



HAL
open science

Comportement Mécanique des Matériaux Métalliques (cours et exercices)

Samir Brek

► **To cite this version:**

Samir Brek. Comportement Mécanique des Matériaux Métalliques (cours et exercices). Master. Algérie. 2021. hal-03811577

HAL Id: hal-03811577

<https://hal.science/hal-03811577>

Submitted on 12 Oct 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Comportement **M**écanique des **M**atériaux **M**étalliques

(Cours et Exercices)

Dr. BREK Samir

Juillet 2021

Comportement Mécanique des Matériaux Métalliques (Cours et exercices)

Polycopié pédagogique de la matière :
Comportement Mécanique des Matériaux Métalliques
Pour les étudiants de Master et Licence
Spécialité : Génie des Matériaux
Algérie, Juillet 2021

Dr. BREK Samir

Université ABBES LAGHROUR, Khenchela, Algérie
Faculté Sciences et Technologies
Département de Génie Mécanique
Laboratoire Ingénierie et Sciences des Matériaux Avancées "ISMA"
<https://orcid.org/0000-0001-7292-5393>



AVANT- PROPOS

Conforme aux programmes officiels du LMD, ce polycopié (cours et exercices) de la matière : Comportement Mécanique des Matériaux Métalliques s'adresse aux étudiants de Master et Licence, spécialité Génie des matériaux, Filière de Génie Mécanique du domaine des Sciences et Technologie (ST).

Le cours est structuré selon le programme de la matière (1^{er} semestre, Master 1 GM) et le contenu des chapitres est largement inspiré des documents et sources cités dans la liste des références bibliographiques. Ce polycopié est organisé en Cinq chapitres qui suivent plus ou moins le déroulement des séances de cours.

Le programme de la matière se compose de trois grandes parties:

La première partie

Est consacrée aux essais mécaniques, lois simples, Elasticité et la Viscoélasticité

La deuxième partie

Est consacrée à la plasticité, Viscoplasticité, Comportement élastoplastique

La troisième partie

Une introduction à l'endommagement et rupture des matériaux métalliques

J'espère que ce polycopié aide les étudiants à mieux comprendre cette matière et enfin ce cours pourrait s'améliorer grâce aux retours que vous pouvez apporter par vos commentaires. Ces derniers sont les bienvenus sous forme de mails à l'adresse :

breksamir4000@gmail.com ou brek_samir@univ-khenchela.dz

Je remercie chaque auteur son travail est cité dans ce polycopié de cours.

N'oublions jamais qu'en citant les travaux scientifiques d'autres chercheurs, vous pourrez par la suite être mentionné à votre tour dans les travaux des autres.

Merci.

Dr. Brek Samir

TABLE DES MATIERES

Introduction générale.....	1
----------------------------	---

CHAPITRE I: Essais mécaniques – Lois simples

1.1 Paramètres importants.....	3
1.1.1 Élément de volume représentatif.....	3
1.1.2 Vitesse de déformation et température.....	4
1.1.3 Direction de sollicitation.....	6
1.2. Types de sollicitation.....	6
1.2.1 Essais monotones.....	6
1.2.2 Essais cycliques.....	8
1.3 Essais mécaniques.....	10
1.3.1 Essai de traction	10
1.3.2 Les essais de dureté par pénétration.....	17
1.3.3 Essai de résilience.....	28
1.4 Quelques lois simples.....	32
1.4.1 Loi de Hollomon.....	33
1.4.2 Loi de Ludwik.....	34
1.4.3 Loi de Swift.....	35
1.4.4 Loi de Voce.....	35

CHAPITRE II: Elasticité – Viscoélasticité

2.1 Elasticité linéaire.....	37
2.1.1 Loi de Hooke généralisée.....	38
2.1.2 Energie de déformation élastique.....	40
2.1.3 Relations de symétrie.....	43
2.1.3.1 Symétrie cubique.....	43
2.1.3.2 Matériau anisotrope.....	44
2.1.3.3 Matériau monoclinique.....	44
2.1.3.4 Matériau orthotrope.....	47
2.1.3.5 Matériau orthotrope à isotrope transverse.....	49
2.1.3.6 Matériau isotrope.....	51
2.2 Anélasticité.....	57
2.3 Elasticité non-linéaire.....	58
2.4 Thermoélasticité linéaire.....	58
2.5 Viscoélasticité linéaire.....	60
2.5.1 Modèle de Kelvin-Voigt.....	61
2.5.2 Modèle de Maxwell.....	62
2.5.3 Modèle de Maxwell généralisé.....	63
2.5.4 Modèle de Kelvin-Voigt généralisé.....	63
2.5.5 Autres modèles.....	64

CHAPITRE III: Plasticité – Viscoplasticité

3.1 Résultats expérimentaux.....	65
3.1.1 Plasticité à chaud.....	65
3.1.2 Plasticité à froid.....	65
3.2 Description de la déformation plastique dans les métaux.....	66
3.3 Applications pratiques de la déformation plastique.....	66
3.4 Comportement observé et schémas usuels.....	68
3.4.1. Limite d' élasticité.....	68
3.4.2 Phénomène d'écrouissage (Evolution du seuil).....	70
3.4.3 Les principales hypothèses de base utilisées en plasticité des métaux.....	72
3.5 Courbe rationnelle de traction.....	72
3.6 Essai charge – décharge (déformation plastique, énergie de déformation plastique)...	73
3.7 Critère de plasticité.....	74
3.7.1 Critère de Von Mises.....	76
3.7.2 Critère de Tresca.....	77
3.7.3 La contrainte équivalente de Hill.....	81
3.7.4 La contrainte équivalente de Tsai	81

CHAPITRE IV: Comportement élastoplastique

4.1 Le comportement élastoplastique des matériaux.....	82
4.1.1 Modélisation du comportement en Traction– Compression.....	83
4.2 Schématisation des comportements réels des matériaux (Modèles analogiques).....	86
4.3 Loi de comportement d' un matériau parfaitement plastique.....	89
4.4 Loi de comportement d' un matériau écrouissable.....	89

CHAPITRE V: Endommagement et rupture

5.1 Endommagement.....	91
5.1.1 Description.....	91
5.1.2 Théorie de la mécanique de l' endommagement.....	91
5.2 Rupture	93
5.2.1 Description.....	93
5.2.2 Faciès de rupture.....	94
5.3 Mécanique de la rupture.....	97
5.3.1 Les modes de rupture.....	99
5.3.2 Définition de la ténacité.....	100
5.3.3 Facteur d'intensité des contraintes.....	100
5.3.4 Taux de restitution d' énergie (Energie de Griffith).....	107
Exercices.....	112
Annexes.....	122
Liste des références bibliographiques.....	127

Introduction générale

Aujourd'hui, la science des matériaux permet de concevoir de nouveaux matériaux adaptés à chaque nouvelle application technologique. La conception d'un nouvel objet technique peut passer par une sélection de matériau dans une base existante mais aussi par la conception d'un nouveau matériau adapté au mieux à l'application visée et de son procédé de fabrication.

Chaque étude du comportement mécanique des matériaux vise à comprendre leur réponse à une contrainte donnée. Le comportement mécanique est la réponse d'un matériau lorsqu'il est sollicité. Sous la contrainte appliquée, le matériau peut se déformer ou se fissurer. Le type de déformation engendrée dépend de l'intensité et la direction de la contrainte et les variables mises en jeu dans le domaine du comportement sont : le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations.

En effet, si le comportement élastique linéaire représente actuellement le cadre de la majorité des calculs des structures réalisées dans l'industrie, d'autres types de comportement mécanique sont de plus en plus utilisés car ils s'approchent plus de la réalité (le comportement élastoplastique) et permettent donc un dimensionnement et des modélisations plus précises (choix du matériau, optimisation de la forme, respect des points de fonctionnement, . . .).

Les matériaux sont généralement classés en quatre grandes catégories, selon la nature de leurs liaisons atomiques, dont on peut résumer les propriétés principales comme suit :

-Les métaux : ce sont les matériaux les plus utilisés pour les applications structurelles, principalement les métaux ferreux les métaux non ferreux sont des alliages de L'Aluminium , Le cuivre et ses alliages comme le bronze et le laiton , le Titane , le Nickel, le Palladium et le Platine . Ils ont la capacité de se déformer en permanence, ce qui permet des opérations de formage par déformation plastique ou d'assemblage par déformation plastique et leur donne une résistance élevée à la rupture. De plus, Le matériau métallique est dense et présente une bonne conductivité électrique et thermique.

-Les céramiques : sont les matériaux les plus anciens et les plus utilisés en génie civil. Ils peuvent généralement être utilisés sous forme de pâte (par exemple du béton). Ces matériaux ont une bonne résistance à l'usure, mais pas de résistance aux chocs, leur densité est inférieure à celle des métaux, des isolants thermiques et électriques, et sont généralement poreux et cassants.

-Les polymères : Si nous parlons de matières synthétiques, ces matières sont les plus récentes, mais il existe également un grand nombre de polymères naturels (comme les fibres végétales). L'avantage du plastique est qu'il peut être déformé plastiquement ou moulé par injection à l'état liquide. Ils peuvent être thermoplastiques (recyclables et malléables, comme les métaux) ou

thermodurcissables. Les polymères sont généralement de mauvais conducteurs électriques ou thermiques et une densité est très faible.

-Les composites et les matériaux structuraux : Ce sont des combinaisons hétérogènes de matériaux, mais leur structure est définie selon la destination (utilisation), ou développée sous différentes contraintes mécaniques ou thermiques.

L'objectif principal de ce polycopié est de donner un aperçu assez général du comportement des matériaux métalliques, et les modélisations du comportement possible pour arriver à ce but les sous-objectifs sont :

- 1- Etablir les relations entre les propriétés mécaniques à une échelle donnée et le comportement mécanique globale du matériau métallique.
- 2- Etablir les relations entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations en fonction des plans de symétrie du matériau (lois de comportement).
- 3- L'effet de la température imposée sur le comportement mécanique globale du matériau.
- 4- L'effet des déformations irréversibles ou permanentes qui se produisent au delà d'un seuil de contrainte appelé seuil de plasticité ou limite d'élasticité sur le comportement mécanique globale du matériau.

Ce polycopié de la matière comportement mécanique des matériaux métalliques se compose de cinq chapitres :

Le 1^{er} chapitre est consacré à tout ce qui est en rapport avec les essais mécaniques.

Le 2^{ème} chapitre est consacré à élasticité linéaire, élasticité non-linéaire et la viscoélasticité linéaire.

Le 3^{ème} chapitre traitera la plasticité, phénomène d'écrouissage et critère de plasticité.

Le 4^{ème} chapitre est consacré au comportement d'un matériau élastoplastique.

Le 5^{ème} chapitre présente une introduction de l'endommagement et la rupture d'un matériau métallique

C

Chapitre

1

Pages :3-36

Essais Mécaniques - Lois simples

1.1 Paramètres importants

1.1.1 Élément de volume représentatif

Pour réaliser un essai mécanique, un élément de volume "représentatif" du matériau doit être utilisé, afin que les hypothèses des milieux continus soient satisfaites, figure (1.1). En effet, on caractérise les propriétés d'un matériau à une échelle donnée. A cette échelle d'observation le matériau est considéré comme homogène. Si l'échelle qui caractérise cette propriété est comparable à l'échelle de la diversité interne du matériau, les résultats sont répartis. Plusieurs tests seront nécessaires pour déterminer la distribution moyenne et statistique exacte de la propriété. Prenons un exemple, on cherche à déterminer la densité du béton armé. La densité peut être caractérisée sur une échelle métrique. Elle est fonction du taux volumique du béton multipliée par la densité du béton et du taux volumique de l'acier multipliée par la densité de l'acier (lois de mélange utilisé pour les matériaux). Au niveau du centimètre, la densité du béton sera fonction des fractions volumiques des granulats et de ciment. Et ainsi de suite pour les échelles inférieures.

Par conséquent, les propriétés du matériau peuvent être optimisées à une échelle donnée en fonction de la connaissance des caractéristiques de composition d'un matériau donné. Cette approche d'échelle (changement d'échelle) est généralement utilisée en science des matériaux, parfois il est qualitatif, parfois il est quantitatif,[1].

Selon le type de matériau, le tableau (1.1) donne les dimensions caractéristiques minimales de l'éprouvette à utiliser.

Tableau 1.1 La taille minimale d'un élément de volume représentatif, [2].

Type de matériau	Type et taille des hétérogénéités	Élément de volume caractéristique (mm ³)
Métaux et alliages	grain : 0.001 à 0.1 mm	0.5 x 0.5 x 0.5
polymères	molécule : 0.01 à 0.05 mm	1 x 1 x 1
bois	fibres : 0.1 à 1 mm	10 x 10 x 10
béton	granulats : ≈ 10 mm	100 x 100 x 100

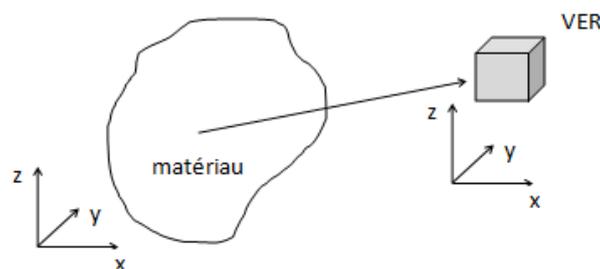


Figure 1.1 Élément de volume représentatif(VER)

1.1.2 Vitesse de déformation et température

La vitesse de déformation ($\dot{\epsilon}$) peut avoir une influence décisive sur les propriétés du matériau (comportement). Par conséquent, lors de la réalisation d'un essai (test), il est important d'utiliser une vitesse aussi proche que possible de la vitesse qui sera ensuite utilisée pour le dimensionnement.

Par exemple, si l'objectif est de vérifier la résistance au fluage de la structure, sous son propre poids, la vitesse de déformation à considérer sera très faible. En revanche, si le but est de vérifier la résistance sismique de la structure, la même vitesse de déformation peut prendre une valeur plus élevée, et la loi de comportement utilisée peut être différente, [2].

En mécanique et spécialement en mécanique des milieux continus, pour étudier les déformations d'un élément de matière, on s'attache à décrire ce qui se passe localement et non pas d'un point de vue global, et à utiliser des paramètres indépendants de la forme de la pièce. La vitesse de déformation $\dot{\epsilon}$ que l'on considère est donc la dérivée par rapport au temps de la déformation ϵ , on la note donc « epsilon point » elle s'exprime en s^{-1} , parfois en %/s:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \quad (1.1)$$

Par exemple, une machine hydraulique ou mécanique sera utilisée pour des essais de compression uniaxiale quasi-statique. Un côté de l'éprouvette est fixé sur une traverse fixe, et de l'autre sur une traverse qui se déplacera à une vitesse donnée, relativement lente. L'essai sera effectué dans un état « quasi-statique », c'est-à-dire sans tenir compte de l'influence de l'inertie dans l'équation de l'équilibre. En revanche, dans le régime dynamique, la machine classique ne suffira plus car la traverse ne pourra plus atteindre la vitesse requise, tableau (1.2), [2].

Tableau 1.2 Temps caractéristiques et types d'essais, [2].

temps caractéristique (s)	vitesse de déformation (S^{-1})	régime mécanique	régime thermique
10^6	10^{-6}	fluage	isotherme
10^4 à 10^2	10^{-4} à 10^{-2}	quasi-statique	isotherme
1	1	intermédiaire	intermédiaire
10^{-2} à 10^{-4}	10^2 à 10^4	dynamique	intermédiaire
10^{-6}	10^6	impact	adiabatique

Les figures (1.2 et 1.3) illustrent l'effet de la vitesse de déformation ($\dot{\epsilon}$) sur les propriétés mécaniques et le comportement des matériaux (résultat obtenus en modifiant la vitesse de déformation). On dit alors que le matériau est sensible au ($\dot{\epsilon}$). Cette sensibilité sera d'autant plus grande que les deux courbes en pointillés de la figure (1. 2) sont éloignées.

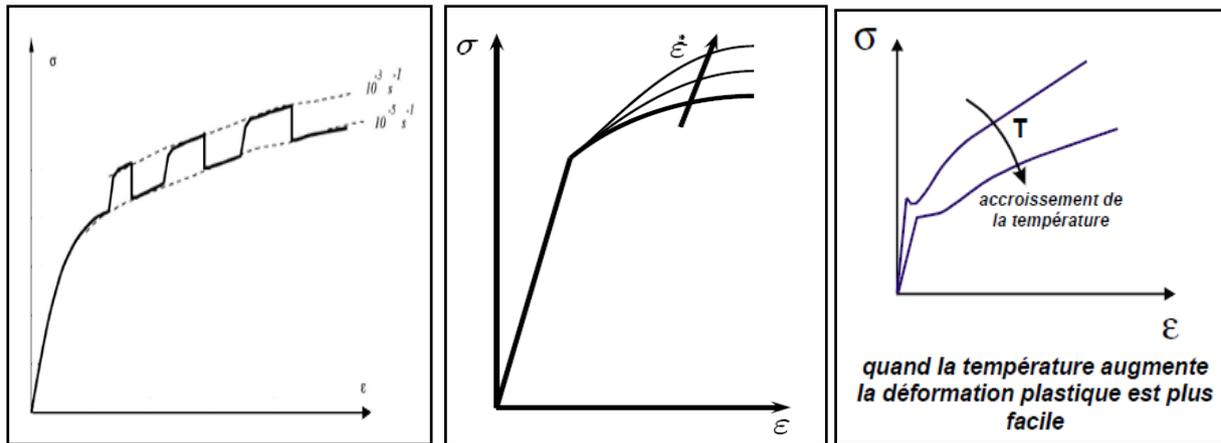


Figure 1.2 Courbe de traction typique avec sauts de vitesse,[2].

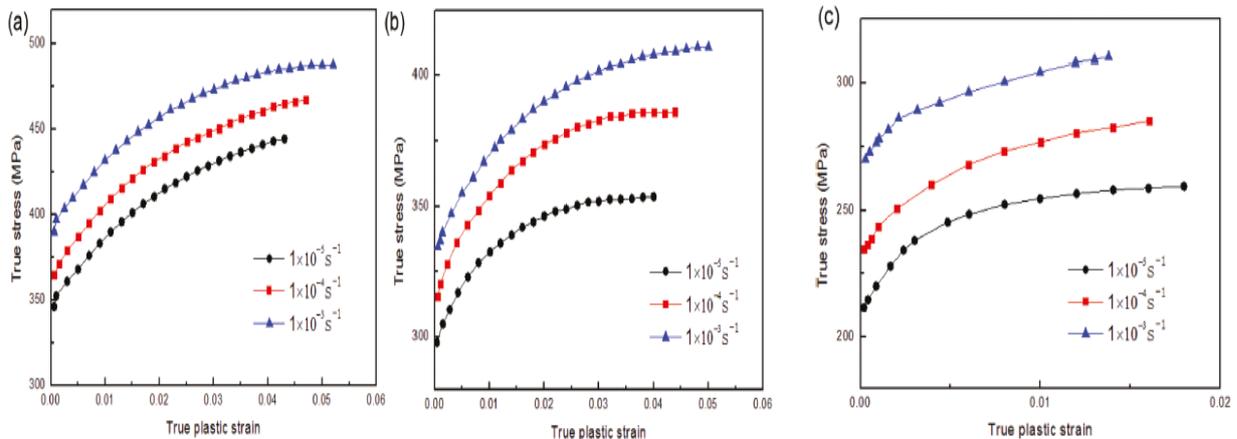


Figure 1.3 Courbes de contrainte vraie-déformation plastique vraie d'un acier obtenues à partir d'essais de traction à différentes vitesses de déformation et températures de (a) 550 ° C; (b) 600 ° C; (c) 650 ° C,[3].

Dans le tableau (1.2), l'état thermique de l'essai est exprimé en fonction de la vitesse de déformation. La capacité (puissance) de déformation plastique est essentiellement dissipée en chaleur dans l'élément de volume considéré. Par exemple, dans les métaux, environ 90% de la capacité de déformation plastique est dissipée avec la chaleur et le reste est stocké dans le matériau. Par conséquent, cette chaleur doit être évacuée par conduction thermique.

Dans un test "lent" (état de fluage mécanique ou quasi-statique), la chaleur a le temps de se dissiper, le test peut donc être considéré comme isotherme. Dans un état intermédiaire ou d'impact, l'éprouvette chauffera rapidement et la chaleur générée n'aura pas le temps de se dissiper. Cela a un impact sur l'évolution des propriétés du matériau et de sa structure. Par conséquent, afin de simuler le processus de mise en forme, la loi de comportement du matériau est généralement donnée à différentes températures,[2].

1.1.3 Direction de sollicitation

Lors de la réalisation d'essais mécaniques, le choix de la direction des contraintes peut être décisif. En effet, cela limite généralement l'utilisation et la précision de la loi de comportement obtenue. Nous pouvons diviser les sollicitations en deux catégories: uniaxiale et multiaxiale. Les principaux essais uniaxiaux utilisés sont : la traction-compression, la torsion et la flexion,[2].

Lorsqu'une contrainte est appliquée à l'éprouvette dans la direction de l'espace de contrainte. La modification des paramètres de test ne changera pas cette direction. Les tests multi-axes sont variés. Ils sont plus difficiles à expliquer. Ils combinent généralement plusieurs contraintes uniaxiales les unes avec les autres au fil du temps pour tester l'effet des directions des contraintes sur les propriétés des matériaux. Le test multiaxial le plus courant est le test "traction-torsion",[2].

1.2. Types de sollicitation

1.2.1 Essais monotones

Les essais monotones les plus utilisés sont :traction, compression, torsion et flexion. Une contrainte est appliquée sur le matériau jusqu'à ce que le matériau se brise comme dans la traction, torsion et la flexion, ou jusqu'à ce qu'il se déforme suffisamment comme dans la compression. En fonction de l'application de la contrainte, on peut principalement effectuer des essais d'écroutissage, de fluage ou de relaxation, figure (1.4) ,[2].

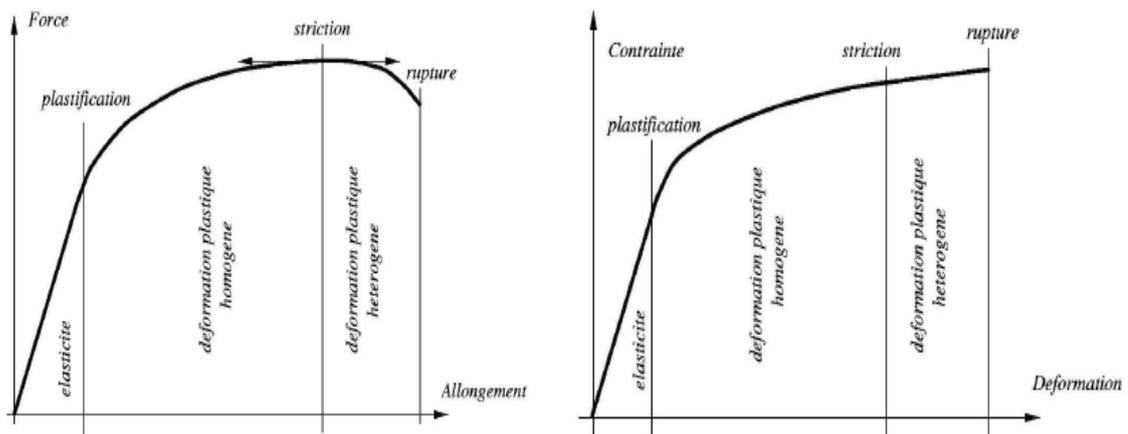


Figure 1.4 Essai d'écroutissage en traction.

La figure 1.4 montre une courbe force-allongement (et la courbe contrainte déformation associée) typique obtenue sur un métal lors d'un essai d'écroutissage en traction monotone. Ce type d'essai est généralement réalisé à des vitesses comprises entre 10^{-3} et 1 s^{-1} . On distingue successivement :

- un domaine de comportement élastique réversible, où l'arrêt de la sollicitation permet à l'éprouvette de retourner dans son état initial, et où les contraintes et les déformations sont reliées linéairement par la loi de Hooke.
- un domaine de comportement plastique homogène, caractérisé par une déformation irréversible du matériau.
- un domaine de comportement plastique hétérogène, initié par l'apparition d'une "striction". La déformation se localise dans l'éprouvette jusqu'à rupture de celle-ci.

Le test de fluage est effectué en appliquant une contrainte constante (généralement en tension) au matériau. Le type de courbe obtenu est donné sur la figure (1.5). Pour une contrainte constante donnée, il représente la déformation de l'échantillon dans le temps. La première déformation apparaît instantanément lors du chargement. Il s'agit de la déformation correspondant à la contrainte appliquée dans le test d'écroutissage. Ensuite, une déformation lente se produit avec le temps. La vitesse de déformation est d'environ 10^{-6} à 10^{-4} s⁻¹. Initialement (domaine de fluage primaire), elle décroît, pour atteindre une valeur constante dans le domaine de fluage secondaire. Finalement, la vitesse de déformation augmente jusqu'à la rupture de l'éprouvette, [2].

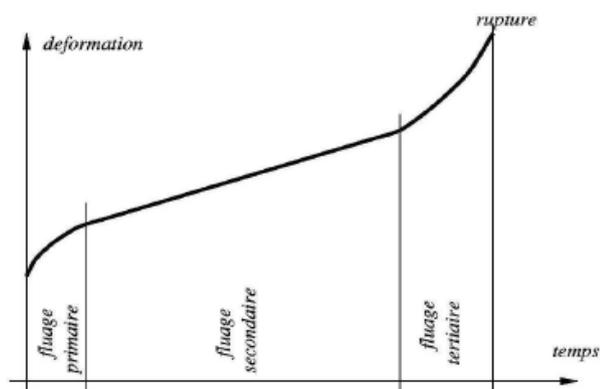


Figure 1.5 Représentation schématique d'une courbe de fluage.

Le test de relaxation permet de caractériser l'évolution de la contrainte interne d'un matériau dans le temps. Pour cela, nous appliquons une déformation constante à l'éprouvette, puis observons l'évolution de la contrainte, comme le montre la figure (1.6). Ce type de test est largement utilisé pour obtenir la viscoplasticité des matériaux.

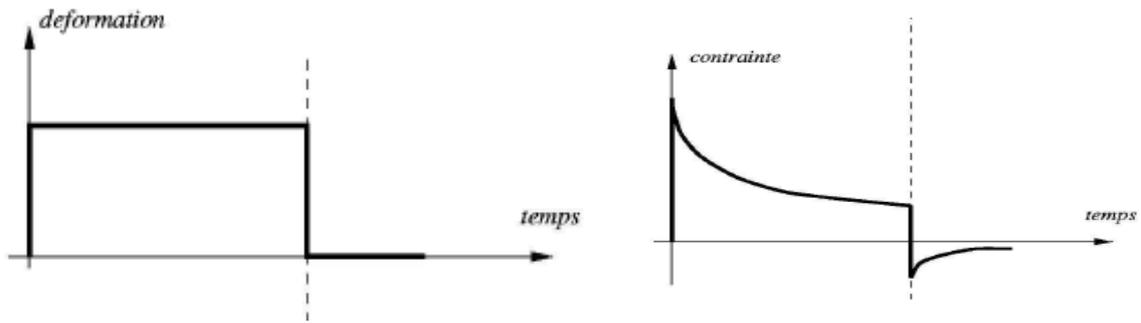


Figure 1.6 Représentation schématique d'un essai de relaxation.

1.2.2 Essais cycliques

Les essais cycliques sont caractérisés par une suite de sollicitations alternées. Les plus courants sont ceux de traction-compression, mais on utilise également des essais de flexion ou de torsion alternée. Le but de ces tests est d'obtenir la loi de comportement "cyclique" du matériau pour caractériser son évolution en cycles de contraintes. Les essais de traction compression peuvent être réalisés à déformation ou à contrainte imposée.

La figure (1.7) montre le type de résultats obtenus en déformation imposée (traction-compression par exemple). Lorsque l'amplitude de contrainte n'évolue plus sur plusieurs cycles, on dit que l'on a atteint le "cycle stabilisé". Afin d'obtenir la loi de comportement cyclique du matériau, on effectue plusieurs essais mécaniques à déformation imposée. Pour chaque essai, on note l'amplitude de contrainte aux cycles stabilisés, que l'on trace en fonction de l'amplitude de déformation. La figure (1.7) montre le type de courbe obtenu, appelé "courbe de consolidation cyclique". Cette courbe est similaire à la courbe obtenue dans le test d'écroutissage, mais ne reflète pas du tout le même type de comportement,[2].

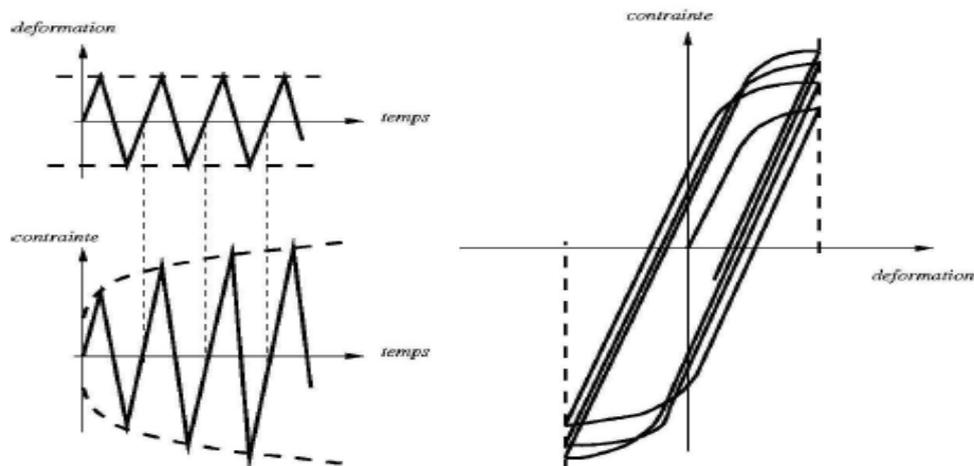


Figure 1.7 Essai cyclique à déformation imposée.

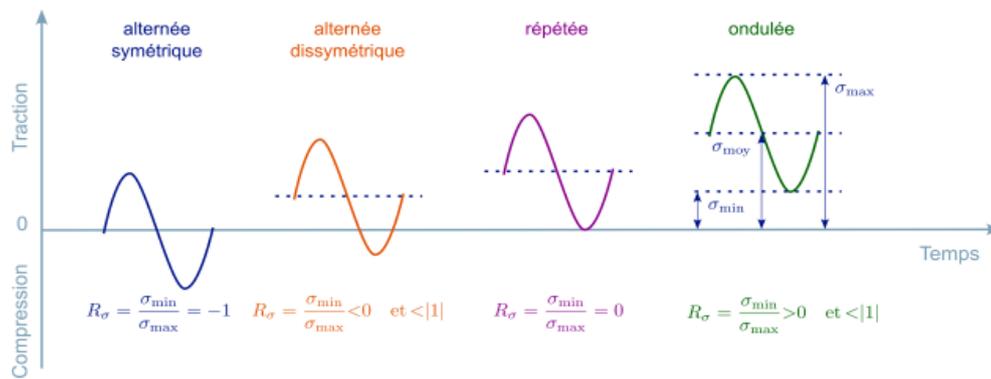


Figure 1.8 l'amplitude des contraintes (essais cycliques).

La fatigue est un processus qui modifie les propriétés locales du matériau à mesure que la contrainte change au fil du temps et peut provoquer des fissures et éventuellement casser la structure. L'amplitude maximale de ces contraintes est bien inférieure à la résistance à la traction du matériau. Généralement, la fatigue peut être divisée en trois domaines de recherche. Pour cette raison, nous exprimons l'amplitude de la contrainte en fonction du nombre de cycles de défaillance. Pour chaque plage de contrainte appliquée, nous pouvons attribuer plusieurs cycles dans lesquels les pièces sont cassées. Ce sont des courbes de Woehler,[4]. Donc le nombre de cycles à rupture lors d'un essai de fatigue est un renseignement intéressant. Il pourra en effet être utilisé ultérieurement pour prévoir la durée de vie d'une pièce en service, en fonction de ses sollicitations.

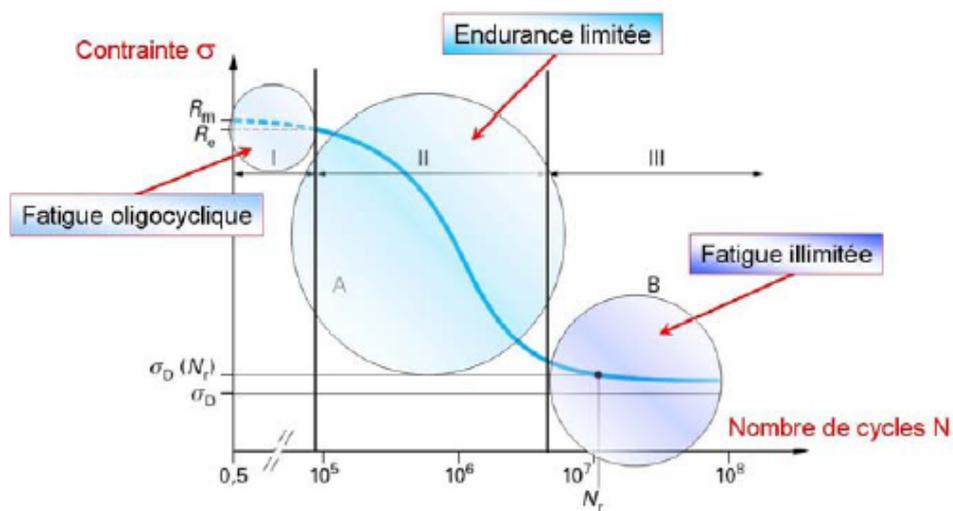


Figure 1.9 Courbe de Woehler définissant les trois domaines de la fatigue des matériaux, [4].

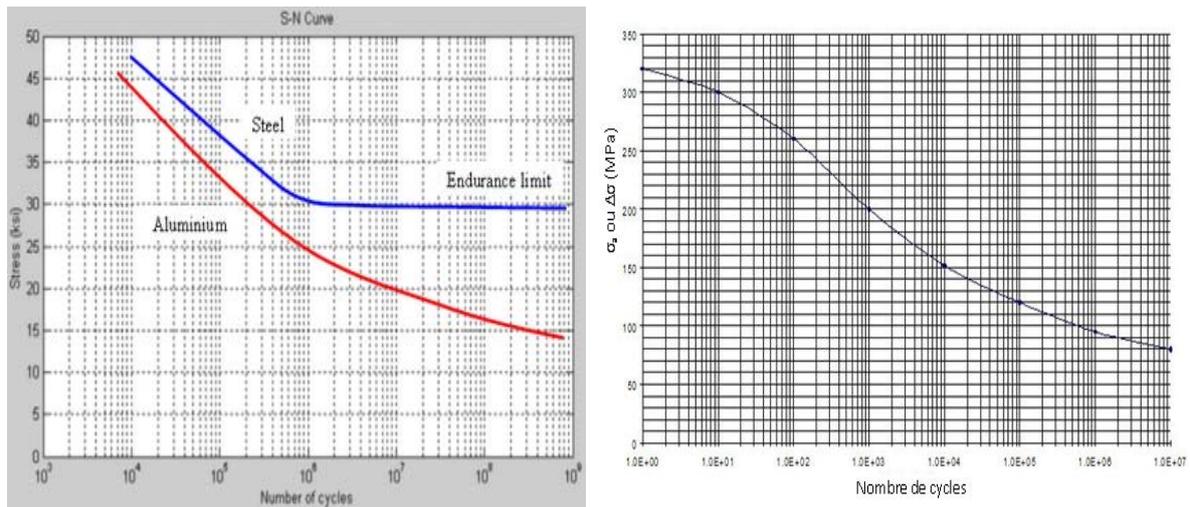


Figure 1.10 Courbe de Woehler typique (modèle 1 et 2), [5,6].

1.3 Essais mécaniques

1.3.1 Essai de traction

➤ Objectifs de l'essai

L'essai de traction est le moyen le plus utilisé pour caractériser le comportement mécanique des matériaux et pour déterminer les caractéristiques mécaniques, sous des sollicitations progressives à vitesse de chargement faible.

➤ Principe de l'essai

Les éprouvettes de l'essai de traction, sont conçues en forme de barreau prismatique ou cylindrique présentant une partie centrale calibrée à section constante S_0 et longueur L_0 raccordée à chaque extrémité à une tête de section plus importante, sont fixées dans une machine de traction. L'essai de traction est effectué à température ambiante comprise entre les deux températures 10°C et 35°C . Les essais de traction peuvent être effectués à différentes températures allant de basse température (température cryogénique) à haute température inférieure à la moitié de la température T_f (température de fusion), [7].

➤ Eprouvettes

La forme et les dimensions des éprouvettes conviennent à la forme et aux dimensions des produits métalliques dont on veut déterminer les caractéristiques mécaniques, figure (1.11). Les éprouvettes sont généralement obtenues par usinage d'échantillons de produits semi-finis ou d'ébauches moulées. Toutefois, les produits de la section constante (barres, profilés, etc.), ainsi que les éprouvettes brutes obtenues en fonderie (fontes, alliages non ferreux) peuvent être soumises à l'essai sans passer par usinage. Les éprouvettes de traction (éprouvettes usinées) doivent avoir une partie de raccordement entre la zone de serrage et la partie calibrée (utile), lorsque celles-ci sont de dimensions différentes. Les dimensions de ce congé peuvent être

importantes et il est conseillé pour qu'elles soient définies dans la spécification du matériau. Les têtes de fixation peuvent être de toute forme ajustée aux dispositifs de fixation. Les éprouvettes non usinées (brutes de fonderie) doivent comporter un congé de raccordement séparant la tête de fixation et la partie calibrée sur les deux cotés.

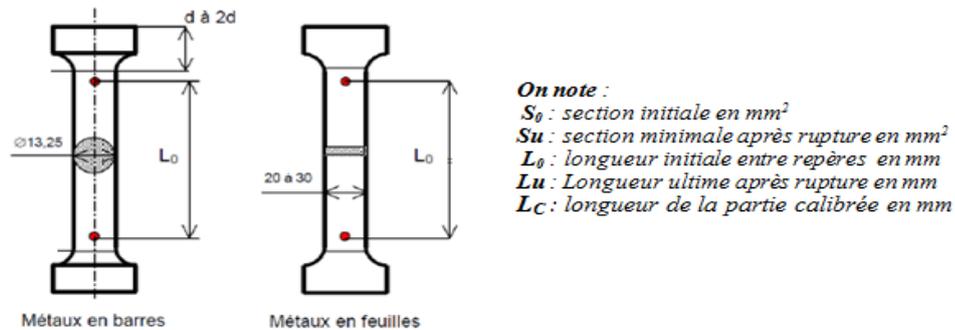


Figure 1.11 Dimension de l'échantillon pour l'essai de traction.

Tous les paramètres dérivés de l'essai de traction expliquent les propriétés du matériau selon la direction de l'essai. Par conséquent, ces valeurs dépendent du sens de prélèvement de l'échantillon (éprouvette) par rapport aux directions possibles d'anisotropie. Par exemple le sens de sélection doit donc toujours être spécifié pour les plaques laminées,[7] :

- direction L, indice 0°
- direction T, indice 90°
- direction oblique, indice 45°.



Figure 1.12 Evaluation des caractéristiques d'un cordon de soudure (exemple),[7].

❖ **Éprouvette non-proportionnelle :**

Les valeurs de L_0 couramment trouvées sont : 50mm, 80mm, 100mm ou 200mm, Plusieurs valeurs obtenus par l'essai de traction ne sont comparables entre elles que avec la condition : même longueur L_0 et de même section S_0

❖ **Éprouvette proportionnelle :**

Les mesures effectuées avec des éprouvettes (type proportionnelles) avec les mêmes valeurs de k et n peuvent être comparées les unes aux autres.

$$L_0 = k \cdot \sqrt{S_0} \text{ ou } L_0 = n \cdot d_0 \quad (1.2)$$

Où :

- L_0 est la longueur de la partie entre repères ;
- k est un coefficient (les valeurs communément rencontrées sont 4, 5,65, 8,16 et 11,3) ;
- n est un coefficient (les valeurs communément rencontrées sont 4, 5 et 8) ; plus n est grand, plus la contrainte dans la section entre repères est homogène
- d_0 est le diamètre de la partie entre repère d'une éprouvette cylindrique.
- S_0 est l'aire de la section droite.

Dans la pratique, la valeur k adoptée sur le plan international est 5,65 (norme ISO 6892-1) ce qui correspond à $n = 5$ pour une éprouvette cylindrique, [8] :

$$L_0 = 5. d_0 \text{ et } S_0 = \pi. \frac{d_0^2}{4} \text{ Dou } S_0 = \sqrt{\frac{4}{\pi}} \cdot \sqrt{S_0} \quad (1.3)$$

$$\text{En posant } K = 5. \sqrt{\frac{4}{\pi}} = 5,6419 \text{ On obtient } L_0 = 5,65. \sqrt{S_0}$$

➤ Exécution de l'essai

La machine de l'essai de traction est constituée d'un bâti rigide équipé d'un travers fixe à laquelle est fixée l'une des têtes de l'éprouvette , l'autre extrémité de l'éprouvette est fixée à une traverse mobile. Le mouvement de la partie mobile dans la machine de traction est assuré par un système hydraulique ou par des vis sans fin. La force (F) imposée à l'échantillon et l'allongement (ΔL) sont mesurés à l'aide de dynamomètre et un extensomètre. Ceci, permettra d'aboutir à des résultats d'enregistrement de la courbe brut de traction, $F=f(\Delta L)$, caractéristique de l'échantillon et de sa géométrie.

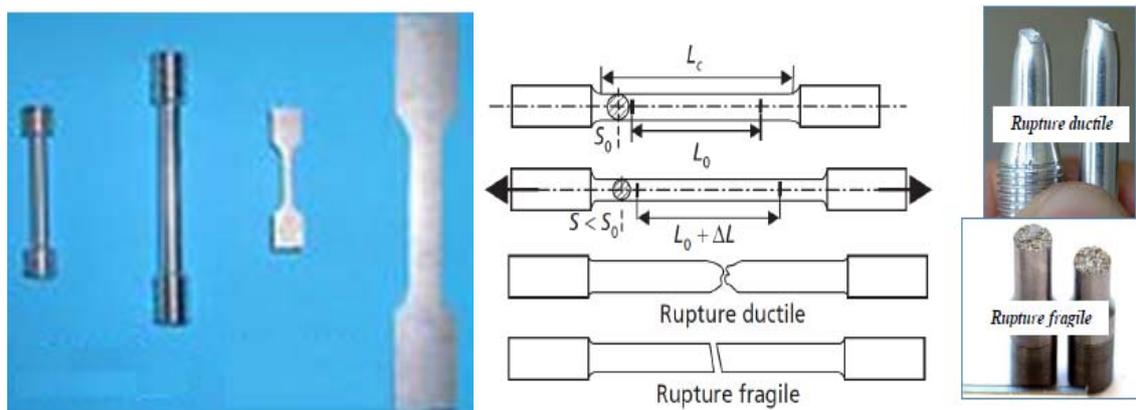


Figure 1.13 Schéma d'une éprouvette de traction cylindrique et de son évolution en cours d'essai, [7,8].

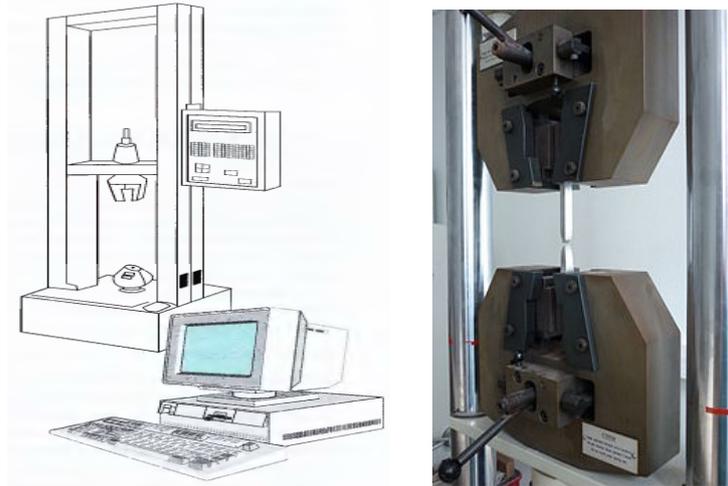


Figure 1.14 Exemple d'une machine pour essai de traction,[8].

➤ **Exploitation des résultats de l'essai**

❖ **Courbe conventionnelle**

Afin d'utiliser les courbes brutes de l'essai de traction, on doit les modifier pour que les résultats obtenus (contraintes et déformations) soient fonction que de matériau étudié et non de la géométrie de l'éprouvette. Pour ce faire, on rapporte la charge $F(N)$ à la section initiale $S_0 (mm^2)$ de l'éprouvette en vue d'obtenir la contrainte conventionnelle $\sigma_c (MPa)$. Et on rapporte l'allongement (mm) à la longueur initiale L_0 , pour obtenir la déformation conventionnelle ε_c , soient :

$$\sigma_c = \frac{F}{S_0} \quad [MPa] \quad , \quad \varepsilon_c = \frac{\Delta L}{L_0} \quad [\%] \quad (1.4)$$

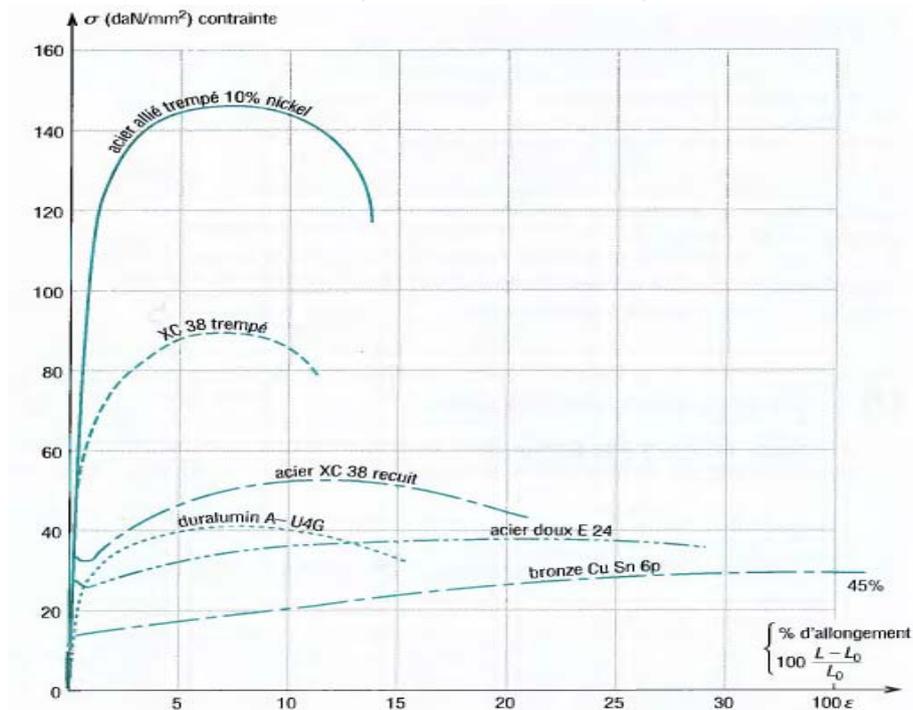


Figure 1.15 Courbes conventionnelles typiques de traction pour quelque matériaux,[9].

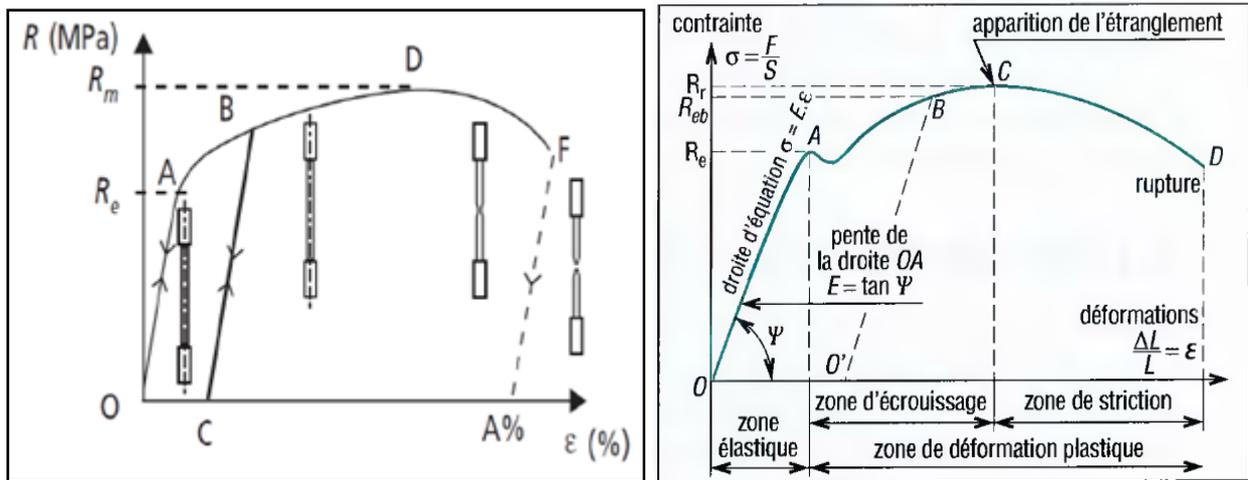


Figure 1.16 Courbes conventionnelles typiques de traction avec les étapes d'endommagement d'éprouvette,[9,10].

OA : allongement élastique linéaire, réversible.

AD : allongement élastique plus allongement plastique permanente réparti.

La suppression de la force appliquée (BC) laisse apparaître un allongement plastique rémanent (**OC**). Une remise en charge conduit à une nouvelle limite d'élasticité (CB).

DF: apparition et progression d'une striction (réduction de section localisée) dans les matériaux ductiles.

En **F** : la rupture de l'éprouvette

Re : limite d'élasticité (MPa)

Rm : résistance à la traction (MPa)

R_{p0,2} ou **R_{e0,2}**: limite conventionnelle d'élasticité à 0,2% d'allongement plastique (MPa)

La limite élastique, notée $R_{e0,2}$ correspond au point où le comportement cesse d'être élastique pour devenir plastique. Pour certains matériaux, le passage d'une zone à l'autre pouvant être progressif (figure 1.17), il est nécessaire de définir un critère permettant de fixer tout de même une valeur de R_e . Ainsi on choisit souvent $R_{e0,2}$ qui correspond après décharge à un allongement plastique (ou rémanent) de 0,2%. On définit des limites conventionnelles à 0,2% ; 0,1 % ; 0,02 % ou 0,01 %.

A% : allongement pou cent après rupture (%)

Z% :coefficient de striction (%)

$$R_e = \frac{F_e}{S_0} , \quad R_m = \frac{F_m}{S_0} , \quad A\% = \frac{L_u - L_0}{L_0} 100 \quad (1.5)$$

$$\text{et } Z\% = \frac{S_0 - S_u}{S_0} 100$$

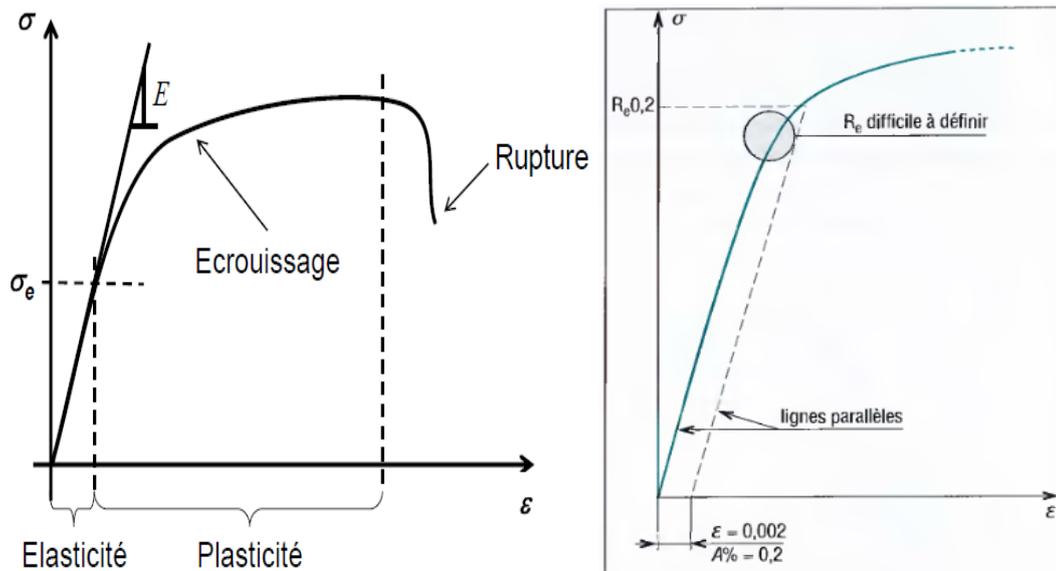


Figure 1.17 Détail pour le calcul de E (pente de la partie élastique) et $R_{p0,2}$.

La courbe conventionnelle est donc obtenue à partir d'enregistrement F et ΔL , effectué lors de l'essai en rapportant la force à la section initiale pour raisonner en terme de contrainte, et en rapportant l'allongement à la longueur initiale pour raisonner en termes d'allongement relatif. On obtient ainsi une courbe, indépendante des dimensions de l'éprouvette utilisée.

➤ **Les caractéristiques en rapport avec l'essai de traction**

En utilisant les résultats des courbes de traction on peut mieux comprendre les caractéristiques,[9] :

- ❖ **La rigidité** est une propriété importante elle est fonction de l'énergie des liaisons entre les atomes qui composent le matériau métallique. La rigidité est principalement mesurée par le module de Young (E). Plus le module E est élevé, plus le matériau est rigide.
- ❖ **La résistance** représente la contrainte maximale (R_m) qu'un matériau peut supporter avant de se rompre (fissures). Cette résistance dépend de la résistance du collage (résistance des joints, résistance des liaisons), mais aussi de la forme de la pièce et les défauts dans le matériau et l'éprouvette.
- ❖ **La ductilité** est la capacité d'un matériau à se déformer de façon permanente avant de se rompre. La ductilité est directement proportionnelle à l'allongement($A\%$). Au contraire, lorsque la déformation permanente est très faible ou nulle, on parle donc d'un matériau fragile. Un matériau cassant peut avoir une résistance très élevée.

Si $A\% \geq 5\%$ les matériaux sont considérés comme ductiles.

Si $A\% < 5\%$ les matériaux sont considérés comme fragiles ou cassants.

- ❖ **La Malléabilité** : cette propriété est identique à la ductilité mais appliquée à la compression.

❖ **La ténacité** fait référence à l'énergie absorbée par un matériau lorsqu'il se brise. Cela montre qu'il peut résister à la propagation soudaine des fissures. Sa valeur est égale à la surface sous la courbe de traction. Cette propriété est plus importante pour les matériaux en céramique.

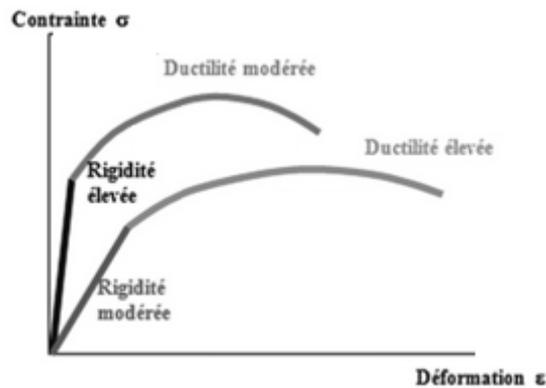


Figure 1.18 Rigidité et ductilité des matériaux.

❖ Changement de volume

Dans le modèle élastique linéaire, les déformations impliquent généralement un changement de volume et une constance de forme, avec l'hypothèse petite déformation on aura, [11]:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \text{trac } \epsilon_{ij} \quad (1.6)$$

La relation du Poisson pour une sollicitation uniaxiale selon x_1 donne

$$\epsilon_{22} = -\nu\epsilon_{11} \text{ et } \epsilon_{33} = -\nu\epsilon_{11} \quad (1.7)$$

Donc le changement du volume uniaxial (traction uniaxiale) est :

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \epsilon_{11}(1 - 2\nu) \quad (1.8)$$

Pour une valeur de la force de traction appliquée F et longueur de la barre L_0 on a, [12]:

$$\Delta V = \frac{1-2\nu}{E} \sum N_x dx \quad (1.9)$$

Avec N_x : effort normal dans l'éprouvette

$$\Delta V = \frac{1-2\nu}{E} F \cdot L_0 \quad (1.10)$$

➤ Courbe rationnelle de traction

C'est la courbe obtenue en rapportant la force à la section minimale instantanée S , pour raisonner en termes de contrainte $\sigma = F/S$, et en rapportant l'allongement à la longueur instantanée pour raisonner en termes de déformation rationnelle $\epsilon = dL/L$. La courbe obtenue est croissante, même dans la zone de striction. Le volume de l'éprouvette restant constant et la déformation étant uniformément répartie de O à D, on a, [10] :

Contrainte σ_v : Cette contrainte prend en compte l'évolution de la section lors de l'essai, elle est égale à la charge instantanée (F) liée à la section instantanée (S). En supposant que le volume de

la partie utile de l'éprouvette de traction reste constant en raison d'une déformation élastique uniforme et que le volume est maintenu, nous avons, [10,7] :

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (1.11)$$

$$S_0 \cdot L_0 = S \cdot L = S \cdot (L_0 + \Delta L) \quad (1.12)$$

$$S = \frac{S_0}{1 + \varepsilon} \quad (1.13)$$

$$\text{Donc } \sigma_v = \frac{F}{S_0} \cdot (1 + \varepsilon_c) = \sigma_c \cdot (1 + \varepsilon_c) \quad (1.14)$$

Pour la déformation rationnelle :

L'allongement instantané est égal à dL/L , au même instant l'allongement depuis le début de l'essai est L , en considérant des allongements infiniment petite dL :

$$\varepsilon_r = \int_{L_0}^L \frac{dL}{L} = \ln(1 + \varepsilon_c) \quad (1.15)$$

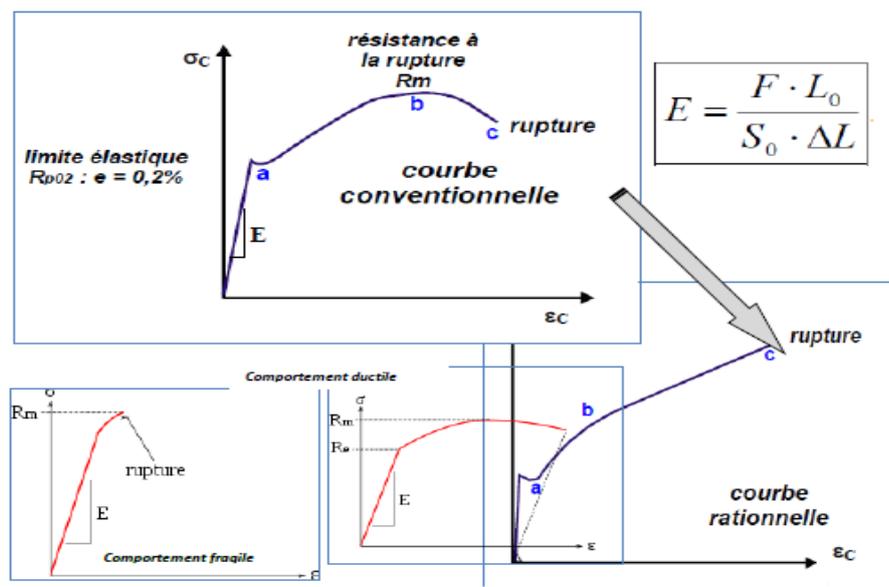


Figure 1.19 Exploitation des résultats de traction.

1.3.2 Les essais de dureté par pénétration

➤ Objectif et principe de dureté

La dureté, de symbole général H (Hardness), est la mesure de la résistance d'un matériau à la pénétration. Cette dernière est fonction de plusieurs facteurs: la déformation élastique et plastique, le frottement pénétreur-surface, la géométrie de pénétreur, ses propriétés mécaniques et la charge.

Les tests de dureté consistent à insérer un pénétrateur (partie du mécanisme) dans le matériau. La charge (F) est constante pendant un temps bien donné, puis mesurez la taille de l'empreinte (d ou e), Le métal étant plus tendre (ductile), la taille de l'empreinte sera plus grande.

Divers tests de dureté peuvent être effectués pour mesurer la dureté des matériaux, les plus couramment utilisés étant les tests de pénétration ou de rebondissement. Exemple des méthodes de mesure: la dureté Brinell, la dureté Vickers, les duretés Rockwell C et B . Bien que la valeur de dureté soit sans dimension, les duretés Brinell et Vickers, de par leur définition, sont homogènes à des contraintes.

➤ **Eprouvettes**

La surface de l'échantillon doit être propre, plane et lisse. Plus la taille du pénétrateur est petite, plus l'état de la surface doit être lisse. Le polissage est parfois obligatoire. La préparation de l'éprouvette doit être faite sans provoquer des modifications Par exemple, les propriétés du matériau changent en raison du chauffage ou de l'écrouissage.

L'épaisseur de l'éprouvette doit être suffisante pour qu'aucune trace d'une déformation ne soit visible sur la surface opposée à celle de l'application de la charge. D'après une règle générale, l'épaisseur minimale est au moins dix fois supérieure à la profondeur de l'empreinte. L'essai de dureté est relativement économique (pas d'éprouvettes à réaliser). On peut mesurer la dureté sur la pièce elle-même pour des cas de pièces bien précises. En soudage, la dureté est mesurée dans des zones précises : dans la soudure, dans les zones de liaison, les zones thermiquement affectées (ZAT) et les métaux de base.

➤ **Exécution de l'essai**

Utilisez un appareil avec une rigidité et une stabilité suffisantes pour les tests. L'essai doit être sans la présence des chocs et des vibrations, sinon le résultat est faux. Pendant le chargement, l'éprouvette doit être installée sur le support rigide de l'équipement. Le test le plus courant est le test de pénétration, et les tests les plus classiques sont les tests Brinell, Vickers et Rockwell.

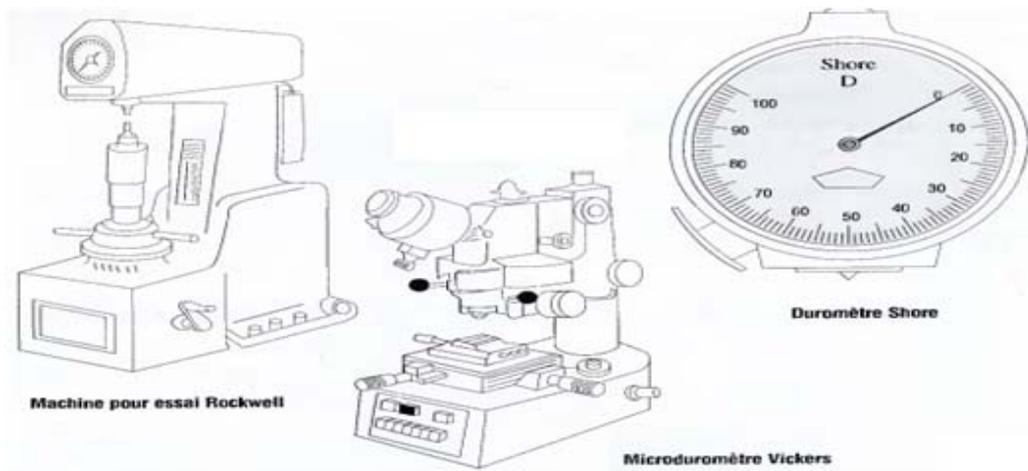


Figure 1.20 Dispositif pour l'essai de dureté (exemple),[9].

➤ Essai Dureté Brinell

J. A. BRINELL, métallurgiste, a travaillé sur la transformation des aciers en fonction de la température. Pour déterminer la dureté des différents matériaux testés, il avait besoin d'un test non destructif. Il a développé son test de dureté basé sur un pénétrateur avec un bille pour les alliages à faible teneur en carbone [13]. L'essai de Brinell consiste à imprimer une bille en carbure ou en acier au tungstène (avec un diamètre D en mm) sous l'application d'une charge d'essai F (N) sur la surface de la pièce à tester en suite mesurer le diamètre d de la cavité résiduelle après retrait de cette charge. La charge d'essai F (N) est choisie à partir d'une gamme normalisée adaptée au diamètre de l'indenteur et au matériau testé.

Les formules permettant d'obtenir une valeur sur l'échelle de Brinell sont les suivantes,[7,9,10,13,14] :

$$HB = \frac{2.F}{g.\pi.D.(D-\sqrt{D^2-d^2})} \quad , \quad HB = \frac{0,102. 2.F}{\pi.D.(D-\sqrt{D^2-d^2})} \quad (1.16)$$

$$et \quad HB = \frac{0,0649 .F}{D.(D-\sqrt{D^2-d^2})}$$

HB = Dureté Brinell.

F = Force appliquée (N).

D = Diamètre de la bille (mm).

d = Diamètre de l'empreinte laissée par la bille (mm).

g = Accélération terrestre (9,80665)

❖ Le kilogramme-force

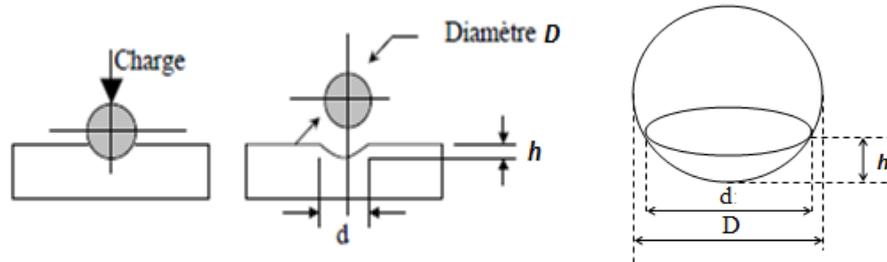
L'unité kilogramme-force ou kilogramme-poids (kgf ou kgp) est une unité pour mesurée les forces, qui ne fait pas partie du système international (SI) , qui relie les notions de masse et de

pois. Pour convertir une valeur exprimée en kgf en newtons (N), nous multiplions la valeur considérée par l'accélération de la pesanteur ($g=9,806\ 65\ \text{m/s}^2$).

$$1\ \text{kgf} = 9,806\ 65\ \text{N} \quad \text{et} \quad 1\ \text{N} = 0,101\ 972\ \text{kgf}$$

❖ Démonstration de la formule de Dureté Brinell

L'aire superficielle de calotte sphérique S laissée par la pénétration de l'indenteur bille est fonction du diamètre initial de la bille D et d'empreinte résiduelle d , [15]:



$$S = \pi \cdot D \cdot h \quad \text{et} \quad h = \frac{1}{2} (D - \sqrt{D^2 - d^2}) \quad (1.17)$$

$$\text{Soit encore : } S = \frac{\pi \cdot D}{2} (D - \sqrt{D^2 - d^2})$$

$$HB = \frac{F}{S} \quad (1.18)$$

Avec F en kgf et s en mm^2 , g Accélération terrestre (9,80665)

❖ Conventions de notation

L'essai est réalisé à l'aide d'une bille en acier dur dans le cas général. Le chiffre résultat de la dureté obtenu est noté alors HBS. Pour les métaux très durs, les billes d'acier traditionnelles sont remplacées par des billes de carbure de tungstène, et la valeur de dureté obtenue est représentée par HBW (W est le symbole chimique du tungstène).

Dans le cas général, on suppose que le diamètre de la sphère est de 10 mm. Pour les matériaux très durs, des billes de plus petit diamètre sont utilisées. La force appliquée est 29 430 N. Pour les métaux moins durs, moins de force sera appliquée. Généralement, le temps d'application de la force d'essai estimé à 15 s et varie de manière similaire en fonction de la dureté du matériau. Pour effectuer un test de résistance Brinell, certaines précautions opérationnelles doivent être prises. Par exemple, la force doit être appliquée progressivement. La finition de la surface d'éprouvette doit être de bonne qualité pour que le diamètre de l'empreinte puisse être lu clairement.

La valeur de dureté est indiquée par un nombre devant le symbole HBS ou HBW, devant trois chiffres après le symbole où se trouvent les conditions de test (diamètre de la bille, charge et temps de maintien).

Exemple : 350 HBS 5/750/20 , correspond à une dureté de 350 mesurée avec une bille d'un diamètre de 5 mm avec une charge de 7 355 N (750 kgf) pendant 20 s. Les diamètres des billes couramment utilisées sont de 1-2-2,5-5 et 10 mm. S'il n'y a pas de nombre après le symbole HBS ou HBW, cela signifie que le test a été effectué dans des conditions normales. ($d=10$ mm et $F=29\ 430$ N appliquée pendant 10 à 15 s). Pour éviter la déformation de la bille (détérioration), l'usage de l'essai Brinell est limité aux matériaux tels que $HBS < 350$ ou $HBW < 650$.

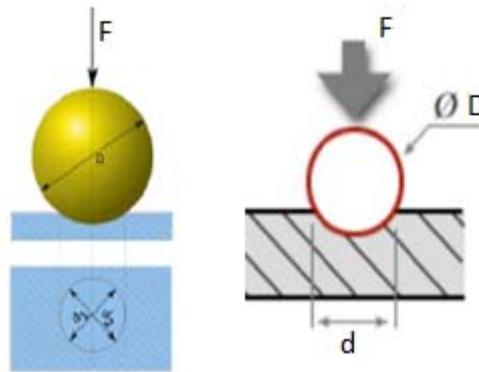


Figure 1.21 Principe de l'essai Brinell et empreinte typique de l'essai.

Voici quelques valeurs du nombre de Brinell pour quelques matériaux comme exemple:

Tableau 1.3 Dureté Brinell pour quelques matériaux.

Matériau	Nombre de Brinell
Bois tendre	1.6 HBS 10/100
Bois dur	2.6 à 7.0 HBS 10/100
Aluminium	15 HB
Cuivre	35 HB
Acier doux	120 HB
Acier inoxydable	250 HB
Verre	550 HB
Acier à outil	650 à 700 HB

Normes européennes (EN) et internationales (ISO) :

- EN ISO 6506-1 : Pour les matériaux métalliques - Essai (dureté Brinell) - La partie 1 : Méthode d'essai
- EN ISO 6506-2 : Pour les matériaux métalliques - Essai (dureté Brinell) -La partie 2 : Vérification et étalonnage des machines d'essai

•EN ISO 6506-3 : Matériaux métalliques - Essai de dureté Brinell - Partie 3 : Étalonnage des blocs de référence

➤ **Dureté Meyer**

Meyer a montré que l'enfoncement d'une bille dans un métal est donné par la formule :
 L'exposant m et le coefficient k de la loi de Meyer varient avec la nature du métal et son état.
 Dans les métaux durs m vaut 0 à 0,15 environ et dans les métaux écrouis vaut 0.3 à 0.6 .
 La mesure est effectuée avec le même principe que la dureté Brinell.
 On peut définir alors la dureté Meyer comme suit, [16]:

$$\frac{F}{d^2} = K \left(\frac{d}{D}\right)^m, \quad HM = \frac{4F}{\pi d^2}, \quad HM = \frac{4K}{\pi} \left(\frac{d}{D}\right)^m \quad (1.19)$$

Avec : F en Kgf et d, D en mm

$$HM = 0,102 \frac{4F}{\pi d^2} \quad (1.20)$$

Avec : F en Newton et d en mm

➤ **Essai Dureté Vickers**

SMITH et SANDLAND, ingénieurs chez VICKERS Ltd GB ont besoin de tester des matériaux trop durs pour le test BRINELL. En 1925,[13]. Le pénétrateur est une pyramide en diamant, à base carrée et d'un angle au sommet entre faces opposées égales à 136°. L'empreinte est une pyramide en creux de diagonales du carré de base. Les mesures s'effectuent à l'aide d'un appareil optique approprié ou à afficheur directe dans les nouvelles générations des bancs d'essais, [14,10].

$$HV = \frac{2F \sin\left(\frac{136^\circ}{2}\right)}{g \cdot d^2} \approx 0,1891 \frac{F}{d^2} \quad \text{Avec} \quad d = \frac{d_1 + d_2}{2} \quad (1.21)$$

HV = Dureté Vickers

F = Force appliquée [N]

d = Moyenne des diagonales de l'empreinte [mm]

g = Accélération de la pesanteur 9.80665 [m·s⁻²]

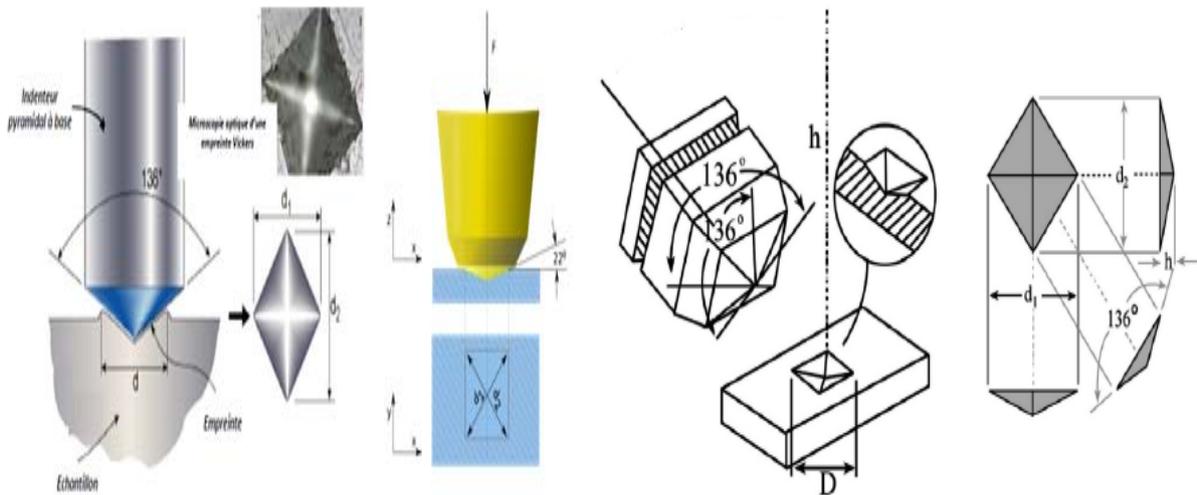
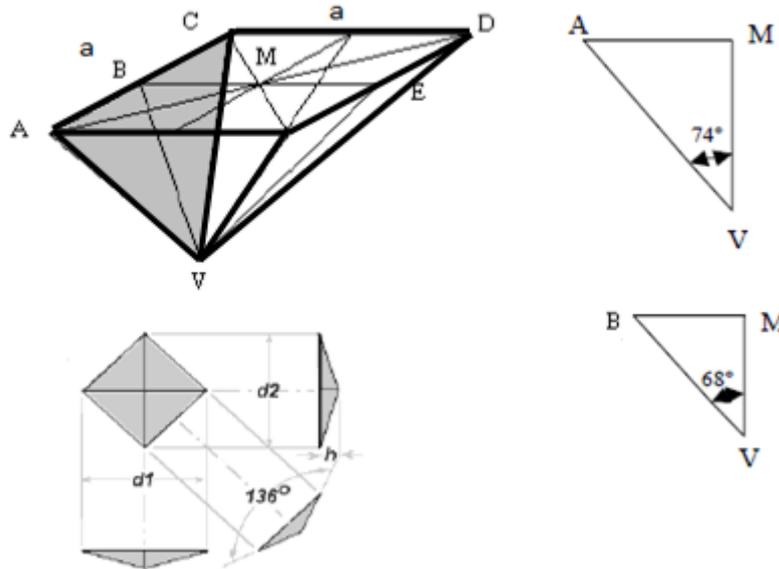


Figure 1.22 Principe de l'essai Vickers, [17].

❖ Démonstration de la formule de Dureté Vickers



La relation entre les angles mesurés entre les sommets et les faces est , [15]:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \frac{\text{tg}(74^\circ)}{\text{tg}(68^\circ)} = \sqrt{2} \quad (1.22)$$

Après la pénétration de l'indenteur à la surface d'un matériau, l'empreinte résiduelle est de forme carrée. La dureté Vickers est calculé par le rapport de la charge à la surface réelle de contact :

L'aire réelle de contact de pyramide avec le matériau (S) représente quatre fois l'aire du triangle VAC

$$S = 4 \frac{\overline{AC} \cdot \overline{VB}}{2} = \frac{4 \cdot a \cdot \overline{VB}}{2} \quad (1.23)$$

$$d^2 = 2 \cdot a \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2} d \quad \text{et} \quad \overline{VB} = \frac{a}{2 \cdot \sin(68^\circ)} \quad (1.24)$$

$$S = \frac{d^2}{2 \cdot \sin(68^\circ)} \quad (1.25)$$

$$\text{Donc} \quad HV = \frac{1854,4}{d^2} F \quad (1.26)$$

HV est exprimée en Kgf/mm² si F est donnée en gf et la diagonale de l'empreinte d en μm

Un paramètre important que l'on voit souvent dans l'étude de l'indentation Vickers est le rapport entre la diagonale et la profondeur de l'empreinte h, [15]:

$$\cos(68^\circ) = \frac{\overline{MV}}{\overline{VB}} = \frac{h}{\frac{\sqrt{2} \cdot d}{4 \cdot \sin(68^\circ)}} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{4} d \cdot \cot(68^\circ) \approx \frac{d}{7} \quad (1.27)$$

Norme Européenne pour la dureté Vickers:

- EN ISO 6507-1 - Essai de dureté Vickers - Méthode d'essai
- EN ISO 6507-2 - Essai de dureté Vickers - Entretien de l'équipement

➤ Essai Dureté Rockwell

Stanley ROCKWELL travaille comme métallurgiste dans une usine de roulements à billes. Il vérifie les traitements thermiques par des mesures de la dureté. En 1922, ROCKWELL conçoit un nouveau système pour mesurer la dureté avec différents pénétrateurs, adapte aux métaux et aux plastiques avec une large gamme de matériaux testés,[13].

La méthode de mesure de la dureté Rockwell du métal en fonction de la pénétration de la bille d'acier est appelée dureté Rockwell B (HRB) ou cône diamant 120 °, dureté Rockwell C (HRC). Le test consiste à appliquer une charge initiale (une pré-charge) au pénétrateur qui descend jusqu'à une profondeur e_0 . Une force supplémentaire F est appliquée pendant 3 à 8 s, le pénétrateur s'enfonce dans le matériau sur une profondeur e_1 . La force F supprimée, le cône maintient la profondeur e_2 . Les valeurs (indices de Rockwell) peuvent être lus directement pour déterminer la dureté selon les formules :

ROCKWELL C : $HRC=500[100-(e_2-e_0)]$, pénétrateur : cône diamant de 120°

ROCKWELL B : $HRB=500[130-(e_2-e_0)]$, pénétrateur : une bille d'acier

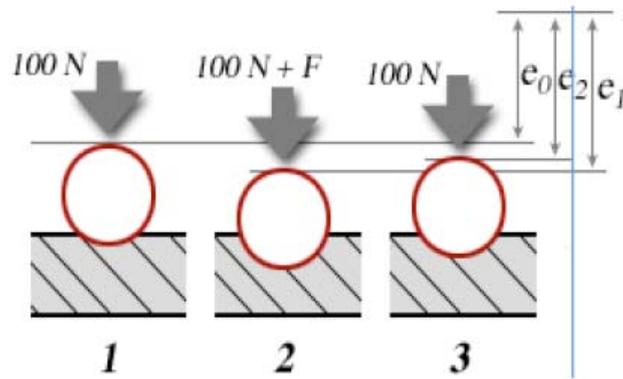


Figure 1.23 Schéma de principe d'un essai de dureté Rockwell : Cas d'un Rockwell C.

Une unité de dureté Rockwell correspondant à une pénétration de 0,002 mm.

Les différentes échelles [18]

Échelle	Symbole	Pénétrateur	Valeur de la force totale $F_0 + F_1$ (N)	Application
A	HRA	Cône de diamant de section circulaire à pointe arrondie sphérique de 0,2 mm	588,6	Carbure, acier et en épaisseur mince
B	HRB	Bille d'acier de 1,588 mm (1/16 de pouce) de diamètre	981	Alliage de cuivre, acier doux, alliage d'aluminium Matériaux ayant une résistance à la rupture comprise entre 340 et 1 000 MPa
C	HRC	Cône de diamant de section circulaire à pointe arrondie sphérique de 0,2 mm	1 471,5	Acier, fonte, titane Matériau ayant une dureté résistance à la rupture supérieure à 1 000 MPa
D	HRD	Cône de diamant de section circulaire à pointe arrondie sphérique de 0,2 mm	981	
E	HRE	Bille d'acier de 3,175 mm (1/8 pouce) de diamètre	981	Fonte, alliage d'aluminium et de fonte
F	HRF	Bille d'acier de 1,588 mm de diamètre	588,6	Alliage de cuivre recuit, fine tôle de métal.
G	HRG	Bille d'acier de 1,588 mm de diamètre	1 471,5	Cupro-nickel, alliage cuivre-nickel-zinc

➤ Comparaison entre les méthodes par pénétration

Type d'essai	Préparation de la pièce	Utilisation principale	Commentaire
Brinell	La surface de la pièce ne nécessite pas une préparation extrêmement soignée (tournage ou meulage).	En atelier	La méthode ayant la mise en œuvre la plus facile des trois méthodes.
Rockwell	Bonne préparation de surface (au papier de verre OO par exemple). La présence de rayures donne des valeurs sous estimées.	En atelier	L'essai est simple et rapide. Convient bien pour des duretés plus élevées (supérieures à 400 Brinell). Elle est plutôt utilisée pour les petites pièces (il est nécessaire que la pièce soit parfaitement stable). La dureté Rockwell présente l'inconvénient d'avoir une dispersion relativement importante.
Vickers	État de surface très soigné (on obtient de petites empreintes, la présence d'irrégularité gêne la lecture).	En laboratoire	C'est un essai assez polyvalent qui convient aux matériaux tendres ou très durs. Il est utilisé généralement pour des pièces de petites dimensions.

➤ **Microdureté et Nanodureté**

D'un point de vue scientifique, l'essai de dureté peut être séparé de l'essai de microdureté, car le premier contient parfois un grand nombre de grains de cristaux métalliques, tandis que le second vise en principe à définir simultanément des propriétés au sein de la matrice ou des particules de divers composants.

Alors que les essais de dureté procurent une valeur moyenne des propriétés d'une zone de métal assez importante, tandis que les tests de microdureté peuvent déterminer les caractéristiques locales.

❖ **Microdureté Vickers**

Similaire au test Vickers, la micro-échelle du test est réalisée sous une charge de quelques grammes à quelques centaines de grammes. L'équipement utilisé comprend un réseau de microscopes à réflexion optique qui peuvent être alignés sur la zone souhaitée sur l'échantillon poli. Le pénétrateur Vickers est ensuite placé dans l'axe optique pour effectuer l'essai, puis le microscope permet de mesurer les diagonales de l'empreinte : de quelques μm à quelques dizaines de μm . On peut ainsi mesurer par exemple la dureté des différentes phases d'un matériau ou le profil de dureté obtenu sur une surface traitée ou usinée,[10].

❖ **Dureté Knoop**

L'essai Dureté Knoop permet la mesure de dureté des matériaux fragiles comme le verre et la céramique. La forme du pénétrateur en diamant est pyramidale avec une surface inférieure rectangulaire, l'angle entre deux surfaces opposées est de $172^\circ 30'$ et l'angle entre les deux autres surfaces est de 130° . Les forces appliquées sont inférieures à 1 kgf. Le pénétrateur laisse une empreinte dont la taille est comprise entre 0,01 et 0,1 mm ($D = 7d$ et $H = D / 30$), [15,17].

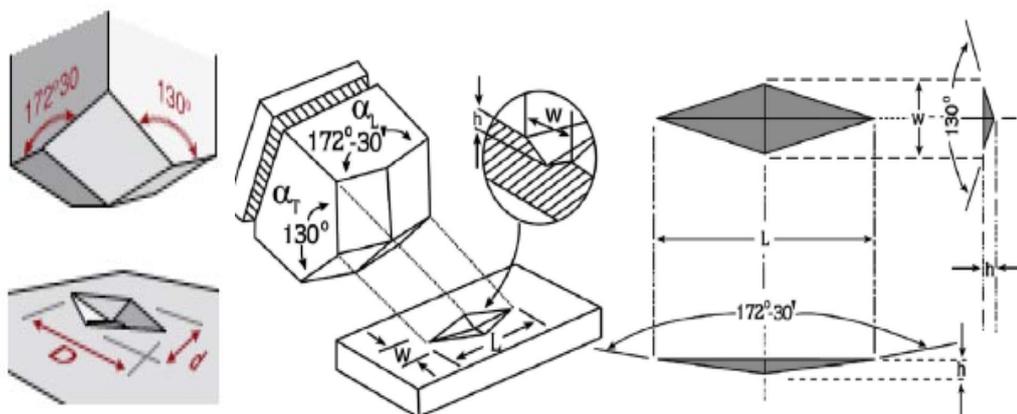


Figure 1.24 Schéma de principe d'un essai de dureté Knoop, [17].

Si on mesure la longueur et la largeur de l'empreinte à l'aide d'un microscope, la dureté de Knoop (HK) est donnée par la formule suivante, [15] :

$$HK = 14,229 \frac{F}{D^2} \quad (1.28)$$

Où F est la charge en kgf et D la longueur de la grande diagonale en millimètre. La norme de micro-dureté Knoop a été adoptée en 1969.

La dureté HK est donnée par un rapport de la charge d'essai F (N) sur la surface de l'empreinte, avec D en mm,[10]:

$$HK = 1,448 \frac{F}{D^2} \quad (1.29)$$

➤ **Correspondance entre échelles de dureté**

La dureté est une propriété complexe qui dépend de la limite d'élasticité et du comportement plastique du matériau testé. La technique de mesure est basée sur une base tribologique très différente. Par conséquent, il ne peut y avoir de correspondance empirique qu'entre différents niveaux. La figure ci-dessous est un exemple. Il y a un autre correspondance très similaire, par exemple pour les aciers : $HV = 0,3.(Rm)$ et $HB = 0,285.(Rm)$

Remarque: Il n'y a pas de comparaison universelle valable des valeurs de dureté par exemple Brinell avec des valeurs de dureté déterminées selon d'autres méthodes de dureté ou à partir des valeurs de résistance à la traction. Il n'existe seulement que des relations statistiques dans des cas particuliers pour lesquels des principes fondamentaux sûrs ont été obtenus pour de telles conversions par des essais comparatifs. Lors de la conversion, il faut indiquer dans chaque cas la méthode utilisée lors de l'essai et la valeur de dureté évaluée selon cette méthode.

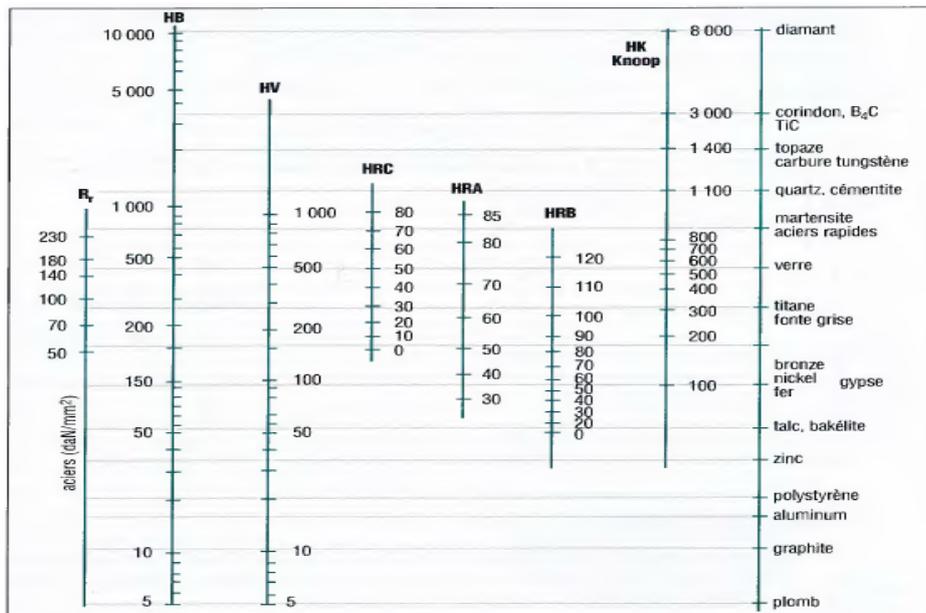


Figure 1.25 Correspondances entre les échelles de dureté, graphique, (partie de l'annexe)[9].

Table de conversion des duretés et résistances à la traction de l'acier				
Brinell HB (P = 30 D ²)	Rockwell		Vickers HV (P = 30 kg)	Résistance à la traction (MPa)
	HRB	HRC		
80	36,4		80	275
85	42,4		85	292
90	47,4		90	308
95	52,0		95	325
100	56,4		100	341
105	60,0		105	358
110	63,4		110	374
115	66,4		115	391
120	69,4		120	407
125	72,0		125	424
130	74,4		130	440
135	76,4		135	457
140	78,4		140	473
145	80,4		145	490
150	82,2		150	506
155	83,8		155	523
160	85,4		160	539
165	86,8		165	556
170	88,2		170	572
175	89,6		175	589
180	90,8		180	606
185	91,8		185	623
190	93,0		190	640
195	94,0		195	657
200	95,0		200	673
205	95,8		205	690
210	96,6		210	706

Figure 1.26 Exemple correspondances entre les échelles de dureté, tableau (partie de l'annexe).

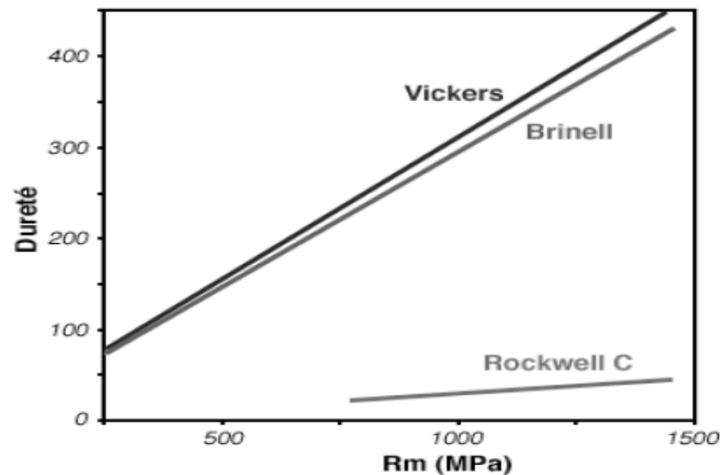


Figure 1.27 Correspondances entre le dureté et la résistance à la rupture R_m , graphique.

1.3.3 Essai de résilience

➤ **Objectif et principe de l'essai**

La connaissance des propriétés mécaniques issues de l'essai de traction peut être insuffisante, car une fracture inférieure à la limite élastique peut être obtenue dans certaines conditions qui rendent le matériau cassant. Les facteurs fragilisant sont:

- L'abaissement de la température ;
- L'augmentation de la vitesse de déformation.

Le principe de l'essai consiste à rompre par choc une éprouvette entaillée reposant sur deux appuis. On détermine l'énergie absorbée caractérisant la résistance aux chocs du matériau

métallique essayé. La résistance aux chocs, donc l'énergie nécessaire pour produire la rupture de l'éprouvette, exprimée en joule par centimètre carré.

$$\text{Résilience} = \frac{\text{Energie absorbée par la rupture (J)}}{\text{Section au droit de l'entaille (cm}^2\text{)}}$$

➤ **Eprouvettes**

On utilise les éprouvettes dont les dimensions sont normalisées, figure (1.28). En ce qui concerne la forme d'entaille, les deux types des éprouvettes peuvent être utilisées : soit avec l'entaille en U, soit avec l'entaille en V à 45°.

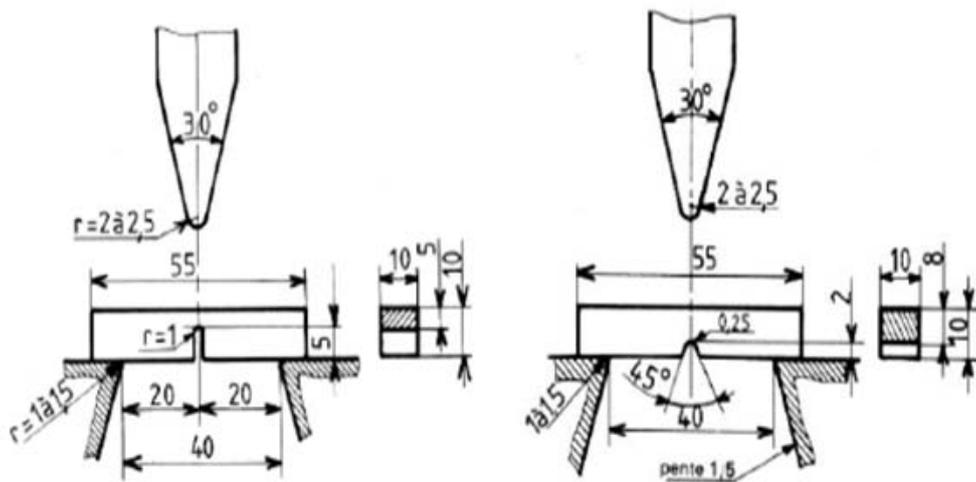


Figure 1.28 Éprouvette Charpy normalisée (A gauche : entaille en U ; A droite : en V),[19].

➤ **Principe de l'essai**

Un marteau de masse m est fixé à l'extrémité d'un pendule, figure (1.29). Le pendule peut tourner autour d'un axe horizontal dans un plan vertical. L'éprouvette est placée sur un support, au point le plus bas de la trajectoire du marteau. Pour effectuer le test, étendez le bras jusqu'à ce que le marteau atteigne sa position initiale P , puis relâchez-le. Quand le pendule vient frapper l'éprouvette, il a une énergie cinétique qui est égale à l'énergie potentielle qu'il avait à sa position de départ mgh_0 , h étant la hauteur du marteau par rapport à sa position d'équilibre. Après la rupture, le marteau remonte. Dans son point culminant (hauteur h_1), l'énergie cinétique résiduelle s'est de nouveau transformée en énergie potentielle mgh_1 . L'énergie dépensée pour rompre l'éprouvette vaut alors : $W = mg (h_0 - h_1)$ avec $m.g$: le poids du pendule

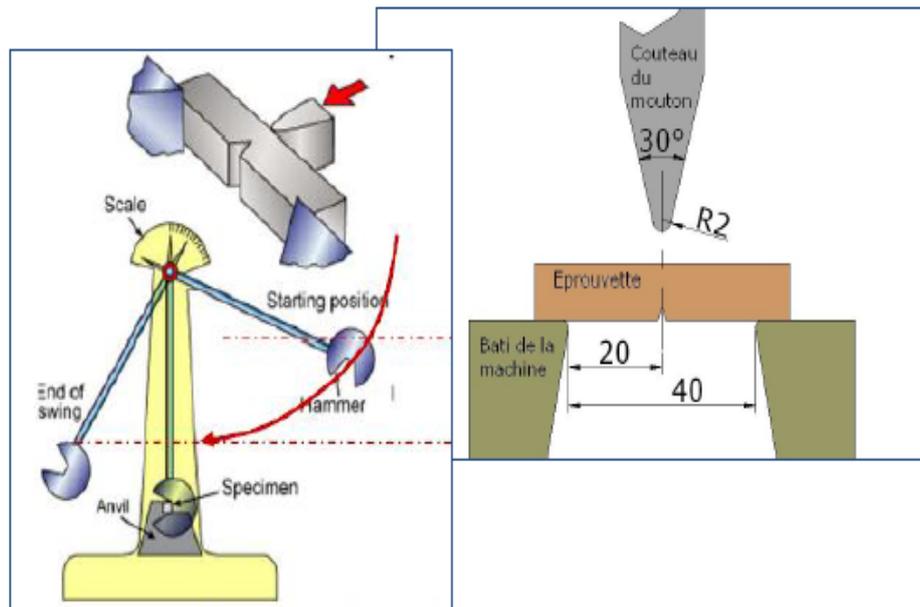


Figure 1.29 Principe de l'essai et du montage de l'éprouvette.

➤ **Machine de l'essai**

Le mouton Pendule Charpy permettant de réaliser des essais de résilience avec une capacité disponible qui peut atteindre 750 J selon les versions. Ce test permet de déterminer l'énergie absorbée lors de la fracture d'un l'échantillon entaillé. Le pendule se compose d'une partie (appelée base) en fonte et de deux support pour l'éprouvette, un pendule avec un bras, un système de levage électrique de poussoir et un mécanisme de détente. Un affichage numérique vous permet de lire l'énergie absorbée par l'éprouvette à tester et un frein ralentissant rapidement l'oscillation. Il existe différentes versions de l'appareil(exemples:150 joules à 750 joules), et sont équipés de différents couteaux à chocs pour répondre à des normes strictes. La sécurité est assurée par un carter de protection.

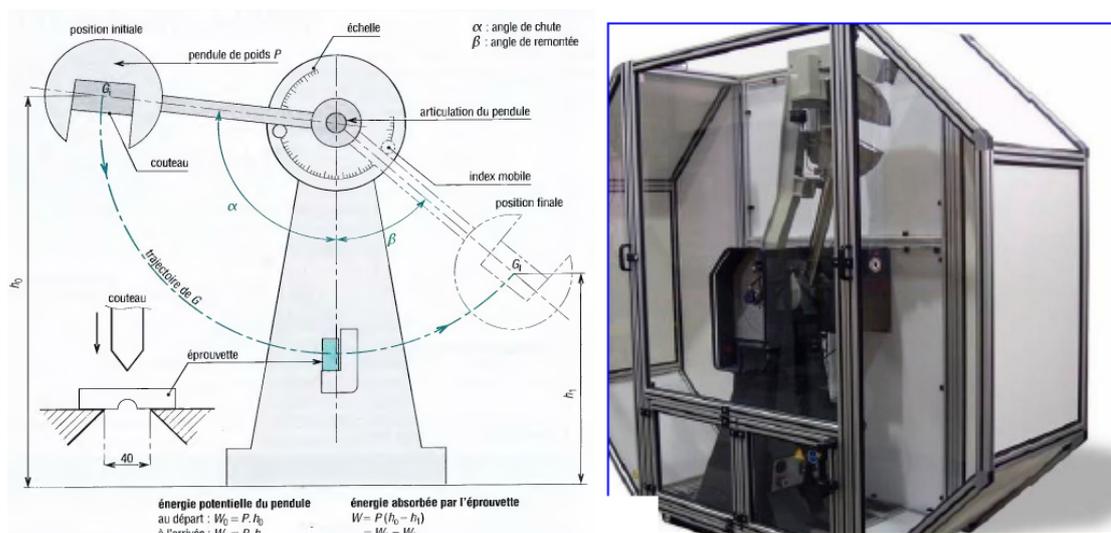


Figure 1.30 Exemples-typiques du Mouton-Charpy, [9].

➤ **Conduite de l'essai et exploitation des résultats**

Le plan d'oscillation du mouton doit passer sensiblement par le centre de gravité de la partie de protection. Le point d'impact coïncide avec le centre de percussion du mouton. Pour l'essai normal, l'énergie disponible du mouton doit être égale 294 Nm. La résilience obtenue avec un tel mouton est désignée par le symbole K

L'éprouvette est placée sur le porte-éprouvette de telle sorte que l'arête du couteau vienne la frapper dans le plan de symétrie de l'entaille et sur la face opposée à celle-ci. La valeur qu'en donne la quantité K est alors généralement approchée par excès en raison du frottement des extrémités de l'éprouvette sur les portes-éprouvettes ; mention de cette particularité doit donc, le cas échéant, accompagner les résultats d'essai.

En principe, il serait utile de connaître la contrainte critique qui provoque une défaillance sous impact. Néanmoins dans la pratique et dans la théorie, le phénomène de la rupture dynamique est très complexe. Même au niveau expérimental, la détermination d'une contrainte critique s'avère déjà extrêmement difficile. Comme la fissuration par impact se déroule à une vitesse très élevée, la contrainte augmente et diminue presque instantanément, il est donc pratiquement impossible d'effectuer une mesure précise. Il faut se rendre compte que la contrainte de l'impact est transmise par les ondes sonores.

L'essai s'effectue à la machine d'essai (figure 1.30) dont la construction et l'installation doivent être rigides et convenir à la norme en vigueur. La machine est équipée par l'échelle prévue pour le mesurage de l'énergie de choc. Dans les conditions standard l'essai s'exécute à une température de 23 °C, et avec une énergie initiale nominale de la machine : W_0 (Joules). Tout d'abord, le Mouton pendule est mis en position initiale à une hauteur h_0 qui correspond ainsi à une énergie de départ W_0 , figure 1.31.

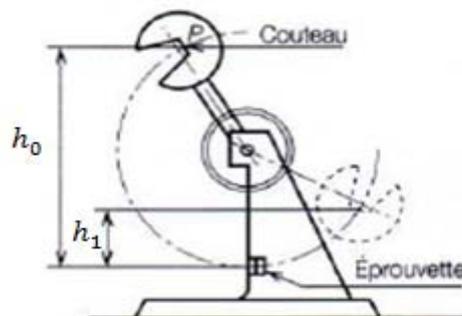


Figure 1.31 Disposition avant et après l'essai Charpy.

$$KCV = \frac{W_i - W_r}{S} = \frac{Mg(h_0 - h_1)}{S} \quad (1.30)$$

Avec : KCV (J/cm^2), S (cm^2), M (Kg), $h_0(m)$ et $h_1(m)$.

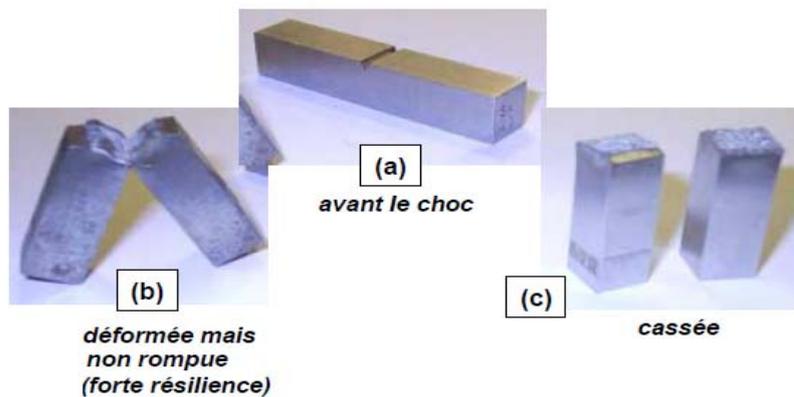


Figure 1.32 Faciès de rupture (Essai de résilience),[19].

1.4 Quelques lois simples

Le principal objectif des essais mécaniques est utilisés pour déterminer une loi destinée à être utilisée pour la prévision du comportement mécanique d'un matériau. Cette loi de comportement mécanique pourra par exemple être appliquée lors de la mise en forme d'une pièce par exemple pour évaluer l'aptitude du matériau à cette mise en forme ou pour des modélisations numériques. Pour ce type d'application, il n'est parfois pas nécessaire de faire appel à des lois compliquées. On se contente alors de relations simples, qui servent simplement à décrire le comportement du matériau dans un cas particulier.

Une courbe contrainte-déformation (σ - ε) lors d'un essai d'érouissage est caractérisée par une partie élastique et une partie plastique. Nous nous intéressons ici principalement à la partie plastique. La déformation plastique sera notée ε_p et la contrainte σ .

Dans le cas d'un essai de traction par exemple, on aura :

$$\sigma = \frac{F}{S}, \quad \varepsilon_p = \varepsilon - \varepsilon_e \quad \text{et} \quad \varepsilon_p = Ln\left(\frac{L}{L_0}\right) - \frac{\sigma}{E} \quad (1.31)$$

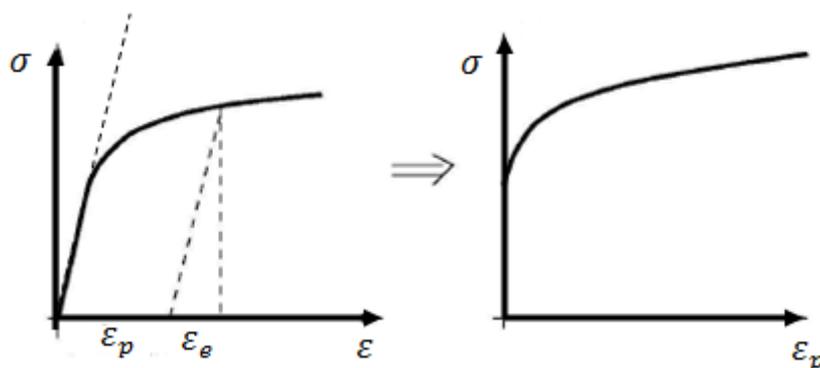


Figure 1.33 Courbe de traction et zone plastique.

En pratique, pour de nombreux matériaux, la zone élastique est très faible que la zone plastique. Par conséquent, la déformation élastique est souvent ignorée dans les méthodes phénoménologiques devant la déformation plastique, et donc de confondre ε et ε_p .

Les principales lois de comportement phénoménologiques utilisées sont les suivantes, [2] :

1.4.1 Loi de Hollomon (1945):

Loi de Hollomon ou loi puissance est décrite sur la figure 1.34, où la contrainte est donnée sous la forme:

$$\sigma = K \varepsilon^n \quad (1.32)$$

K et n sont deux paramètres

ε : Déformation rationnelle (ε_r) dans la zone plastique

σ : Contrainte vraie (σ_v)

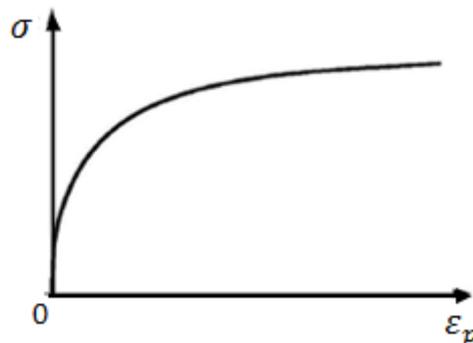


Figure 1.34 Loi de Hollomon.

Pour identifier les paramètres K et n, on transforme la courbe $\sigma = f(\varepsilon)$ en $\text{Ln}(\sigma) = f \text{Ln}(\varepsilon)$ qui devient linéaire :

$$\sigma = K \varepsilon^n \Rightarrow \text{Ln}(\sigma) = \text{Ln}(K) + n \cdot \text{Ln}(\varepsilon) \quad (1.33)$$

La pente de cette courbe donne le coefficient d'écrouissage n :

$$\text{Ln}(\sigma_1) = \text{Ln}(K) + n \cdot \text{Ln}(\varepsilon_1) \quad (1.34)$$

$$\text{Ln}(\sigma_2) = \text{Ln}(K) + n \cdot \text{Ln}(\varepsilon_2) \quad (1.35)$$

$$n = \frac{\text{Ln}(\sigma_2) - \text{Ln}(\sigma_1)}{\text{Ln}(\varepsilon_2) - \text{Ln}(\varepsilon_1)} \quad (1.36)$$

σ_1, ε_1 : Contrainte vraie et déformation rationnelle dans le point (1) de la partie plastique

σ_2, ε_2 : Contrainte vraie et déformation rationnelle dans le point (2) de la partie plastique

Et pour le paramètre K il faut remplacer les valeurs $n, \sigma_1, \varepsilon_1$ (*par exemple*) ou σ_2, ε_2 dans l'une des deux équations précédentes (1.32) ou (1.33) on trouve K(MPa).

1.4.2 Loi de Ludwik (1909):

Cette loi est décrite sur la figure 1.35, ou la contrainte est donnée sous la forme,[20]:

$$\sigma = \sigma_e + K\varepsilon^n \quad (1.37)$$

K et n sont deux paramètres, il faut signaler ici que le paramètre n n'est pas ici le coefficient d'écroutissage.

σ_e : Limite élastique du matériau.

ε : Déformation rationnelle (ε_r)

σ : Contrainte vraie (σ_v)

Pour identifier les paramètres K et n, il faut d'abord identifier la limite élastique σ_e et en suit transforme la courbe $\sigma = f(\varepsilon)$ en $\text{Ln}(\sigma - \sigma_e) = f\text{Ln}(\varepsilon)$ qui devient linéaire

$$\sigma = \sigma_e + K\varepsilon^n \Rightarrow \text{Ln}(\sigma - \sigma_e) = \text{Ln}(K) + n \cdot \text{Ln}(\varepsilon) \quad (1.38)$$

la pente de cette courbe donne le coefficient d'écroutissage n :

$$\text{Ln}(\sigma_1 - \sigma_e) = \text{Ln}(K) + n \cdot \text{Ln}(\varepsilon_1) \quad (1.39)$$

$$\text{Ln}(\sigma_2 - \sigma_e) = \text{Ln}(K) + n \cdot \text{Ln}(\varepsilon_2) \quad (1.40)$$

$$n = \frac{\text{Ln}(\sigma_2 - \sigma_e) - \text{Ln}(\sigma_1 - \sigma_e)}{\text{Ln}(\varepsilon_2) - \text{Ln}(\varepsilon_1)} \quad (1.41)$$

σ_1, ε_1 : Contrainte vraie et déformation rationnelle dans le point (1) de la partie plastique

σ_2, ε_2 : Contrainte vraie et déformation rationnelle dans le point (2) de la partie plastique

Et pour le paramètre K il faut remplacer les valeurs $n, \sigma_1, \varepsilon_1$ (*par exemple*) ou σ_2, ε_2 dans l'une des deux équations précédentes (1.36) ou (1.37) on trouve K(MPa).

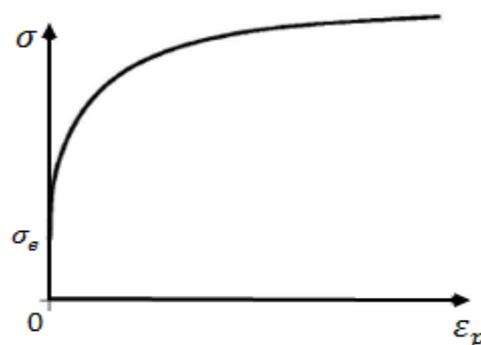


Figure 1.35 Loi de Ludwik.

1.4.3 Loi de Swift (1952):

Cette loi est décrite sur la figure 1.36, ou la contrainte est donnée sous la forme,[21] :

$$\sigma = K(\varepsilon_0 + \varepsilon)^n \quad (1.42)$$

K , ε_0 et n sont des paramètres, il faut signaler ici que le paramètre n n'est pas ici le coefficient d'écroutissage.

ε : Déformation rationnelle (ε_r) dans la zone plastique

σ : Contrainte vraie (σ_v)

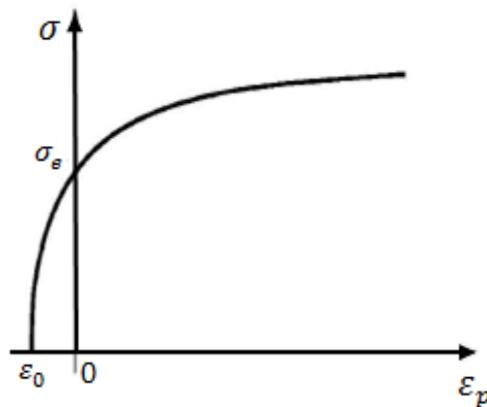


Figure 1.36 Loi de Swift.

On remarque qu'avec cette loi, la limite d'élasticité du matériau vaut

$$\sigma = K\varepsilon_0^n \quad (1.43)$$

Donc il faut identifier les paramètres du matériau K , ε_0 et n en suivant la démarche suivante :

- On calcul la déformation initiale ε_0 à partir de la loi de Hooke simple : $\varepsilon_0 = \frac{\sigma_e}{E}$
- On détermine le coefficient d'écroutissage n de la même manière que Hollomon.
- Identifier le paramètre k de la même manière que Hollomon.

1.4.4 Loi de Voce

Cette loi est décrite sous la forme,[22] :

$$\sigma = a - b \cdot \exp(-n \cdot \varepsilon) \quad (1.44)$$

Avec : $a = \sigma_{sat}$ et $b = \sigma_{sat} - \sigma_e$

En utilisant les équations suivantes pour déterminer le coefficient d'anisotropie n :

$$\sigma_1 = a - b \cdot \exp(-n \cdot \varepsilon_1) \quad (1.45)$$

$$\sigma_2 = a - b \cdot \exp(-n \cdot \varepsilon_2) \quad (1.46)$$

$$\text{Ln} \left(\frac{\sigma_1 - a}{b} \right) = -n \cdot \varepsilon_1 \quad (1.47)$$

$$\text{Ln} \left(\frac{\sigma_2 - a}{b} \right) = -n \cdot \varepsilon_2 \quad (1.48)$$

Avec :

σ_1, ε_1 : Contrainte vraie et déformation rationnelle dans le point (1) de la partie plastique

σ_2, ε_2 : Contrainte vraie et déformation rationnelle dans le point (2) de la partie plastique.

C

Chapitre

2

Pages :37-64

Elasticité – Viscoélasticité

2.1 Elasticité linéaire

Les propriétés des matériaux dépendent largement de la nature des liaisons entre les atomes et dépendent aussi de la densité atomique. En physique, l'élasticité est la propriété d'un matériau solide de reprendre sa forme d'origine après avoir été déformé, donc on a une déformation réversible.

En cas d'équilibre et sans contrainte, la distance interatomique (au repos) r_0 sépare les atomes, Figure (2.1).

En cas de traction, la distance entre les atomes augmente, et une force d'attraction contre l'espace $r_0 + r$ apparaît. Dans le cas de la compression, cette distance entre les atomes diminue et une force répulsive apparaît qui résiste au rapprochement pour $(r_0 - r)$. Dans le cas de petites déformations donc petites variations de la valeur de r , la pente K de la courbe définit la rigidité (la raideur) de l'assemblage. Au repos, $F_L = 0$ et $r = r_0$, et la raideur de la liaison de l'assemblage a pour valeur bien déterminée K_0 , [23].

Les liaisons interatomiques assurent la cohésion d'un matériau cristallin, et leur raideur permet théoriquement de déterminer les modules élastiques du matériau considéré, à condition de prendre en compte la structure cristalline. En suit passer de la raideur microscopique (raideur de la liaison) à la raideur macroscopique (module d'Young E).

Dans le cas où la liaison est excessivement étirée, la force de liaison augmente jusqu'à $F_{max}=F_m$, où la valeur de $r=r_m$ correspond à la dissociation de la liaison. Si, en première approximation, nous modélisons la fonction $\sigma(r)$ avec une fonction sinusoïdale, on peut estimer la limite d'élasticité théorique σ_e , proche de $E \cdot \frac{\lambda}{\pi}$ avec λ une fraction de la distance interatomique. Pour la plupart des céramiques, lorsque l'on mesure expérimentalement la limite d'élasticité, on obtient une valeur de l'ordre de $E/2 \cdot \pi$. Cependant, en ce qui concerne les métaux, les valeurs de limite d'élasticité expérimentales sont très inférieures à la valeur théorique, [23].

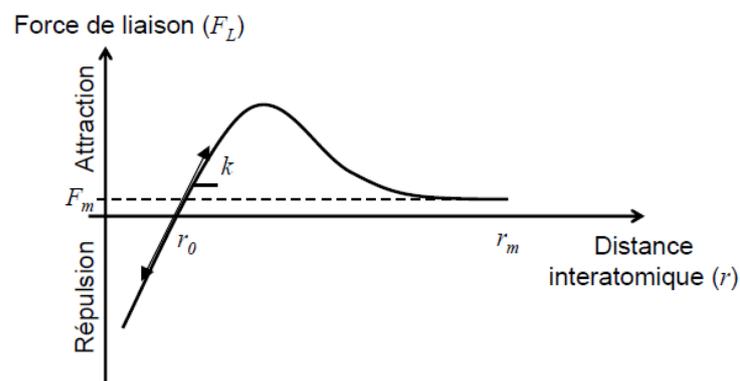


Figure 2.1 Force de liaison en fonction de la distance interatomique.

2.1.1 Loi de Hooke généralisée

La loi de Hooke a été généralisée par Cauchy (1789-1857), qui a proposé d'exprimer chaque composante du tenseur des contraintes comme une fonction linéaire des composantes du tenseur des déformations. La loi de Hooke est souvent écrite sous la forme, [2,24] :

$$\sigma = C \cdot \varepsilon \quad , \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (2.1)$$

$$\sigma_{11} = C_{1111} \cdot \varepsilon_{11} + C_{1112} \cdot \varepsilon_{12} + C_{1113} \cdot \varepsilon_{13} + C_{1121} \cdot \varepsilon_{21} + C_{1122} \cdot \varepsilon_{22} + C_{1123} \cdot \varepsilon_{23} + C_{1131} \cdot \varepsilon_{31} + C_{1132} \cdot \varepsilon_{32} + C_{1133} \cdot \varepsilon_{33}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1121} & C_{1122} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1132} & C_{1133} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

Où C est un tenseur du quatrième ordre appelé tenseur des rigidités ou tenseur d'élasticité (les composantes covariantes de ce tenseur sont C_{ijkl}).

Le tenseur des rigidités fait intervenir l'ensemble des caractéristiques élastiques du matériau. De même, les déformations sont reliées linéairement aux contraintes par la relation inverse :

$$\varepsilon = S \cdot \sigma \quad , \quad \varepsilon_{kl} = S_{ijkl} \cdot \sigma_{ij} \quad \text{Avec} \quad S = C^{-1} \quad (2.3)$$

Où S est le tenseur des compliances ou tenseur des complaisances élastiques du matériaux (ses composantes covariantes sont S_{ijkl}). Les tenseurs C et S ont a priori 81 composantes (chaque indice varie de 1 à 3).

Toutefois, nous avons vu que les tenseurs des contraintes de Cauchy et des déformations sont symétriques. Ils n'ont donc chacun que 6 composantes indépendantes, et leur liaison linéaire peut alors être réalisée à l'aide de 36 termes seulement.

Avec la condition $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk}$. Les composantes de la matrice présente dans la relation précédente sont souvent notées C_{IJ} , avec I et J variant de 1 à 6.

Symétrie des opérateurs σ_{ij} et ε_{ij}

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad , \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad , \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1121} & C_{1122} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1132} & C_{1133} \\ X & X & X & X & X & X & X & X & X \\ X & X & X & X & X & X & X & X & X \\ X & X & X & X & X & X & X & X & X \\ X & X & X & X & X & X & X & X & X \\ X & X & X & X & X & X & X & X & X \\ X & X & X & X & X & X & X & X & X \\ X & X & X & X & X & X & X & X & X \\ X & X & X & X & X & X & X & X & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3112} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1212} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_6 \\ \sigma_5 \\ \sigma_2 \\ \sigma_4 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} \longrightarrow \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_6 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} \longrightarrow \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_{11} = C_{11} \cdot \varepsilon_1 + C_{12} \cdot \varepsilon_2 + C_{13} \cdot \varepsilon_3 + C_{14} \cdot \varepsilon_4 + C_{15} \cdot \varepsilon_5 + C_{16} \cdot \varepsilon_6 \quad \boxed{\sigma_i = C_{ij} \cdot \varepsilon_j}$$

La relation d'élasticité linéaire peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}$$

(2.5)

$$\text{Avec :} \quad \begin{array}{lll} \sigma_{ii} = \sigma_{\alpha} & \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{\alpha} & \alpha = 1 \\ \sigma_{ij} = \sigma_{\beta} & \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{\beta} & \beta = 9 - i - j \end{array}$$

➤ **Anisotropie du comportement élastique**

Les propriétés mécaniques macroscopiques des matériaux dépendent de leurs microstructures. L'organisation microstructurale, plus ou moins régulière, conduit souvent à une anisotropie au niveau macroscopique, soit en relation à des caractéristiques d'anisotropie du protocole d'élaboration, soit en relation à la microstructure propre du matériau. Le tenseur d'élasticité, par sa structure, ne peut posséder que huit groupes de symétries distincts voir le tableau ci-dessous,[25].

Tableau 2.1 Systèmes cristallins.

Système	Côtés de la maille	Angles	C_{ij}
Triclinique	$a \neq b \neq c$	$\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$	21
Monoclinique	$a \neq b \neq c$	$\alpha = \beta = 90^\circ \neq \gamma$	13
Orthorhombique	$a \neq b \neq c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	9
Rhomboédrique	$a = b = c$	$\alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$	7 - 6
Tétraгонаle	$a = b \neq c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	7 - 6
Hexagonale	$a = b \neq c$	$\alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$	5
Cubique	$a = b = c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$	3
Isotrope			2

2.1.2 Energie de déformation élastique

Nous avons jusqu'à présent utilisé la symétrie des tenseurs de contraintes et de déformations, ainsi que leur relation linéaire via la loi de Hooke. Nous pouvons maintenant utiliser l'autre caractéristique de la déformation élastique, qui est sa réversibilité. Considérons donc un solide, et isolons un sous domaine $-A$ soumis à des forces volumiques f_v , et à un vecteur contrainte \vec{t} sur sa frontière (pas de forces d'accélération),[2,26].

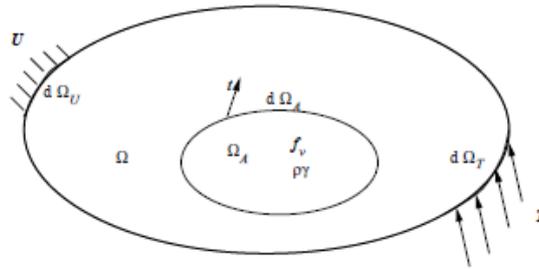


Figure 2.2 Solide en cours de transformation.

Nous nous intéressons à une transformation élémentaire associée aux efforts appliqués sur le sous-domaine A. Cette transformation élémentaire réversible sera caractérisée par un vecteur déplacement $\delta \vec{u}$, et une énergie interne dE sous la forme :

$$dE = \delta W + \delta Q \text{ avec } \begin{cases} \delta W = \int_{\partial \Omega_A} \vec{t} \cdot \delta \vec{u} ds + \int_{\Omega_A} \vec{f}_v \cdot \delta \vec{u} ds \\ \delta Q = T dS \end{cases} \quad (2.6)$$

Où T est la température absolue et S l'entropie. Toutefois le terme $\pm W$ peut être modifié comme suit, en utilisant le théorème de la divergence, le fait que le système est en équilibre, et la symétrie du tenseur des contraintes :

$$\delta W = \int_{\Omega_A} \sigma \cdot \delta \epsilon dv \quad (2.7)$$

Il est donc possible d'écrire l'énergie interne par unité de volume dans le solide de sous la forme :

$$de = \sigma \cdot \delta \epsilon + T ds \quad (2.8)$$

La température est dans notre cas constante (pas d'échange de chaleur entre -A et l'extérieur). De plus, e et s sont des fonctions d'état, de sorte que de et ds sont des différentielles totales. Le travail $\pm W$ s'écrit donc sous la forme :

$$\delta w = de - T ds = d(e - Ts) = dw = \sigma \cdot d\epsilon \quad (2.9)$$

L'énergie de déformation par unité de volume est finalement la forme quadratique définie positive suivante :

$$\frac{\partial w}{\partial \epsilon} = \sigma = C \cdot \epsilon, \text{ d'où } \frac{\partial^2 w}{\partial \epsilon \partial \epsilon} = C \quad (2.10)$$

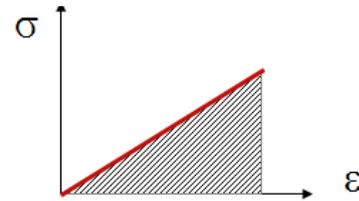
Les relations précédentes se traduisent par le fait que la matrice (6x6) du tenseur des rigidités élastiques est symétrique et définie positive. Cette matrice ne possède donc que

$(6 \times 7)/2 = 21$ composantes indépendantes. Le tenseur des rigidités élastiques C ne possède donc que 21 composantes indépendantes dans le cas le plus général. Un raisonnement analogue nous aurait conduit au même résultat pour le tenseur des compliances S , qui ne possède aussi que 21 composantes indépendantes.

$$w = \frac{1}{2} C \cdot \epsilon \cdot \epsilon \quad (2.11)$$

$$w = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (\sigma_{ij} \epsilon_{ij}) \quad (2.12)$$

$$\left. \begin{aligned} w(\epsilon) &= \frac{1}{2} \{\epsilon\}^t \{C\} \{\epsilon\} \\ w(\sigma) &= \frac{1}{2} \{\sigma\}^t \{S\} \{\sigma\} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow w = \frac{1}{2} \{\sigma\}^t \{\epsilon\}$$



L'énergie élastique est l'énergie associée à la déformation élastique d'un solide ou d'un fluide. En effet, pour déformer un solide ou un fluide, il faut lui appliquer une force qui provoquera un changement de volume ΔV . Par conséquent, le point d'application de la force changera de position, et par conséquent, l'effet de cette force (le travail) permet de déterminer l'énergie de déformation.

Cette énergie est exprimée en termes d'un état de référence (par exemple un système exposé à la pression atmosphérique). En mécanique des milieux continus (MMC), la densité d'énergie élastique est exprimée par l'unité ($J \cdot m^{-3}$).

Dans le cas d'une traction unidirectionnelle simple, en fonction de σ et ϵ :

$$w = \frac{1}{2} \sigma \cdot \epsilon \quad (2.13)$$

Selon la loi de Hooke, en impliquant le module d'élasticité longitudinal E (module d'Young), (voir annexe):

$$w = \frac{1}{2} E \cdot \epsilon^2 \quad (2.14)$$

Dans le cas du cisaillement pur, l'énergie de déformation est exprimée en fonction de τ et γ :

$$w = \frac{1}{2} \tau \cdot \gamma \quad (2.15)$$

En impliquant le module de Glissement (cisaillement) G :

$$w = \frac{1}{2} G \cdot \gamma^2 \quad (2.16)$$

2.1.3 Relations de symétrie

En pratique, les matériaux possèdent des symétries supplémentaires qui permettent de restreindre encore le nombre de composantes indépendantes du tenseur des rigidités. Les principaux cas rencontrés sont l'orthotropie (symétrie par rapport à trois plans orthogonaux), qui réduit le nombre de composantes à 9 (c'est le cas par exemple du bois et des cristaux orthorhombiques), la symétrie cubique (orthotropie avec des propriétés identiques dans les trois directions orthogonales aux plans de symétrie), qui réduit le nombre de composantes à 3 (c'est la cas de la structure de nombreux métaux), et l'isotropie (mêmes propriétés dans toutes les directions), qui réduit le nombre de composantes à 2 (hypothèse utilisée en mécanique des milieux continus).

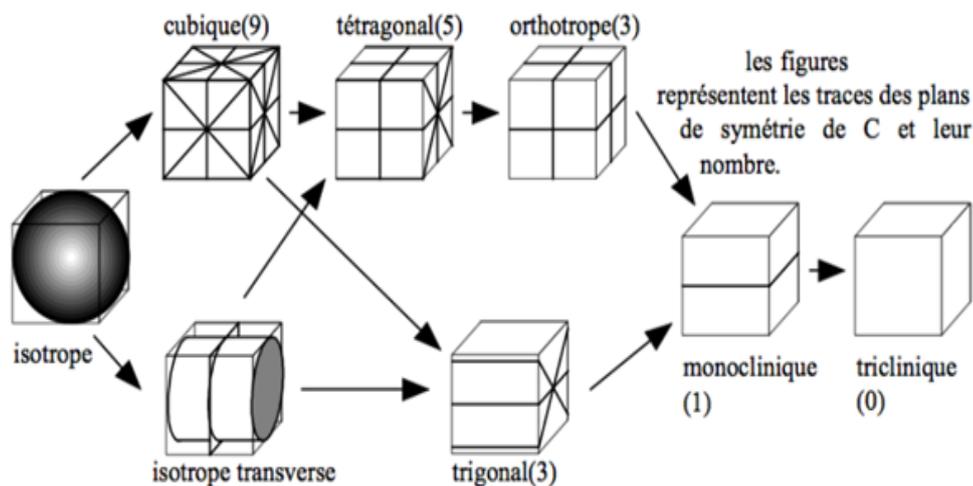


Figure 2.3 Les plans de symétrie.

2.1.3.1 Symétrie cubique :

Dans le cas de la symétrie cubique, les trois composantes indépendantes de C sont souvent notées $C_{11}(=C_{1111}), C_{12}(=C_{1122})$ et $C_{44}(=C_{2323})$. Des notations identiques pour S conduisent aux relations suivantes,[2] :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{31} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

2.1.3.2 Matériau anisotrope :

Dans le cas le plus général du comportement des matériaux, la matrice de rigidité et la matrice de souplesse sont déterminées chacune par 21 constantes indépendantes. Ce cas correspond à un matériau ne possédant aucun plan de symétrie. Un tel matériau est appelé matériau triclinique ou matériau anisotrope.

2.1.3.3 Matériau monoclinique :

Par définition, un matériau monoclinique possède un plan de symétrie matériel. Dans ce cas, les matrices de comportement (S ou C) doit être telle qu'un changement de base effectué par rapport à ce plan de symétrie ne modifie pas les matrices. Lorsque des symétries matérielles existent le nombre de composantes nécessaires pour décrire le comportement élastique linéaire des matériaux est inférieur à 21 constantes indépendantes ,[26,27].

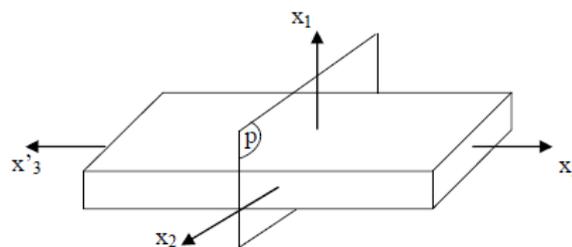


Figure 2.4 Plan de symétrie (x1-x2).

La forme de la matrice de rigidité C (ou souplesse S) doit être telle qu'un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce plan de symétrie ne modifie pas la matrice. Par exemple dans le cas où le plan de symétrie est le plan (1,2), l'exploitation des changements de base conduit à une matrice de rigidité de la forme :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

La matrice de souplesse S a la même forme. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 13.

❖ **démonstration de la forme de la matrice de rigidité**

matériau monoclinique donc c'est un matériau qui possède un plan de symétrie par exemple le plan (x_1, x_2) donc : $x_1 // x_1'$; $x_2 // x_2'$ et $x_3 = -x_3'$,[27,11].

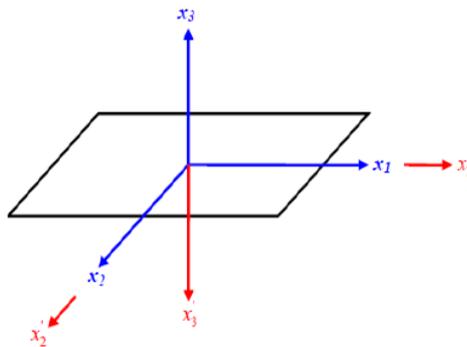


Figure 2.5 Corps ayant un plan de symétrie.

On calcul les contraintes et les déformations dans la nouvelle base au moyen de la relation suivante :

$$[\sigma'] = [\alpha]^T [\sigma] [\alpha] \quad (2.20)$$

$$[\varepsilon'] = [\alpha]^T [\varepsilon] [\alpha] \quad (2.21)$$

Avec :

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Après calcul matricielle on a :

$$[\sigma'] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & -\sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & -\sigma_{23} \\ -\sigma_{13} & -\sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

$$[\varepsilon'] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & -\varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & -\varepsilon_{23} \\ -\varepsilon_{13} & -\varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Dans le système initial (o x₁x₂x₃) et on adopte la notation de Voigt :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Dans le nouveau système (o x'₁, x'₂, x'₃) et on adopte la notation de Voigt :

$$\begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_3 \\ \sigma'_4 \\ \sigma'_5 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & C'_{14} & C'_{15} & C'_{16} \\ C'_{21} & C'_{22} & C'_{23} & C'_{24} & C'_{25} & C'_{26} \\ C'_{31} & C'_{32} & C'_{33} & C'_{34} & C'_{35} & C'_{36} \\ C'_{41} & C'_{42} & C'_{43} & C'_{44} & C'_{45} & C'_{46} \\ C'_{51} & C'_{52} & C'_{53} & C'_{54} & C'_{55} & C'_{56} \\ C'_{61} & C'_{62} & C'_{63} & C'_{64} & C'_{65} & C'_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \varepsilon'_2 \\ \varepsilon'_3 \\ \varepsilon'_4 \\ \varepsilon'_5 \\ \varepsilon'_6 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Selon les équations de $[\sigma']$ et $[\varepsilon']$ on a :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C'_{11} & C'_{12} & C'_{13} & -C'_{14} & -C'_{15} & C'_{16} \\ C'_{21} & C'_{22} & C'_{23} & -C'_{24} & -C'_{25} & C'_{26} \\ C'_{31} & C'_{32} & C'_{33} & -C'_{34} & -C'_{35} & C'_{36} \\ -C'_{41} & -C'_{42} & -C'_{43} & C'_{44} & C'_{45} & -C'_{46} \\ -C'_{51} & -C'_{52} & -C'_{53} & C'_{54} & C'_{55} & -C'_{56} \\ C'_{61} & C'_{62} & C'_{63} & -C'_{64} & -C'_{65} & C'_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Le matériau est supposé invariant par symétrie par rapport au plan (x₁, x₂) c.à.d. que les deux tenseurs des constantes élastiques dans l'initiale et la nouvelle base sont égale ce qui donne :

$$C_{ijkl} = C'_{ijkl} \quad (2.28)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} & 0 \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Pour cela, il faut avoir les relations suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} C_{14} = C_{24} = C_{34} = C_{64} = 0 \\ C_{15} = C_{25} = C_{35} = C_{65} = 0 \end{array} \right\} \quad (2.30)$$

2.1.3.4 Matériau orthotrope :

Un matériau orthotrope est un matériau qui possède trois plans de symétrie, perpendiculaires deux à deux. Il est à noter que l'existence de deux plans de symétrie perpendiculaires implique l'existence du troisième plans. c'est à dire que n'importe quel point dans le plan suivant les coordonnées $(O x_1 x_2 x_3)$ est le même dans l'autre plan suivant les coordonnées x'_1, x'_2, x'_3 . Autrement dit : $x_1 // x'_1$; $x_2 // x'_2$ et $x_3 // x'_3$,[24,26,27].

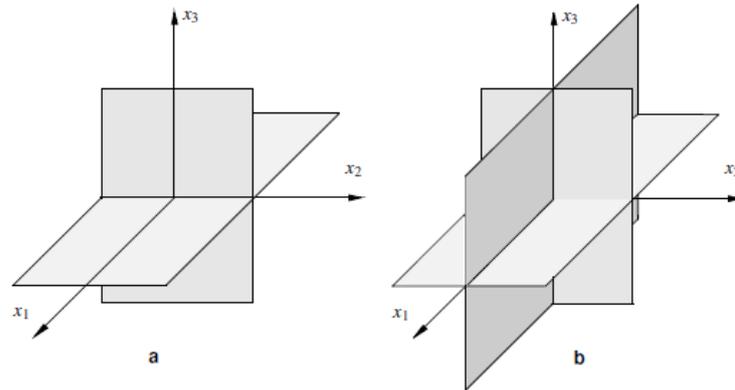


Figure 2.6 Matériau orthotrope (a- plans de symétrie (x_1-x_2) et (x_2-x_3) , b- plans de symétrie (x_1-x_2) , (x_2-x_3) et (x_1-x_3)).

La forme de la matrice de rigidité est donc obtenue en ajoutant au matériau monoclinique un plan de symétrie perpendiculaire au précédent. L'invariance de la matrice dans un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce deuxième plan.

Dans le système initial $(Ox_1x_2x_3)$ on prend le cas monoclinique comme base initiale et on rajoutant un deuxième plan de symétrie avec la matrice de passage α correspond à cet de état de symétrie :

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

Finalement on obtient en plus de 8 constantes de cas monoclinique 4 constantes aussi :

$$C_{16} = C_{26} = C_{36} = C_{54} = 0$$

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

$$(2.32)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Les matrices de rigidité et de souplesse étant inverses l'une de l'autre, nous avons,[24] :

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{S_{22}S_{33} - S_{23}^2}{\Delta S}, & C_{22} &= \frac{S_{33}S_{11} - S_{13}^2}{\Delta S}, & C_{33} &= \frac{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}{\Delta S}, \\ C_{12} &= \frac{S_{13}S_{23} - S_{12}S_{33}}{\Delta S}, & C_{13} &= \frac{S_{12}S_{23} - S_{13}S_{22}}{\Delta S}, & C_{23} &= \frac{S_{12}S_{13} - S_{23}S_{11}}{\Delta S}, \\ C_{44} &= \frac{1}{S_{44}}, & C_{55} &= \frac{1}{S_{55}}, & C_{66} &= \frac{1}{S_{66}}, \end{aligned}$$

avec $\Delta S = S_{11}S_{22}S_{33} - S_{11}S_{23}^2 - S_{22}S_{13}^2 - S_{33}S_{12}^2 + 2S_{12}S_{23}S_{13}$.

(2.35)

▪ **Exemple matériaux composites (chaîne avec trame)**

La relation d'élasticité s'écrit, en introduisant les modules de l'ingénieur, sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Le comportement élastique d'un matériau composite orthotrope peut être décrit par 9 modules indépendants,[24,26] :

-Trois modules d'Young : E_1, E_2, E_3 ou E_L, E_T, E_T

-Trois coefficients de Poisson : $\nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{13}$ ou $\nu_{LT}, \nu_{TT}, \nu_{LT}$

-Trois modules de cisaillements : G_{12}, G_{23}, G_{13} ou G_{LT}, G_{TT}, G_{LT}

Les trois autres coefficients de Poisson sont déterminés à l'aide de la relation :

$$\frac{E_i}{\nu_{ij}} = \frac{E_j}{\nu_{ji}} \quad \text{avec } i, j=1,2,3 \text{ ou } L, T, T' \quad (2.37)$$

❖ **Constantes de souplesse :**

Les expressions des constantes de souplesse s'obtiennent sans difficulté :

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1}, & S_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1}, & S_{13} &= -\frac{\nu_{13}}{E_1}, \\ S_{22} &= \frac{1}{E_2}, & S_{23} &= -\frac{\nu_{23}}{E_2}, & S_{33} &= \frac{1}{E_3}, \\ S_{44} &= \frac{1}{G_{23}}, & S_{55} &= \frac{1}{G_{13}}, & S_{66} &= \frac{1}{G_{12}}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

❖ **Constantes de rigidité :**

Les expressions des constantes de rigidité s'obtiennent sans difficulté :

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, & C_{12} &= \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_3 \Delta}, \\ C_{13} &= \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta}, & C_{22} &= \frac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta}, \\ C_{13} &= \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta}, & C_{33} &= \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta}, \\ C_{44} &= G_{23}, & C_{55} &= G_{13}, & C_{66} &= G_{12}, \end{aligned}$$

avec

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3} \quad (2.39)$$

La matrice de souplesse a la même forme. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est ramené à 9.

2.1.3.5 Matériau orthotrope à isotrope transverse :

Si la caractéristique du milieu ne change pas en raison de la direction obtenue en tournant autour d'un axe privilégié, le milieu est appelé isotrope transverse pour la caractéristique donnée.

Tout plan passant par l'axe privilégié est un plan de symétrie pour ce matériau. Donc le milieu est déjà considéré orthotrope. Donc un changement de base effectué par rotation quelconque autour de cet axe doit laisser inchangée la matrice de rigidité C (ou souplesse S),[26,27].

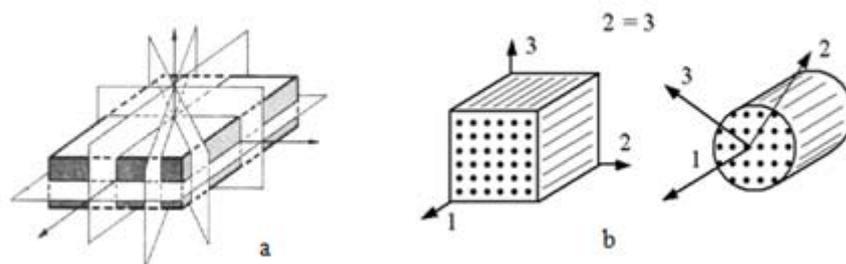


Figure 2.7 Matériau isotrope transverse (a- exemple des plans d'isotropie, b-exemple : matériau composite UD).

Dans le cas d'une isotropie transverse portée par le troisième axe de la base, il est nécessaire d'avoir une invariance de la loi de comportement pour toute rotation définie par cette relation.

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Par rapport au cas orthotrope, nous aurons des relations supplémentaires et en définitive nous aurons quatre nouvelles équations:

$$E_1 = E_2, \quad G_{13} = G_{23}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{23}}{E_2} \quad \text{et} \quad G_{12} = \frac{E_1}{2(1+\nu_{12})} \quad (2.41)$$

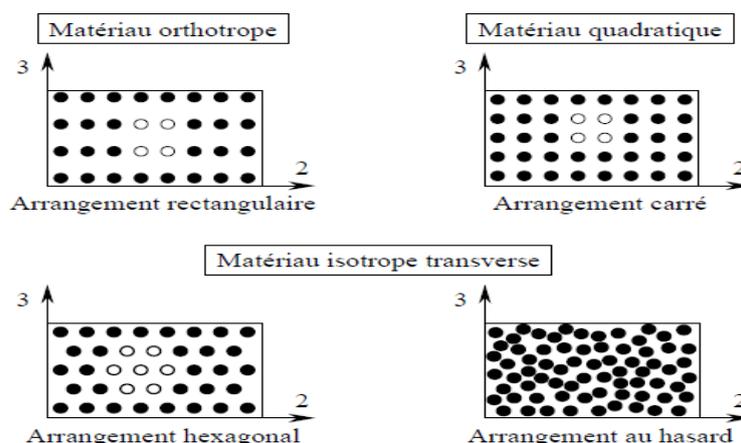


Figure 2.8 Effet de l'arrangement des fibres sur la symétrie

Dans le cas du comportement du matériau isotrope transverse de la figure 2.8 on a :

$$E_2 = E_3, G_{12} = G_{13}, \nu_{12} = \nu_{13},$$

$$\nu_{21} = \nu_{31}, \nu_{23} = \nu_{32} \text{ et } G_{23} = \frac{E_2}{2(1+\nu_{23})} \quad (2.42)$$

Un exemple de la matrice de rigidité $[C_{ij}]$ s'écrit :

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22} - C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

La matrice de souplesse a la même forme. Les propriétés du matériau orthotrope à isotrope transverse sont déterminées par 5 constantes d'élasticité indépendantes.

2.1.3.6 Matériau isotrope :

Un matériau est isotrope si ses propriétés sont indépendantes du choix des axes de référence. Il n'existe alors pas de direction privilégiée, et la matrice de rigidité (ou souplesse) doit être invariante dans tout changement de bases orthonormées. Ou si la règle d'isotropie transverse est vraie pour trois axes orthogonaux, le milieu est dit isotrope, figure (2.9a). Matériau isotrope comportant un nombre infini de plans de symétrie, figure (2.9b), [2,26,27,11].

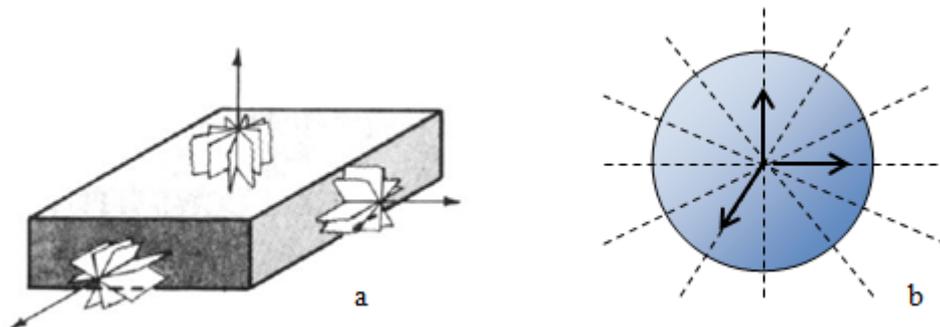


Figure 2.9 Les plans de symétrie dans un matériau est isotrope.

On trouvera les coefficients élastiques de ces corps, à partir de ceux des matériaux cubiques. En écrivant l'invariance dans n'importe quelle rotation du système d'axes et le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 2:

$$[\sigma'] = [\alpha]^T [\sigma] [\alpha] \quad (2.44)$$

$$[\varepsilon'] = [\alpha]^T [\varepsilon] [\alpha] \quad (2.45)$$

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

On trouve qu'en plus des relations du cas cubique, on obtient de nouvelles relations entre les coefficients élastiques du tenseur de raideur, la forme de la matrice de rigidité :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{11}-C_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{11}-C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{11}-C_{12} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{13} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

Et la forme de la matrice de souplesse est :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{23} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{13} \\ \sqrt{2}\varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{11}-S_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{11}-S_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{11}-S_{12} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{13} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

Les propriétés mécaniques élastiques d'un matériau isotrope sont déterminées par deux constantes d'élasticité indépendantes S_{11} et S_{12} . On pose classiquement le module d'Young et du coefficient de Poisson E, ν avec les relations suivantes :

$$S_{11} = \frac{1}{E}, \quad S_{12} = \frac{-\nu}{E} \implies S_{11} - S_{12} = \frac{1+\nu}{E} \quad (2.50)$$

Ces deux constantes matériau sont normalement suffisantes pour décrire le comportement élastique isotrope du matériau.

Démonstration

Lorsque l'on applique un état de traction uniforme suivant l'axe (N_1) d'un échantillon isotrope on obtient :

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} = S_{11}\sigma_{11} &\Rightarrow \sigma_{11} = S_{11}^{-1}\epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} = S_{12}\sigma_{11} &\Rightarrow \epsilon_{22} = S_{12}S_{11}^{-1}\epsilon_{11} \\ \epsilon_{33} = S_{12}\sigma_{11} &\Rightarrow \epsilon_{33} = S_{12}S_{11}^{-1}\epsilon_{11} \end{aligned} \tag{2.51}$$

D'un point de vue expérimental, La loi de Hooke s'écrit classiquement en fonction du module d'Young et du coefficient de Poisson.

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= E\epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} &= -\nu\epsilon_{11} \\ \epsilon_{33} &= -\nu\epsilon_{11} \end{aligned} \tag{2.52}$$

Les propriétés mécaniques élastiques d'un matériau isotrope sont déterminées par deux coefficients d'élasticité indépendantes λ et μ :

$$C_{11} = \lambda + 2\mu \quad \text{et} \quad C_{12} = \lambda \tag{2.53}$$

$$C_{11} - C_{12} = 2\mu \tag{2.54}$$

Ces deux coefficients de Lamé (λ et μ) sont uniformes à une contrainte, l'unité est donc Pascal (Pa) ou Newtons par mètre carré (N / m²).

Les relations entre les coefficients λ, μ et E, ν sont :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = C_{44} = G, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = C_{12} \tag{2.55}$$

$$E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \mu \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \tag{2.56}$$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \tag{2.57}$$

Cette forme est employée classiquement. Cependant, l'écriture suivante de la loi de Hooke avec le facteur $\sqrt{2}$ devant les déformations de cisaillement et les contraintes de cisaillement permet de

donner une expression particulièrement simple à l'énergie élastique. La matrice des compliances n'est pas affectée par la présence du facteur $\sqrt{2}$

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \sqrt{2}\epsilon_{xz} \\ \sqrt{2}\epsilon_{yz} \\ \sqrt{2}\epsilon_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sqrt{2}\sigma_{xz} \\ \sqrt{2}\sigma_{yz} \\ \sqrt{2}\sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sqrt{2}\sigma_{23} \\ \sqrt{2}\sigma_{31} \\ \sqrt{2}\sigma_{12} \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1+\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1+\nu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{1+\nu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \sqrt{2}\epsilon_{23} \\ \sqrt{2}\epsilon_{31} \\ \sqrt{2}\epsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\epsilon_{xy} \\ 2\epsilon_{xz} \\ 2\epsilon_{yz} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

❖ **Déformation plane (D.P.)** : Si le champ de déplacement est tel qu'il soit indépendant de la coordonnée (x_3 par exemple) et que sa composante soit nulle ($\epsilon_3=0$), alors on dit que l'on a affaire à un état de déformations planes.

$$2\mu = \frac{E}{1+\nu} \quad , \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.61)$$

❖ **Contrainte plane (C.P.)** : Un domaine sera en état de contraintes planes si le champ de contrainte en tout point ne dépend que de deux coordonnées spatiales (x_1, x_2 par exemple) et les composantes du tenseur contrainte associées à la troisième coordonnée sont nulles (σ_{13}, σ_{23} et σ_{33}).

$$2\mu = \frac{E}{1+\nu} \quad , \quad \lambda = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \quad (2.62)$$

-Loi de comportement élastique linéaire dans le cas isotrope

Vus dans le cas de l'essai de traction. La loi de comportement élastique linéaire s'écrit dans le cas isotrope de la façon suivante :

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda tr(\varepsilon_{ij}).I = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} tr(\varepsilon_{ij}).I \right) \quad (2.63)$$

Et dans le sens inverse :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} tr(\sigma_{ij}).I = \frac{1+\nu}{E} \cdot \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} tr(\sigma_{ij}).I \quad (2.64)$$

Où I : Tenseur identité.

Les propriétés élastiques d'un matériau considéré comme homogène, isotrope en élasticité linéaire, sont déterminées par deux des modules. Par conséquent, ces formules peuvent être utilisées pour calculer chacune à partir de deux d'entre elles.

Tableau 2.2 Les propriétés élastiques des matériaux homogènes, isotropes.

	Rm (Mpa)	Re (Mpa)	E (Gpa)	ν	densité	A%
Acier ordinaire	300/1100	200/900	210	0,3	7,85	>17
Acier hautes caractéristiques	1100/1800	1000/1700	210	0,3	7,85	
Aciers inoxydables austénitiques		180/240	195	0,3	7,85	40
Alliages aluminium	200/600	100/500	70	0,34	2,8	5 / 30
Titane	650	500	110	0,34	4,5	35 / 55

Tableau 2.3 Relation entre les modules d'élasticité pour des matériaux homogènes et isotropes.

	(λ, G)	(E, G)	(K, λ)	(K, G)	(λ, ν)	(G, ν)	(E, ν)	(K, ν)	(K, E)	(M, G)
$K =$	$\lambda + \frac{2G}{3}$	$\frac{EG}{3(3G-E)}$			$\frac{\lambda(1+\nu)}{3\nu}$	$\frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$			$M - \frac{4G}{3}$
$E =$	$\frac{G(3\lambda+2G)}{\lambda+G}$		$\frac{9K(K-\lambda)}{3K-\lambda}$	$\frac{9KG}{3K+G}$	$\frac{\lambda(1+\nu)(1-2\nu)}{\nu}$	$2G(1+\nu)$		$3K(1-2\nu)$		$\frac{G(3M-4G)}{M-G}$
$\lambda =$		$\frac{G(E-2G)}{3G-E}$		$K - \frac{2G}{3}$		$\frac{2G\nu}{1-2\nu}$	$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{3K\nu}{1+\nu}$	$\frac{3K(3K-E)}{9K-E}$	$M - 2G$
$G =$			$\frac{3(K-\lambda)}{2}$		$\frac{\lambda(1-2\nu)}{2\nu}$		$\frac{E}{2(1+\nu)}$	$\frac{3K(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$	$\frac{3KE}{9K-E}$	
$\nu =$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+G)}$	$\frac{E}{2G} - 1$	$\frac{\lambda}{3K-\lambda}$	$\frac{3K-2G}{2(3K+G)}$					$\frac{3K-E}{6K}$	$\frac{M-2G}{2M-2G}$
$M =$	$\lambda + 2G$	$\frac{G(4G-E)}{3G-E}$	$3K - 2\lambda$	$K + \frac{4G}{3}$	$\frac{\lambda(1-\nu)}{\nu}$	$\frac{2G(1-\nu)}{1-2\nu}$	$\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{3K(1-\nu)}{1+\nu}$	$\frac{3K(3K+E)}{9K-E}$	

E : module de Young , G : module de cisaillement , K : module d'élasticité isostatique
 λ : premier coefficient de Lamé , ν : coefficient de Poisson , M : module d'onde de compression

Le module d'élasticité isostatique est la constante qui relie la contrainte au taux de déformation d'un matériau isotrope soumis à une compression isostatique. Habituellement noté K ou noté B en anglais, il permet d'exprimer la relation entre le tenseur de contrainte $[\sigma]$ et le tenseur de déformation $[\varepsilon]$.

❖ **Compression isostatique :**

Une compression isostatique est l'exercice d'une pression isotrope, c'est-à-dire qui a la même valeur dans toutes les directions. Si V est utilisé pour représenter le volume d'un objet, le changement de volume relatif est proportionnel au changement de pression P :

$$\Delta P = -K \cdot \frac{\Delta V}{V_0} \tag{2.65}$$

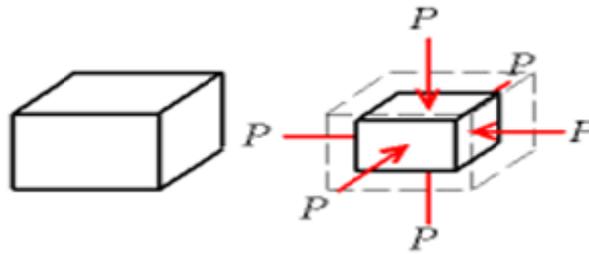


Figure 2.10 Compression isostatique.

Tableau 2.4 Module d'élasticité isostatique de quelques matériaux.

Module d'élasticité isostatique de quelques matériaux	
Air	101 kPa (isotherme) (142 kPa en adiabatique)
Eau	2,2 GPa (augmente avec la pression)
Verre	35 à 55 GPa
Acier	160 GPa
Diamant	442 GPa

Dans le cas des milieux isotropes, la relation entre le module isostatique K , le module de Young E et le module de cisaillement G est la suivante:

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{9K} + \frac{1}{3G} \tag{2.66}$$

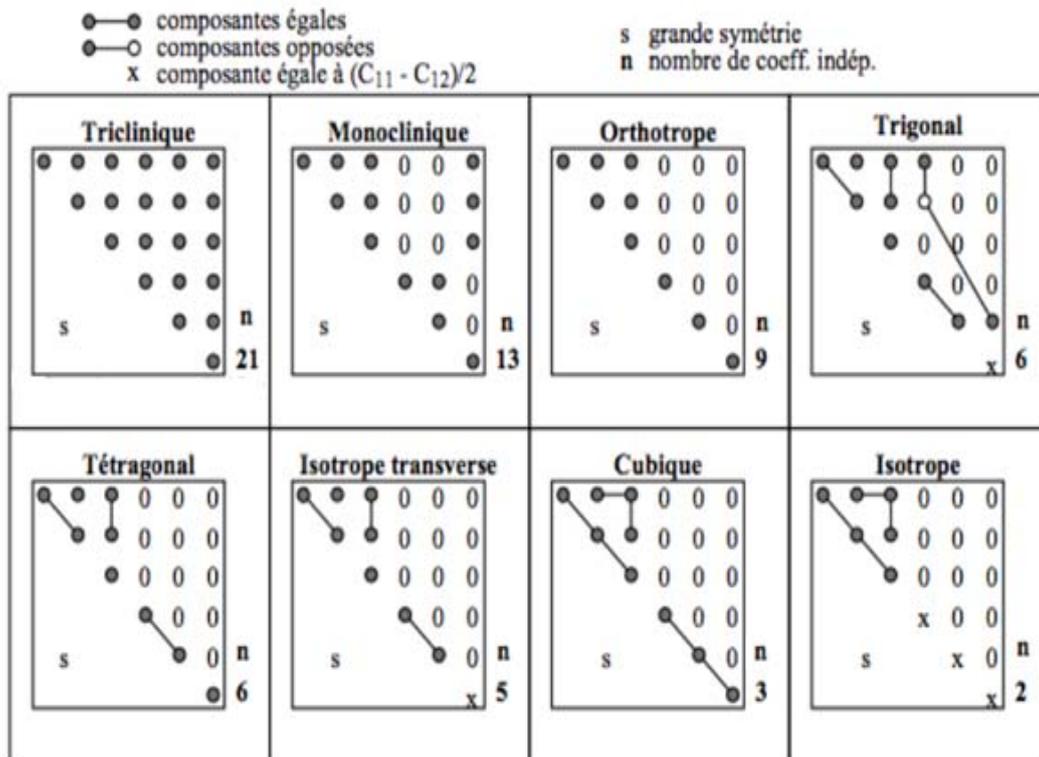


Figure 2.11 Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes et leur position de la matrice de rigidité pour différent type du comportement.

2.2 Anélasticité

Tous les solides sont plus ou moins "anélastiques", c'est-à-dire que leurs courbes de traction ne suivent pas complètement une ligne droite dans le domaine élastique, et l'énergie "se dissipe" pendant l'essai de traction. La figure 2.12 montre la courbe obtenue lors du cycle d'étirage-compression sur la fibre de verre. L'énergie est dissipée dans un cycle (la zone ombrée sur la figure 2.12), ce qui confère au matériau une capacité d'amortissement, ce qui contribue à réduire les vibrations ou le bruit,[2].

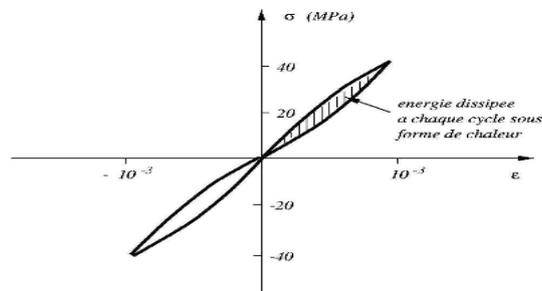


Figure 2.12 cycle de traction-compression d'une fibre de verre.

2.3 Elasticité non-linéaire

La figure 2.13 montre un exemple d'essai de traction du caoutchouc. On constate facilement que son comportement est quasi-élastique, mais non linéaire. Ensuite, nous parlons d'élasticité non linéaire. Les solides emmagasinent de l'énergie pendant la traction, puis la libèrent complètement lorsque la sollicitation s'arrête. Dans ce cas, la "loi de Hooke" est utilisée, où le coefficient du tenseur de rigidité change en fonction de la déformation,[2].

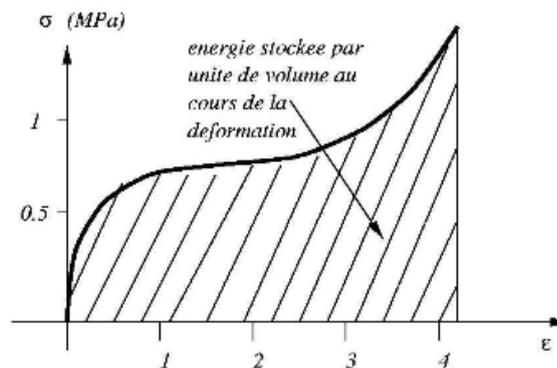


Figure 2.13 Courbe de traction d'un caoutchouc.

2.4 Thermoélasticité linéaire

Les matériaux sont souvent soumis à des chargements thermiques qui ont pour effet de dilater ou contracter les structures. Les déformations thermiques sont proportionnelles à la variation de température ΔT , par le coefficient de dilatation thermique α :

$$\epsilon^{th} = \alpha \Delta T \mathbf{I} \quad (2.67)$$

Lorsque la structure n'est pas liée mécaniquement à l'extérieur, alors ce champ de déformation thermique ne générera pas de contraintes s'il vérifie les équations de compatibilité. Nous montrons que cette condition impose un champ de température linéaire dans la structure. Dans le cas contraire, si la structure est liée à l'extérieur, alors des contraintes seront générées dans la structure,[2].

Par exemple, lorsqu'une tige métallique est chauffée uniformément, elle se dilate sans créer de contrainte interne. En revanche, s'il est imposé de maintenir la même longueur, une contrainte de compression sera générée dans la barre d'acier pour se conformer à la condition. Dans le cas de contraintes dites "thermomécaniques", des déformations thermiques s'ajoutent aux déformations mécaniques, elles-mêmes liées à la contrainte par la loi de comportement du matériau,[2,28] :

$$[\epsilon] = \frac{1 + \nu}{E} [\sigma] - \frac{\nu}{E} (\text{tr} [\sigma]) [\mathbf{I}] + \alpha \Delta T [\mathbf{I}] \quad (2.68)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \cdot \sigma_{ij} + \left(\alpha \cdot \Delta T - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\sigma_{ij}) \right) \cdot I \quad (2.69)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})) + \alpha \Delta T \\ \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{zz})) + \alpha \Delta T \\ \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} (\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})) + \alpha \Delta T \\ \gamma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G} \quad , \quad \gamma_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{G} \quad , \quad \gamma_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{G} \end{array} \right. \quad (2.70)$$

L'inversion de cette relation nous fournit la loi de comportement dite "Thermoélastique" du matériau :

$$\{\sigma\} = [c] \{\varepsilon\} + \{\sigma_{th}\} \quad (2.71)$$

$$[c] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad , \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \quad E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{2(\lambda+\mu)} \quad , \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \quad (2.73)$$

$$\{\sigma_{th}\} = -\frac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.74)$$

$$[\sigma] = \lambda (\text{tr} [\varepsilon]) [I] + 2\mu [\varepsilon] - \frac{E\alpha\Delta T}{1-2\nu} [I] \quad (2.75)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\varepsilon_{ij}) \cdot I \right) - \frac{E}{1-2\nu} \alpha \cdot \Delta T \cdot I \quad (2.76)$$

Tableau 2.5 Caractéristiques de quelques matériaux.

Matériau	E MPa	ν	σ_E MPa	α 10^{-6} K^{-1}	ρ kg/m^3
Acier inox	203 000	0.29	200	15	7850
Aluminium	67 500	0.34	30	24	2700
Cuivre	100 000	0.34	40	16.5	8930
Plexiglas	2 900	0.4	80	85	1800

E : module de Young
 ν : coefficient de Poisson ($0 \leq \nu \leq 1/2$)
 σ_E : limite élastique
 α : coefficient de dilatation
 ρ : masse volumique

2.5 Viscoélasticité linéaire

Le comportement d'un matériau viscoélastique linéaire se situe entre le comportement d'un solide élastique idéal représenté par un ressort de module d'Young E et le comportement d'un liquide visqueux représenté par un amortisseur de viscosité η . L'élasticité reflète la capacité de conserver et de restaurer l'énergie après déformation. La viscosité reflète sa capacité à dissiper l'énergie. Par exemple, le comportement mécanique des polymères est un comportement viscoélastique.

La viscoélasticité est utilisée pour décrire le comportement des matériaux réversibles, mais elle est sensible à la vitesse de déformation ($\dot{\epsilon}$). On peut citer par exemple le modèle Kelvin Vogt et le modèle de Maxwell. Ces modèles s'appliquent principalement au comportement viscoélastique.



Figure 2.14 Matériau viscoélastique linéaire.

Les modèles rhéologiques sont utilisés pour modéliser le comportement des matériaux, c'est-à-dire pour simuler ou modéliser sa réponse à une sollicitation mécanique bien définie. En

ce qui concerne la viscoélasticité linéaire, un modèle de simulation empirique a été proposé, qui est composé d'une combinaison d'un ressort et d'un amortisseur de base connectés en série ou en parallèle, représentant respectivement des composants élastiques et visqueux. Il existe de puissants modèles de simulation empirique pour décrire le comportement des matériaux viscoélastiques, se rapprochant de la courbe caractéristique mécanique du matériau de manière satisfaisante et acceptable. Certaines lois de comportement qui traite de la viscoélasticité ont été intégrées dans des logiciels de modélisation ou simulation (calcul par éléments finis).

2.5.1 Modèle de Kelvin-Voigt

Le modèle Kelvin-Voigt est un modèle de matériaux viscoélastiques, ce qui signifie qu'il présente à la fois des propriétés élastiques et des propriétés visqueuses. Le modèle est représenté par un amortisseur visqueux pur (A) et un ressort (R) en parallèle, comme le montre la figure ci-dessous, [29,30,31,10].

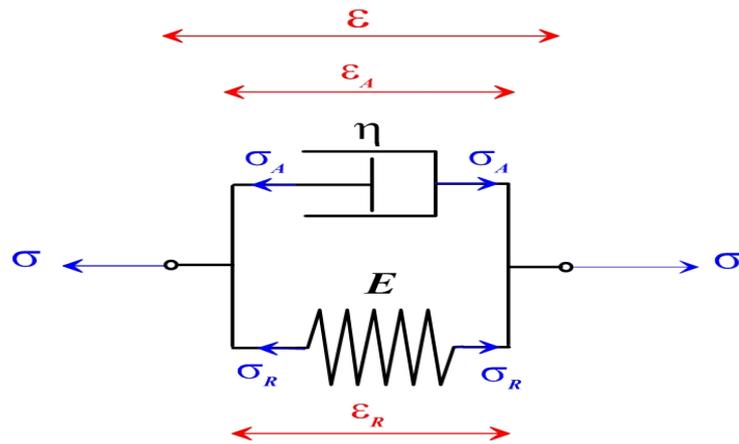


Figure 2.15 Le modèle de Kelvin-Voigt.

Dans ce modèle la déformation du ressort est la même que celle de l'amortisseur donc :

$$\varepsilon = \varepsilon_{tot} = \varepsilon_R = \varepsilon_A \quad (2.77)$$

Par ailleurs, la contrainte totale est la somme des contraintes du ressort σ_R et de l'amortisseur σ_A :

$$\sigma_{tot} = \sigma_R + \sigma_A \quad (2.78)$$

Les contraintes de l'amortisseur et du ressort sont :

$$\sigma_A = \eta \cdot \dot{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \sigma_R = E \cdot \varepsilon \quad (2.79)$$

$$\sigma(t) = E \cdot \varepsilon(t) + \eta \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (2.80)$$

La variable d'état du système est ici la déformation élastique totale du matériau.

La contrainte σ pour le cas d'un matériau avec comportement viscoélastique en fonction de sa déformation ε et de sa vitesse de déformation $\dot{\varepsilon}$:

$$\sigma = \lambda [tr(\varepsilon) + \theta_\lambda \cdot tr(\dot{\varepsilon})] \cdot I + 2\mu[\varepsilon + \theta_\mu \cdot \dot{\varepsilon}] \quad (2.81)$$

Les quantités θ_λ et θ_μ sont des caractéristiques de retard à la déformation pour décrire l'influence de la vitesse de déformation $\dot{\epsilon}$.

Dans le cas d'un chargement uniaxial ce modèle donne l'équation différentielle suivante pour le comportement viscoélastique,[2] :

$$\sigma = E \cdot \epsilon + \eta \cdot \dot{\epsilon} \quad (2.82)$$

Avec : $\eta = \lambda(1 - 2\nu)\theta_\lambda + 2\mu\theta_\mu$

2.5.2 Modèle de Maxwell

Ce modèle est représenté par une série d'amortisseurs purement visqueux et de ressorts purement élastiques, comme le montre la figure ci-dessous,[29,30,31,10].

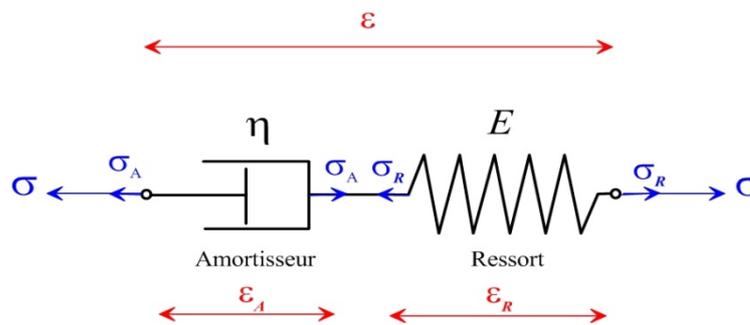


Figure 2.16 Le modèle de Maxwell.

Dans ce modèle (configuration), lorsque la contrainte axiale (σ) est appliquée, la contrainte totale et la déformation totale sont définies comme suit:

$$\sigma_A = \eta \cdot \dot{\epsilon} \quad (2.83)$$

$$\sigma_R = E \cdot \epsilon \quad (2.84)$$

$$\sigma_{tot} = \sigma_R = \sigma_A = \sigma \quad (2.85)$$

La variable d'état du système est ici la déformation élastique du matériau :

$$\epsilon_{tot} = \epsilon_R + \epsilon_A \quad (2.86)$$

La déformation totale est ici partitionnée de façon additive en une déformation élastique et une déformation anélastique.

Dans ce modèle, la vitesse de déformation ($\dot{\epsilon}$) du matériau est obtenue sous la forme suivante :

$$\dot{\epsilon} = \frac{1+\nu}{E} \left[\dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\tau_1} \right] - \frac{\nu}{E} \left[tr(\dot{\sigma} + \frac{\dot{\sigma}}{\tau_2}) \right] \cdot I \quad (2.87)$$

Les deux coefficients τ_1 et τ_2 , caractéristiques de la viscosité du matériau.

Dans le cas d'un chargement uniaxial, ce modèle donne l'équation d'évolution suivante,[2] :

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (2.88)$$

Avec :

$$\frac{1}{\eta} = \frac{1+\nu}{E \cdot \tau_1} - \frac{\nu}{E \cdot \tau_2} \quad (2.89)$$

2.5.3 Modèle de Maxwell généralisé

Le modèle est composé de n modèles Maxwell placés en parallèle, et une autre branche parallèle est composée de ressorts, [29,30,31].

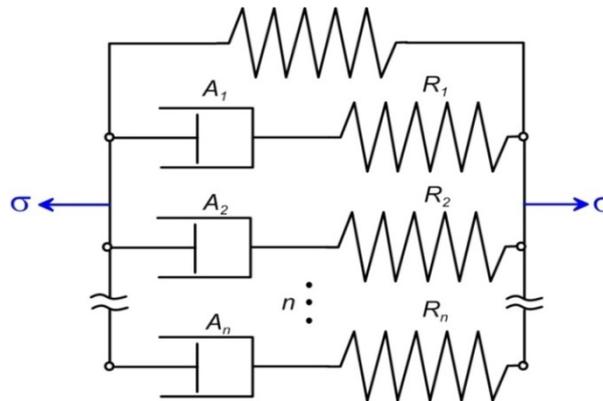


Figure 2.17 Le modèle de Maxwell généralisé.

2.5.4 Modèle de Kelvin-Voigt généralisé

Ce modèle est composé de n modèles de Kelvin-Voigt en série,[29,30,31].

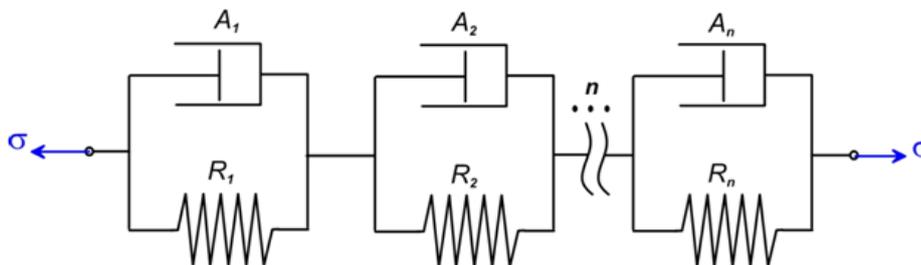


Figure 2.18 Le modèle de Kelvin-Voigt généralisé.

2.5.4 Autres modèles

D'autres modèles analogiques peuvent être obtenus en combinant les modèles précédents ou en ajoutant des éléments de ressorts ou d'amortisseurs, par exemple, le modèle de Zener est un modèle combiné de Maxwell et Kelvin-Voigt,[29].

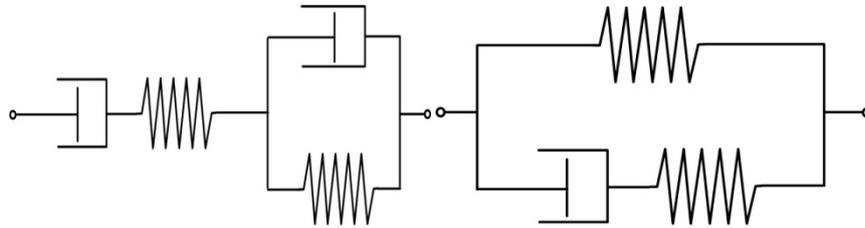


Figure 2.19 Un modèle combiné.

C

Chapitre

3

Pages :65-81

Plasticité – Viscoplasticité

3.1 Résultats expérimentaux

Tous les matériaux ont une limite élastique, qui est le résultat d'une charge critique à partir de laquelle le comportement du matériau devient irréversible. La déformation plastique est une déformation irréversible d'un objet, qui se produit par le réarrangement des positions relatives des atomes. Le chargement (contrainte) d'une pièce (traction, compression) commence par une déformation réversible (déformation élastique), c'est-à-dire que ses dimensions changent, mais il reprend sa forme d'origine lorsque cela est nécessaire (annulation de des sollicitations). Lorsque la contrainte est trop importante, certains matériaux dits fragiles vont se briser de cette manière de déformation. Pour les matériaux ductiles, lorsque l'on augmente la sollicitation, la pièce se déforme de manière définitive; et lorsque l'on arrête la sollicitation, la pièce ne restituera pas sa forme initiale et reste déformée. Un paramètre d'état très important est la température (T) d'essai qui permet de différencier le type de plasticité, la plasticité à chaud de la plasticité à froid.

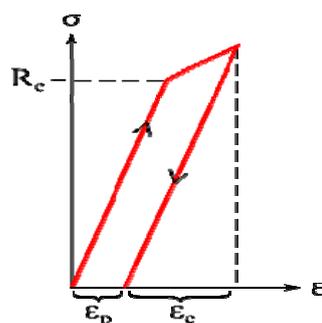


Figure 3.1 Courbe expérimentale de traction.

3.1.1 Plasticité à chaud

Il s'agit du domaine de température supérieure à $0,5T_F$ (température de fusion) où la structure métallurgique de l'alliage métallique évolue notablement pendant et entre les séquences de déformation, du fait de phénomènes de restauration et de recristallisation, phénomènes thermiquement activés. C'est le cas du formage à chaud de l'acier (vers $1\ 200\ ^\circ\text{C}$), des alliages de cuivre (vers $800\ ^\circ\text{C}$) et des alliages d'aluminium (au-dessus de $400\ ^\circ\text{C}$), [11].

3.1.2 Plasticité à froid

Entre $0,15$ et $0,3T_F$, où la température T et Vitesse de déformation ont peu d'influence sur la contrainte de déformation. La structure métallurgique ne change que pendant le processus de déformation, l'augmentation des dislocations produira un durcissement évident et la ductilité diminuera. C'est le cas de la déformation de l'acier et des alliages d'aluminium et de cuivre à $20\ ^\circ\text{C}$, [11].

3.2 Description de la déformation plastique dans les métaux

Les dislocations sont des défauts linéaires correspondant à des discontinuités dans la structure cristalline et introduisent un champ d'anormalité élastique sans appliquer de contrainte. Dans le cas le plus courant, les dislocations sont mixtes (portions vis et portions coin).

Une dislocation de vecteur de Burgers glisse sur un plan. L'ensemble des plans de glissement forme alors un système de glissement. Les plans de glissement appelés faciles sont généralement les plans de plus forte densité atomique et les directions de glissement sont les directions cristallographiques les plus denses. Plus pour un matériau sa structure a de systèmes de glissement faciles, plus la ductilité du matériau est forte, avec d'autres paramètres par exemple la taille de grain.... À l'inverse, une structure qui a peu de systèmes de glissement faciles sera pour un matériau fragile.

Sous une contrainte donnée, toutes les dislocations ne sont pas mobiles. Par conséquent, la présence des dislocations non mobiles peuvent constituer des troubles (obstacles) du mouvement, en revanche, les dislocations mobiles peuvent entraver le mouvement de l'autre. Lors de la déformation plastique, on a une augmentation des dislocations, et formation de jonctions entre systèmes de glissement non coplanaires. Par conséquent, la force (contrainte) nécessaire au déplacement de la dislocation mobile augmente donc avec la déformation plastique, ce qui équivaut au durcissement du matériau. Ce type de durcissement qui augmente avec la déformation plastique est appelé écrouissage,[23].

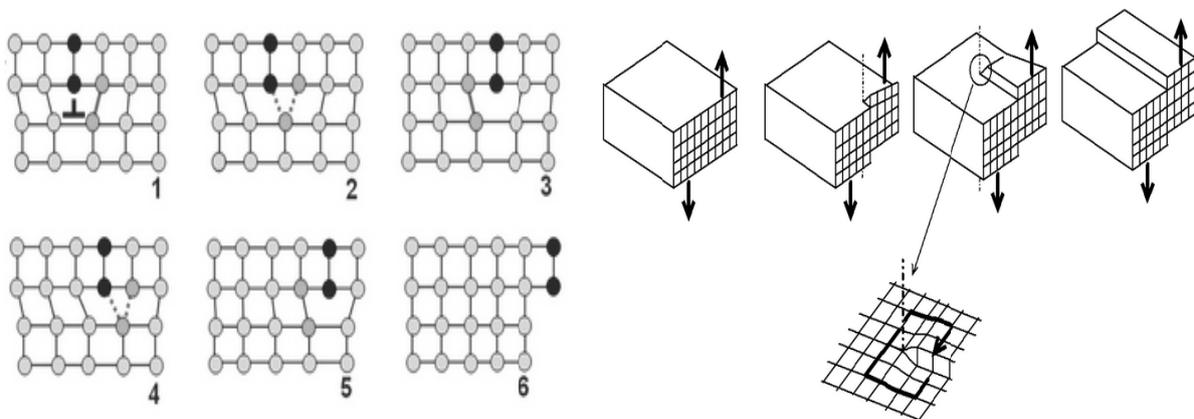


Figure 3.2 Exemple des déplacements des dislocations, (a) dislocation coin, (b) dislocation vis dans un cristal.

3.3 Applications pratiques de la déformation plastique

La déformation plastique permet de mettre en forme les pièces, par exemple: emboutissage et laminage. Ainsi, il permet d'absorber l'énergie lors des chocs et augmente la résistance à la casse ainsi que la protection des personnes (application pour des pièces en construction automobile).

L'étude de la résistance des matériaux doit quantifier la déformation plastique. En effet, dans certaines zones, toute déformation plastique est évitée, il faut donc vérifier et noter que la contrainte appliquée ne dépassera jamais la valeur de la limite d'élasticité, c'est pourquoi des facteurs de sécurité sont souvent utilisés. Cependant, cette manière en revanche elle apportera une structure et un mécanisme lourds. Si le comportement et l'environnement du système sont maîtrisés, on peut accepter des déformations plastiques à certaines étapes de la vie du système, mais en revanche, il est nécessaire de déterminer les déformations pour s'assurer qu'elles ne gênent pas le fonctionnement du système.



Figure 3.3 Exemple déformation plastique (mise en forme des matériaux et application en Génie civil),[32].

Automobile $\dot{\epsilon} \simeq 1$

L'énergie du crash est presque intégralement absorbée par la plasticité de la coque

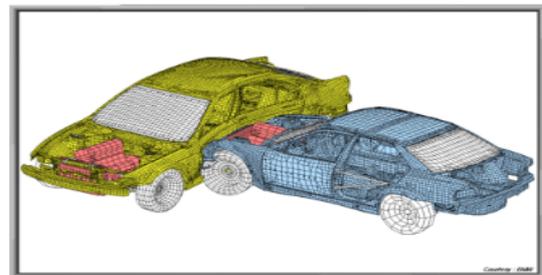
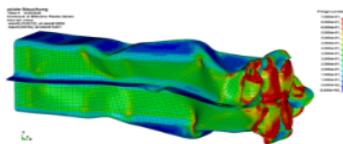


Figure 3.4 Exemple déformation plastique (application en construction automobile),[32].

Usinage $\dot{\epsilon} \simeq 10^2$

Formation du copeau. Effets thermiques très importants. Bandes de glissement adiabatiques possibles.

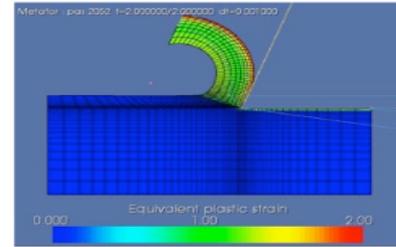


Figure 3.5 Exemple déformation plastique (en fabrication mécanique, usinage),[32].

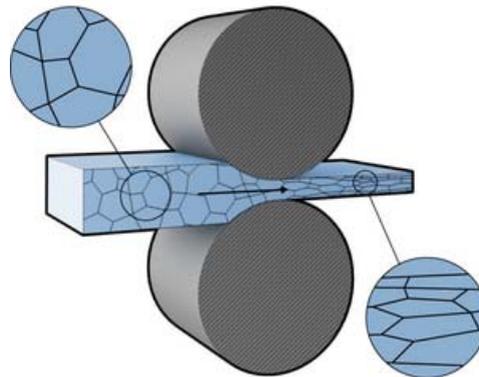


Figure 3.6 Exemple déformation plastique (en fabrication mécanique, laminage),[33].

Militaire $\dot{\epsilon} \simeq 10^4$

Perforation des blindages. La viscosité devient prépondérante. Localisation systématique.

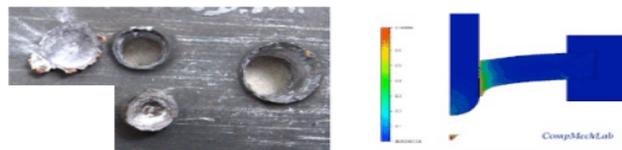


Figure 3.7 Exemple déformation plastique (fabrication des blindages),[32].

3.4 Comportement observé et schémas usuels

3.4.1. Limite d'élasticité

La figure (3.8) représente une courbe de traction nominale obtenue sur un matériau solide. Cette courbe relie la contrainte nominale $\sigma = \frac{F}{S_0}$, où F est la force mesurée et S_0 la section initiale de l'éprouvette, à la déformation nominale $\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$, où ΔL est l'allongement de l'éprouvette et L_0 sa longueur initiale. Les points caractéristiques de cette courbe sont :

- la limite d'élasticité ($\sigma_e = \sigma_0 = \sigma_y$), marquant le début des déformations plastiques (déformations irréversibles) du matériau (Initial yield surface σ_y).
- la limite d'élasticité conventionnelle $\sigma_{0,2}$, donnant la contrainte nominale nécessaire pour une déformation plastique de 0,2% (on utilise également avec la même convention la quantité $\sigma_{0,1}$ pour des matériaux peu ductiles, c'est-à-dire dont la déformation plastique est faible avant la rupture).

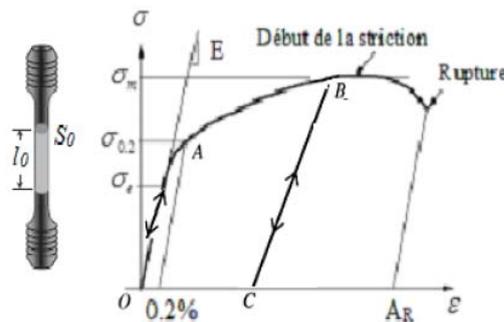


Figure 3.8 Courbe expérimentale de traction.

La résistance à la traction σ_m , contrainte nominale maximale observée avant la striction (l'instabilité plastique).

L'allongement à la rupture A_R , déformation nominale maximale admissible par le matériau avant rupture.

L'analyse d'une telle expérience fait apparaître les caractéristiques suivantes :

- ❖ Dans la partie OA du diagramme, c'est-à-dire tant que la force F reste inférieure au seuil correspondant à l'ordonnée du point A appelée seuil élastique (première limite élastique Mesures), on a une réversibilité de la réponse à l'allongement de l'éprouvette. Cette relation traduit par une relation de proportionnalité entre l'effort de l'allongement, caractéristique du comportement (linéaire) du matériau.

L'irréversibilité de la réponse de l'éprouvette apparaît dès que l'on poursuit le chargement au-delà du seuil d'élasticité initial jusqu'à un point **B**, puisque l'on effectue une décharge complète ($F=0$) jusqu'au point **C**. La courbe de décharge BC est différente de la première courbe de charge OAB, il y a donc un allongement résiduel (permanent) au point C. C'est une manifestation du comportement matériel.

- ❖ En rechargeant l'éprouvette à partir de ce nouvel état déchargé, on voit que le point représentatif sur la figure parcourt en sens inverse le segment **BC** de décharge. L'ordonnée du point **B** représente le nouveau seuil d'élasticité, appelé seuil d'élasticité

actuelle, au-delà duquel apparaît de nouveau la plasticité. L'augmentation du seuil d'élasticité constitue le phénomène d'écrouissage.

3.4.2 Phénomène d'écrouissage (Evolution du seuil)

L'écrouissage d'un matériau est le durcissement de ce matériau sous l'effet de sa déformation plastique (déformation définitive). Il correspond à la modification subie lorsque la contrainte appliquée est suffisamment forte pour provoquer une déformation plastique permanente. L'écrouissage ne se produit que sur les matériaux (avec une zone ductile). Sinon, nous avons un adoucissement.

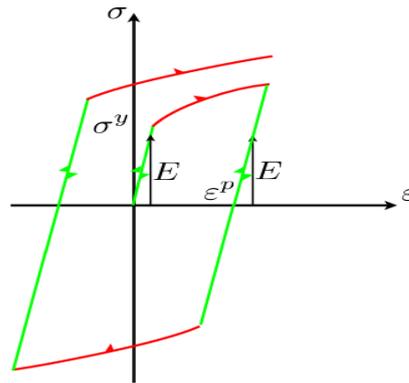


Figure 3.9 Phénomène d'écrouissage.

La prise en compte de l'écrouissage est réalisée par le coefficient n , qui reflète l'augmentation de la contrainte avec la déformation plastique. Une des lois les plus simples reliant la contrainte équivalente et la déformation plastique équivalente est la loi de **Hollomon** ou loi puissance (chapitre 1). Cette loi ne s'appuie que sur deux paramètres K et n .

Tableau 3.1 les coefficients K et n .

Matériaux	Coefficient K [MPa]	Exposant, n
Acier austénitique	400 - 500	0.40 - 0.55
Acier à faible teneur en C	525 - 575	0.20 - 0.23
Acier HSLA (high strength low-alloy)	650 - 900	0.15 - 0.18
Cuivre	420 - 480	0.35 - 0.35
Laiton 70/30	525 - 750	0.45 - 0.60
Alliages aluminium	400 - 550	0.20 - 0.30

Si on se met dans l'espace de contraintes, on peut définir une surface seuil à l'intérieur de laquelle le matériau reste élastique. Lorsque le trajet de chargement atteint cette surface, on voit apparaître de la déformation plastique et la surface seuil s'adapte de telle sorte que le point de chargement reste sur la surface tant qu'il n'y a pas de décharge. L'adaptation de la surface de charge peut se faire selon deux modes distincts : Si la surface se dilate tout en restant centrée sur

l'origine (un état de contrainte nulle) on parle d'érouissage isotrope. L'érouissage isotrope correspond donc à une variation de taille du domaine élastique. Pour un chargement de traction, puis le déchargement puis la compression, le matériau conservera ses propriétés élastiques (le comportement élastique) jusqu'à ce qu'il atteigne le niveau de compression équivalent de la charge de traction maximale. Si la surface de charge suit le mouvement de charge, on dit érouissage cinématique. Le domaine élastique conserve une taille constante et se translate pour suivre le chargement. Dans le cas d'un chargement de traction-compression alterné le domaine élastique correspondra au double de la limite d'élasticité initiale (en absence de contrainte résiduelle dans le matériau vierge),

Le comportement observé sur les matériaux réels correspond généralement à une combinaison d'érouissage cinématique et isotrope,[34].

- ❖ **Érouissage isotrope** : est un modèle qui correspond à une dilatation du domaine d'élasticité : la contrainte seuil évolue symétriquement dans le processus de traction et de compression, il agit comme un «véritable» effet de durcissement.

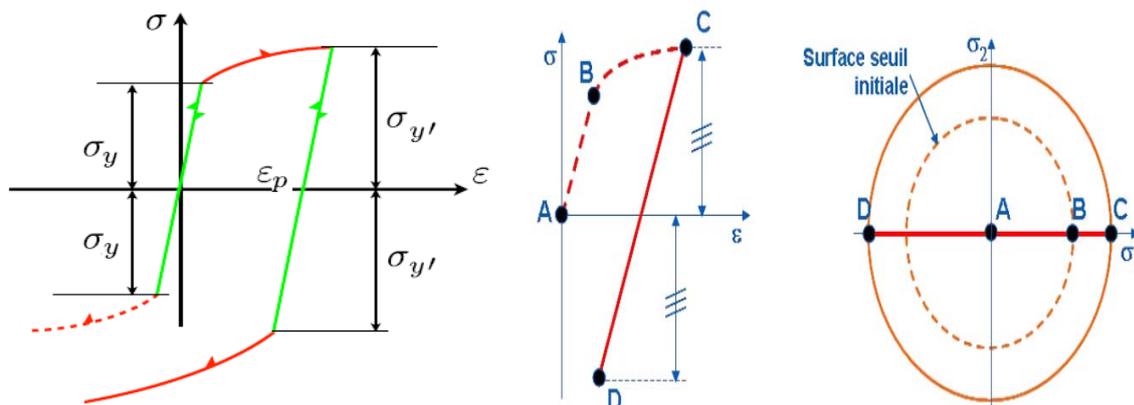


Figure 3.10 Érouissage isotrope, [5].

- ❖ **Érouissage cinématique** : L'érouissage cinématique linéaire est une bonne représentation de l'effet Bauschinger. Il est associé à la translation du domaine élastique. **L'effet Bauschinger** : après une traction, la contrainte seuil en compression est moins importante (en valeur absolue). On peut le vérifier facilement avec une petite cuillère.

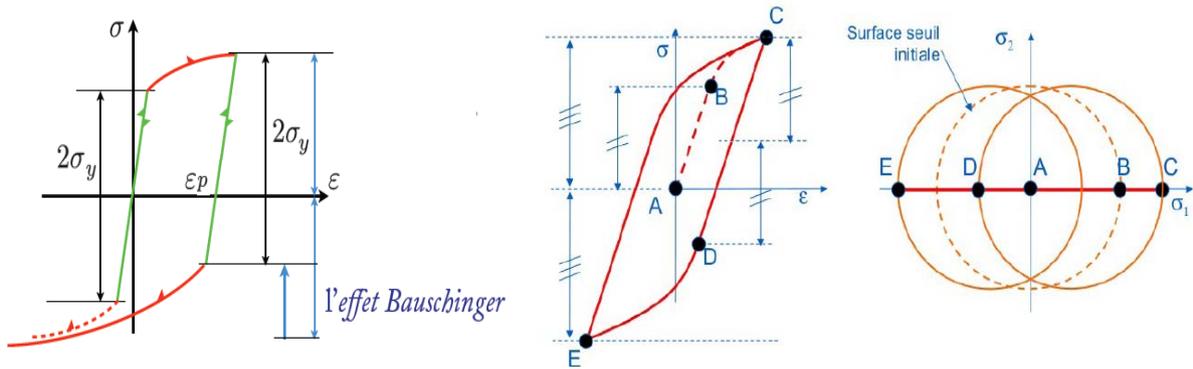
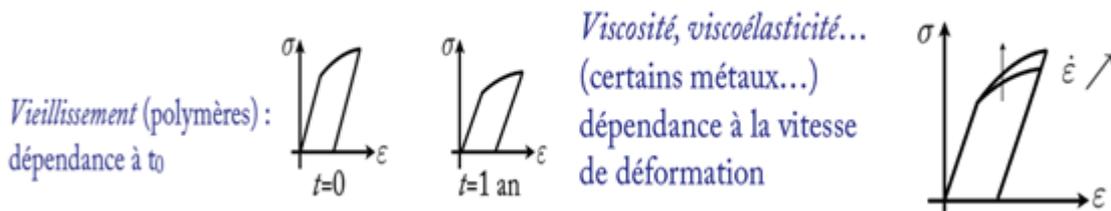


Figure 3.11 Écrouissage cinématique,[34].

3.4.3 Les principales hypothèses de base utilisées en plasticité des métaux

❖ Indépendance du temps: Contrairement au viscoplastique, la vitesse ne change pas de plasticité. Une faible vitesse permet une déformation macroscopique plus facile à une température constante, qu'à vitesse élevée (rapide). L'expérience montre qu'une augmentation de la vitesse de déformation a le même effet qu'une diminution de la température. Donc, à grande vitesse, nous avons tendance à un comportement fragile.

Contres exemples



- ❖ L'incompressibilité plastique de la matière (la loi de constance du volume).
- ❖ La pression hydrostatique (tenseur sphérique) n'a aucun effet sur les propriétés globales du matériau. Cependant, l'impact de la pression hydrostatique sur le sol et les roches est important.

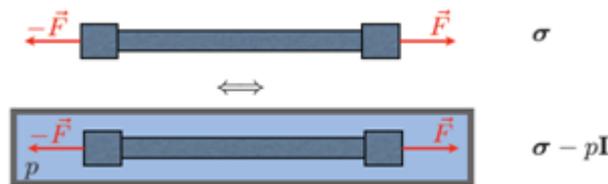


Figure 3.12 La pression hydrostatique.

- ❖ Le non influence de l'effet Bauschinger (le phénomène de l'écrouissage est isotrope)

3.5 Courbe rationnelle de traction

Il s'agit de la courbe obtenue en rapportant la force avec la section minimale instantanée S , pour raisonner en termes de contrainte $\sigma = \frac{F}{S}$, et en rapportant l'allongement à la longueur

instantanée pour examiner en termes de déformation rationnelle $\epsilon = \frac{dl}{l}$. La courbe ainsi obtenue est croissante, même pendant la striction. Le volume de l'éprouvette restant constant et la déformation étant uniformément répartie de O à D, on a :

Contrainte σ_v : Il prend en compte le changement de section pendant le test et est égal à la charge rapportée à la section instantanée.

En supposant le volume de la partie d'étalonnage de l'éprouvette reste constant en raison d'une déformation élastique homogène avec conservation du volume, on a, [10,7,35]:

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (3.1)$$

$$S_0 \cdot L_0 = S \cdot L = S \cdot (L_0 + \Delta L) \quad (3.2)$$

$$S = \frac{S_0}{1 + \epsilon} \quad (3.3)$$

$$\text{Donc } \sigma_v = \frac{F}{S_0} \cdot (1 + \epsilon_c) = \sigma_c \cdot (1 + \epsilon_c) \quad (3.4)$$

Pour la déformation rationnelle :

L'allongement instantané est égal à dL/L , au même instant l'allongement depuis le début de l'essai est L, en considérant des allongements infiniment petite dL :

$$\epsilon_r = \int_{L_0}^L \frac{dL}{L} = \ln(1 + \epsilon_c) \quad (3.5)$$

3.6 Essai charge décharge (déformation plastique, énergie de déformation plastique)

Effectuons maintenant une série de charges – décharges consécutives. L'allure de la courbe de réponse est représentée sur la figure (3.12). Nous observons une évolution de la limite d'élasticité en traction due à l'écrouissage.

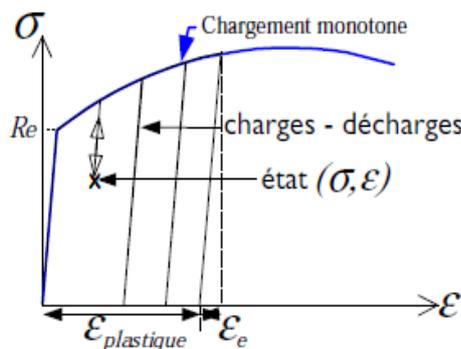


Figure 3.13 Déformation plastique.

En première approximation nous pouvons considérer que :

Lors des chargements consécutifs la limite d'élasticité suit la courbe du chargement monotone.

L'écoulement plastique ne modifie pas le module d'élasticité.

Une décharge est élastique, elle restitue une partie de l'énergie fournie pour étirer l'éprouvette.

La déformation plastique est la déformation permanente observée après décharge complète de l'éprouvette, la déformation totale s'exprime par:

$$\varepsilon_T = \varepsilon_p + \varepsilon_e \quad (3.6)$$

L'aire sous la courbe représente l'énergie de déformation totale W_T , elle se décompose en une énergie de déformation plastique W_p (en vert) dépensée de façon irréversible pour déformer de façon permanente le matériau, et une énergie de déformation élastique W_e (triangle rouge) qui est restituée à la décharge.

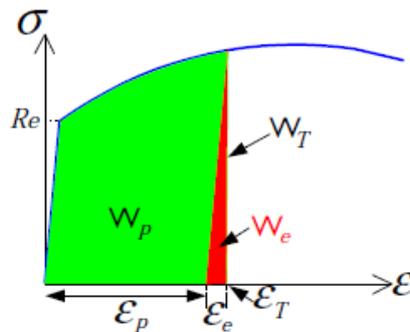


Figure 3.14 Energie de déformation plastique.

3.7 Critère de plasticité

Un critère de plasticité, ou critère d'écoulement plastique, est un critère permettant de savoir, sous des sollicitations données, si une pièce se déforme plastiquement ou si elle reste dans le domaine élastique. De nombreux travaux ont montré que l'on pouvait utiliser deux critères principaux : le critère de *Von Mises* et le critère de *Tresca*. Dans la résistance des matériaux (RDM), on désire parfois rester dans la zone élastique, nous discutons donc des normes de résistance. On utilise aussi des contraintes équivalentes ou des contraintes effectives. Comparez cette contrainte à la limite élastique ou encore à la contrainte de rupture obtenue par un essai de traction.

Dans le cas des matériaux métalliques, on généralise la notion de fonction seuil en se basant sur les constatations suivantes :

- ❖ Les fonctions seuil proposées pour définir le domaine élastique doivent être indépendantes du repère d'observation. Elles ne doivent donc faire intervenir que les invariants du tenseur de contraintes

- ❖ Les déformations plastiques se font sans changement de volume. Par conséquent, elles ne dépendent que du déviateur.

Le tenseur des contraintes caractérise la force interne définie pour chaque volume du matériau. Il peut décrire avec précision l'état de contrainte en chaque point et est noté :

$$T(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Les termes hors diagonale correspondent à du cisaillement, et appartenant à la base vectorielle (x, y, z), le tenseur des contraintes peut aussi s'écrire :

$$T(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Les contraintes peuvent être exprimées dans une base telle que le tenseur des contraintes est une matrice diagonale : on parle de contraintes principales :

$$T(M) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Les trois contraintes principales sont les racines de l'équation caractéristique,[28,27,36]:

$$\det([\sigma(M)] - \sigma_n [I]) = 0 \quad \text{où } [I] \text{ est la matrice unité de dimension 3}$$

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_n & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_n & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} - \sigma_n \end{bmatrix} = -\sigma_n^3 + I_1 \sigma_n^2 - I_2 \sigma_n + I_3 = 0 \quad (3.10)$$

Les contraintes principales sont indépendantes du repère (x,y,z), I_1, I_2 et I_3 sont des invariants :

$$I_1 = \text{tr}[\sigma] = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} ((\text{tr}[\sigma])^2 - \text{tr}[\sigma^2]) = \sigma_{xx} \sigma_{yy} + \sigma_{xx} \sigma_{zz} + \sigma_{yy} \sigma_{zz} - \sigma_{xy}^2 - \sigma_{xz}^2 - \sigma_{yz}^2 \\ &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned} \quad (3.12)$$

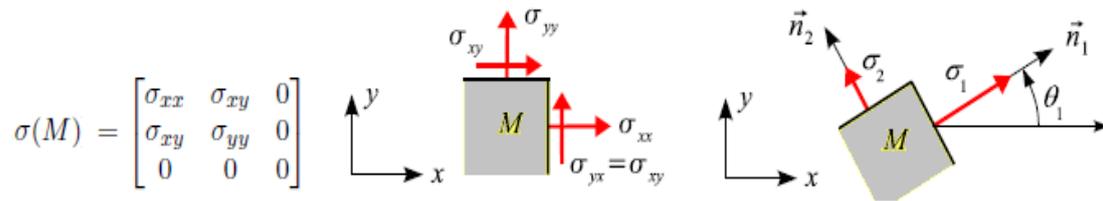
$$I_3 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 = \frac{1}{2} ((\text{trace } \sigma)^2 - \text{trace } \sigma^2) = \text{trace } \sigma^{-1} \det \sigma \quad (3.13)$$

$$I_3 = \det[\sigma] = \sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz} + 2 \sigma_{xy} \sigma_{xz} \sigma_{yz} - \sigma_{xx} \sigma_{yz}^2 - \sigma_{yy} \sigma_{xz}^2 - \sigma_{zz} \sigma_{xy}^2 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \quad (3.14)$$

$$I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = \det \sigma = \frac{1}{6} ((\text{trace } \sigma)^3 - 3(\text{trace } \sigma)(\text{trace } \sigma^2) + 2(\text{trace } \sigma^3)) \quad (3.15)$$

La relation de (I₂) utilisant l'inverse de σ n'est bien sur valable que si aucune contrainte principale n'est nulle.

➤ **Les contraintes principales dans l'état de contrainte plan :**



les contraintes principales,[28] :

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} \quad (3.16)$$

3.7.1 Critère de Von Mises (1910)

Le critère de plasticité permet de se positionner par rapport à la limite élastique σ_e :

Contraintes $\leq \sigma_e$: non-plastification

Contraintes $> \sigma_e$: plastification

La contrainte équivalente de Von- Mises ou la contrainte de comparaison, ou contrainte effective est définie par la formule :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}} \text{ avec } S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (3.17)$$

Elle est donc proportionnelle au second invariant du tenseur déviateur des contraintes S

$$\begin{aligned} \sigma_{VM}^2 &= \frac{3}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ij} - \frac{1}{2} \sigma_{kk}^2 \\ &= \frac{1}{2} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] \\ &\quad + 3(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2) \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\sigma_{VM}^2 = \frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (3.19)$$

Le critère de Von Mises est le plus couramment utilisé,[35,28,37] :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} < \sigma_Y \quad (3.20)$$

Autrement dit, la contrainte équivalente de Von Mises est égale à :

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (3.21)$$

Ou

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)} \quad (3.22)$$

Le critère de Von Mises prend en compte les composantes de contrainte de la traction, de la compression et du cisaillement pour atteindre des niveaux de contraintes isotropes. Ce critère ne précise pas le type de contrainte appliquée (contrainte: traction, compression, cisaillement). La surface limite est définie par $\sigma_{VM} = \sigma_0$ sa représentation graphique dans l'espace des contraintes principales est une surface cylindrique non bornée d'axe (1,1,1) de rayon $\sqrt{2} \cdot \sigma_0$

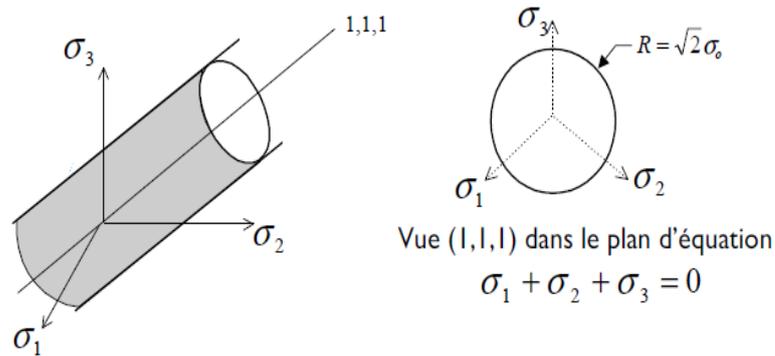


Figure 3.15 Représentation du critère de Von Mises.

Dans un cas de sollicitations, pour lequel on n'a que deux contraintes σ et τ :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad (3.23)$$

Pour un état de contraintes planes quelconque (correspondant à $\sigma_3 = 0$) on a :

$$\sigma_{eq} = \sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2} \quad (3.24)$$

3.7.2 Critère de Tresca (1864)

Le premier critère d'écoulement plastique des métaux métallique est celui de Tresca (critère de cisaillement maximal, 1864). En un point, la plasticité est atteinte dès que la valeur absolue de la contrainte de cisaillement atteint une valeur critique, [11,37]:

$$|\tau_{max}| = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \quad \text{on suppose que } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \quad (3.25)$$

Ainsi, si les contraintes principales ne sont pas nécessairement ordonnées

$$|\tau_{\max}| = \frac{1}{2} \max_{\substack{i,j \in \{1,2,3\} \\ i \neq j}} |\sigma_i - \sigma_j|. \quad (3.26)$$

Notons $\frac{\sigma_Y}{2}$ la valeur maximale de la contrainte σ_{eq}

$$\sigma_{eq,max} = \frac{\sigma_Y}{2} \quad (3.27)$$

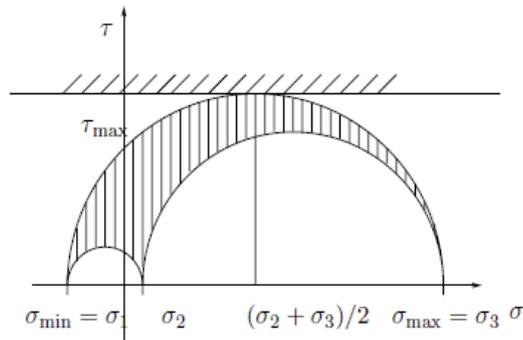


Figure 3.16 La contrainte dans le plan de Mohr, [37].

Ainsi, le critère de Tresca s'écrit :

$$\max[|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_3|] < \sigma_Y \quad (3.28)$$

$$\max|\sigma_i - \sigma_j| < \sigma_Y \quad \text{avec } i,j=1,2,3 \quad \text{et } i \neq j \quad (3.29)$$

Autrement dit, la contrainte équivalente de Tresca est égale à :

$$\sigma_T = \max[|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_3|] \quad (3.30)$$

$$\sigma_T = \max|\sigma_i - \sigma_j| \quad \text{avec } i,j=1,2,3 \quad \text{et } i \neq j \quad (3.31)$$

C'est en cisaillement pur que la différence entre les deux critères (*Tresca* et *Von Mises*) est la plus grande. Donc le critère de *Tresca* étant plus conservatif, il est préférable de l'utiliser pour les pièces sollicitées en cisaillement pur. Nous rappelons que ces deux critères ne sont valables que pour le comportement isotrope.

La limite d'élasticité en traction d'après le critère de von Mises est $\sigma = \sigma_0$ et en cisaillement $\tau = \sigma_0/\sqrt{3}$. On voit que le critère de von Mises prévoit une limite d'élasticité plus forte que celui de Tresca, ce qui *a priori* doit permettre de déterminer expérimentalement le critère le mieux adapté. En général, on trouve que la limite d'élasticité en cisaillement est située entre ces deux estimations, voire plus proche de $\sigma_0/2$ prévu par Tresca à condition d'avoir une extensométrie fine permettant de distinguer des déformations irréversibles faibles de l'ordre de ou inférieures à 10^{-4} . Les domaines d'élasticité réels sont en pratique plus complexes que ne l'indiquent les critères précédents et peuvent être modélisés aujourd'hui avec de plus en plus de précision en particulier dans le cas de sollicitations complexes multiaxiales.

La surface limite est définie par $\sigma_T = \sigma_0$ sa représentation graphique dans l'espace des contraintes principales est une surface cylindrique de base hexagonale non bornée d'axe (1,1,1).

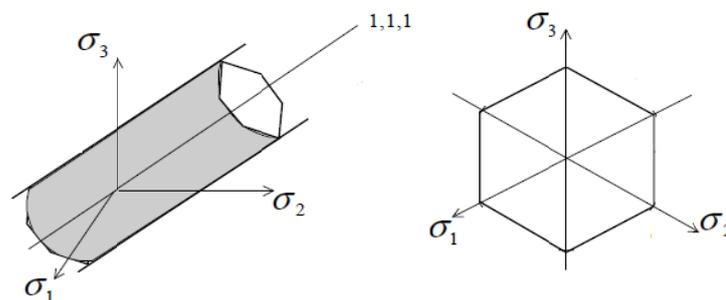


Figure 3.17 Représentation du critère de Tresca ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$).

Dans un cas de sollicitations planes, pour lequel on n'a que deux contraintes σ et τ :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (3.32)$$

➤ **Comparaison mathématique et graphique entre les deux critères (Von Mises et Tresca)**

Cette comparaison est plutôt mathématique : quand on étudie un matériau, seul un des critères sera utilisé, [11,37,38]:

On considère la contrainte équivalente de Tresca définie par

$$\sigma_T = \max|\sigma_i - \sigma_j| \quad \text{avec } i,j=1,2,3 \quad \text{et } i \neq j \quad (3.33)$$

Et la contrainte équivalente de Von Mises définie par

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (3.34)$$

Ainsi que les deux domaines D^T et D^{VM} associés

Remarque 1. Remarquons tout d'abord que, σ_y est nul, les contraintes équivalentes de *Tresca* et de *Von Mises* sont toutes les deux nulles sur la droite d'équation $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

on supposera donc que σ_y est strictement positif.

$$\sigma_{eq}^{VM}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq \sigma_{eq}^T(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (3.35)$$

$$\sigma_{VM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \max|\sigma_i - \sigma_j| \text{ avec } i,j=1,2,3 \text{ et } i \neq j \quad (3.36)$$

Le critère de Tresca est plus sévère que celui de Von Mises, c'est-à-dire D^T est inclus dans D^{VM}

$$\begin{aligned} \sigma_{eq}^T(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) < \sigma_Y &\implies \sigma_{eq}^{VM}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) < \sigma_Y \\ \sigma_{eq}^{VM}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq \sigma_{eq}^T(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) < \sigma_Y \\ \sigma_{eq}^T(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_Y &\implies \sigma_{eq}^{VM}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq \sigma_Y \end{aligned} \quad (3.37)$$

Ce qui traduit que la frontière de D^T est inclus dans l'adhérence de D^{VM} .

$$\sigma_{eq}^{VM}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_Y \text{ et } \sigma_{eq}^T(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \sigma_Y \quad (3.38)$$

Donc l'intersection des frontières des domaines de Tresca et de Von Mises est la réunion des six droites passant par les six points A_i et portée par $(1, 1, 1)$. Compte tenu de tous ces éléments dans le plan $\sigma_3 = 0$, l'hexagone de Tresca et l'ellipse de Von Mises coïncident au sommet de l'hexagone, figures 3.17 et 3.18, [11,37].

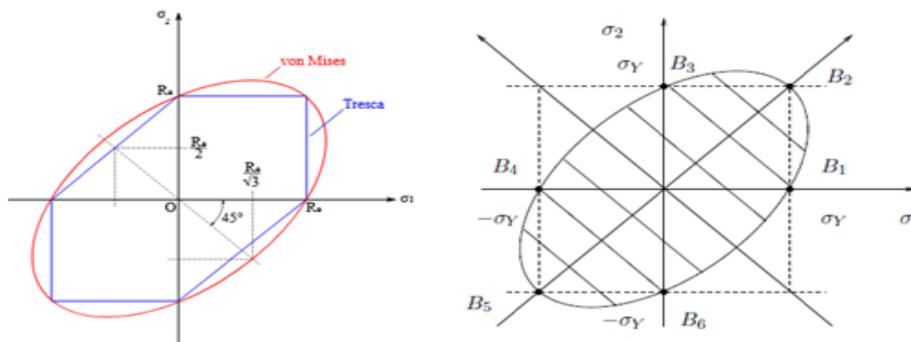


Figure 3.18 Représentation des deux critères (Von Mises et Tresca) dans l'espace des contraintes principales (σ_1, σ_2) , [39].

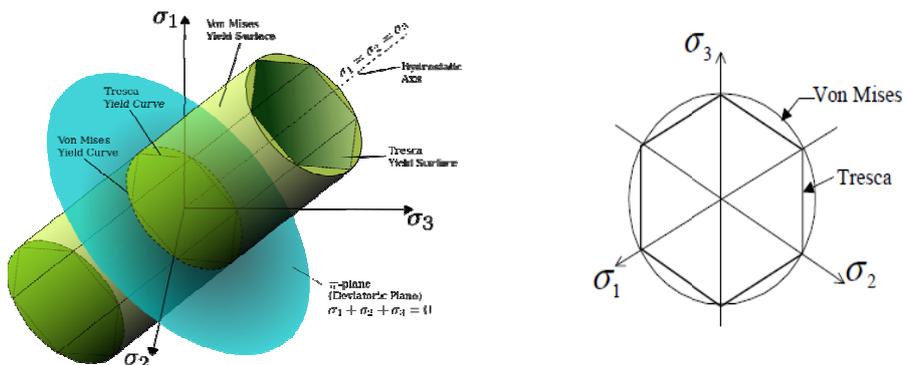


Figure 3.19 Représentation des deux critères (Von Mises et Tresca) dans l'espace des contraintes principales $(\sigma_1, \sigma_2 \text{ et } \sigma_3)$, [40].

3.7.3 La contrainte équivalente de Hill

La contrainte équivalente de Hill est définie par la formule suivante :

$$\sigma_H = \sqrt{F(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + G(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + H(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 2L\sigma_{12}^2 + 2M\sigma_{23}^2 + 2N\sigma_{31}^2} \quad (3.39)$$

Les coefficients F , G , H , L , M et N caractérisent le comportement anisotrope du matériau. Ils sont obtenus en effectuant les essais mécaniques (traction, cisaillement dans différentes directions) et en mesurant la contrainte seuil de traction ou de cisaillement σ_s pour laquelle apparaît la zone de plasticité:

Cette contrainte équivalente est largement utilisée pour représenter le comportement de tôles laminées, et plus généralement de matériaux présentant une symétrie orthotrope de leurs propriétés (symétrie par rapport à trois plans orthogonaux).

3.7.4 La contrainte équivalente de Tsai

La contrainte équivalente de Tsai est de la forme :

$$\sigma_{TS} = \sigma_H + P(\sigma_{11} - \sigma_{33}) + Q(\sigma_{22} - \sigma_{33}) \quad (3.40)$$

La contrainte σ_{TS} est largement utilisée dans le domaine des matériaux composites, des bois,.. Elle permet, à l'aide des deux coefficients P et Q , de rendre compte d'un comportement dissymétrique en traction et en compression. La notion de la limite d'élasticité sera généralisée au cas des conditions : chargement quelconque et matériaux isotropes et anisotropes par la condition suivante :

$$\sigma - \sigma_0 = 0 \quad (3.41)$$

Puisque la contrainte σ_{TS} est une fonction scalaire des composantes du tenseur des contraintes, et que σ_0 est une caractéristique du matériau, cette généralisation prend en compte la thermodynamique du continu, qui stipule que la limite d'élasticité s'écrit sous la forme $f(\sigma, A_k) = 0$, les termes A_k représentent les forces associées aux variables internes définissant le matériau. Maintenant, nous pouvons dessiner la surface d'écoulement. Elle délimite la zone des contraintes dans lequel le comportement du matériau est élastique. La forme de cette surface dépend du type de contrainte équivalente utilisé, et sa taille dépend de la limite d'élasticité.

C

Chapitre

4

Pages :82-90

Comportement Elastoplastique

4.1 Le comportement élastoplastique des matériaux

L'indépendance du temps physique est une caractéristique importante du modèle de comportement élastoplastique en évidence par les essais. En d'autres termes, les schémas ci-dessus sont indépendants de la vitesse à laquelle les phases successives de déchargement de charge sont effectuées, ce qui revient à négliger les conséquences du vieillissement et la viscosité du matériau. Cette propriété est bien examinée par exemple pour des métaux à température ordinaire, comme l'illustre la figure (4.1) qui représente un ensemble de différentes courbes de traction d'une éprouvette d'aluminium, montrant qu'un effet de viscosité n'apparaît que pour des sollicitations très rapides. Il convient en revanche de prendre en prévision un tel effet, à travers un modèle viscoplastique, dès que la température s'élève.

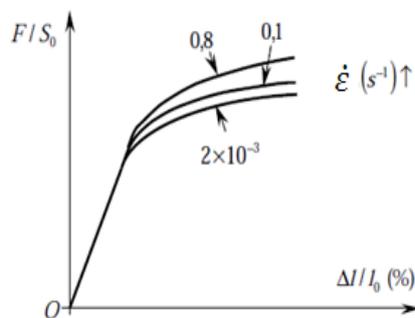


Figure 4.1 Evolution des courbes de traction d'une éprouvette d'aluminium en fonction de la vitesse de sollicitation.

La notion principale caractérisant le comportement plastique d'un matériau est celle d'irréversibilité et non pas celle de non-linéarité, même si les deux notions sont concomitantes (cas de l'élasticité linéaire) dans le cadre de la transformation infinitésimale. La démonstration de cette irréversibilité nécessite la mise en œuvre d'un essai avec cycle charge-décharge, capable de détecter uniquement une déformation plastique à la fin de ce cycle. La figure (4.2) dévoile la différence essentielle entre un modèle élastique non linéaire et un modèle élastoplastique.

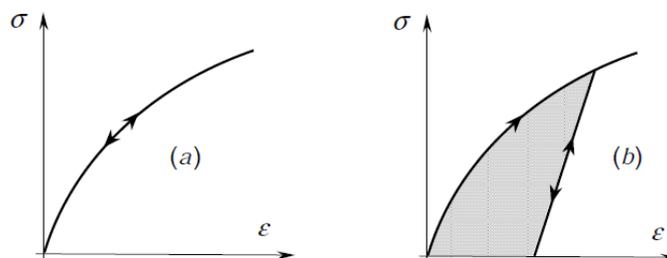


Figure 4.2 Courbes (σ, ϵ) représentatives des comportements (a) élastique non-linéaire et (b) Elastoplastique

Au niveau de l'énergie, cette irréversibilité conduit au fait que le travail fourni pendant le cycle

de charge-décharge (figure 4.2-b) est strictement positif, c'est-à-dire le travail fourni pendant la phase de chargement n'est pas entièrement récupéré à la décharge. Un cas spécifique important de comportement élastoplastique est un comportement entièrement plastique dont la courbe contrainte-déformation comprend des lignes horizontales. La figure (4.3) donne une représentation schématique d'un tel comportement pour lequel le seuil d'élasticité σ_0 demeure constant, c'est-à-dire que l'écroutissement du matériau disparaît. Ce modèle idéal du matériau élastoplastique parfait est généralement associé au concept de ductilité, tandis que la fragilité est l'opposé de la fragilité qui rappelle la rupture brutale d'éléments de matériau lorsque le seuil élastique est atteint,[41].

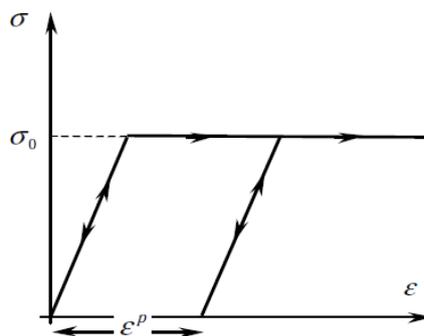


Figure 4.3 Schéma de comportement élastoplastique parfait.

Bien que les mécanismes micro-physiques (échelle microscopique) qui proviennent de la plasticité des matériaux soient parfois très différents, par exemple dans le sol, la propagation de défauts dans le réseau cristallin et le réarrangement des grains cristallins.

4.1.1 Modélisation du comportement en Traction- Compression

Afin de modéliser la courbe d'écroutissement d'un essai de traction- compression obtenue en appliquant un chargement monotone, le plus simple est d'utiliser un modèle construit à partir de segments de droite. La figure (4.4) montre un modèle multi linéaire. Dans ce qui suit, nous limiterons la présentation à des modèles bi- linéaires avec la même limite élastique initiale en traction et en compression,[42].

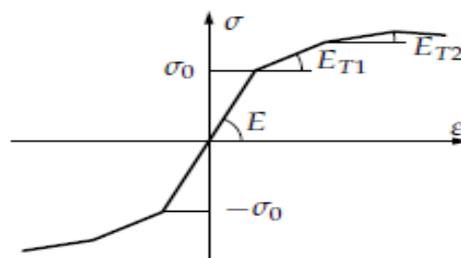


Figure 4.4 Modèle d'écroutissement multi-linéaire.

❖ **Modèles avec écrouissage**

Le modèle rigide plastique peut être utilisé lorsque les déformations plastiques sont très importantes par rapport aux déformations élastiques : c'est, par exemple, le cas pour les problèmes de mise en forme. Lorsqu'il y a écrouissage, il faut se donner un modèle pour représenter l'évolution du domaine d'élasticité. Les deux modèles les plus simples sont l'écrouissage isotrope et l'écrouissage cinématique. Ils sont basés sur l'utilisation de courbes d'écrouissage sous charge monotones, [42].

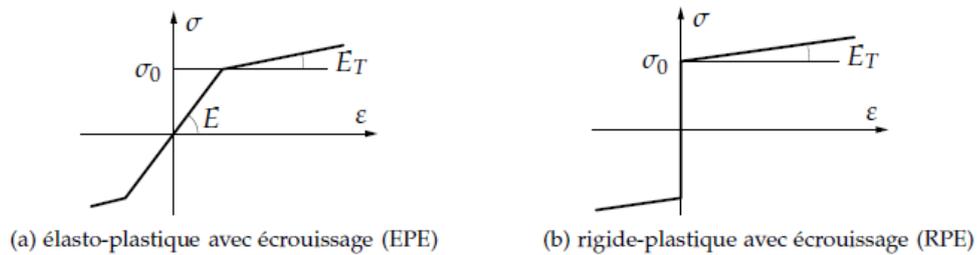


Figure 4.5 Modèles d'écrouissage monotone.

❖ **Modèles parfaits**

Ces modèles négligent l'écrouissage du matériau. Le modèle élasto-plastique parfait est surtout utilisé du point de vue académique pour simplifier la résolution analytique des problèmes posés.

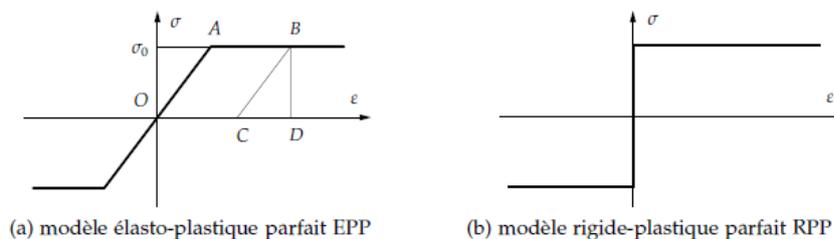


Figure 4.6 Modèle de courbe d'écrouissage monotone

Pour ce modèle, donnons une interprétation énergétique de la courbe d'écrouissage :

OABD : énergie totale, ou travail des efforts intérieurs pour atteindre B

OABC : énergie de dissipation plastique

BCD : énergie de déformation élastique, elle est restituée à la décharge.

Le modèle rigide plastique parfait est utilisé pour les problèmes de calcul des charges limites (Lorsque l'écrouissage n'est pas négligé, l'énergie élastique restituée après plastification est toujours plus importante dans le sens de la déformation plastique). Pour ces deux modèles, au-delà d'une valeur limite du chargement il y aura écoulement libre du matériau et perte d'équilibre.

❖ **Représentation de la courbe d'écroutissage monotone en traction par un modèle bi-linéaire**

Ce modèle est caractérisé par la limite d'élasticité initiale σ_0 , (E) le module d'élasticité et E_T , le module tangent. Soit un incrément de charge $d\sigma$ pris à partir d'un état actuel situé sur la frontière du domaine d'élasticité. Nous avons,[42] :

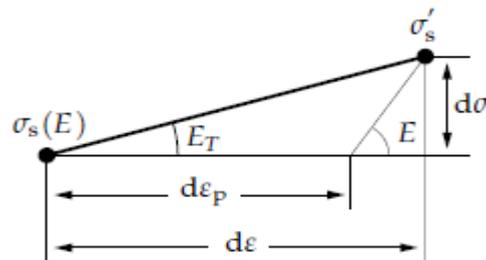


Figure 4.7 Incrément purement élastique.

$$d\sigma = E_T d\epsilon \quad (4.1)$$

$$d\epsilon = d\epsilon_p + \frac{1}{E} d\sigma \Rightarrow d\sigma \left(1 - \frac{E_T}{E}\right) = E_T d\epsilon_p \quad (4.2)$$

$$d\sigma = H d\epsilon_p \text{ Avec } H = \frac{E_T}{1 - \frac{E_T}{E}} \quad (4.3)$$

Le quantité H est dite module d'écroutissage.

Utilisons le temps cinématique afin de définir les incréments. Le modèle bi-linéaire implique :

$$\dot{\sigma} = E \dot{\epsilon}_e \quad (4.4)$$

où E est le module d'élasticité, et :

$$\dot{\sigma} = E_T \dot{\epsilon} \quad (4.5)$$

avec E_T , module tangent, et :

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_e + \dot{\epsilon}_p \text{ et } \dot{\sigma} = H \dot{\epsilon}_p \quad (4.6)$$

et H , module d'écroutissage

❖ **Lois d'écoulement plastique**

Précisons maintenant comment s'effectuent les déformations pour un incrément de charge $d\sigma$ pris à partir état actuel quelconque (σ, h) , [42]:

- incrément purement élastique $f(\sigma + d\sigma, E) \leq 0$ cette condition recouvre les deux possibilités représentées sur la figure en traction :
 - L'état actuel est l'intérieur du domaine d'élasticité et la charge ou la décharge est élastique.

-L'état actuel est sur la frontière du domaine d'élasticité et il y a décharge élastique, soit

$$d\varepsilon = d\varepsilon_e = \frac{1}{E} d\sigma \text{ et } \sigma_s(h) \text{ inchangé}$$

- incrément élastoplastique $f(\sigma + d\sigma, E) > 0$ cette condition est illustrée sur la figure

$$d\varepsilon = d\varepsilon_p + d\varepsilon_e, \quad d\varepsilon_e = \frac{1}{E} d\sigma \text{ et } d\varepsilon_p = \frac{1}{H} (\sigma + d\sigma - \sigma_s(E)) \quad (4.7)$$

la nouvel état de contrainte $\sigma' = \sigma + d\sigma$

- $H=0$ cas des matériaux supposé parfaitement plastique alors la déformation plastique est infinie, il y a écoulement libre du matériau.

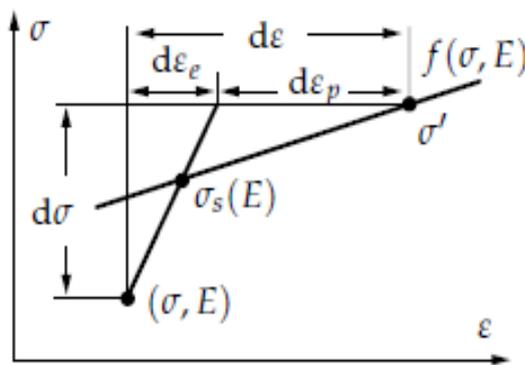


Figure 4.8 Incrément dans la zone plastique.

4.2 Schématisation des comportements réels des matériaux (Modèles analogiques)

Ces modèles permettent d'avoir une image concrète simplifiée des équations traduisant les lois de comportement générales tensorielles. Les trois éléments mécaniques le plus utilisés sont décrits sur la figure, [42,43,44] :

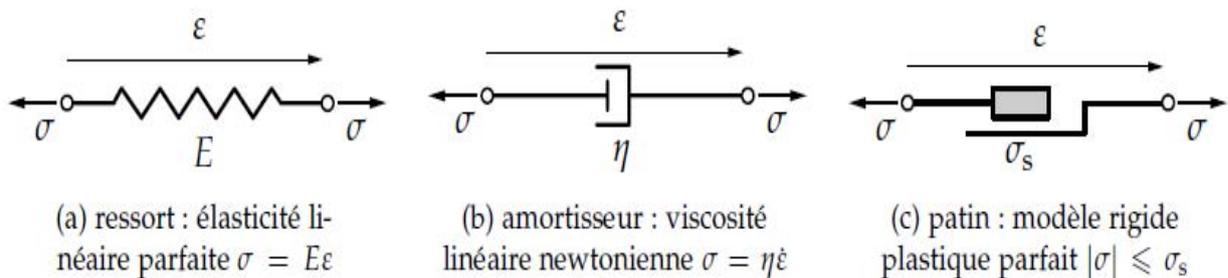


Figure 4.9 Eléments d'assemblage.

➤ Modèles linéaires

Ces modèles sont constitués d'assemblages de ressorts et d'amortisseurs linéaires.

❖ **Solide élastique parfait**

La relation qui lie les déformations aux contraintes est $\sigma = f(\epsilon)$ et la réversibilité est instantanée comme indiqué sur la figure ci-dessous, elle donne l'allure caractéristique des courbes de réponses aux trois types d'essais évoqués précédemment.

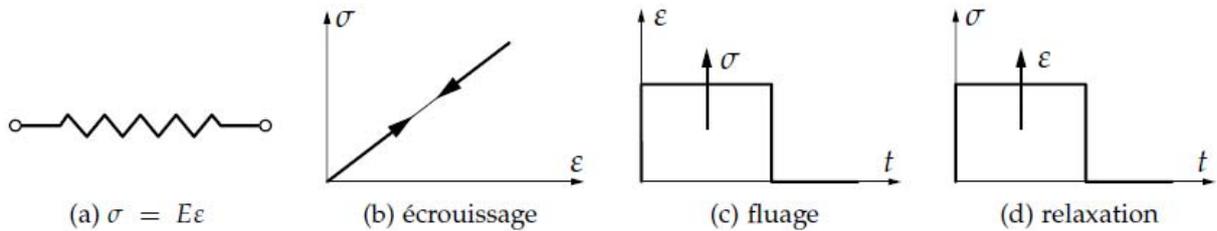


Figure 4.10 Solide élastique pour trois types d'essais.

❖ **Solide viscoélastique**

Dans ce cas, les contraintes dépendent à la fois des déformations et de leur variation temporelle tel que $\sigma = f(\epsilon, \dot{\epsilon})$. Différents modèles peuvent être proposés. Les deux plus simples sont constitués d'un montage en série ou en parallèle (Modèle de Maxwell et Modèle de Kelvin-Voigt). Les allures des courbes de réponse sont données sur les figures (a,b,c et d)

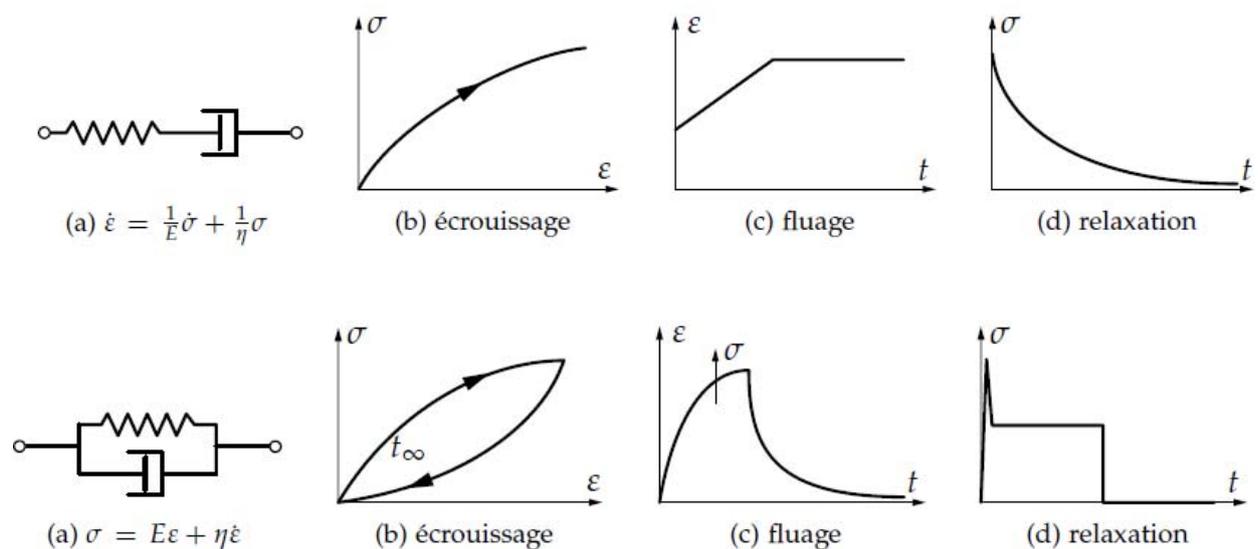


Figure 4.11 Solide viscoélastique pour trois types d'essais.

➤ **Les Modèles non linéaires**

La non-linéarité peut venir du comportement du ressort ou de l'amortisseur et l'introduction d'un patin, par exemple. Toute combinaison avec des éléments non linéaires aura un comportement non linéaire. Nous nous intéressons ici à la non-linéarité caractérisant la plasticité (patin). Sur les figures sont représentées les allures de la courbe de réponse à l'essai d'érouissage pour plusieurs modèles bien connus.

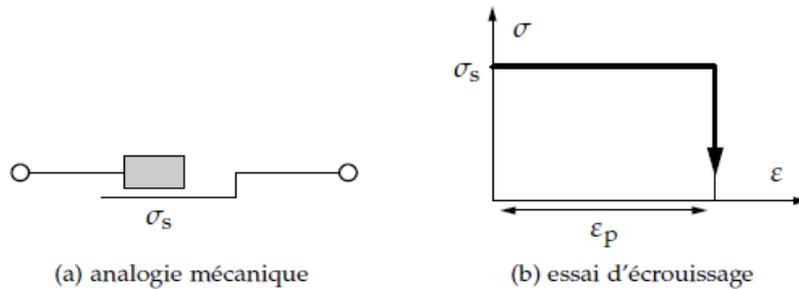


Figure 4.12 Modèle rigide plastique parfait RPP.

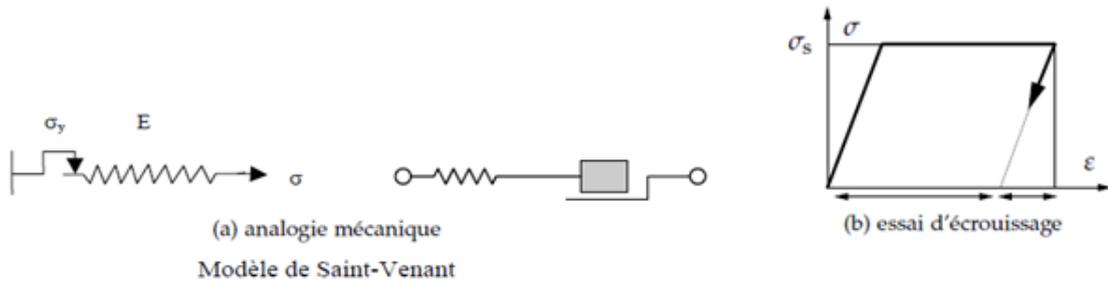


Figure 4.13 Modèle élasto-plastique parfait EPP.

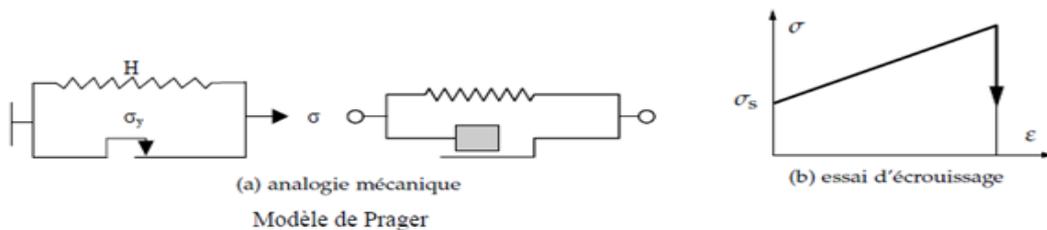


Figure 4.14 Modèle rigide plastique avec érouissage RPE.

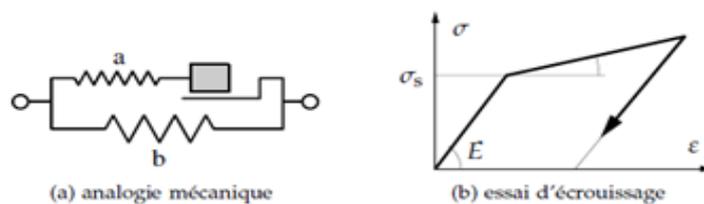


Figure 4.15 Modèle élasto-plastique avec érouissage EPE.

4.3 Loi de comportement d'un matériau parfaitement plastique

En tant que première approximation du comportement non linéaire des matériaux, nous considérons un modèle de comportement parfaitement plastique. Dans le cas des sollicitations rapides, il est possible d'introduire une dépendance de la limite d'élasticité (σ_0) avec la vitesse de déformation ($\dot{\epsilon}$) avec un modèle de type *Norton* ou avec la température,[44].

$$\sigma = \lambda \cdot \dot{\epsilon}^{1/N} \quad (4.8)$$

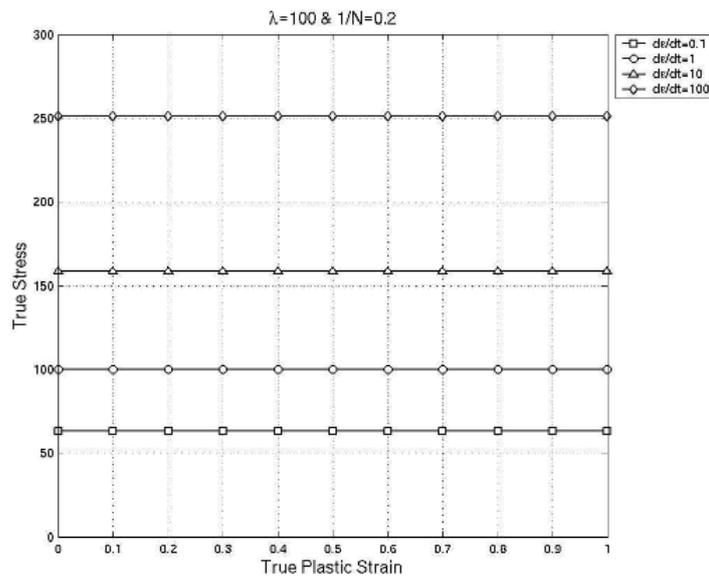


Figure 4.16 Effets de la vitesse de déformation avec un modèle de comportement parfaitement plastique ,[44].

4.4 Loi de comportement d'un matériau écrouissable

L'écrouissage est considéré par le coefficient (n), qui reflète l'augmentation de la contrainte avec la déformation plastique. La loi de puissance ou de *HOLLOMON* est l'une des lois les plus simples. Cette dernière est basée uniquement sur les deux paramètres K_0 et n , et ne contient aucune information sur la limite d'élasticité du matériau (σ_0).

$$\sigma = K_0 \epsilon_p^n \quad (4.9)$$

où,

σ : la contrainte d'écoulement, ϵ_p : la déformation plastique rationalisée.

On définit ainsi un coefficient d'écrouissage n par :

$$n = \frac{d \ln \sigma}{d \ln \epsilon} \quad (4.10)$$

Certains matériaux présentent différents domaines d'érouissage. L'exemple le plus usuel est celui du cuivre pour lequel, pour le domaine des vitesses de déformation quasi-statique ($\dot{\epsilon} = 10^{-3} s^{-1}$), le coefficient d'érouissage n vaut 0.55 et aux faibles déformations et 0.34 au-delà. Dans ce cas, le matériau présente plusieurs stades de consolidation (deux, trois stades parfois). D'autres lois simple comme la loi de LUDWIK et de KRUPKOWSKY qui permettent d'apporter des informations sur la limite d'élasticité (σ_0), contrairement à la loi de HOLLOMON. Par rapport au modèle HOLLOMON, le modèle LUDWIK peut augmenter la contrainte sous le même niveau de déformation, tandis que le modèle KRUPKOWSKY peut réduire la déformation sous le même niveau de contrainte,[44].

$$\sigma = \sigma_0 + K_0 \epsilon_p^n \quad (4.11)$$

$$\sigma = K_0(\epsilon_0 + \epsilon_p)^n \quad (4.12)$$

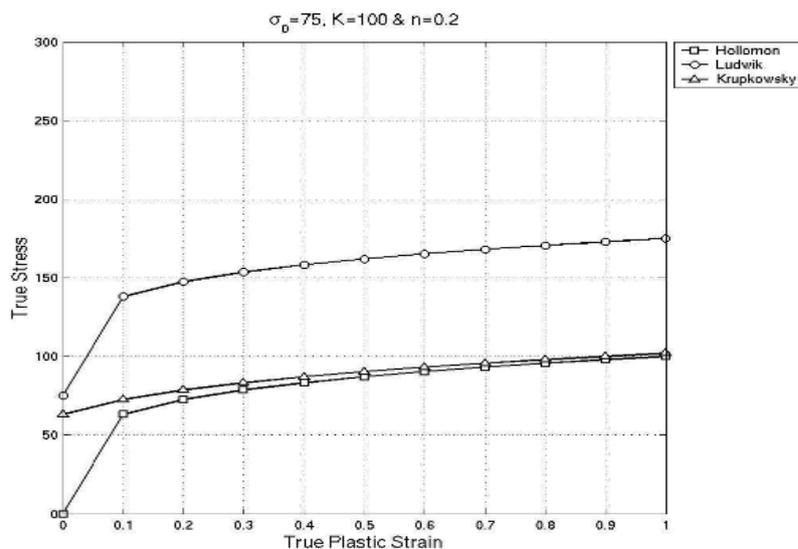


Figure 4.17 Comparaison des modèles d'érouissage,[44].

Par conséquent, il est nécessaire de choisir un modèle amélioré qui s'adapte au phénomène rencontré. De même, une fois que les paramètres du modèle sélectionné sont identifiés, ils ne peuvent plus être utilisés. Par exemple, dans d'autres modèles d'un matériau donné, K_0 et n du modèle HOLLOMON ne conviennent pas aux modèles KRUPKOWSKY ou LUDWIK.

C

Chapitre

5

Pages :91-112

Endommagement et Rupture

5.1 Endommagement

5.1.1 Description

Lorsque le matériau est déformé de l'état initial à l'état pré-déformé, sa déformabilité ou sa ductilité résiduelle de rupture diminue. Par conséquent, au cours de l'évolution de déformation, le matériau sera progressivement détruit, qui aboutit à sa rupture.

L'endommagement est l'ensemble de tous les phénomènes de création de nouvelles surfaces libres dans un matériau exposé à des contraintes (forces) d'origine mécanique, thermique ou thermomécanique. Ceci est différent de l'écrouissage, qui est principalement dû à la disposition et à l'augmentation des dislocations dans le métal. On peut considérer une deuxième définition d'endommagement est l'apparition dans un matériau de dommages causés par l'usure, les contraintes, la température et l'attaque physique ou chimique. L'endommagement conduit finalement à une diminution de ses propriétés mécaniques, conduisant à une rupture,[2].

5.1.2 Théorie de la mécanique de l'endommagement

La variable d'endommagement (noté D) d'un matériau déformé ou lors de la déformation peut être mesurée de plusieurs manières (ou méthodes). Il existe deux méthodes de mesure, les mesures directes par observation (échelle microscopique) et les mesures indirectes par des paramètres physiques.

➤ Mesures directes

Dans les mesures directes on peut par exemple observer la surface d'un échantillon du matériau déformé qui avait été préalablement poli. Pour observer l'intérieur de l'échantillon, on peut choisir une éprouvette déformée (endommagée). Donc on peut également observer le faciès de rupture de l'éprouvette,[2].

➤ Les mesures indirectes

Les mesures indirectes de l'endommagement sont basées sur l'estimation d'un paramètre physique du matériau déformé ou en cours de déformation. Ce paramètre physique doit bien sur être relié à l'endommagement. Dans ce document, nous nous limiterons aux mesures de caractéristiques élastiques (module d'Young et coefficient de Poisson pour un matériau isotrope). D'autres méthodes utilisées telles que par exemple : la mesure de densité, l'émission acoustique et les méthodes électriques.

La mesure de la variation de la pente élastique, donc du module d'Young, lors de déchargements successifs au cours d'un essai de traction montre que ce module diminue lorsque la déformation augmente. La figure 5.1 donne quelques résultats obtenus. En fait, le module d'Young mesuré est un module apparent qui rend compte de l'endommagement du matériau,[2].

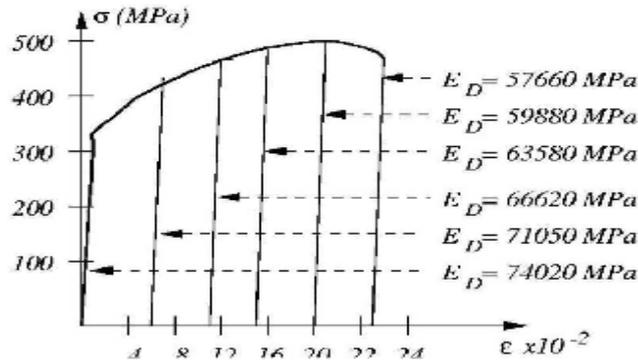


Figure 5.1 Mesures de l'endommagement par variation du module d'Young,[2].

La variable d'endommagement qui peut indiquer l'état de détérioration du matériau peut être déterminée des manières suivantes:

- Des mesures à l'échelle microscopique (densité de microfissures ou de cavités) qui seront implémentées dans des modèles macroscopiques à l'aide des techniques mathématiques d'homogénéisation.
- Des mesures physiques par exemple la densité et mécaniques comme les caractéristiques d'élasticité, de plasticité ou de viscoplasticité.

➤ **Modèle d'endommagement isotrope**

Le modèle suggère de quantifier l'état d'endommagement par une variable scalaire D , ($0 \leq D \leq 1$). La valeur 0 indique l'état non endommagé du matériau et la valeur 1 indique l'état endommagé. Ce type de dommage peut être décrit par un modèle simple défini comme suit,[45] : Soit une partie du matériau solide à l'état vierge donc sans endommagement et un solide endommagé dans chacun desquels un élément de volume fini est isolé, figure (5.2) :

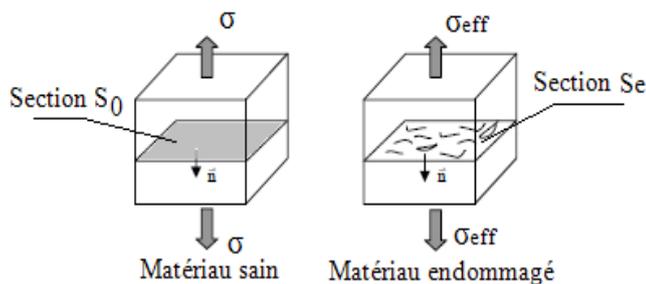


Figure 5.2 Schématisation de l'endommagement par fissuration.

La section du matériau sain est notée (S_0). La section du matériau endommagé est réduite par la présence de fissures et elle est notée (S_e). La différence ($S_0 - S_e$) représente donc l'aire relative ou corrigée des dommages (S_D) dans une section d'un volume endommagé,[45] :

$$S_D = S_0 - S_e \tag{5.1}$$

La variable d'endommagement, D_n , peut être ainsi définie :

$$D = \frac{S_D}{S_0} = 1 - \frac{S_e}{S_0} \quad (5.2)$$

$D=0$ si le matériau est intact (original)

$D=1$ si le matériau est brisé (rupture)

Lorsqu'un effort (F) est appliqué dans la direction (n) du volume endommagé, la contrainte notée (σ_{eff}), est appelée contrainte effective en relation avec la surface effective (corrigée des dommages),[45] :

$$\sigma_{eff} = \frac{F}{S_D} = \frac{F}{S_0(1-D)} = \frac{\sigma}{1-D} \quad (5.3)$$

L'état de déformation d'un matériau endommagé est considéré être affecté uniquement par la contrainte σ_{eff} . Don la loi d'élasticité linéaire unidimensionnelle devient :

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma_{eff}}{E} = \frac{\sigma}{E.(1-D)} \quad (5.4)$$

Où (ε_e) est la déformation élastique et (E) le module élastique du matériau sain.

Les évolutions de l'endommagement peuvent être suivies de manière directionnelle (dans le sens de la traction) par les changements du module d'Young en utilisant la définition suivante,[45] :

$$E.(1-D)=E_D \quad (5.5)$$

et ce module peut être interprété comme le module élastique du matériau endommagé. L'endommagement peut alors s'écrire,[2,45] :

$$D = 1 - \frac{E_D}{E} \quad (5.6)$$

Avec cette théorie, il est possible de décrire le comportement du matériau endommagé selon la relation constitutive du matériau d'origine en utilisant la contrainte effective (σ_{eff}) au lieu de la contrainte habituelle. Cette contrainte peut être introduite en mesurant le module élastique endommagé (E_D). Par conséquent, l'évolution des dommages peut être obtenue de manière simple par les essais charge -décharge pour déterminer les modules endommagés.

5.2 Rupture

5.2.1 Description

La rupture est la conséquence finale des dommages matériels. Il existe généralement deux types de défaillances: la rupture ductile et la rupture fragile. Pour comprendre le type de fracture des matériaux, vous devez examiner son faciès de rupture (fractographique). La rupture fragile

correspond soit à la cohésion entre grains, soit à la fracture du grain le long d'un simple plan cristallin : c'est le clivage. En raison des fortes irrégularités du profil à l'échelle microscopique, les fractures ductiles présentent généralement un aspect plus granuleux,[2].

5.2.2 Faciès de rupture

Les faciès de fracture (rupture) des éprouvettes peuvent être classés selon deux critères différents, qui sont liés à leur dynamique (cinétique) d'une part et à leurs observations d'autre part. Sous chargement statique ou quasi-statique, la rupture est instantanée, reflétant la ductilité ou la fragilité du matériau. Elles sont transcristallines, ce qui est le cas de toutes les fractures ductiles et fragile intergranulaire. L'analyse des défaillances progressives, caractéristiques notamment de dégradation par fatigue, fluage ou par corrosion.

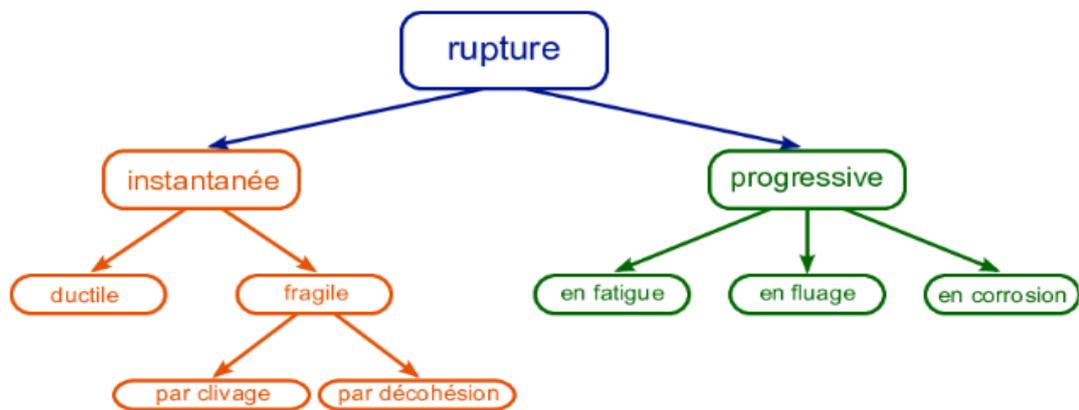


Figure 5.3 Type de rupture (cinétique).

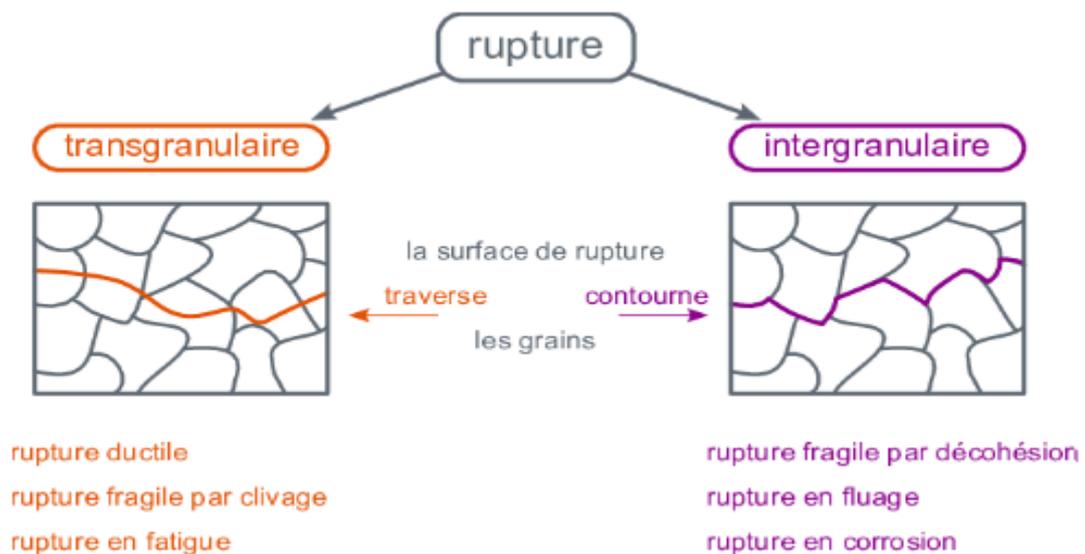


Figure 5.4 Type de rupture (observation).

➤ **Rupture fragile**

La fracture (rupture) fragile se produit par clivage sans avertissement, généralement sans déformation plastique, et les fragments peuvent être parfaitement combinés. une rupture fragile se produit sans glissement de dislocations. Le clivage est le mécanisme de déformation, qui rompt les liaisons atomiques dans le plan dense où la déformation doit se produire. Ce mécanisme ne peut garantir la cristallisation parfaite du matériau. En fait, le clivage se produit dans des matériaux entièrement cristallins et partiellement cristallins (tels que de nombreux polymères) ou des matériaux amorphes (tels que le verre).

C'est une fracture contrôlée par une contrainte normale ou une contrainte de clivage, les ruptures sont transgranulaires : fissuration en grains cohérents selon un plan cristallographique clair et on observe des fractures brillantes,[46].

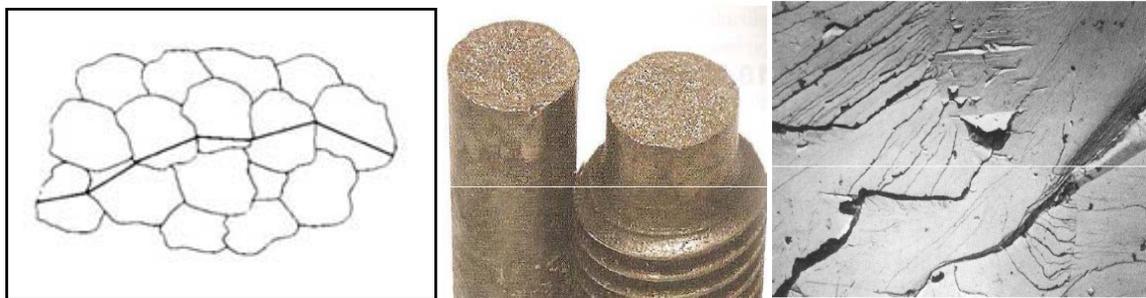


Figure 5.5 Rupture fragile (par clivage), acier au carbone,[47].

Le mode de rupture fragile peut se produire dans les conditions suivantes: basse température, vitesse de chargement élevée et défaillance préexistante ou générée pendant le service. Les fractures fragiles peuvent être divisées en deux catégories:

-La fracture fragile est liée au manque de ductilité des matériaux sous contrainte à une certaine température

-La fracture ductile sans avertissement, ce qui signifie que la déformation plastique est très faible. Cela peut être le cas pour les matériaux à haute limite d'élasticité.

➤ **Rupture ductile**

Une déformation plastique évidente se produit avant la fracture ductile: l'aspect est granuleux et la forme de la cupule est souvent observée en raison du décollement autour des inclusions. Par conséquent, une fracture ductile se produit après que de nombreuses dislocations sont déplacées ou glissées. Certains d'entre eux rencontrent des obstacles, tels que des joints de grains, des inclusions, des précipités, etc. Lorsque ces défauts deviennent évidents, le métal se

déchire. La rupture est généralement représentée sur l'inclusion sous forme de cupule initialisée,[46].

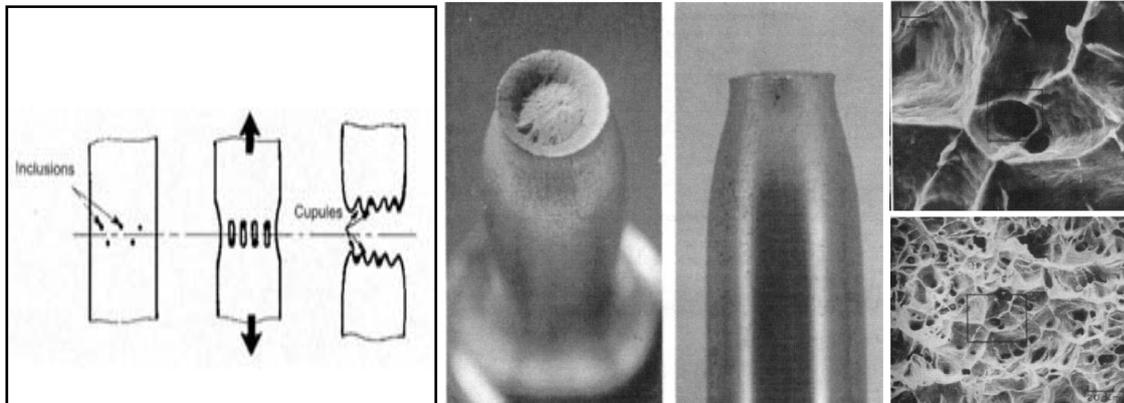


Figure 5.6 Exemples de rupture ductile(avec des inclusions),[48].

➤ Rupture par fatigue

Les faciès défailants de fatigue peuvent avoir plusieurs aspects et seul un spécialiste (les experts) peut les interpréter correctement. En effet, les faciès d'une pièce endommagée par la fatigue présentent généralement plusieurs zones:

- une zone d'amorçage, unique ou multiple
- une zone de propagation de la fissure, lisse et généralement plate
- une zone à grains cristallins plus ou moins évidents

La zone de rupture par fatigue présente généralement des lignes d'arrêt, qui correspond à un arrêt temporaire de la progression de la fissure et visible à l'œil nu. Lorsqu'elle est inspectée au microscope à balayage, la surface fracturée présente un microrelief caractéristique, appelé stries,[46].

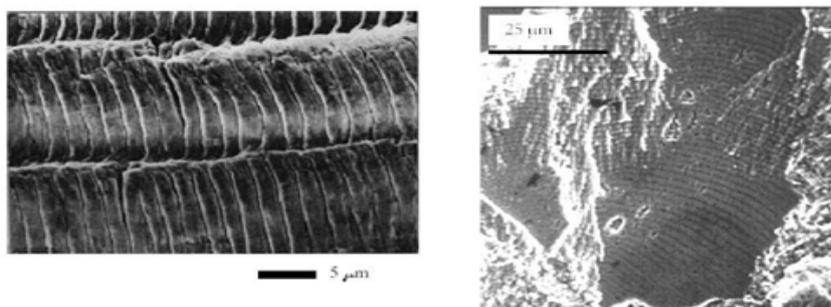


Figure 5.7 Exemple de rupture par fatigue, superalliage base nickel N18(F.Sansoz), [49].

➤ **Rupture par corrosion**

Des fractures intergranulaires fragiles (séparation selon les joints de grains) sont principalement observées en cas de corrosion: par exemple, fragilisation par l'hydrogène,[46].

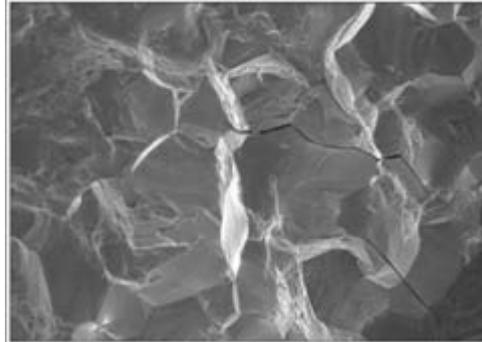


Figure 5.8 Exemple de rupture par corrosion[46].

5.3 Mécanique de la rupture

La mécanique de la rupture est une méthode (approche) qui introduit les concepts habituels de la mécanique des milieux continus, à partir d'une discontinuité existante (cavité ou fissure). Dans certains cas, la vitesse de propagation de la fissure et la taille de la fissure qui peut provoquer une rupture soudaine peuvent être prédites en fonction de la taille de la fissure et de l'état de chargement appliqué. La mécanique de la rupture traite la croissance des trous dans les solides déformés plastiquement.

La mécanique de la rupture permet de quantifier la fracture et de décrire les phénomènes de fracture des matériaux. Griffith (1920) posa les bases de cette théorie basée sur la rupture brutale dans le domaine élastique. Son principe est généré en supposant que la fracture brutale provient de l'instabilité de la fissure, qui est causée par l'énergie potentielle mécanique libérée par la propagation d'une fissure. Il est usuel d'étudier l'initiation de la rupture et la propagation de la rupture. Par rapport au facteur temps

➤ **Les types de rupture dans la mécanique de la rupture :**

- ❖ Fracture fragile: La fracture fragile est caractérisée par l'absence de déformation plastique macroscopique, elle se caractérise donc par des fissures qui peuvent se propager très rapidement (faible consommation d'énergie).
- ❖ Rupture ductile : la fracture ductile semble liée à la présence d'inclusions ou de dépôts. Dans ce mode de défaillance, la déformation plastique macroscopique est généralement élevée (consommation d'énergie élevée).

Dans les matériaux homogènes soumis à une contrainte uniaxiale, la force est transférée d'un atome à un autre en suivant des lignes de force parallèles. Dans les matériaux avec des espaces, les lignes de force doivent contourner l'espace (entaille), ce qui conduit à une concentration de la contrainte dans cette zone, (tête ou pointe de fissure). Donc en résumé que la mécanique de la rupture étudie effet de la discontinuité géométrique sur le milieu continu avoisinant, ainsi que l'évolution de cette discontinuité dans la pièce. On peut distinguer schématiquement, dans une pièce fissurée, trois zones successives :

- **La zone d'élaboration 1:** elle se trouve à la pointe de fissure, dans le sillage laissé par le processus de propagation de la fissure. L'étude de cette zone est très compliquée. en raison des contraintes importantes qui ont gravement endommagé le matériau. La théorie classique de la mécanique de la rupture réduit cette zone à un point pour les problèmes 2D et à une courbe pour les problèmes 3D.
- **La zone singulière 2:** Les champs de déplacement, de déformation et de contrainte sont continus et ont des formules indépendantes pour la géométrie lointaine de la structure. Les résultats montrent que dans cette région, près du front de fissure ($r \rightarrow 0$), la composante du champ de contraintes est infinie.
- **La zone 3 extérieure** comprenant les champs lointains se raccordant d'une part, à la zone singulière, et d'autre part aux conditions aux limites en charges et en déplacements.

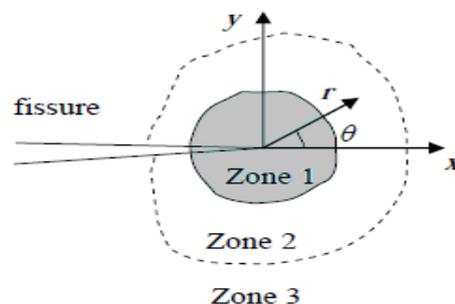


Figure 5.9 Les trois zones de rupture.

Les facteurs qui influencent le comportement à la rupture par fissuration des matériaux sont de deux natures : métallurgique et mécanique. Les facteurs mécaniques concernent l'état de déplacements, déformations et contraintes, ainsi que les conditions d'environnement telle que la température ou le taux d'humidité relative.

➤ **Modélisation de la fissure**

Les fissures sont de petites coupures dans un solide. La fissure peut apparaître à la surface de la pièce, elle peut être complètement à l'intérieur, donc invisible de l'extérieur, ou elle peut traverser complètement la pièce. Ces trois situations sont illustrées à la figure (5.10),[50].

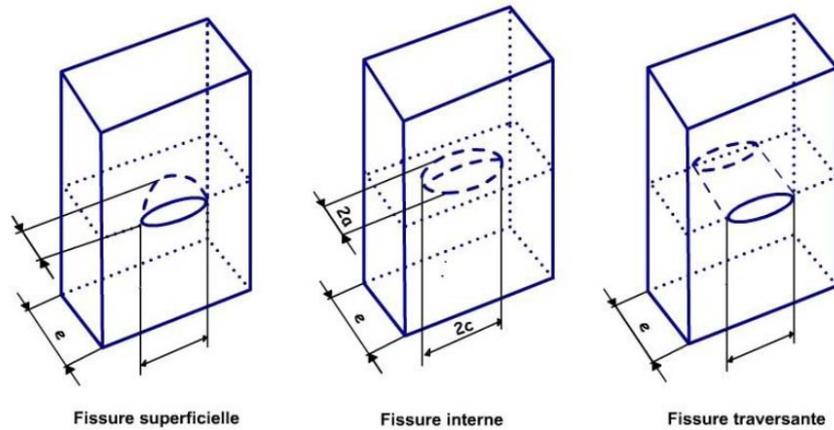


Figure 5.10 Les différents types de fissures.

Pour modéliser une fissure, on suppose généralement que la géométrie de la fissure est simple:

- 1- Leur forme est ovale, semi-elliptique ou en coin.
- 2- Les deux côtés de la fissure sont plats, parallèles et séparés d'une petite distance devant les deux autres dimensions de la fissure.
- 3- Les deux faces se croisent à une arête d'angle et forment un angle quasi-nul selon l'hypothèse précédente (faces parallèles).

5.3.1 Les modes de rupture

La propagation d'une fissure peut se produire de trois manières en déplaçant les surfaces de la fissure dans un plan défini. Elle peut également se faire selon un mode hybride combinant ces trois méthodes. La figure (5.11) illustre trois modes de défaillance,[51,52].

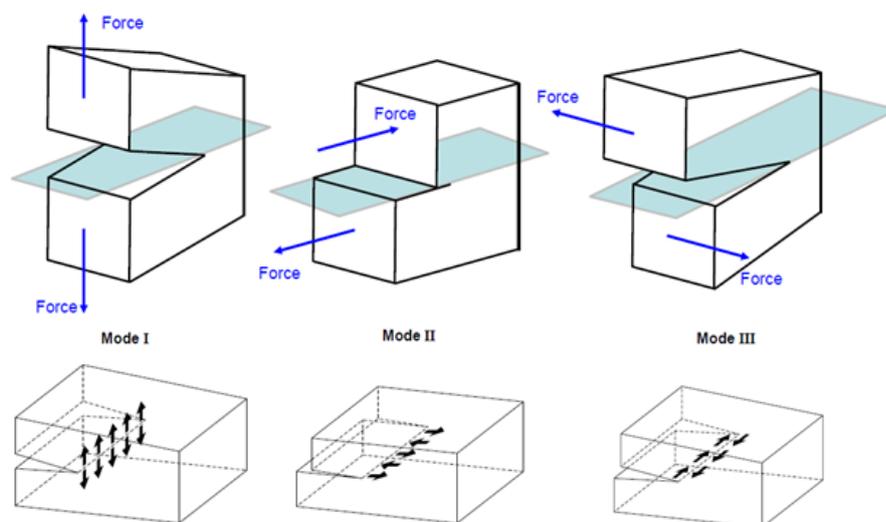


Figure 5.11 Les trois modes de rupture.

-**Mode I**: Les surfaces de fissures se déplacent perpendiculairement les unes aux autres, ce qui est un mode par ouverture.

-**Mode II**: La surface de la fissure se déplace dans le même plan et dans une direction perpendiculaire au bord avant de la fissure.

-**Mode III**: La surface de la fissure se déplace dans le même plan et dans une direction parallèle au bord avant de la fissure.

Le mode I est souvent le plus critique et les études théoriques sont donc souvent limitées à ce mode de propagation. Ce mode est considéré comme le plus dangereux en raison de l'ouverture par traction qui favorise l'initiation et la propagation des fissures.

5.3.2 Définition de La ténacité

La ténacité est la résistance à la propagation des fissures existantes et s'oppose à la fragilité. Vous pouvez également définir la ténacité comme l'énergie qu'un matériau peut absorber avant de se casser. Elle se caractérise par le champ mécanique de la défaillance (compte tenu de l'existence de défauts), et apparaît lorsque l'on rappelle que la rupture est un mode de défaillance gouverné par la fissuration (créée, amorcée, propagée).

La ténacité d'un matériau n'est pas strictement liée à la fragilité ou à la ductilité. Par rapport à de nombreuses céramiques industrielles fragiles, de nombreux métaux ductiles ont une ténacité inférieure. Afin de déterminer la ténacité par des expériences, l'échantillon utilisé doit donc avoir été déjà fissuré.

5.3.3 Facteur d'intensité des contraintes

Lorsqu'une pièce fissurée est sollicitée par des forces dans ces conditions, il y aura une concentration de contraintes très élevée à proximité de la fissure. Après les travaux de l'équipe Irwin, le facteur d'intensité de contraintes a été introduit

Le champ de contrainte dans une structure fissurée peut s'écrire comme le produit d'un terme qui ne dépend que des coordonnées spatiales et d'un terme qui dépend principalement de la contrainte éloignée et de la racine carrée de la longueur de la fissure.

Le dernier terme est généralement appelé K , appelé facteur d'intensité de contrainte. La théorie élastique permet d'exprimer la contrainte près du front de fissure par la série de Taylor en coordonnées polaires.

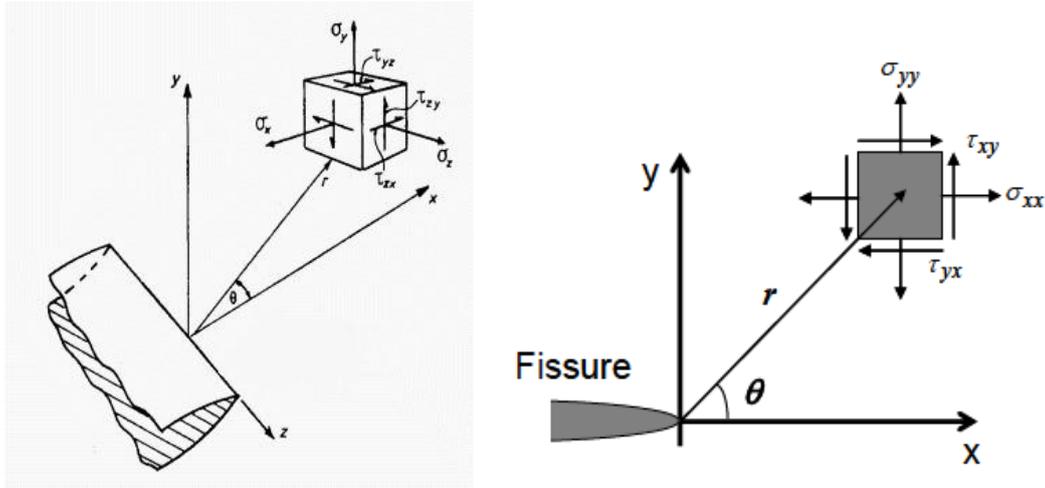


Figure 5.12 Détermination des axes (x, y) et des coordonnées (r, θ) au voisinage de l'extrémité d'une fissure.

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (5.7)$$

La constante K dépend de la charge et de la géométrie de l'éprouvette. Cette grandeur est utilisée pour décrire le niveau de charge à proximité de la fissure et déterminer la taille de la structure. Par conséquent, la norme de contrainte stipule que lorsque le facteur d'intensité de contrainte dépasse une certaine valeur limite, la fissure devient instable. Cette limite s'appelle la ténacité, [51,48].

Mode I:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Déplacements

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left(\cos\frac{\theta}{2}\right) \left(k - 1 + 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right) \\ u_y &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left(\sin\frac{\theta}{2}\right) \left(k + 1 - 2\cos^2\frac{\theta}{2}\right) \\ k &= 3 - 4\nu \quad \text{en déformation plane} \\ k &= \frac{3 - \nu}{1 - \nu} \quad \text{en contrainte plane} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Mode II:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right]\end{aligned}\quad (5.10)$$

Déplacements

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left(\sin\frac{\theta}{2}\right) \left(k + 1 + 2\cos^2\frac{\theta}{2}\right) \\ u_y &= \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left(-\cos\frac{\theta}{2}\right) \left(k - 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}\quad (5.11)$$

Mode III:

$$\sigma_{xz} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (5.12)$$

$$\sigma_{yz} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (5.13)$$

Déplacements

$$u_z = \frac{2K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left(\sin\frac{\theta}{2}\right) \quad (5.14)$$

Remarque : Lorsque la structure fissurée est simultanément sollicitée dans les trois modes, le principe de superposition en élasticité linéaire donne :

$$\sigma_{ij}^{total} = \sigma_{ij}^{(I)} + \sigma_{ij}^{(II)} + \sigma_{ij}^{(III)} \quad (5.15)$$

❖ **Structure sollicitée dans le mode I**

Lorsque $\theta=0$, c'est à dire lorsqu'on se place dans le plan de la fissure, les contraintes au voisinage immédiat et en aval de l'extrémité de la fissure, sont décrites, via les relations par :

$$\sigma_{xx}(\theta = 0) = \sigma_{yy}(\theta = 0) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (5.16)$$

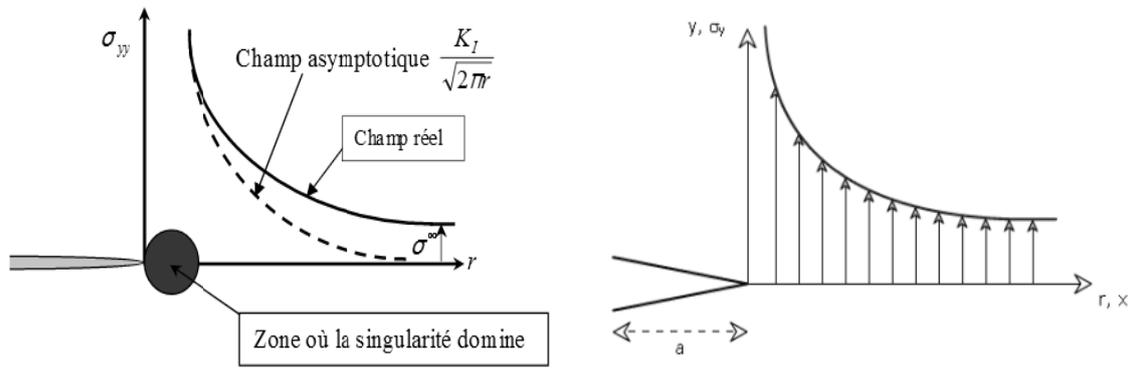


Figure 5.13 Singularité de contrainte.

D'après les solutions élastiques (réf formule), une singularité de contrainte existerait à la pointe d'une fissure ce qui, bien sûr, est impossible.

En effet, si l'on regarde tout simplement l'évolution de la contrainte normale perpendiculaire au plan de la fissure, celle-ci s'exprime sous la forme

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}$$

ce qui imposerait que la contrainte devienne infinie tout près de la pointe de fissure

En pratique les matériaux présentent une limite d'élasticité au dessus de laquelle ils se déforment plastiquement, d'où l'existence d'une zone plastifiée que nous allons démontrer.

En effet, pour $r \rightarrow 0, \sigma_{ij} \rightarrow \infty$, ce qui est impossible dans un état élastique. Donc à la pointe de la fissure, l'état de contrainte sera fini, dû à un comportement plastique du métal sous sollicitations.

K_I représente le facteur d'intensité de contraintes en mode I définis par IRWIN .

K_I est le seul paramètre fournissant une caractéristique du champ de contrainte existant aux abords du fond de fissure. C'est le facteur d'intensité de contrainte (en déformation plane). La valeur de K_I peut être calculée en analyse de contrainte en fond de fissure (à la pointe de la fissure). Des expressions de K_I ont été déterminées pour un grand nombre de cas de chargement et de configuration de pièces. Toutes les expressions sont de la forme :

$$K_I = Y \cdot \sigma \sqrt{\pi \cdot a} \quad \text{en MPa} \cdot \sqrt{m} \quad (5.17)$$

Avec :

Y : facteur tenant compte de la géométrie de la fissure et de la répartition des contraintes.

σ : contraintes dans le matériau normales au plan de fissure et en l'absence de celle-ci.

IRWIN a cherché une expression pouvant définir le champ de contraintes au voisinage de la fissure en tenant compte de la zone plastique par l'accroissement de la fissure. Il suggère que la fissure devient instable et se propage lorsque le facteur d'intensité de contraintes K_I atteint une valeur critique K_{IC} appelée ténacité qui caractérise quantitativement la résistance d'un matériau à

la propagation brutale d'une fissure en mode I. Il énonça ainsi le critère de contrainte par la relation, [52]:

$$K_{IC} = Y \cdot \sigma_c \sqrt{a} \quad (5.18)$$

Y : Représente un coefficient de forme, c'est une fonction géométrique de l'éprouvette et de la longueur de fissure, il est donné pour les principales pièces par des tables. Dans le cas de la flexion trois points :

$$Y = 1.93 - 3.07 \left(\frac{a}{w}\right) + 14.53 \left(\frac{a}{w}\right)^2 - 25.11 \left(\frac{a}{w}\right)^3 + 25.80 \left(\frac{a}{w}\right)^4 \quad (5.19)$$

➤ **Détermination expérimentale de K_{IC} :**

L'essai consiste à solliciter en traction ou en flexion des éprouvettes géométriquement identiques comprenant des fissures de longueurs différentes, les charges de rupture relevées serviront au calcul de K_{IC} . Dans la mesure où l'on veut représenter graphiquement la courbe qui traduit l'évolution de K_{IC} et sera en fonction de (a/w) , [52].

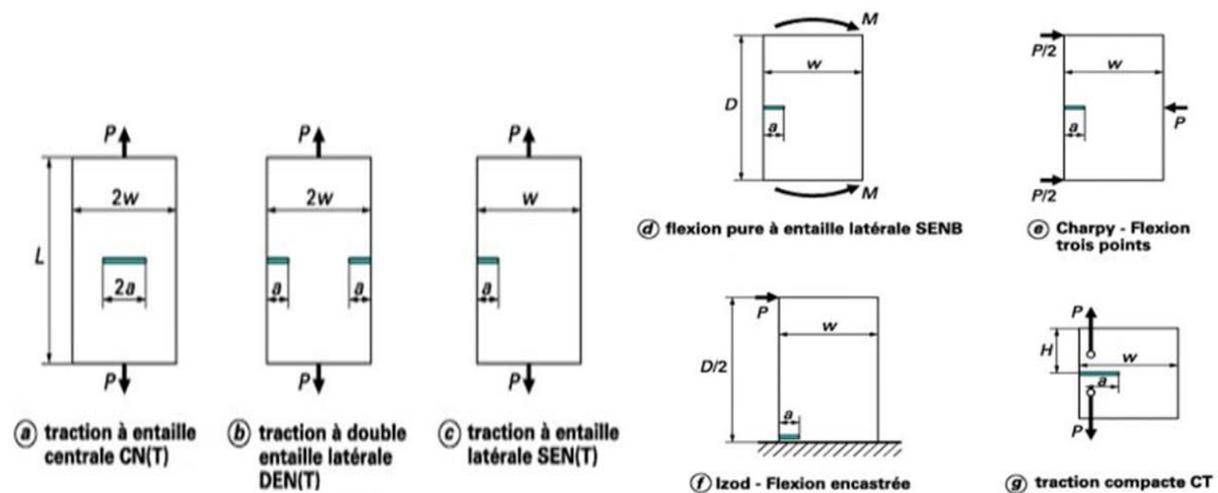


Figure 5.14 Exemples des éprouvettes pré-fissurées,[53].

Suivant le niveau de ductilité du matériau, le comportement à la rupture est analysé à l'aide des concepts de la mécanique linéaire élastique de la rupture (LEFM) et de la mécanique élastoplastique de la rupture (PYFM). La résistance à la fissuration est représentée par :

- G_c : le taux critique de restitution d'énergie ou K_{IC} : le facteur d'intensité de contrainte de la LEFM
- La courbe R de la PYFM qui donne en fait la variation de la ténacité (G, K, J) en fonction de l'avancée de fissure (a)

•les ruptures en utilisant des critères de conception adéquats reviennent ainsi à analyser finement les caractéristiques d'amorçage et de propagation de fissures des matériaux en traction, flexion, choc ou fatigue.

-Pour LEFM, la ténacité du matériau est représentée par un paramètre unique (G_c ou K_{Ic}) car ne convient qu'au matériau fragile.

-Pour PYFM, la ténacité du matériau est représentée par l'une de ses courbes R (K_{IR} , J_{IR} , G_{IR} en fonction de (a)) car matériau ductile où la LEFM ne s'applique pas.

➤ **Principe de superposition en mécanique linéaire de la rupture**

Le principe de superposition prouve que dans les matériaux élastiques linéaires, la composante de contrainte est "additive". Cependant, cette superposition est soumise aux règles suivantes: deux contraintes normales de même sens peuvent se superposer l'une à l'autre, mais la contrainte de cisaillement ne peut pas être superposée à la contrainte normale. Pour les facteurs d'intensité de contrainte (FIC) est de même : les FIC ne peuvent être ajoutés que s'ils sont liés au même mode (modes I, II ou III):

$$K_I^{total} = K_I^{(A)} + K_I^{(B)} + K_I^{(C)} + \dots \quad (5.20)$$

$$K_{total} \neq K_I + K_{II} + K_{III} \quad (5.21)$$

Par exemple (flexion 3points avec traction uni axial):

$$K_I^{total} = K_I^{(traction)} + K_I^{(flexion)} \quad (5.22)$$

➤ **Approche d'Irwin**

Lorsque le corps fissuré est soumis à une contrainte, la concentration de contrainte au fond de fissure produira une plastification locale. L'applicabilité de la méthode MLER dépend d'abord de la taille de cette zone, et elle doit être petite par rapport à la longueur de la fissure et assurer la non perturbation de la distribution élastique des contraintes. Dans le plan de la fissure et en aval de son extrémité, par exemple, dans le cas du mode I ($\theta = 0$), la contrainte normale σ_y est donnée par :

$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (5.23)$$

Irwin considère, en première approximation, que la frontière entre zones élastique et plastique correspond au lieu des points où les contraintes atteignent la limite d'élasticité du matériau,[51].

Pour la détermination du rayon r_E pour lequel cette frontière coupe le plan d'une fissure en contraintes planes, il pose $\sigma_y = \sigma_e$

$$r_E = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_E} \right)^2 \quad (5.24)$$

avec : σ_e la limite d'élasticité en traction simple

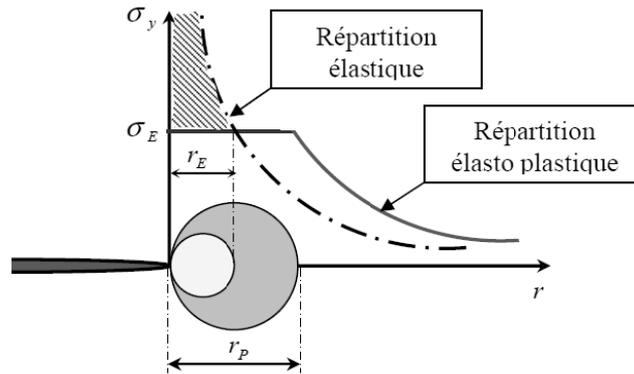


Figure 5.15 Estimation de la zone plastifiée.

Cependant, cette analyse ignore la force non transmise représentée par la ligne hachurée sur la figure. Pour prendre en compte ces efforts, il est nécessaire d'assurer un équilibre entre les deux répartitions de contraintes (élastique et élastoplastique). La taille de la zone plastique r_p devant être supérieure au rayon r_E , l'équilibre des forces entre les deux configurations se traduit par, [51] :

$$r_p = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_E} \right)^2 = 2r_E \quad (5.25)$$

La distribution des contraintes dans la répartition élastoplastique pour $r > r_p$, est obtenue par une translation d'une distance r_E de la répartition élastique (figure). Irwin explique cette translation en définissant un FIC effectif. Il a obtenu la fissure en augmentant la longueur de r_E . Cela revient à ne pas considérer la longueur réelle a de la fissure, mais à considérer la longueur effective $a_{eff} = a + r_E$

le FIC sans correction :

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi \cdot a} \quad (5.26)$$

le FIC devient après correction:

$$K_{eff} = \sigma \sqrt{\pi \cdot (a + r_E)} = \sigma \sqrt{\pi \cdot a} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\sigma_E} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (5.27)$$

Irwin recommande que la forme de la zone plastique soit ronde. En réalité et en mode I, la zone plastique est constituée de deux ailes. Récemment, Banks et al. ont utilisé le critère de Von Mises

pour étudier la forme et la taille de la zone plastifiée. La zone plastifiée est représentée par la relation suivante,[54] :

$$r_m = \alpha \left(\frac{K_I}{\sigma_E} \right)^2 \quad (5.28)$$

α est un paramètre fonction de l'angle θ et de l'état de contraintes :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{4\pi} \left(1 + \cos\theta + \frac{3}{2} \sin^2\theta \right) && \text{en C. P.} \\ \alpha &= \frac{1}{4\pi} \left[(1 - 2\nu)^2 (1 + \cos\theta) + \frac{3}{2} \sin^2\theta \right] && \text{en D. P.} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Les valeurs de α sont reportées dans le tableau (I.1). Aux points A, B, et C définis dans la figure (5.16), [54] :

Etat de contraintes	Valeurs de α		
	A	B	C
C.P.	$1/2\pi$ ($\theta_A=0$)	$1/2\pi$ ($\theta_B=0$)	$\pm 0,205$ ($\theta_C = \pm 80^\circ$)
D.P. ($\nu = 1/3$)	$0,0175$ ($\theta_A=0$)	$0,054$ ($\theta_B = \pm 51^\circ$)	$\pm 0,129$ ($\theta_C = \pm 80^\circ$)

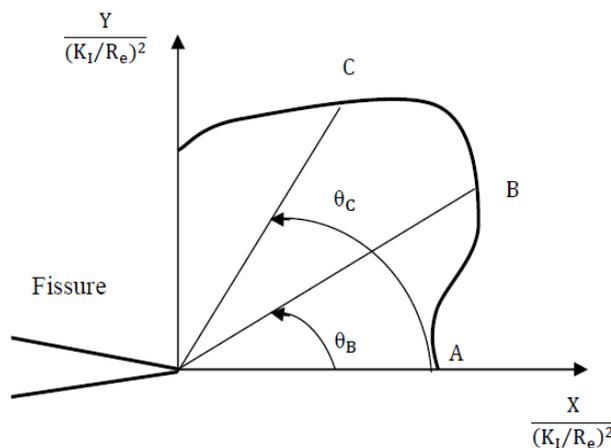


Figure 5.16 Définition des valeurs particulières de α selon Banks et al.,[54]

5.3.4 Taux de restitution d'énergie (Energie de Griffith)

Dans le cas où l'on néglige l'énergie cinétique, la puissance mécanique disponible pour ouvrir les fissures de la surface (A) est égale à la variation de l'énergie potentielle totale V,

résultat de la variation de l'énergie élastique stockée dans la structure et de la variation d'énergie et de l'énergie liée à la force externe. Cette contribution est appelée taux de restitution d'énergie (G) son unité est le joule/m²,[51].

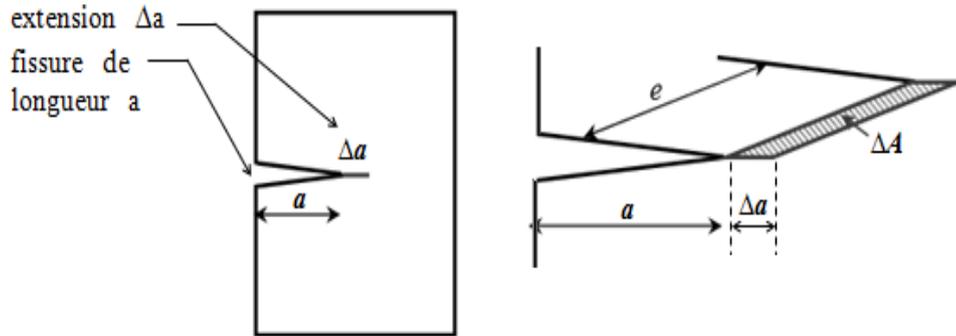


Figure 5.17 Propagation de la fissure sur une longueur.

$$\Delta W_{\text{ext}} = \Delta W_{\text{elast}} + \Delta U \quad (5.30)$$

Avec :

ΔW_{ext} : Variation d'énergie appliquée (due aux forces extérieures),

ΔW_{elast} : Variation d'énergie élastique (emmagasinée),

ΔU : Energie dépensée lors de la propagation de la fissure sur la longueur Δa (une extension)

Pour la théorie initiale de Griffith, théorie qui s'applique à une rupture fragile seulement, l'énergie ΔU correspond à l'énergie nécessaire pour créer de nouvelles surfaces dans le matériau $\Delta U = \Delta W_{\text{sép}}$ avec $\Delta W_{\text{sép}}$ l'énergie de séparation des surfaces.

On appelle ensuite énergie de Griffith G la quantité ΔU rapportée à l'unité de surface,[51] :

$$G = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta A} = \frac{\partial U}{\partial A} \quad (5.31)$$

Où $\Delta A = e \cdot \Delta a$ est la surface fissurée lors de la propagation de la fissure sur la longueur Δa dans une éprouvette d'épaisseur e .

Généralement, on suppose l'épaisseur unité ($e=1$) si bien que l'expression de l'énergie G rapportée à l'unité d'épaisseur devient :

$$G = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta a} = \frac{\partial U}{\partial a} \quad (5.32)$$

Cette énergie sert à créer de nouvelles surfaces libres, ce qui implique des apports d'énergie. En appelant γ_s l'énergie spécifique de rupture par unité de surface, il est donc nécessaire pour que la

fissure se propage que la contribution mécanique équilibre au moins l'énergie dissipée (théorie de Griffith pour la rupture fragile), soit dans un milieu plan d'épaisseur unité, [51] :

$$G = \frac{\partial U}{\partial A} = 2\gamma_s \quad (5.33)$$

propagation de la fissure si $G - 2\gamma_s \geq 0$ et arrêt de la fissure si $G - 2\gamma_s \leq 0$

Afin de bien comprendre la signification de l'énergie Griffith G , nous examinerons la propagation dans les deux situations typiques suivantes, figure 5.18:

- Propagation à déplacement imposé (x)
- Propagation à force imposée (F)

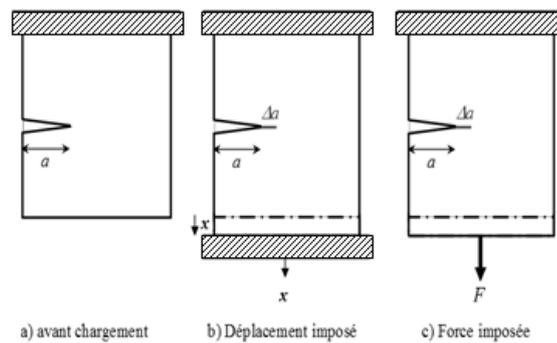


Figure 5.18 Propagation stable à Force imposée ou à Déplacement imposé.

❖ Propagation à déplacement imposé ($x=\text{constante}$)

$\Delta x = 0 \Rightarrow \Delta W_{ext} = 0$; $W_{élast} = Fx/2$, soit en introduisant la complaisance (c'est-à-dire l'inverse de la rigidité) $C = x/F$:

$$W_{élast} = \frac{1}{2}CF^2 = \frac{x^2}{2C} \Rightarrow \Delta W_{élast} = -\frac{x^2}{2C^2} \left(\frac{\partial C}{\partial a} \right)_x \Delta a$$

On constate ainsi que l'énergie élastique emmagasinée décroît.

Comme $\Delta W_{ext} = 0 = \Delta U + \Delta W_{élast} \Rightarrow \Delta U = -\Delta W_{élast}$ et $G = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta U}{\Delta a} \right)$, soit :

$$G = \frac{x^2}{2C^2} \left(\frac{\partial C}{\partial a} \right)_x = \frac{F^2}{2} \left(\frac{\partial C}{\partial a} \right)_x \quad (5.34)$$

❖ Propagation à Force imposée (F=constante)

$$\begin{aligned} \Delta F = 0 &\Rightarrow \Delta \left(\frac{x}{C} \right) = 0, \text{ soit } \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta C}{C} \\ \Delta W_{\text{ext}} = F \cdot \Delta x &= \frac{F x}{C} \cdot \Delta C \approx F^2 \left(\frac{\partial C}{\partial a} \right)_F \Delta a \\ W_{\text{élast}} = \frac{1}{2} Fx &= \frac{F^2}{2} C \text{ d'où } \Delta W_{\text{élast}} = \frac{F^2}{2} \left(\frac{\partial C}{\partial a} \right)_F \Delta a \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\Delta U = \Delta W_{\text{ext}} - \Delta W_{\text{élast}} = \frac{F^2}{2} \left(\frac{\partial C}{\partial a} \right)_F \Delta a, \text{ et l'énergie de Griffith s'écrit alors :}$$

$$G = \frac{F^2}{2} \left(\frac{\partial C}{\partial a} \right)_F \quad (5.36)$$

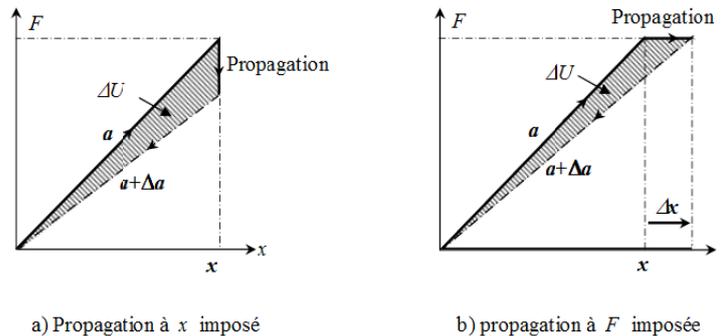


Figure 5.19 Variation de la force lors d'une propagation de fissure à déplacement imposé ou à force imposée.

Remarques :

1- L'expression de l'énergie de Griffith G est la même dans les deux situations alors quelle provient de sources différentes :

C'est la diminution d'énergie élastique qui favorise la propagation de la fissure (aire hachurée de la figure 5.18a). L'énergie élastique augmente mais moins que le travail des forces extérieures : c'est la différence entre ces deux variations qui favorise la propagation de la fissure (aire hachurée de la figure 5.18b).

En fait, les deux aires hachurées de la figure 5.18 diffèrent de la quantité $\Delta F \cdot \Delta x / 2$, qui est négligeable (car infiniment petite d'ordre 2).

2- Les relations avaient été obtenues sous l'hypothèse que l'épaisseur « e » est égale à l'unité. En l'absence de cette condition, il convient de modifier les relations comme suit :

$$G = \frac{F^2}{2e} \left(\frac{\partial C}{\partial a} \right)_{x \text{ ou } F}$$

➤ **Quelques valeurs critiques de G**

-Le verre et les céramiques ont des valeurs très faibles : de l'ordre de 10 J/m².

-Les résines fragiles : de l'ordre de 100 à 500 J/m².

-Les composites verre/résine : de l'ordre de 7000 J/m²

-Les alliages d'aluminium : 20000 J/m².

-Les matériaux les plus résistants à la déchirure sont les aciers G de l'ordre de 100 kJ/m², et, bien entendu, les métaux purs (G de l'ordre de 100–1000 kJ/m²).

➤ **Relation entre le facteur d'intensité des contraintes et l'énergie de Griffith**

les relation entre le facteurs d'intensité des contraintes et l'énergie de Griffith dans les trois modes de rupture,[51,48]:

Mode I :

En déformations planes :

$$G_I = \frac{K_I^2}{E} (1 - \nu^2) \quad (5.37)$$

En contraintes planes :

$$G_I = \frac{K_I^2}{E} \quad (5.38)$$

Mode II:

En déformations planes :

$$G_{II} = \frac{K_{II}^2}{E} (1 - \nu^2) \quad (5.39)$$

En contraintes planes :

$$G_I = \frac{K_{II}^2}{E} \quad (5.40)$$

Mode III:

$$G_{III} = \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad (5.41)$$

Cas général :

Dans le cas général, lorsque les trois modes coexistent :

$$G = G_I + G_{II} + G_{III} \quad (5.42)$$

En déformation planes :

$$G = \frac{1}{E} [(1 - \nu^2)(K_I^2 + K_{II}^2) + (1 + \nu)K_{III}^2] \quad (5.43)$$

En contraintes planes :

$$G = \frac{1}{E} [K_I^2 + K_{II}^2 + (1 + \nu)K_{III}^2] \quad (5.44)$$

Exercices

Exercice n°1:

Le tableau ci-dessous récapitule les résultats d'un essai de traction effectué sur une éprouvette cylindrique en acier. F est la charge de traction et ΔL son allongement :

$F(KN)$	0	51.8	72	93.2	109	141.6	149.6	161	170
$\Delta L(mm)$	0	0.0255	0.035	0.046	0.0535	0.076	0.101	0.152	0.203

$F(KN)$	177.2	186.8	197.6	214.4	227	235	242	246
$\Delta L(mm)$	0.254	0.355	0.508	0.762	1.016	1.272	1.524	1.780

Le diamètre initial de l'éprouvette $d_0 = 17.68$ mm et le diamètre ultime $d_u = 16.41$ mm.

La longueur $L_0 = 25$ mm et la longueur ultime $L_u = 26.75$ mm.

- 1- Tracer le graphe Force – allongement $F=f(\Delta L)$, en déduire la force élastique F_e et la force maximale de traction F_m .
- 2- Tracer le graphe contrainte – déformation $\sigma_c=f(\epsilon_c)$, en déduire la limite proportionnelle d'élasticité R_e , la limite conventionnelle d'élasticité à 0.2% d'allongement plastique ($R_{p0.2}$), la limite à la rupture (R_m), le module de Young E
- 3- Déterminer l'allongement à la rupture $A\%$ et le coefficient de striction $Z\%$.
- 4- Le matériau est considéré comme ductile ou fragile, justifiez votre réponse.
- 5- Déterminer le module de cisaillement G sachant que le coefficient de Poisson $\nu \approx 0.3$

Exercice n°2:

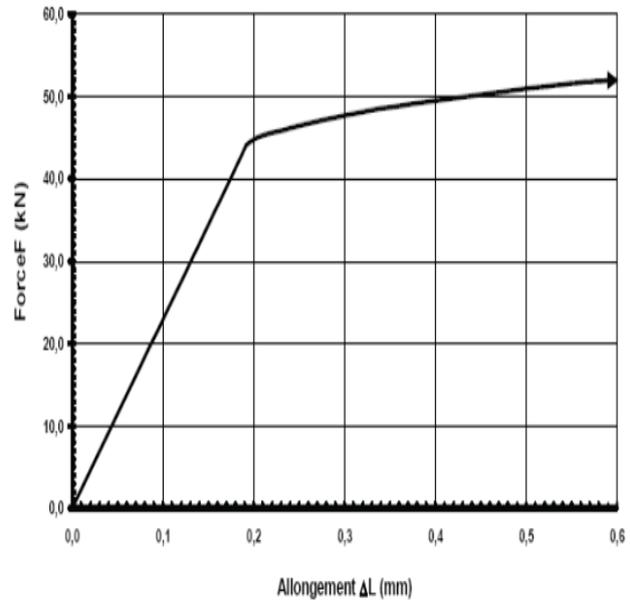
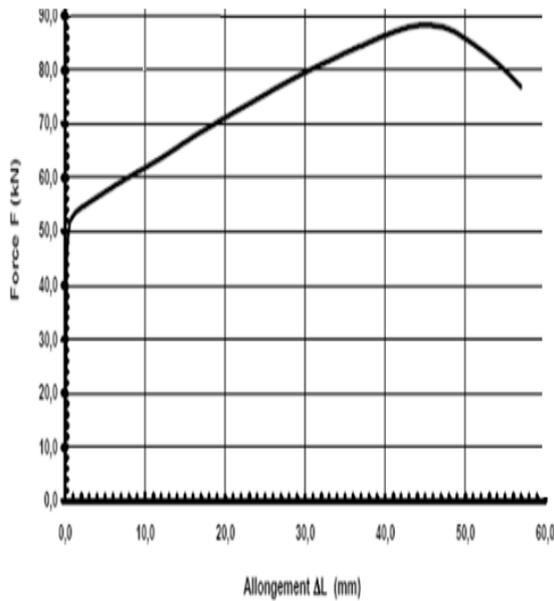
Reprendre l'exercice n° 1, nous allons établir maintenant le diagramme rationnel de la forme $\sigma_v = f(\epsilon_r)$, ce diagramme nous permettra ensuite d'établir la loi de comportement plastique du matériau.

- 1- Déterminer les contraintes vraies (σ_v) et les déformations rationnelles (ϵ_r)
- 3- Tracer le diagramme rationnel (dans la zone de plasticité) $\sigma_v = f(\epsilon_r)$
- 4- Déterminer les coefficients d'écrouissage et de résistance (K et n) en utilisant la loi de Hollomon (loi de puissance).
- 5- Déterminer les coefficients d'écrouissage et de résistance (K et n) en utilisant la loi de Ludwik

Exercice n°3:

Un essai de traction a été réalisé sur une éprouvette cylindrique d'acier inoxydable. La courbe brute de traction est donnée ci-dessous avec $L_0 = 150$ mm et $d_0 = 15$ mm, Déterminer :

- 1- Le module d'Young longitudinale E du matériau
- 2- La limite proportionnelle d'élasticité R_e
- 3- La limite conventionnelle d'élasticité $R_{p0.2}$
- 4- La résistance à la traction R_m
- 5- La déformation totale ϵ_t (en %) juste avant la rupture
- 8- Lorsque l'éprouvette était soumise à une force $F = 40$ KN, son diamètre était alors égal à 14.995 mm. Déterminer la valeur du coefficient de Poisson ν du matériau d'éprouvette.



Exercice n°4:

On réalise un essai de traction sur une éprouvette cylindrique proportionnelle en acier de section initiale $S_0 = 150 \text{ mm}^2$. Sachant que la force au point limite élastique $F_e = 3525 \text{ daN}$ et la force maximale $F_m = 5400 \text{ daN}$. Après rupture la longueur ultime $L_u = 87,2 \text{ mm}$ et l'allongement au point limite élastique $\Delta L = 0,08 \text{ mm}$. Déterminer les valeurs : la longueur L_0 , l'allongement à la rupture $A\%$, la limite proportionnelle d'élasticité R_e , la résistance à la traction R_m et le module de cisaillement G , sachant que le coefficient de Poisson $\nu = 0.3$

Exercice n°5:

Une éprouvette en cuivre (module d'Young $E = 110 \text{ GPa}$) de longueur $L_0 = 305 \text{ mm}$ est tirée à l'aide d'une charge unitaire $\sigma = 275 \text{ MPa}$. Si la déformation est élastique, quelle sera son élongation ΔL en mm.

Exercice n°6:

Une barre métallique homogène (le comportement du matériau est élastique linéaire, matériau isotrope) de section $(30 \times 15 \text{ mm}^2)$, de longueur $L_0 = 150 \text{ mm}$, est soumise à un effort de traction de $F = 10 \text{ kN}$ dans le sens longitudinale et le module de Young $E = 25000 \text{ MPa}$.

- 1-Déterminer la déformation élastique ϵ et la variation de longueur ΔL .
- 2-Déduire le module de cisaillement G sachant que le coefficient de Poisson $\nu = 0.3$.
- 3- Trouver la variation du volume de cette barre.

Exercice n°7:

Un barreau cylindrique de bronze de diamètre initial $d_0 = 10 \text{ mm}$, module d'Young $E = 97 \text{ GPa}$ et coefficient de Poisson $\nu = 0.34$. Quelle contrainte de traction uniaxe σ dans le domaine élastique faut-il lui appliquer pour produire un allongement et $\Delta d = -3 \times 10^{-3} \text{ mm}$ dans le sens transverse.

Exercice n°8:

On réalise un essai de dureté *Brinell* sur une éprouvette en acier, l'effort exercé sur la bille ($D = 10 \text{ mm}$) est de 2943 daN . Après essai, on détermine le diamètre moyen de l'empreinte $d = 4.5 \text{ mm}$. Déterminer la valeur de la dureté HB et déduire la résistance à la traction R_m .

Exercice n°9:

On réalise un essai de dureté *Vickers* sur une éprouvette, l'effort exercé sur le pénétrateur 40Kgf et les diagonales de l'empreinte après essai $d_1=0.52$ mm et $d_2=0.54$ mm. Déterminer la valeur de la dureté HV.

Exercice n°10:

On a effectué un essai de résilience *Charpy* sur une éprouvette en acier avec une entaille en V. Étant donné que le pendule mesure $OG = 0,74$ m avec une masse en extrémité de 25 kg. l'angle de chute du pendule $\alpha = 70^\circ$ et l'angle de remontée $\beta = 35^\circ$.

- 1- Déterminer l'énergie de rupture de l'éprouvette
- 2- Déterminer la valeur de la résilience KCV.

Exercice n°11:

Soit un mouton de Charpy dont le pendule mesure $OG = 0,7$ m et une masse en extrémité de 22,5 kg. Sachant que le pendule est lâché d'une hauteur $h_0 = 1,34$ m et que l'angle de remontée mesuré est $\theta_1 = 74^\circ$

- 1-Déterminer l'énergie de rupture de l'éprouvette
- 2- Déterminer la valeur de la résilience KCV.

Exercice n°12:

1-Déterminer les constants de rigidité (tenseur des rigidités) et de souplesse d'un acier ordinaire (comportement élastique linéaire, matériau isotrope) de caractéristiques : $E=2.10^5$ MPa et $\nu = 0.3$. En déduire les coefficients de Lamé.

2-Supposons que l'on mesure, en traction uniaxiale ($\sigma_{11}=150$ MPa) les déformations correspondantes. Déterminer les déformations.

3-Supposons que l'on mesure, en cisaillement simple ($\tau_{12}=80$ MPa) les déformations correspondantes. Déterminer les déformations.

Exercice n°13 :

L'objectif de cet exercice est de déterminer les relations entre le coefficient de Poisson ν , le module d'Young E et les paramètres de Lamé.

On se place dans un état de contrainte uniaxiale, une seule contrainte est non nulle $\sigma_1 \neq 0$

1-Déterminer ε_2 et ε_3 en fonction de ε_1 et des paramètres de Lamé, puis du coefficient de Poisson, et déterminer la relation entre le coefficient de Poisson et les paramètres de Lamé.

2-Déterminer σ_1 en fonction de ε_1 et des coefficients de Lamé, puis en fonction du module d'Young, et déterminer la relation entre le module d'Young et les coefficients de Lamé.

3-Déterminer les relations inverses entre les coefficients de Lamé et le module d'Young et le coefficient de Poisson.

Exercice n°14:

Déterminer les constants de rigidité (tenseur des rigidités) et de souplesse d'un matériau composite orthotrope de caractéristiques : $E_1 = 30$ GPa , $E_2 = 20$ GPa , $E_3 = 10$ GPa , $\nu_{12} = 0.14$, $\nu_{13} = 0.3$, $\nu_{23} = 0.32$, $G_{12}= 4$ GPa , $G_{13}=3.5$ GPa et $G_{23}=2.5$ GPa

Exercice n°15:

Déterminer les constants de rigidité (tenseur des rigidités) et de souplesse d'un matériau composite orthotrope de caractéristiques : $E_1 = E_2 = 25$ GPa , $E_3 = 10$ GPa , $\nu_{12} = 0.12$, $\nu_{13} = 0.3$, $\nu_{23} = 0.32$, $G_{12}= 4.2$ GPa et $G_{13}= G_{23}=3.5$ GPa.

Exercice n°16:

En un point M d'un solide, dans le repère orthonormé $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, le tenseur des déformations est égal à :

$$[\varepsilon]_{xyz} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 150 & -120 & 0 \\ -120 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Un tel état de déformation est dit état de déformation plane par rapport à l'axe \vec{k} . Le comportement du matériau est élastique linéaire, matériau isotrope, avec les caractéristiques : Module de Young $E = 2 \cdot 10^5$ MPa et coefficient de Poisson $\nu = 0.3$

- 1- Déterminer les deux constantes d'élasticité indépendantes de rigidité.
- 2- Déterminer les deux constantes d'élasticité indépendantes de souplesse.
- 3- Déduire les coefficients de Lamé.
- 4- Déterminer les composantes du tenseur des contraintes.

Exercice n°17:

En un point M d'un solide, dans le repère orthonormé $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, le tenseur des contraintes a pour valeur :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 100 & -40 & 0 \\ -40 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Un tel état de contrainte est dit état de contrainte plane, le comportement du matériau est élastique linéaire isotrope, avec les caractéristiques : Module de Young $E = 21 \cdot 10^4$ MPa et coefficient de Poisson $\nu = 0.3$

- 1- Calculer les constantes d'élasticité indépendantes de rigidité.
- 2- Calculer les constantes d'élasticité indépendantes de souplesse.
- 3- Déduire les coefficients de Lamé.
- 4- Déterminer les composantes du tenseur des déformations.

Exercice n°18:

En un point M d'un solide, dans le repère orthonormé $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, le tenseur des déformations est égal à :

$$[\varepsilon]_{xyz} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 0 & -200 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Le comportement du matériau est élastique linéaire isotrope, avec les caractéristiques : Module de Young $E = 200$ GPa et coefficient de Poisson $\nu = 0.3$

- 1- Calculer les constantes d'élasticité indépendantes de souplesse.
- 2- Déduire les coefficients de Lamé.
- 3- Déterminer les composantes du tenseur des contraintes dans les deux cas :
 - a- En contraintes planes (C.P)
 - b- En déformations planes (D.P)

Exercice n°19:

Dans la zone la plus sollicitée d'une pièce sollicitée par des chargements mécaniques, on relève l'état de contrainte suivant :

$$\sigma_{xx} = 246 \text{ MPa}, \sigma_{yy} = 62 \text{ MPa}, \sigma_{zz} = 92 \text{ MPa}, \sigma_{xy} = 0 \text{ MPa}, \sigma_{xz} = 0 \text{ MPa} \text{ et } \sigma_{yz} = 0 \text{ MPa}.$$

Le comportement du matériau est élastique linéaire isotrope, avec les caractéristiques du matériau de la pièce: $E = 2.10^5 \text{ MPa}$, $\nu = 0.3$.Déterminer les composantes du tenseur des déformations.

Exercice n°20:

En un point M d'un solide, dans le repère orthonormé $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, une pièce sollicitée par des chargements mécaniques, on relève l'état de contrainte suivant :

$$\sigma_{xx} = -170.77 \text{ MPa}, \sigma_{yy} = 60.77 \text{ MPa}, \sigma_{zz} = 0 \text{ MPa}, \sigma_{xy} = -41.97 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{xz} = 0 \text{ MPa} \text{ et } \sigma_{yz} = 0 \text{ MPa}.$$

Le comportement du matériau est élastique linéaire isotrope, avec les caractéristiques du matériau de la pièce: $E = 21.10^4 \text{ MPa}$, $\nu = 0.3$.Déterminer les composantes du tenseur des déformations.

Exercice n°21:

En un point M d'un solide, dans le repère orthonormé $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ on donne le tenseur des contraintes :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 63.44 & -18.47 & 0 \\ -18.47 & 71.13 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Le comportement du matériau est élastique linéaire isotrope, avec les caractéristiques : $E = 2.10^5 \text{ MPa}$ et $\nu = 0.3$

- 1-Calculer les deux constantes d'élasticité indépendantes de rigidité
- 2- Déduire les coefficients de Lamé
- 3-Calculer les deux constantes d'élasticité indépendantes de souplesse
- 4-Déterminer la valeur de la contrainte σ_{33} et les composantes du tenseur des déformations (état de déformation plane par rapport à l'axe \vec{k}).

Exercice n°22 :

On soumet un barreau d'acier ($E = 2.10^5 \text{ MPa}$, $\nu = 0.3$, $\alpha = 12.10^{-6} (K)^{-1}$), de 200 mm^2 de section et de 1 m de longueur, à une force axiale de traction de 15 KN .

On demande de calculer l'abaissement de température nécessaire pour que l'allongement total du barreau soit nul.

Exercice n°23 :

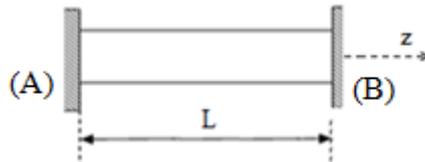
Reprendre l'exercice précédent (ex n°22), on chauffe le barreau d'acier de sa température initiale $T_0 = 20^\circ \text{ C}$ à une température uniforme $T_1 = 80^\circ \text{ C}$. Déterminer les déformations dans le barreau.

Exercice n°24 :

On considère un cylindre de section circulaire S et de longueur L . Il est constitué d'un matériau isotrope de module d'Young E , de coefficient de Poisson ν et de coefficient de dilatation thermique α (E , ν , α supposés indépendants de T). Le comportement du matériau est thermo-élastique linéaire isotrope. On se place dans le cadre des petites perturbations et en régime stationnaire. Nous ignorons la force du volume devant les forces considérées.

On met en contact les plateaux (A) et (B) d'une presse avec le cylindre, mais sans exercer des efforts sur le cylindre. On bloque alors les deux plateaux de la presse. On chauffe ensuite le cylindre de sa température initiale T_0 à une température uniforme T_1 .

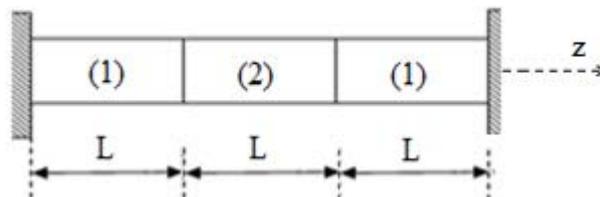
- 1-Déterminer l'expression de la force appliquée F par les plateaux sur le cylindre
- 2-Déterminer la contrainte (σ_z) dans le cylindre.



Exercice n°25 :

Considérez la structure illustrée dans la figure ci-dessous. chaque cylindre de section S et de longueur L est constitué d'un matériau isotrope de module d'Young E , de coefficient de Poisson ν et de coefficient de dilatation thermique α (E, ν, α supposés indépendants de T). Le comportement du matériau de chaque cylindre est thermo-élastique linéaire isotrope. On se place dans le cadre des petites perturbations et en régime stationnaire. ignorons la force du volume devant les forces considérées et les cylindres sont indépendants et les glissements aux interfaces sont sans frottement. Le cylindre (2) a pour caractéristiques (E_2, ν_2, α_2) tandis que les deux cylindres (1) ont pour caractéristiques (E_1, ν_1, α_1). On chauffe l'ensemble de la température initiale T_0 à une température uniforme T_1 .

- 1-Déterminer l'expression de la force appliquée par les deux plateaux sur les cylindres
- 2-Déterminer la contrainte (σ_z)



Exercice n°26:

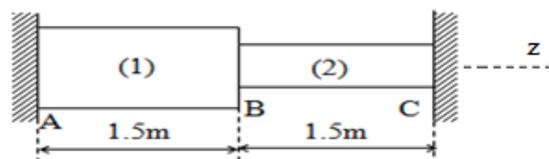
Les deux barreaux (1) et (2) sont, au départ, simplement en contact l'un avec l'autre (en B) et avec des parois rigides (en A et C), Sachant que :

Pour le barreau 1, la section $A_1=200 \text{ mm}^2$, module de Young $E_1=100\text{GPa}$ et le coefficient de dilatation thermique $\alpha_1 = 20.10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

Pour le barreau 2, $A_2=100 \text{ mm}^2, E_2=70\text{GPa}$ et $\alpha_2 = 13.10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$

On augmente la température de l'ensemble de la structure de 30°C :

- 1-Déterminer le déplacement de la jonction B.
- 2-Déterminer la valeur de la contrainte (σ_z) dans chacun des barreaux.



Exercice n°27:

Une barre rectiligne A-C, en acier de section transversale ronde (diamètre d) et de longueur $3a$, schématisé par la figure ci contre. La barre est encastree à ses deux extrémités dans des appuis indéformables. Cette pièce se compose de deux tronçons cylindriques :

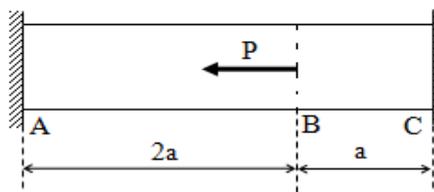
Premier tronçon : Aire de la section A_1 , longueur $2a$

Deuxième tronçon : Aire de la section A_2 , longueur a

La force P est appliquée entre le premier et le deuxième tronçon. La barre est constituée d'un matériau isotrope de module d'Young E et de coefficient de dilatation thermique α (E et α supposés indépendants de T). Le comportement du matériau est thermo-élastique linéaire isotrope. On se place dans le cadre des petites perturbations et ignorons la force du volume devant les forces considérées. On augmente la température de l'ensemble de ΔT .

-Déterminer les réactions d'appui en A et C.

On donne : $P=25$ KN, $\Delta T = 30^\circ\text{C}$, $a=500$ mm, $d=50$ mm, $\alpha =12 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ et $E=21 \cdot 10^4$ MPa



Exercice n°28:

Des rails d'acier sont posés avec un écartement de $B=3$ mm entre les extrémités lorsque la température est de 15°C . Calculer la valeur de ce écartement B pour une température de -30°C et à quelle température les rails sont-ils en contact.

On donne : longueur d'un rail est $L=12$ m, le module de Young et le coefficient de dilatation thermique α du matériau des rails $E=21 \cdot 10^4$ MPa, $\alpha =12 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$.

Exercice n°29:

Une barre rectiligne AB, en acier de section transversale ronde et de longueur $2L$ schématisé par la figure ci-contre. La barre est encastree à ses deux extrémités dans des appuis indéformables.

Cette pièce se compose de deux tronçons cylindriques :

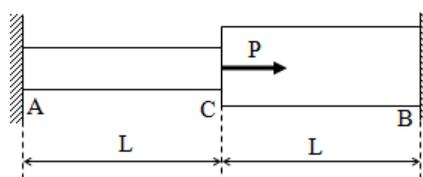
Tronçon AC : diamètre de la section d et longueur L

Tronçon CB : diamètre de la section $2d$ et longueur L

La force concentrée P est appliquée entre le premier et le deuxième tronçon. La barre est constituée d'un matériau isotrope de module d'Young E et de coefficient de dilatation thermique α (E , α supposée indépendants de la température). Le comportement du matériau est thermo-élastique linéaire isotrope. On se place dans le cadre des petites perturbations et on néglige les forces de volume. On augmente la température de l'ensemble de ΔT .

Déterminer les réactions d'appui en A et B.

On donne : $P=10$ KN, $\Delta T=20^\circ\text{C}$, $L=500$ mm, $d=50$ mm, $E=21 \cdot 10^4$ MPa et $\alpha =12 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$



Exercice n°30:

En un point M d'un solide, dans le repère orthonormé $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, le tenseur des contraintes a pour valeur :

1. Déterminer les contraintes principales.
2. Déterminer les invariants des contraintes
3. Déterminer la contrainte équivalente de Von Mises
4. Déterminer la contrainte équivalente de Tresca

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} 100 & -40 & 0 \\ -40 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Exercice n°31:

Reprendre l'exercice précédent (ex n°30) on remplace le tens Contraintes par :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} 80 & -40 & 0 \\ -40 & 120 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

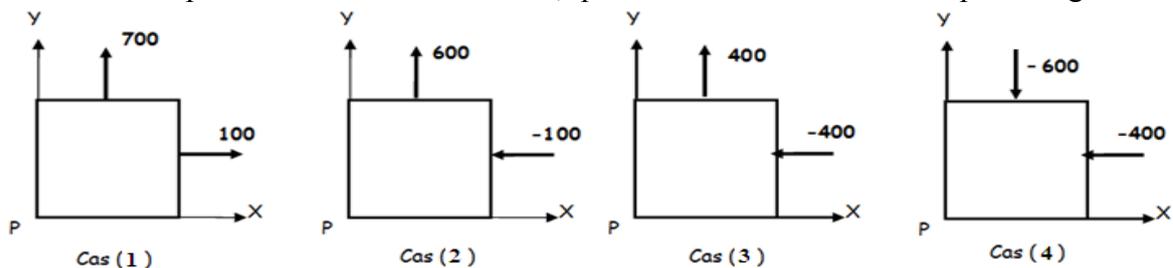
Exercice n°32:

Reprendre l'exercice (ex n°30) on remplace le tenseur des contraintes par

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} -4 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & 3 \\ \sqrt{2} & 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Exercice n°33:

Considérons les états plans de contrainte ci-dessous. Les axes sont principaux et les contraintes sont en MPa. D'après le critère de Von Mises, quel est l'état de contrainte le plus dangereux.



Exercice n°34:

Déterminer les contraintes équivalentes de Von Mises et de Tresca pour les deux états de contraintes particuliers. Traction simple et cisaillement simple

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercice n°35:

Dans la zone la plus sollicitée d'une pièce chargée, on relève l'état de contrainte suivant : $\sigma_{xx} = 200 \text{ MPa}$, $\sigma_{yy} = -100 \text{ MPa}$, $\sigma_{zz} = 200 \text{ MPa}$, $\sigma_{xy} = 50 \text{ MPa}$, $\sigma_{xz} = 0 \text{ MPa}$ et $\sigma_{yz} = 0 \text{ MPa}$. La limite élastique est identifiée sur la courbe de traction $R_e = 270 \text{ MPa}$.

1. Comparer les contraintes principales à la limite élastique
2. Appliquer le critère de Tresca
3. Appliquer le critère de Von Mises
4. Tracer la zone du critère de Tresca dans le plan des contraintes σ_1, σ_2

Exercice n°36:

Les contraintes en un point critique d'un composant de machine sont :
 $\sigma_{xx} = 100 \text{ Mpa}$, $\sigma_{yy} = -60 \text{ Mpa}$ et $\tau_{xy} = 60 \text{ Mpa}$ (Etat de contrainte plane)
 Sachant que la limite élastique de l'acier utilisé $Re = 300 \text{ MPa}$
 1. Appliquer le critère de Tresca
 2. Appliquer le critère de Von Mises
 3. Tracer la zone du critère de Tresca dans le plan 1,2

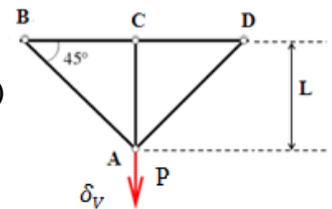
Exercice n°37:

Reprendre l'exercice précédent (ex n°36) on remplace les contraintes relevées par :
 $\sigma_{xx} = 40 \text{ MPa}$, $\sigma_{yy} = 150 \text{ MPa}$ et $\tau_{xy} = 50 \text{ Mpa}$.

Exercice n°38:

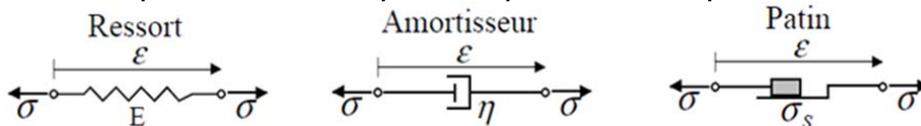
Soit la structure ci dessous elle est constituée de trois barres (AB,AC et AD), de même section S , de module de Young E et limite élastique σ_0 . Les barres sont articulée aux extrémités B, C, D. Soit δ un déplacement vertical du point d'application A de charge P .

- 1- Déterminer les déformations des barres AB, AC, AD en fonction de δ_V et L.
- 2- Déterminer la charge maximale supportable par la structure pour les trois types de comportement:
 - Comportement purement élastique
 - Comportement mixte (élastique et plastique parfait)
 - Comportement au-delà du domaine élastique (plastique parfait)
- 3- Déterminer la réponse élasto-plastique du système (structure) dans un diagramme (P, δ_V) et la charge maximale.



Exercice n°39:

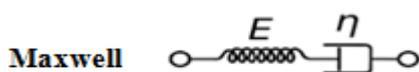
- 1-Quelle est la différence entre les essais mécaniques suivants :
 - a- Ecrouissage
 - b- Fluage
 - c- Relaxation
- 2-Donner la loi de comportement mécanique correspondante à chaque modèle rhéologique



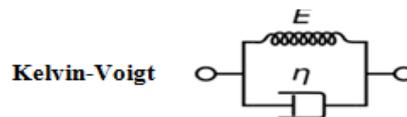
- 3-Donner la règle d'association entre les modèles en série et en parallèle

Exercice n°40:

Montrer que la loi du comportement mécanique en fonction du temps en sollicitation de **fluage** est donnée par les relations suivantes pour les deux modèles rhéologiques de **Maxwell** et **Kelvin-Voigt** :



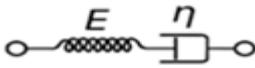
$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0}{\eta} t$$



$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - \exp \left[-\frac{E}{\eta} t \right] \right)$$

Exercice n°41:

Montrer que la loi du comportement mécanique en fonction du temps en sollicitation de **relaxation** est donnée par la relation suivante pour le modèle rhéologique de **Maxwell** :

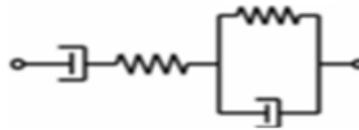


$$\sigma(t) = A \exp \left[-\frac{E}{\eta} t \right]$$

$$A = E \varepsilon_0$$

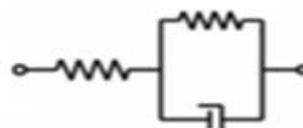
Exercice n°42:

Le modèle de **Burger** est une combinaison en série des modèles de **Maxwell** et de **Kelvin** pour décrire le comportement viscoélastique des matériaux. Déterminer la loi du comportement mécanique en fonction du temps en sollicitation de **fluage**.



Exercice n°43:

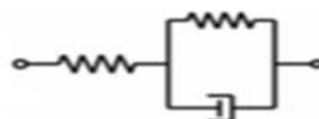
Dans le modèle de **Zener** on met en série un ressort avec un ressort et un amortisseur qui sont montés en parallèle pour décrire le comportement viscoélastique des matériaux. Montrer que la loi du comportement mécanique en fonction du temps en sollicitation de **fluage** est donnée par la relation suivante :



$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_2} + \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - \exp \left[-\frac{E}{\eta} t \right] \right)$$

Exercice n°44:

Dans le modèle de **Zener** nous installons un ressort avec un ressort et un amortisseur qui sont montés en parallèle pour décrire le comportement viscoélastique des matériaux. Montrer que loi du comportement mécanique en fonction du temps en sollicitation de **relaxation** est donnée par la relation suivante :



$$\sigma(t) = \frac{\varepsilon_0 E_2}{E_1 + E_2} \left(E_1 + E_2 \exp \left[-\frac{E_1 + E_2}{\eta} t \right] \right)$$

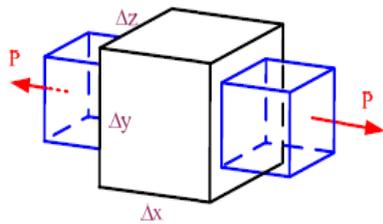
Annexes

Annexe 1**Energie de déformation élastique (Matériau isotrope)**

-**Hypothèses et notations** : Dans ce qui suit, on négligera les variations d'énergies cinétiques E_c et potentielle E_p , on supposera que les transformations se font sans échange de chaleur et que l'énergie interne U s'identifie à l'énergie élastique W_e .

- Énergie de déformation en Traction (σ_x) par unité de volume

Énergie de déformation par unité de volume d'un élément infinitésimal sollicité en Traction suivant l'axe x



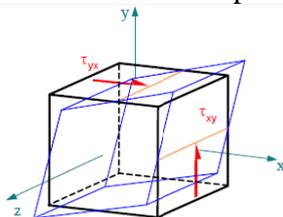
$$du = \frac{1}{V} \int_0^{\delta} P d\delta$$

$$du = \int_0^{\delta} \frac{P}{\Delta y \Delta z} \frac{d\delta}{\Delta x} = \int_0^{\varepsilon_x} \sigma_x d\varepsilon_x$$

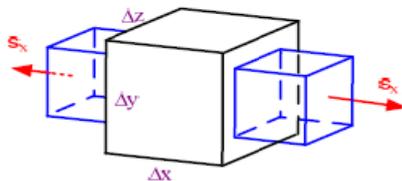
$$du = \int_0^{\varepsilon_x} E \varepsilon_x d\varepsilon_x = \frac{E \varepsilon_x^2}{2} = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x$$

- Énergie de déformation en cisaillement (τ_{xy}) par unité de volume

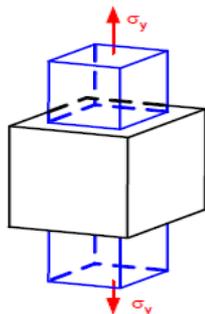
Énergie de déformation par unité de volume d'un élément infinitésimal



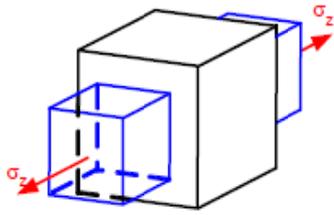
$$du = \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy} d\gamma_{xy} \quad du = \int_0^{\gamma_{xy}} G \gamma_{xy} d\gamma_{xy} = \frac{G \gamma_{xy}^2}{2} = \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy}$$

- Énergie de déformation élastique en Traction dans les trois directions

$$\left\{ \begin{array}{l} du_1 = \int_0^{\varepsilon_{xx}} \sigma_x d\varepsilon_{xx} = \int_0^{\varepsilon_{xx}} E \varepsilon_{xx} d\varepsilon_{xx} \\ du_1 = \frac{1}{2} E \varepsilon_{xx}^2 = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_x^2}{2E} \end{array} \right.$$



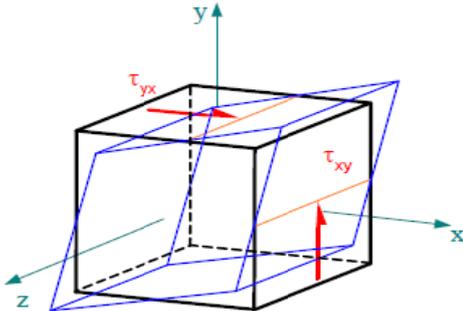
$$\left\{ \begin{array}{l} du_2 = \int_0^{\varepsilon_{yy}} \sigma_y d\varepsilon_{yy} + \int_0^{\varepsilon_{xy}} \sigma_x d\varepsilon_{xy} \\ du_2 = \int_0^{\varepsilon_{yy}} E \varepsilon_{yy} d\varepsilon_{yy} + \sigma_x \int_0^{\varepsilon_{xy}} d\varepsilon_{xy} \\ du_2 = \frac{1}{2} E \varepsilon_{yy}^2 + \sigma_x \varepsilon_{xy} = \frac{\sigma_y^2}{2E} + \frac{\nu \sigma_x \sigma_y}{E} \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{aligned} du_3 &= \int_0^{\varepsilon_{zz}} \sigma_z d\varepsilon_{zz} + \int_0^{\varepsilon_{xx}} \sigma_x d\varepsilon_{xx} + \int_0^{\varepsilon_{yy}} \sigma_y d\varepsilon_{yy} \\ du_3 &= \int_0^{\varepsilon_{zz}} E \varepsilon_{zz} d\varepsilon_{zz} + \sigma_x \varepsilon_{xx} + \sigma_y \varepsilon_{yy} \\ du_3 &= \frac{\sigma_z^2}{2E} - \frac{\nu \sigma_x \sigma_z}{E} - \frac{\nu \sigma_y \sigma_z}{E} \end{aligned} \right.$$

- Énergie de déformation élastique cisaillement dans les trois directions

Énergie de déformation par unité de volume d'un élément infinitésimal en cisaillement dans les trois directions



Énergie de déformation élastique

$$\left\{ \begin{aligned} du_4 &= \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \int_0^{\gamma_{yz}} \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \int_0^{\gamma_{zx}} \tau_{zx} d\gamma_{zx} \\ du_4 &= \int_0^{\gamma_{xy}} G \gamma_{xy} d\gamma_{xy} + \int_0^{\gamma_{yz}} G \gamma_{yz} d\gamma_{yz} + \int_0^{\gamma_{zx}} G \gamma_{zx} d\gamma_{zx} \\ du_4 &= \frac{1}{2} G \gamma_{xy}^2 + \frac{1}{2} G \gamma_{yz}^2 + \frac{1}{2} G \gamma_{zx}^2 \end{aligned} \right.$$

Énergie de déformation élastique totale

Si on reprend l'expression de l'énergie de déformation U dans le cas d'un élément de volume V soumis à un ensemble de contraintes ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}$ et τ_{zx})

Énergie de déformation élastique en fonction des contraintes

$$U = \frac{1}{2E} \int_V (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) dV - \frac{\nu}{E} \int_V (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) dV + \frac{1}{2G} \int_V (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) dV$$

Énergie de déformation élastique en fonction des contraintes et déformations

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV$$

Énergie de déformation élastique en fonction des déformations

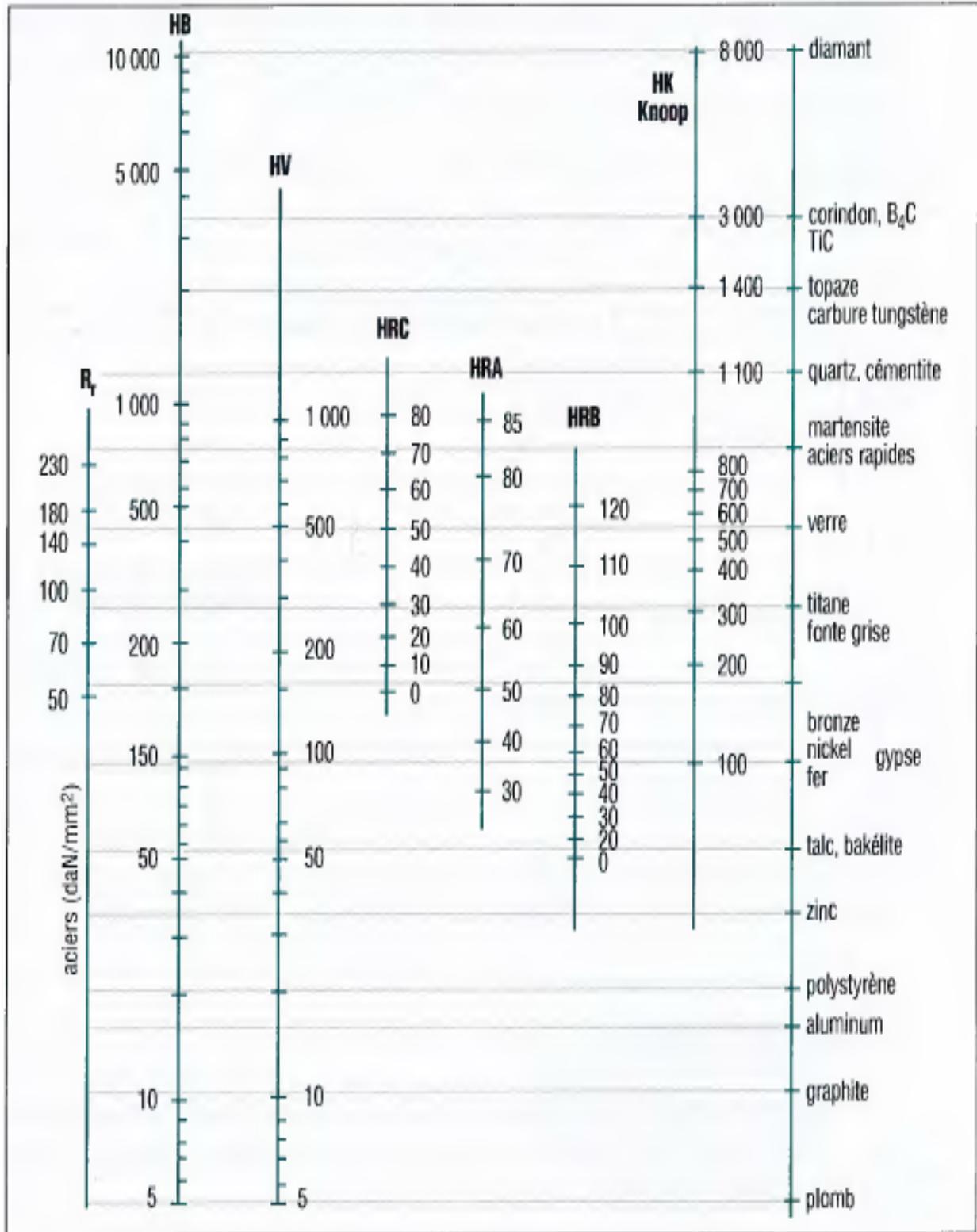
$$U = \int_V \left[\frac{E\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 + G(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{G}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right] dV$$

Annexe 02
Correspondances entre les échelles de dureté

Table de conversion des duretés et résistances à la traction de l'acier				
Brinell HB (P = 30 D ²)	Rockwell		Vickers HV (P = 30 kg)	Résistance à la traction (MPa)
	HRB	HRC		
80	36,4		80	275
85	42,4		85	292
90	47,4		90	308
95	52,0		95	325
100	56,4		100	341
105	60,0		105	358
110	63,4		110	374
115	66,4		115	391
120	69,4		120	407
125	72,0		125	424
130	74,4		130	440
135	76,4		135	457
140	78,4		140	473
145	80,4		145	490
150	82,2		150	506
155	83,8		155	523
160	85,4		160	539
165	86,8		165	556
170	88,2		170	572
175	89,6		175	589
180	90,8		180	606
185	91,8		185	623
190	93,0		190	640
195	94,0		195	657
200	95,0		200	673
205	95,8		205	690
210	96,6		210	706
215	97,6		215	723
220	98,2		220	740
225	99,0		225	756
230		19,2	230	773
235		20,2	235	789
240		21,2	240	806
245		22,1	245	822
250		23,0	250	839
255		23,8	255	855
260		24,6	260	872
265		25,4	265	888
270		26,2	270	905
275		26,9	275	921
280		27,6	280	938
285		28,3	285	954
290		29,0	290	971
295		29,6	295	987
300		30,3	300	1003
310		31,5	310	1034
320		32,7	320	1064
330		33,8	330	1095

340		34,9	340	1125
350		36,0	350	1156
359		37,0	360	1186
368		38,0	370	1217
376		38,9	380	1247
385		39,8	390	1278
392		40,7	400	1308
400		41,5	410	1339
408		42,4	420	1369
415		43,2	430	1400
423		44,0	440	1430
430		44,8	450	1460
		45,5	460	
		46,3	470	
		47,0	480	
		47,7	490	
		48,3	500	
		49,0	510	
		49,7	520	
		50,3	530	
		50,9	540	
		51,5	550	
		52,1	560	
		52,8	570	
		53,3	580	
		53,8	590	
		54,4	600	
		54,9	610	
		55,4	620	
		55,9	630	
		56,4	640	
		56,9	650	
		57,4	660	
		57,9	670	
		58,4	680	
		58,9	690	
		59,3	700	
		60,2	720	
		61,1	740	
		61,9	760	
		62,8	780	
		63,5	800	
		64,3	820	
		65,0	840	
		65,7	860	
		66,3	880	
		66,9	900	
		67,5	920	
		68,0	940	

Annexe 03
Correspondances entre les échelles de dureté,[9]



Liste des Références Bibliographiques

- [1] Sylvie Pommier ,Mécanique des matériaux, Sciences appliquées en physique et ingénierie pour la recherche et l'enseignement, université PARIS-SAVLAY.
- [2] Roland FORTUNIER, Comportement Mécanique des Matériaux, Ecole Nationale Supérieure des Mines , Saint-Etienne.
- [3] Xiaofeng Guo, Xiaoxiang Weng, Yong Jiang and Jianming Gong.(2017).Effects of Temperature and Strain Rate on Tensile Deformation Behavior of 9Cr-0.5Mo-1.8W-VNb Ferritic Heat-Resistant Steel, High Temp. Mater. Proc. 2017; 36(9): 913–920, DOI 10.1515/htmp-2016-0065.
- [4] Marc Milesi.(2009). Impact des caractéristiques microstructurales des pièces forgées sur leur tenue en fatigue à grand nombre de cycles : modélisation multi-échelles et validation expérimentale. École Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- [5] <https://www.mecastyle.com/calcul-de-structure-fatigue-courbe-de-wohler>
- [6] <http://www.andrey.li/AugustWoehler.html>
- [7] BEN NASSER Mohamed, HSSIN Hichem. propriétés des matériaux. Cours Génie Mécanique .Chapitre 1. <https://www.technologiepro.com/cours-genie-mecanique/cours-19-proprietes-materiaux>.
- [8] https://fr.wikipedia.org/wiki/Essai_de_traction
- [9] JEAN-LOUIS FANCHON.(2001). Guide des sciences et technologies industrielles: Dessins industriels et graphes, Matériaux, Éléments de construction, Économie et organisation d'entreprise, Automatisation, Automatique. AFNOR.NATHAN.
- [10] Michel Dupeux.(2005). Aide-mémoire science des matériaux. DUNOD.Paris.
- [11] Chahaoui Oualid.(2017). Polycopie de cours de Mécanique des milieux continus (Licence & Master). Université Laghrour Abbas Khenchela.
- [12] I. MIROLIOBOV, S. ENGALYTCHEV,N. SERGUIEVSKI,F. ALMAMETOV, N.KOURITSYNE, K. SMIRNOV-VASSILIEV,L. IACHINA.(1980). Résistance des matériaux, Manuel de résolution des problèmes,2^{ème} édition, Editions MIR MOSCOU.
- [13] B. JACQUOT .(2010). Support de Cours : Proprietes mecaniques des Biomateriaux utilises en Odontologie, Societe Francophone de Biomateriaux Dentaires. <http://campus.cerimes.fr/odontologie/enseignement/chap4/site/html/6.html#6>
- [14] <http://www.mesures.com/pdf/old/FICHE-13.pdf>
- [15] Alberto Pertuz.(2003). L'indentation Vickers et Knoop des matériaux massifs ou revêtus : Dureté, ténacité et adhérence. Thèse de doctorat .Université des sciences et technologies de Lille.
- [16] AMIR BEN MENACER. (2012).Etude de la microdureté Vickers des poudres chimiques de Ni -P, mémoire de Magister en physique, université de Batna.

- [17] H.S. Güder, E. Sahin , O. Sahin , H. Göçmez, C. Duran, H. Ali Çetinkara.(2011). Vickers and Knoop Indentation Microhardness Study of β -SiAlON Ceramic. ACTA PHYSICA POLONICA A.
- [18] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Duret%C3%A9_\(mat%C3%A9riau\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Duret%C3%A9_(mat%C3%A9riau))
- [19] https://perso.crans.org/epalle/M2/MHP/07_meca_ruptur.pdf
- [20] P. Ludwick.(1909).Elemente der technologischen mechanik. Springer Verlag, Berlin.
- [21] H.W. Swift. (1952).Plastic instability under plane stress. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 1, Issue 1.
- [22] E. Voce.(1948). The relationship between stress and strain for homogeneous deformation. Journal Institute of Metals, Vol. 74.
- [23] David MERCIER.(2013). Lois de comportement des matériaux utilisés dans les contacts électriques pour application « flip chip ».THÈSE de doctorat. UNIVERSITÉ DE GRENOBLE.
- [24] Berthelot, J.M. (2005). Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures. 4th édition. Tech & Doc.Lavoisier. Paris.
- [25] Damien DUCRET. (2000).Élasticité anisotrope et endommagement des matériaux composites : caractérisation ultrasonore et modélisation micromécanique. Thèse. l'institut national des sciences appliquées de lyon.
- [26] Holm Altenbach , Johannes Altenbach, Wolfgang Kissing.(2018). Mechanics of Composite structural. Second Edition. Springer Nature Singapore.
- [27] Michel MAYA.(2016). Mécanique des solides déformables. Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers Centre d'Enseignement et de Recherche de CLUNY.
- [28] Yves Debard.(2011).Elasticité. Institut Universitaire de Technologie du Mans Département Génie Mécanique et Productique.
- [29] Masmoudi_mohamed ,Notes de cours - Rhéologie des matériaux http://staff.univ-batna2.dz/sites/default/files/masmoudi_mohamed/files/chapitre_2.docx. Université de batna2.
- [30] https://fr.wikipedia.org/wiki/Mod%C3%A8le_de_Maxwell
- [31] Matteo Ciccotti.(2020). Mécanique des Solides et des Matériaux 2: Elasticité-Viscoélasticité Plasticité-Rupture, ESPCI Paris - Laboratoire de Science et Ingénierie de la Matière Molle.
- [32] Marc François, Physique de la plasticité. Master 2 de Mécanique Numérique, Faculté des Sciences de Nantes. Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique. Université de Nantes. <http://docplayer.fr/8794024-Physique-de-la-plasticite.html>
- [33] <https://www.manufacturingguide.com/en/cold-rolling-sheets>

- [34] CURTIT François.(2014). Comportements mécaniques pour les simulations numériques, documentation code Aster.https://www.code-aster.org/V2/doc/v11/fr/man_r/r5/r5.03.27.pdf
- [35] Marc André Meyers, Krishan Kumar Chawla.(2009). Mechanical Behavior of Materials. Cambridge University Press.
- [36] François Sidoroff.(1980). Mécanique des milieux continus. École d'ingénieur. École Centrale de Lyon, France. pp.166. cel-00530377v2
- [37] Jérôme Bastien.(2011). Introduction à la résistance des matériaux. Engineering school. Université de technologie de Belfort Montbéliard (UTBM), 2004, pp.261. cel-00554886v1. <https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00554886v1>
- [38] https://fr.wikipedia.org/wiki/Crit%C3%A8re_de_plasticit%C3%A9
- [39] https://fr.wikiversity.org/wiki/Introduction_%C3%A0_%27%C3%A9lasticit%C3%A9/Contraintes
- [40] Wiyao KPOBIE.(2014).Modélisation 3D d'assemblages flip chip pour la fiabilisation des composants électroniques à haute valeur ajoutée de la famille « More than Moore ». Thèse doctorat, Université de LORRAINE.
- [41] <https://elearning.univ-annaba.dz/mod/resource/view.php?id=24508>
- [42] Hervé Oudin. Introduction à la plasticité. Engineering school. Ecole Centrale de Nantes, France.2009, pp.49. cel-00483603
- [43] http://www.unit.eu/cours/ingenierie_crash/SecuritePrimaire/SP-NL/SP_NLMateriau2.htm
- [44] Eric Markiewiez.Eric Weyenbergh et al .(2007).Matériaux métalliques et lois de comportement dynamiques: L'ingénierie du crash dans les véhicules de transport.ONERA. UVHC.
- [45] Bing QI.(2009). influence de l'endommagement sur les propriétés d'élasticité de matériaux modèles : approche numérique et expérimentale, UNIVERSITE DE LIMOGES, Faculté de Sciences et Techniques, Laboratoire du Groupe d'Etude des Matériaux Hétérogènes.
- [46] https://campus.mines-douai.fr/pluginfile.php/12099/mod_resource/content/0/Rupture_06062011/Rupture_papier_06062011.pdf
- [47] https://perso.crans.org/epalle/M2/MHP/4_Endommagement_et_rupture.pdf
- [48] Clement Lemaignan.(2003). La rupture des matériaux .EDP sciences. France.
- [49] http://mms2.ensmp.fr/mat_paris/duree/transparents/Amphi_23_Endommagement_Rupture.pdf
- [50] Sébastien GRANGE – Jean-Loup PRENSIER, La mécanique de la rupture et la mesure de la ténacité,Ecole normale supérieure Paris-saclay,2007
- [51] Abderrahim Zeghloul.(2016). Concepts fondamentaux de la mécanique de la rupture, université de Lorraine.

[52] DJEBLOUN Youcef .(2004). Etude de la rupture en mode I d'ouverture des matériaux composites. mémoire de Magistère. Université Mohamed Khider Biskra.Algérie.

[53] http://www.sgm.univ-savoie.fr/LP/carac_2010/Berlioux_Gilloux_Jacob/Cotterel-tenacite/Berlioux%20_Gilloux_Jacob__tenacite.pdf

[54] Ahmed BENHAMOUDA, étude du comportement des fissures dans les tubes sous pression interne, mémoire de Magistère en génie mécanique, université Mentouri Constantine,2010.

Polycopié pédagogique de la matière

Comportement **M**écanique des **M**atériaux **M**étalliques

Dr. BREK Samir, Université ABBES LAGHROUR Khenchela

breksamir4000@gmail.com, brek_samir@univ-khenchela.dz

Algérie, Juillet 2021

