grande Guerre*, Paris/Marseille, Société Mathématique de France.

Goldstein Catherine (1999), « Sur la question des méthodes quantitatives en histoire des mathématiques : le cas de la théorie des nombres en France (1870-1914) », *Acta historiae rerum naturalium nec non technicarum*, New series 3, vol. 28, p. 187-214.

— (2011), « Charles Hermite's Stroll through the Galois fields », *Revue d'histoire des mathématiques*, vol. 17, p. 211-270.

— (2020), « "S'occuper des mathématiques sans y être obligé" : pratiques professionnelles des mathématiciens

amateurs en France au XIXe siècle », *Romantisme*, vol. 190, p. 52-63.

GOLDSTEIN Catherine, SCHAPPACHER Norbert et SCHWERMER Joachim (éd.) (2007), *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's* Disquisitiones Arithmeticae, Berlin, Springer.

GRAY Jeremy (2013), *Henri Poincaré: A Scientific Biography*, Princeton, Princeton University Press.

GROPP Harald (2004), « "Réseaux régulier" or Regular Graphs : Georges Brunel as a French Pioneer in Graph Theory », *Discrete Mathematics*, vol. 276, p. 219-227.

HENDRY John (1984), « The Evolution of William Rowan Hamilton's View of Algebra as the Science of Pure Time », *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, vol. 15, nº 1, p. 63-81.

HERMANN Arthur (1884), « Notice sur la vie et les travaux de M. Despeyrous », *Cours de mécanique*, vol. 1, Paris, Hermann, p. v-x.

HOUZEL Christian (2002), « L'équation générale du cinquième degré », in, *La Géométrie algébrique : recherches historiques*, Paris, Blanchard, p. 73-80.

HUGUET Françoise et NOGUÈS Boris (2011), *Les professeurs des facultés des lettres et des sciences en France au XIXe siècle (1808-1880)*, http://facultes19.ish-lyon.cnrs.fr/.

LAURENTIN Jérôme (2009), « Réflexions sur la triangulation des polygones convexes », *Bulletin de la Sabix*, vol. 44, p. 141-150.

MALGRAS Julien (1906), *Les pionniers du spiritisme en France*, Paris.

ØHRSTRØM Peter (1985), « W. R. Hamilton's View of Algebra as the Science of Pure Time and His Revision of This View », *Historia Mathematica*, vol. 12, p. 45-55.

PETRI Birgit et SCHAPPACHER Norbert (2004), « From Abel to Kronecker: Episodes from 19th Century Algebra », in Olav Arnfinn LAUDAL et Ragni PIENE (éd.), *The Legacy of Niels Henrick Abel*, Berlin, Heidelberg, Springer, p. 227-266.

PONT Jean-Claude (1974), *La topologie algébrique des origines à Poincaré*, Paris, Presses Universitaires de France.

SCHAPPACHER Norbert (1991), « Développement de la loi de groupe sur une cubique », *Séminaire de théorie des nombres de Paris 1988-1989*, p. 159-184.

SCHUBRING Gert (éd.), *Hermann Günther Graßmann (1809-1877) : Visionary Mathematician, Scientist and Neohumanist Scholar*, Dordrecht, Kluwer.

— (2006), *Conflicts Between Generalization, Rigor, and Intuition : Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17th-19th Century France and Germany*, New York, Springer.

SINACEUR Hourya (1991a), « Calcul, ordre et continuité », *Séminaire de philosophie et mathématiques*, vol. 5, p. 1-15.

— (1991b), *Corps et modèles*, Paris, Vrin.

TILLOL Jules-Jérôme (1885), « Éloge de M. Despeyrous », *Mémoires de l'Académie des sciences, inscriptions et belles-lettres de Toulouse*, p. 100-115.

VATIN François (2007), « L'association polytechnique (1830-1900) : éducation ou instruction ? Ou la place des sciences sociales dans la formation du peuple », *Management et sciences sociales*, vol. 3, p. 245-296.

VERDIER Norbert (2009), *Le* Journal de Liouville *et la presse de son temps : une entreprise d'édition et de circulation des mathématiques au* XIXe *siècle (1824 - 1885)*, Thèse de doctorat, Université Paris 11.

VERGNIOUX Alain (2002), « Une théorie énergétique de l'association : Charles Fourier », *Connexions*, vol. 77, n° 1, p. 25-30.

WATE-MIZUNO Mitsuko (2013), « Representation of Graphs in Diagrams of Graph Theory », in Amirouche MOKTEFI et Sun-Joo SHIN (éd.), *Visual Reasoning with Diagrams*, Basel, Springer, p. 171-200.