



**HAL**  
open science

## Votes par évaluation avec des fonctions de profondeur

Jean-Baptiste Aubin, Irène Gannaz, Samuela Leoni-Aubin, Antoine Rolland

► **To cite this version:**

Jean-Baptiste Aubin, Irène Gannaz, Samuela Leoni-Aubin, Antoine Rolland. Votes par évaluation avec des fonctions de profondeur. 53èmes Journées de Statistique de la Société Française de Statistique, Jun 2022, Lyon, France. hal-03810253

**HAL Id: hal-03810253**

**<https://hal.science/hal-03810253>**

Submitted on 11 Oct 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# VOTES PAR ÉVALUATION AVEC DES FONCTIONS DE PROFONDEUR

Jean-Baptiste Aubin<sup>1</sup>, Irène Gannaz<sup>1</sup>, Samuela Leoni<sup>1</sup>, Antoine Rolland<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Univ Lyon, INSA de Lyon, CNRS UMR 5208, Institut Camille Jordan, F-69621 Villeurbanne, France*

<sup>2</sup> *Université Lyon 2, Laboratoire ERIC*

**Résumé.** Cet article propose un cadre unifié pour les procédures de vote basées sur une évaluation des candidats. L'idée est de représenter les notes de chaque électeur sur  $d$  candidats comme un point dans  $\mathbb{R}^d$  et de définir le vainqueur du vote en utilisant le point le plus profond du nuage de points ainsi formé. Le point le plus profond est obtenu par la maximisation d'une fonction de profondeur. Il est démontré que les principales procédures par évaluation (jugement majoritaire, vote par approbation...) rentrent dans ce cadre. De plus, les propriétés des procédures obtenues étudiées sont l'universalité, l'unanimité, la neutralité, la monotonie et l'indépendance aux alternatives non pertinentes (IIA).

**Mots-clés.** Procédure de vote ; vote par évaluation ; fonctions de profondeur

**Abstract.** This article aims to present a unified framework for grading-based voting processes. The idea is to represent the grades of each voter on  $d$  candidates as a point in  $\mathbb{R}^d$  and to define the winner of the vote using the deepest point of the scatter plot. The deepest point is obtained by the maximization of a depth function. The studied properties of the resulting processes are universality, unanimity, neutrality, monotonicity and IIA properties.

**Keywords.** Voting process ; Grade modeling ; Depth functions

Balinski et Laraki [1] ont montré que les procédures de vote basées sur des évaluations plutôt que sur des classements, satisfont des propriétés intéressantes. Ils proposent une règle de vote, le jugement majoritaire, basée sur les médianes des évaluations, et prouvent qu'elle n'entre pas dans le cadre du théorème d'impossibilité d'Arrow [1]. Cette propriété ressort des informations contenues dans chaque vote qui fournissent des informations plus nuancées qu'un vote basé sur un simple classement des candidats par les votants (comme dans le cas des scrutins majoritaires, de Borda, etc.). Le modèle par évaluation a suscité beaucoup d'intérêt au cours des dernières décennies, et les alternatives au jugement majoritaire sont, par exemple, le vote par approbation [2] et le *range voting* [3].

Cet article présente un cadre unifié pour les processus de vote basés sur les évaluations, reposant sur les notions statistiques des fonctions de profondeur et des points les plus profonds associés. Considérons dans la suite que nous avons  $n$  électeurs et  $d$  candidats. Chaque électeur donne une note à chaque candidat. Chaque électeur peut alors être

assimilé à un point de  $\mathbb{R}^d$ , dont les coordonnées sont les notes données à chacun des candidats. L'idée clé est de considérer l'électeur *le plus central* du nuage de points obtenu. Le gagnant du vote est alors le candidat qui a la note maximale de cet électeur central.

La définition du point le plus central d'un nuage de points est un sujet de recherche bien connu en statistique. L'idée est d'introduire une fonction de profondeur, qui associe à chaque point une valeur, de sorte que la fonction de profondeur soit maximale au point le plus central du nuage de points et minimale pour les valeurs aberrantes. De nombreuses notions de profondeur de données ont été introduites [4, 5]. Les fonctions de profondeur peuvent apporter un point de vue intéressant sur les procédures de vote.

## 1 La procédure de vote

Nous considérons ici le cadre des votes par évaluation défini par [1]. Considérons le cas de  $n$  électeurs et  $d$  candidats. Chaque électeur  $v_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  donne une note au candidat  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ . Notons  $\Phi(i, j)$  cette note. Soit  $\Lambda$  l'ensemble des valeurs possibles des notes  $\Phi(i, j)$ . Comme le font remarquer Balinski et Laraki [1], l'ensemble des notes  $\Lambda$  doit être strictement ordonné mais il peut être fini ou être un intervalle réel. Supposons sans perte de généralité que  $\Lambda \subseteq [0, 1]$ . Soit  $\Phi = \{\Phi(i, j), i = 1, \dots, d, j = 1, \dots, n\} \in \Lambda^{d \times n}$  la matrice des notes. Une collection de  $d$  notes s'appelle un *profil*. Chaque colonne  $\Phi(., j)$  est un profil.

Une procédure de vote est une fonction  $G$  qui à une matrice  $\Phi$  associe un unique profil. La fonction  $G$  est ainsi définie sur  $\Lambda^{d \times n}$  et à valeurs dans  $[0, 1]^d$ . Balinski et Laraki [1] proposent des conditions, ou axiomes, qu'une telle procédure doit vérifier :

**Neutralité :**  $G$  est invariante par permutation sur les lignes de  $\Phi$  (*i.e.* si on permute les candidats).

**Universalité :**  $G$  est invariante par permutation sur les colonnes de  $\Phi$  (*i.e.* si on permute les électeurs).

**Unanimité :** si tous les électeurs donnent une même note  $\alpha$  à un candidat, alors  $G$  lui assigne la valeur  $\alpha$ .

**Monotonie :** si  $\Phi = \tilde{\Phi}$  à l'exception d'un ou de plusieurs électeurs qui donnent une note plus élevée au candidat  $c_i$  dans  $\Phi$  que dans  $\tilde{\Phi}$ , alors  $G(\Phi)(c_i) \geq G(\tilde{\Phi})(c_i)$ .

**IIA** (Indépendance aux alternatives non pertinentes) : si les notes obtenues par un candidat  $c_i$  dans deux votes  $\Phi$  et  $\tilde{\Phi}$  sont identiques, alors  $G(\Phi)(c_i) = G(\tilde{\Phi})(c_i)$ .

## 2 Les fonctions de profondeur

Étant donnée une distribution  $F$  sur  $\mathbb{R}^d$ , une fonction de profondeur mesure la centralité des points de  $\mathbb{R}^d$  relativement à  $F$ . Une valeur élevée de la fonction de profondeur correspond à un point *central* tandis qu'une valeur faible correspond à une valeur *en périphérie*. Appliquées aux votes, ces fonctions permettent ainsi de déterminer quel serait l'électeur *central*, déterminant l'issue du vote.

Notons  $\mathcal{F}$  l'ensemble des lois de probabilités sur les boréliens de  $\mathbb{R}^d$  et notons  $F_X$  la loi d'un vecteur aléatoire  $X$ .

**Definition 1.** Soit  $D : \mathbb{R}^d \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bornée, non négative, telle que:

(P1) Soit  $X = (X_1, \dots, X_d)$  un vecteur aléatoire dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$ , et  $\sigma$  une permutation de  $\{1, \dots, d\}$ . Notons  $X_\sigma = (X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(d)})$  et  $x_\sigma = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(d)})$ . Alors  $D(x_\sigma, F_{X_\sigma}) = D(x; F_X)$ .

(P2) Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}^d$ , pour tout vecteur aléatoire  $X \in \mathbb{R}^d$ ,  $\operatorname{argmax}_{x \in \mathbb{R}^d} D(ax + b; F_{aX+b}) = \operatorname{argmax}_{x \in \mathbb{R}^d} D(x; F_X)$ .

(P3) Pour toute distribution  $F \in \mathcal{F}$  ayant un unique "centre"  $\theta$  (e.g. un point de "symétrie"),  $D(\theta; F) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} D(x; F)$ .

(P4) Pour tout  $F \in \mathcal{F}$ ,  $D(\cdot; F)$  est quasi-concave. C'est-à-dire, si  $\theta \in \operatorname{argmax}_{x \in \mathbb{R}^d} D(x; F)$ , alors  $D(x; F) \leq D(\theta + \lambda(x - \theta); F)$  pour tout  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

(P5)  $D(x; F) \rightarrow 0$  quand  $\|x\| \rightarrow \infty$  pour chaque  $F \in \mathcal{F}$ .

(P6) Soit  $F \in \mathcal{F}$  ayant pour distributions marginales  $F_1, \dots, F_d$ . Supposons que pour  $i \in \{1, \dots, d\}$ , le support de  $F_i$  contient un unique point  $\{\alpha\}$ . Alors pour tout  $x^* \in \operatorname{argsup}_{x \in \mathbb{R}^d} D(x; F)$ , la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée de  $x^*$  est  $x_i^* = \alpha$ .

Alors  $D(\cdot; \cdot)$  est appelée **fonction de profondeur**.

La définition d'une fonction de profondeur varie selon les auteurs. Cette définition est moins contraignante que certaines, dans la mesure où nous avons restreint les conditions à ce qui est nécessaire dans le cadre des votes.

Il existe dans la littérature de nombreuses fonctions de profondeur, par exemple *halfspace*, par projection, d'Oja, les profondeurs par moyennes pondérées, etc. Nous renvoyons à [4] et [5] pour une revue détaillée de celles-ci. Une visualisation des fonctions de profondeur sur un exemple est donné en Figure 1.

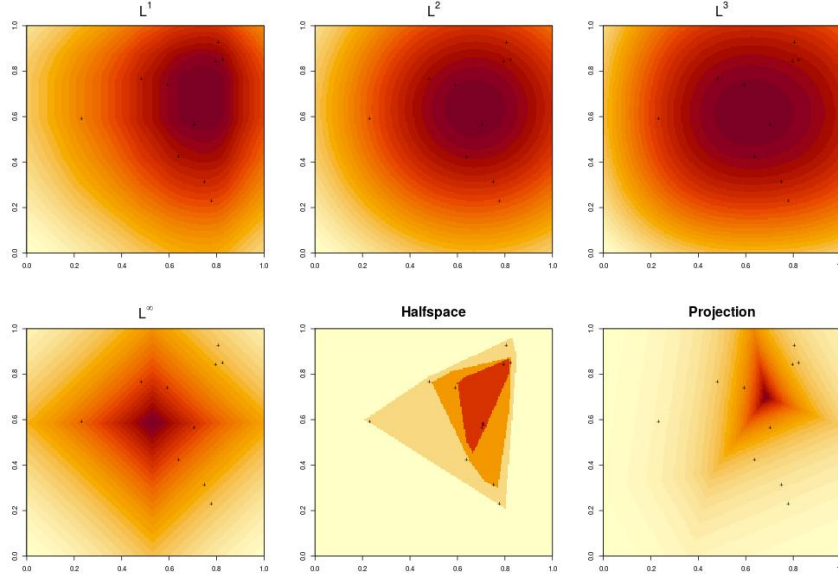


Figure 1: Exemples de fonctions de profondeur sur une même matrice de notes avec 2 candidats et 5 électeurs. L'axe horizontal correspond aux notes données pour le candidat  $c_1$  et l'axe vertical aux notes pour le candidat  $c_2$ . Chaque croix représente un électeur.

### 3 Les votes par profondeur

**Definition 2** (Vote par profondeur). *Considérons une matrice de notes  $\Phi$ , et une fonction de profondeur  $D$ . Soit*

$$\mathcal{X}_D^* := \{x \in \mathbb{R}^d : D(x, \Phi) = \sup(D(\cdot, \Phi))\}$$

*l'ensemble des points les plus profonds  $\Phi$  en fonction de  $D$ . La fonction  $G_D : \Phi \rightarrow \mathcal{X}_D^*$  est une procédure de vote associée à la profondeur  $D$ .*

*Soit*

$$i_D := \operatorname{argmax}_{1 \leq i \leq d} \{x_{D,i}^*, x_D^* = (x_{D,1}^*, \dots, x_{D,d}^*) \in \mathcal{X}_D^*\}.$$

*Si  $i_D$  est unique, le vainqueur de l'élection associé à la procédure  $G_D$  est le candidat  $c_{i_D}$ . Si  $i_D$  n'est pas unique, il n'y a pas de vainqueur.*

Une visualisation des procédures de vote associées à diverses fonctions est représentée en Figure 2.

Dans [6], il a été montré que si  $D$  est une fonction de profondeur vérifiant la définition 1, alors la procédure de vote  $G_D$  associée à  $D$  vérifie les propriétés de *Neutralité*, d'*Universalité* et d'*Unanimité*. La propriété de *Monotonie* a été établie pour certaines classes de fonctions, mais il apparaît que des fonctions de profondeur usuelles telles que la fonction *halfspace* ou la fonction de Oja ne vérifient pas la *Monotonie*. Enfin, la condition *IIA*

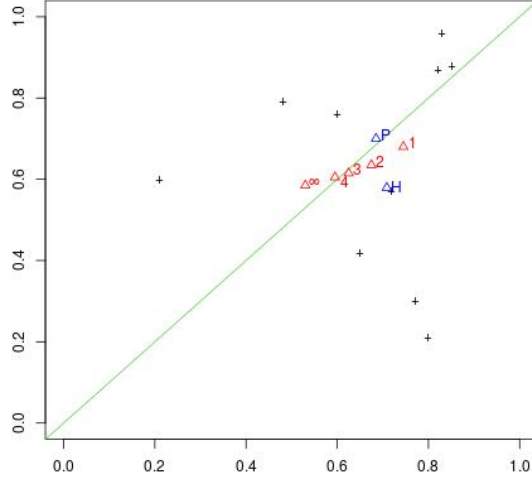


Figure 2: Résultats de procédures de vote basées sur des fonctions de profondeur dans l'exemple de la Figure 1. L'axe horizontal correspond aux notes données pour le candidat  $c_1$  et l'axe vertical aux notes pour le candidat  $c_2$ . Chaque croix représente un électeur et chaque triangle un résultat de vote. Les résultats pour les profondeurs  $L^p$ ,  $p \in \{1, 2, 3, 4, \infty\}$ , sont donnés par le label  $p$ . Les résultats pour les profondeurs *halfspace* et par projection sont données respectivement avec les labels  $H$  et  $P$ .

correspond à un ensemble de points le plus profond obtenu composante par composante, ce qui signifie que les scores finaux sont calculés indépendamment pour chaque candidat. Ces résultats sont synthétisés dans la Table 1.

Fonction de profondeur	Unicité	<i>Neutralité</i>	<i>Universalité</i>	<i>Unanimité</i>	<i>Monotonie</i>	<i>IIA</i>
$L^1$	N	✓	✓	✓	✓	✓
$L^p$ avec $1 < p \leq \infty$	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Halfspace	N	✓	✓	✓	N	N
Oja	N	✓	✓	✓	N	N
Projection	✓	✓	✓	✓	N	N
Moyennes pondérées	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Table 1: Cette table résume les propriétés de procédures de votes pour diverses fonctions de profondeur. Elle précise si la fonction  $G_D$  associe un unique point (le plus profond pour  $D$ ), et si les conditions définies dans la section 1 sont vérifiées (avec  $d > 1$  candidats). ✓ correspond à des propriétés valides et N à des non-valides. Remarquons que les moyennes pondérées et la  $L^2$  donnent la même procédure de vote.

Comme précisé en Table 1, pour  $p \geq 1$ , la procédure de vote associée à la fonction de profondeur  $L^p$  vérifie la *Neutralité*, l'*Universalité*, l'*Unanimité*, la *Monotonie* et l'*IIA*. Cette classe des profondeurs  $L^p$  est intéressante dans la mesure où elle inclut trois procédures de vote classiques qui sont le jugement majoritaire [1], le vote par approbation [2] et le *range voting* [3]. Ces procédures correspondent respectivement aux fonctions  $L^2$ ,  $L^1$  et  $L^1$  avec un support des notes réduit à  $\Lambda = \{0; 1\}$ . Le choix de  $p$  dans la profondeur  $L^p$  est critique. Schématiquement, plus  $p$  est élevé, plus on accorde d'importance aux notes extrêmes. Nous renvoyons à [6] pour une analyse plus approfondie de cette famille de vote par profondeur.

## Conclusion

Le vote basé sur des évaluations offre une information plus riche que le modèle basé sur des préférences. Dans cet article, nous introduisons un nouveau point de vue sur les procédures de vote, en faisant appel à la notion statistique de profondeur. Les fonctions de profondeur offrent une manière unifiée de définir les processus de vote, avec un support pour les notes  $\Lambda$  discret ou continu. Des procédures de vote classiques telles que le jugement majoritaire, le vote par approbation et le *range voting* correspondent à des votes par profondeur liés aux profondeurs  $L^p$ . Ce formalisme devrait pouvoir également permettre de proposer de nouvelles procédures de vote en choisissant une fonction de profondeur adaptée à la situation considérée.

Les procédures de vote par profondeur vérifient des propriétés usuellement demandées, à savoir la neutralité, l'universalité et l'unanimité. La monotonie des processus de vote est établie pour plusieurs fonctions, telles que les profondeurs  $L^p$ , mais certaines fonctions de profondeur usuelles, telles que la fonction *halfspace*, par ou la profondeur d'Oja, ne satisfont pas la monotonie. La non-vérification de cette propriété semble un inconvénient majeur pour ces processus de vote. Nous établissons finalement que l'indépendance aux alternatives non pertinentes est liée à une caractérisation composante par composante des points de profondeur maximale. Nous renvoyons à [6] pour une étude plus approfondie de ces propriétés.

## Bibliographie

- [1] Michel Balinski and Rida Laraki. A theory of measuring, electing, and ranking. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 104(21):8720–8725, 2007.
- [2] Steven Brams and Peter C. Fishburn. *Approval voting*. Springer, 2007.
- [3] Warren D. Smith. Range voting. <http://rangevoting.org/RangeVoting.html>, 2000. Accessed: 2014-10-12.

- [4] Yijun Zuo and Robert Serfling. General notions of statistical depth function. *Annals of statistics*, pages 461–482, 2000.
- [5] Karl Mosler. Depth statistics. In *Robustness and complex data structures*, pages 17–34. Springer, 2013.
- [6] Jean-Baptiste Aubin, Irène Gannaz, Samuela Leoni, and Antoine Rolland. Deepest voting: A new way of electing. *Mathematical Social Sciences*, 116:1–16, 2022.